1 . . Regio Monte, Ioannis = De triangulis omni modis. Accesserunt, tractatu de quadratura circuli a Nicolai Cusani = Norimbergae = Petrei = 1533

2 . . Finaeus Orontius = De quadratura circuli, de Circuli mensura, de multangularum de invenienda longitudinis locorum differentia & et Planispherium geographicum = Lut. Parisiorum - 1544

4 . . Averrois = Libellus de Substantia orbis, studio Ioan B. Confalonierus.

Confalonierus Ioan B = Opuscula de Materia prima, de forma Coeli, de Voluntate e libero arbitrio, de providentia et de mundi efficientia = Veneti = 1525.

~~1 . . Regio Monte. Ioan = De quadratura circuli~~

5 . . Fernelii, Ambiani Ioan = De abditis rerum causis = Parisiis = Wechelus = 1548

lbr 1278446
1278517
1279047
1279069

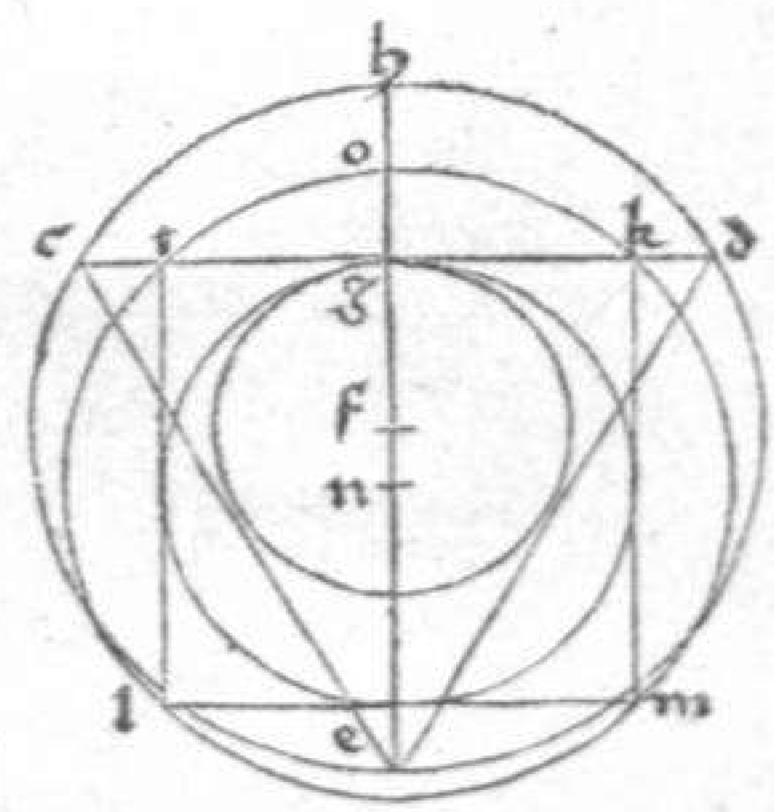
1

DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-maticarum disciplinarum eximij professoris

IOANNIS DE RE-GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI-MODIS LIBRI QVINQVE:

Quibus explicantur res necessariæ cognitu, uolentibus ad scientiarum Astronomicarum perfectionem deueni-re: quæ cum nusquã alibi hoc tempore expositæ habeantur, frustra sine harum instructione ad illam quisquam aspirarit.

Accesserunt huc in calce pleraq; D. Nicolai Cusani de Quadratura circuli, Deq; recti ac curui commensuratione: itemq; Io. de monte Regio eadem de re ἐλεγκτι-κὰ, hactenus à nemine publicata.



Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia singulari. Norimbergæ in ædibus Io. Petrei.

ANNO CHRISTI

M. D. XXXIII.

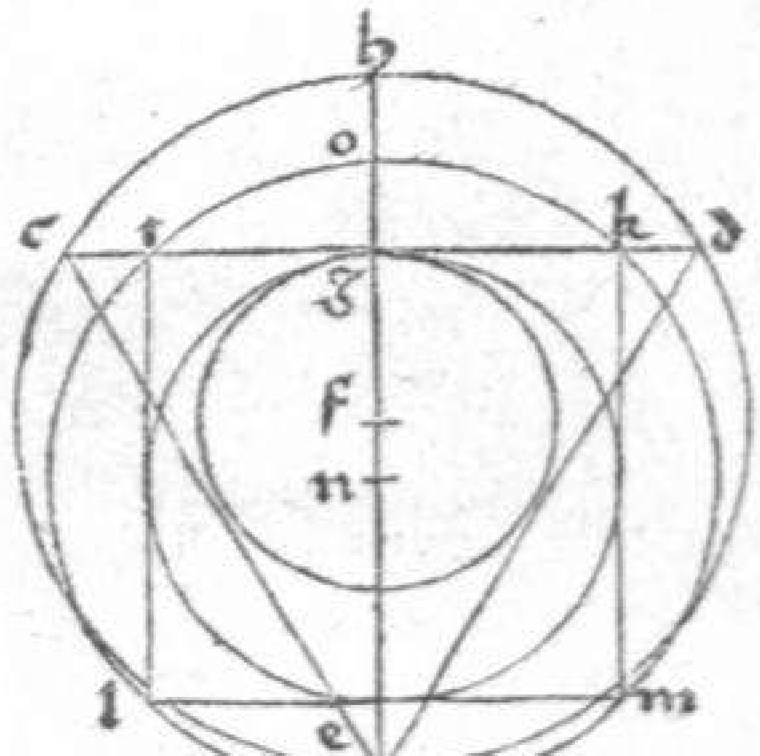
Chaues.

1

DOCTISSIMI VIRI ET MATHEmaticarum disciplinarum eximij professoris IOANNIS DE REGIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNIMODIS LIBRI QVINQVE:

Quibus explicantur res necessariæ cognitu, uolentibus ad scientiarum Astronomicarum perfectionem deuenire: quæ cum nusquā alibi hoc tempore expositæ habeantur, frustra sine harum instructione ad illam quisquam aspirarit.

Accesserunt huc in calce pleraque D. Nicolai Cusani de Quadratura circuli, Deque recti ac curui commensuratione: itemque Io. de monte Regio eadem de re ἐλεγκτικά, hactenus à nemine publicata.



Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia singulari. Norimbergæ in ædibus Io. Petrei.

ANNO CHRISTI

M. D. XXXIII.

Chaues.

IOANNES SCHONERVS CAROLOSTADIVS AMPLISS. SENAtorum Ordini ciuitatis Noricæ Dominis prudentiss. S. P. D.

VTINAM prudentissimi Domini, ita Deo uisum fuisset, ut qua occasione nunc ego sum usus ad celebrandam rempubl. uestrã, dum uobis optimis scriptis doctissimi hominis Iohannis de Regio monte dedicandũ putaui, ea autor ipse in uestra florentiss. urbe excudendo cum hoc tum alia plurima ad illius immortalem gloriam uti potuisset: Nimirum ut absolutius hoc opus in lucem exiret, ita maiorem famã excitaret ciuitatis uestræ. Sed quia hanc non solum in ista parte nobis felicitatem, sed innumerabilibus alijs, sua illa morte abstulit, faciendum scilicet quod conceditur, quando id quod uolumus non licet: Hoc est conandum ut quantumcunq; quidem & qualecunq; illius uiri in manus nostras peruenerit, communicetur studiosorum utilitati. Nihil est illorũ enim quamuis imperfectum atq; inornatum aut etiam disiectum, quod non maximi pendi debere uideatur. Optandum certe, ut quia Regiomontanum ab officina, unde tot egregia opera emitterentur, quot indice præmisso indicauerat, in Italiam retraxerat uocatio, honestiss. ea quidem, sed cui obsecutus reuerteretur nunquam, ab eo relicta saltem monumenta cum ipsius tum aliorum ueterum potissimum laborum, conseruarentur: Sed hæc ipsa quædam ita uastauit calamitas, ut ex tanta tamq; splendida copia, qualem indices ostendunt, perpauculæ reliquiæ ad nos peruenerint, Quarum ipsarum non absq; præcipua utilitate sua & habent à nobis nonnihil studiosi, &, si Deus successum aspirarit conatibus meis, habituri sunt. Hunc autem librum, cui de Triangulis omnimodis ipse autor titulũ indidit, clarissimus ordinis uestri uir Bilibaldus Pircamerus, illo tempore, quo tam speciosa suppellex Regiomontani parum diligenter conseruabatur, cum, ut sæpe dicere audiuimus, magna pecunia comparasset, non tam sibi quàm studiosis disciplinarum Mathematicarum: Hunc igitur ipsum librum, uisum Deo fuisset, ut ab eo, quem dixi clariss. uiro Bilibaldo Pircamero in lucem æderetur: quem ut uirtute & sapientia, ita literis quoq; & doctrina fuisse instructissimum scimus, de quo in præsentia neq; res fert, ut multum uerborum faciamus, neq; ipsius uirtutis ac eruditionis magnitudo paucis potest esse contenta, quem in uita, ut dilexerant, ueneratiq; fuerant docti omnes, sic nunc ea defunctum deplorant atq; lugent. Magnum hoc illi tribuentes ac certiss. testimonium iudicij sui, cui in epistolæ breuitate quis etiam præstans eloquentia nedum infacundus ego satisfacturum se speret? Redeo igitur ad propositum. Ergo etiam hanc comoditatem præcidit siue Deus siue fortuna, satius esse iudicauimus, etsi minus pulcram, optimã tamẽ per se mercem contingere studiosis expositione nostra, q̃ ut retenta omnino ea carerent. Et est primus sanè liber ad eum modũ ab autore percultus, ut neq; ipso edente melius habiturus fuerit. Reliquis extrema manus & limæ labor non accessit, nã numeros præcedentium propositionum, quibus sequentia probabat, leui sanè uel nulla potius legentium iactura festinabundus passim ascribere neglexit, in quibus neq; nos uoluimus ingenium industriamq; nostram ostentare, quamuis id facile fuerit, & hoc quisq; sibijpse p̃stare possit, sed fide maxima curauimus de archetypo in aliquot exempla trãscribi, quæ patrocinio uestro Domini Prudentiss. uisum est tuta defensaq; publicare. Non parua in spe gauisuros uos tam honestã uobis clientelam obtigisse, qui omnes bonas res cupiditate ac promptitudine in rep. uestra, quæ quidem eatenus abfuerint, instituere, constitutas autem diligentia & cura singulari conseruare soleatis. Neq; parum hac uos confido credituros ornatum iri editione Regiomontani sub nomine uestro scriptorum, quandoquidē illi uiuo V. ciuitati famam, quam destinarat, negatum fuit parere. Cum enim hāc mors ipsius excluserit, una hæc ratio fuerit & instaurandæ illius & conciliandæ alterius generalis cuiusdā benignitatis nimirū & fauoris erga bonas artes uestræ. Qua his turbulentiss. temporibus inter has stulticias hominum complecti nos uideamus penè desertas illas ab omnib. mortalib. Qua de caussa quantas laudum quam'q; præclaras materias deducere possem quis non intelligit? Quid enim præconio literarum q̄ harum protectio dignius? Aut quo in argumento libentius illæ uires suas q̄ celebratione cultorum ac defensorum suorum exerciturae uideantur, sed mihi in suscipiendo hoc onere considerandum scilicet, non solum quid cupiam, sed etiam ac multo magis quid ualeam. Ne si parū dextre quod uereor hanc rem administrauerim, & illæ iure de malo interprete, & V. Pr. detritore splēdoris sui cōqueri possint. Relinquam igitur hanc alijs prouinciam, qui gerant gnauiter, cuiusmodi ut scio fuisse, ita futuros multos arbitror. Hoc modo uos orabo, ne qua re patiamini opt. & sanctiss. hoc uobis propositum extorqueri, quo retento immortalem profecto gloriam consequemini, qua & ipsi frui & quam posteris uestris relinquere possitis. Qualia hæc sint tempora uidetis, planè enim ut renascentes artes nemo magnopere respexit, illæ'q; suum tacitæ caput protulere, ita neglectas stertentib. hominib. interituras esse metuendum. Deus, solus enim Deus, conseruare poterit, hanc immittendo Principib. & Ciuitatib. mentē, ut rigare arentes & caducas fulcire cupiant. Quod ut hactenus à uobis strenue factū cernimus, ita uos oro obtestor'q; per hoc nomine quæsitā celebritatem, ne intermittere uelitis. Ad me & hunc laborem meum quod attinet, satis fuerit mihi comprehendi me à uestra benignitate in uulgari numero literatorum, quos etiam cū uos omnes tueri fouere'q; constet, nō timeo ne uobis ego excidam, nêue post hanc etiam quasi indicationē nostri à uobis negligar. Valete Domini prudentiss. ex urbe uestra Norica pridie Iduum Sextil, anno salutiferi partus M. D. XXXIII.

LECTORIBVS.

Etſi uidebamur quibuſdam de indicijs coniecturam certam feciſſe, cui autor epiſtolam dedicationis conſcripſiſſet, autoritate & doctrina præſtantiſſimo, ut ipſe ait, uiro, tamen quia in archetypo, quod manu ipſius deſcriptum eſſet, nominatim erat nullius præfixa mentio, maluimus relinquere huius etiam rei uobis arbitriū quàm noſtrum iudicium interponere. Gratiorem rati uobis diligentiam fidelitatemq́; noſtram, quàm in alieno libro ingenium & ſapientiam futuram. Valete.

QVAMVIS hoſce triangulorum libellos poſt epitoma cō ſcripſerim, præpoſtero fretus ordine, poſterius quidē opus texendo introductorium, q̄ꝫ artem ipſam tradiderim: nemini tamen triangulos noſtros prætereunti aſtrorm diſciplina ſatis agnoſcetur. Quod ſi quiſpiam inique factū inſimulet, is niſi me animus fallit, iure quieſcet, ubi maiorum parere monitis & æquum & bonum arbitrabitur. Sanè moribundo præceptori morem geſtum oportuit, qui abſolutis nuperrime ſex luminariū libris, ſuperſtites ſeptē Ioanni ſuo reliquit, imò mandauit q̄ꝫ citiſſimum expediendos. Tantum nempe apud eū ualuit Beſſarionis imperium, ut quod incolumis adhuc principi ſpoponderat digniſſimo, iuxta iam moriturus explere curaret. Igitur iuſſa præceptoris capeſſenti mihi, plurimus triangulorū & planorum & ſphæralium incidit uſus: quæ res iam pridem Georgio quoqꝫ in primis ſex libris crebro occurrens, animum induxit triangulorum artem conſcribere. Verum ut epitomati finem, ita triangulis dare initium Deus ipſe uetuit, quo nunc aſpirante, orbitam uiri doctiſſimi quoad potero ſectabor: eo quidem libentius, quo doctrinā hanc pleriſqꝫ placituram amicis arbitror, quorum quidem inſeruire cōmodis bonam felicitatis meæ partem exiſtimo: eos autem, ut uirtus ipſa monet, gratis amplexibus munus illud ſuſceptum ire non dubito, ſiquidē ad alia demū altiora calcar addere pergūt. Si præterea magnis & ſcitu iucūdiſſimis rebus ſtudere uelis, quiſquis ſiderū motus admiraris, hæc triangulorum theoremata in primis legenda ſunt: quippe quorū diſciplina omnibus Aſtronomicis, nonnulliſqꝫ Geometricis quæſitis ianuam pandit. Quemadmodum enim cæteras figuras inuicem tranſmutandas ad triangulum uſqꝫ reſolui oportet, ita reliquæ Aſtronomorū quæſtiones hiſce noſtris egebunt libellis. Reuera planetarum æquatiōes numerare, ipſaſqꝫ in tabulis collocare, ſed & eclipſibus luminariū ſatisfacere, quātæqꝫ reliqs quinqꝫ erraticis latitudines debeātur, noſſe uolenti prior cōſulendus uenit liber. Qui demū in qualibet regione & aſcenſiones & arcus diurnos, deinde angulos ſphærales eclipſi ſolari neceſſarios, mediationem cœli ac ortū obliquū ſtellis fixis euenire ſolitum: poſtremo omnia quæ per figuras ſectoris non ſine graui sudore passim exquiruntur, breuiter & ꝙ facillimũ assequi cupiet, ex posteriore libello comparabit auxilium. Quid memorē ĩ stellarũ à terra uarias mensuratuq; incredibiles remotiones atq; corpulentias, orbiumq; suorũ spissitudines? quos limites corporibus densis resoluti uapores transilire non ausint: grossicies insuper Cometæ quandolibet apparentis, eiusq; à terra elongatio, nunquid nõ subtile uolet scrutinium? His & mille alijs eiuscemodi rebus hæc triangulorũ præcepta iter monstrabunt accuratissimũ, si prius obseruationibus motuũ atq; alijs primordijs parumper exercearis. Quod si in tanta rerũ sciendarũ copia, pleraq; dictu ambigua, aut factu forsitã ardua, lectoris noui deterreant animũ, haud extemplo desperandum, digna etenim talibus medela obiectabit, ubi theoremate q̊libet transcurso, ad numeros descenderis exemplares. Ad hæc demũ accedit tabulæ sinuũ non minus utilis ꝙ noua compilatio, quæ absq; fastidio numerorum frangendorũ aut fractorum ad integros prolixa reductione per sinũ arcus suos ex arcuq; sinũ offeret, præter cæteras eius generis tabulas id quidẽ facilitatis habens, ꝙ per singula minuta expanditur: quantũq; uni secũdo in quolibet tabulæ respondeat loco, discernitur: id autem certitudinis ꝙ sinus totus in ea sex milia miliũ particularũ constituit. Interdũ uero primos duos quorumlibet numerorum characteres negligere nõ dabitur uicio, si exactissimam operis præcisionẽ parui faciemus, quẽadmodum canonibus suis cautum est. Quo tandem fieri oportet, ut quæ cæteri longis scrutantur ambagibus, breui admodum nobis & iucunda inuestigatione consequi liceat. Hoc igitur ô pater optime, clientuli tui munus aspernari nolis, paucula ꝗuis membrana contextũ, plurimis tamen atq; excelsis rebus solenne fundamentũ: Radicẽ scalæ ad sidera ducentis haud iniuria dixerim: ubi quidem immodesti aliquid si forte offenderis, iure tuo resecabitur licet: si uero quicq; egregij autoritas tua summaq; huiuscemodi studiorũ peritia confirmandũ duxerit, tuo nomini consecratũ esto, qui quemadmodum durã hac tempestate Christianæ salutis accepisti prouinciã, ita murmura sua Philosophi moderni te imperatore missa facient. iamdudũ enim quasi cœlis errantibus, sideribusq; orbitas suas oblitis perculsi, spectatissimũ Philosophiæ genus socordia præteriere. Perge igitur ut cœpisti feliciter, ô mundi decus, terrenam prius compescere turbam, dehinc suo cœlestia lumina reducas itineri: ne ut antehac cultores deludãt suos, quo tandẽ immortali posteris gloria nimirũ celebraberis. Vale.

De tri=

DE TRIANGVLIS LIBER PRIMVS.

DIFFINITIONES.

COgnita uocabitur quantitas, quam mensura famosa, aut pro libito sumpta secundum numerum metitur notum. Quantitas mensurare dicetur aliã quantitatem, quæ in alia continetur secundũ numerum notum, aut quæ in alia quantitate quoties unitas in numero noto reperitur. Numerus autem notus habebitur, dũ inter eius unitates discretionem ponit intellectus. Proportionem datam appellabimus, quando aut denominatio sua data est, aut ipsa uel sibi æqualis proportio terminos habet cognitos. Proportiones æquales sunt, quibus una communis est denominatio. Quantitatum altera ad alterã data dicitur, dum mensura per quam altera earum nota est, & reliquam notam efficit. Quantitates quotlibet inter se datas appellabo, quas una communis mensura notas reddit. Differentia quantitatum inæqualium uocatur portio maioris, qua minorem superat. Costa quadrati est linea recta, ex cuius in se ductione quadratum ipsum nascitur. Secundum quantitatem lineæ circulus quilibet describitur, dum semidiameter eius ipsi lineæ æqualis statuitur. Arcus est pars circumferentiæ circuli. Linea uero recta sibi conterminalis corda sua uocari solet. Arcu & corda sua dimidiatis medietatem cordæ dimidij arcus sinum rectum nuncupabimus. Complementum arcus cuiuslibet dicitur, quæ sibi & quadranti interest differentia. Complementum autem anguli differentia ipsius ad angulum rectum diffinitur. Si quamlibet terminalem trianguli lineam basim intellexeris, duas reliquas usitato nomine latera uocari licebit. In triangulo tamen æquicrurio latera dicimus duas æquales lineas, & tertiam reliquam basim. Sed & in omni triangulo linea quæ perpendicularẽ sustentat, basis uulgo geometrarum nuncupari solet. Triangulus æquilaterus dicitur, quem tres æquales claudunt lineæ. Aequicrurius, cuius duntaxat duæ æquales sunt lineæ terminales. Varius aũt triangulus, qui tres inæquales habet lineas. Casus perpendicularis uocatur portio basis, perpendiculari & alterutro laterum intercepta. Multiplicatio numeri per numerum est cuiusdam numeri, in quo multiplicatus continetur, quoties unitas in multiplicante procreatio. Diuisio autem numeri per numerum fit, quando numerus elicitur, in quo unitas quoties diuisor in ipso diuiso reperitur.

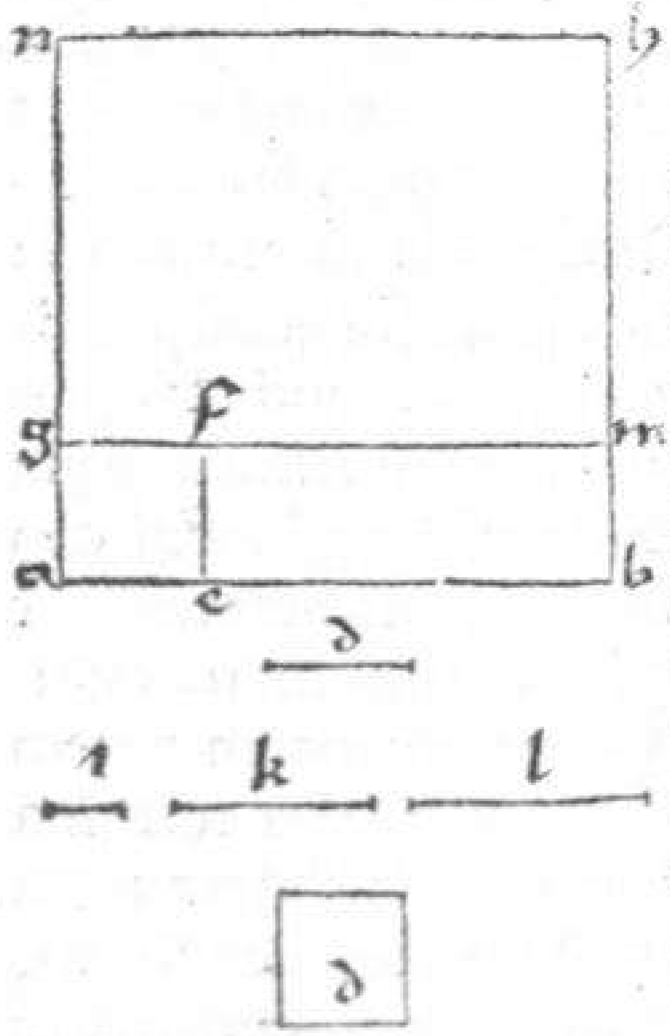
Commu

Communes animi conceptiones.

AEquales quantitates æqualiter mensurare. In duabus quoq; autquotlibet æquis quantitatibus mensuram eandem æqualiter contineri. Vnitatis ad quemlibet numerum, & econtra, datam esse proportionem. Omnis numeri partem esse unitatem ab ipso denominatam. Si à duabus quantitatibus inæqualibus æqualia aut idem commune abstuleris, relictis inter se atq; totis eandem haberi differentiam. Et si ex æqualibus quantitatibus inæquales portiones secueris, relictas & desectas alternatim æquales sortiri excessus. Omnem proportionem datam in numeris reperiri.

THEOREMA I.

Omnis datæ lineæ quadratum erit cognitum.



Ex data linea a b quadratũ describatur a h, quod dico cognitũ iri. Mensura eñ, p quã ipsa a b nota habet sit linea d, cui ex duabus costis quadrati a h, q̃ sint a b & a n, abscindantur duæ æquales lineæ a e & a g, producaturq; g m quidem æquedistans lineæ a b & e f æquedistans ipsi a n, erit itaq; superficies a f quadrata per 29. & 34. primi elementorũ Euclidis. cũq; a b sit nota per mensurã linealẽ d aut a e sibi æqualẽ, sit k numerus secundũ quẽ d mẽsura uel a e mẽsurat lineã a b. & l numerus alius ad quem se habeat k, sicut unitas ad ipsum numerum, eritq; numerus l quadratus per octauam noni, cuius radix quadrata per uigesimam septimi numerus k declarabitur. Quoniam uero a b nota ponitur per mensuram d, aut a e sibi æqualem secundũ numerum k, erit a e in a b quoties unitas in k numero per diffinitionem, quare proportio a e ad a b est, sicut unitatis ad k numerũ Vt autem a e ad a b, ita per primam sexti quadratum a f ad paralellogramũ a m. quadrati ergo a f ad paralellogramum a m, & unitatis ad k numerum eadẽ est proportio. item per 34. primi b m æqualis est a g, quæ æquatur utriq; linearum a e & d. Proportio igitur b m ad b h costam quadrati a h est ut a e ad a b, uel a f ad a m, per primam autem sexti b m ad b h est ut paralellogramum a m ad quadratũ a h. quare paralellogramũ a m ad quadratũ a h, pportionẽ habebit eam quam quadratum a f ad ipsum paralellogramum a m. Erat autem a f ad a m sicut unitatis ad k numerum: quare & a m ad a h erit ut unitatis ad k numerum, & ideo ut k numeri ad l numerum. Per æquam igitur proportionalitatem a f ad a h ut unitatis ad l numerum. Ex diffinitione itaq; a f quadratum æquale quadrato mensuræ famosæ d mensurabit quadratum a h lineæ a b secundum numerum l. & ideo notum habebitur quadratum a h, quod erat demonstrandum. ¶ Opus breuissimum. Numerus secundum quem nota est linea, in se multiplicetur, & productus erit numerus secundum quem quadratum eius notum habebitur. Vt si a e siue d mensura fuerit in a b secundum numerum 5. multiplicatis 5 in se, producuntur 25. quadratellum igitur a f in quadrato a h secundum numerum 25. reperitur, & similiter in reliquis.

Quadra

II.

Quadrati noti costa non ignorabitur.

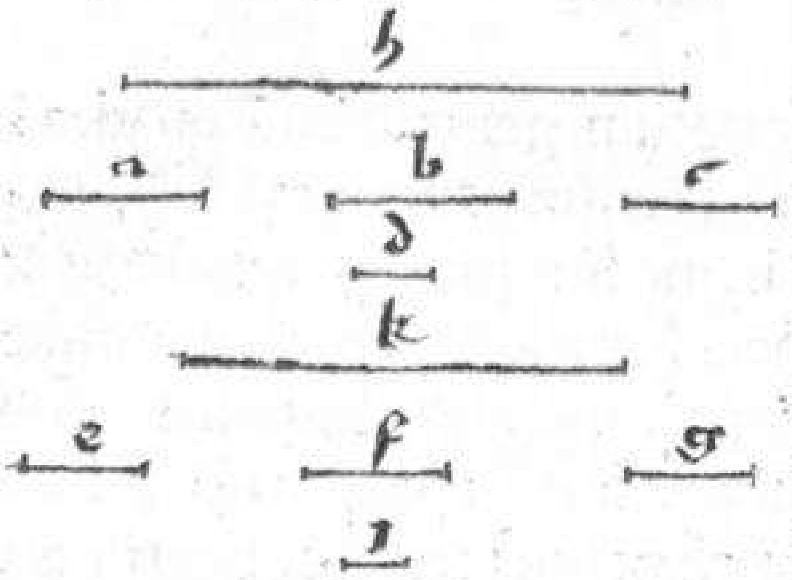
In figuratione superiori quadratũ a h statuatur notum per mensurã quadratam d, dico ꝙ costa eius a b nota ueniet. Inter unitatẽ enim & numerũ l, secundum quem mensura quadrata d est in quadrato a h, medius proportionalis sit k numerus, quem constat esse radicem quadratã numeri l, processus autẽ præmissæ docuit parallelogrammũ a m esse mediũ proportionale inter quadratũ inter duo quadrata: a f quidem mensurans, & a h mensuratum. Cũq; sit proportio a f ad a h, sicut unitatis ad l numerum, id enim ex hypothesi pendet: erit proportio a f quadrati ad a m parallelogrammũ, tanꝗ unitatis ad k numerũ, quoniam utraq; harum ꝓportionum medietas est suæ totius, sed quadrati a f ad parallelogrammum a m proportio est, ut lineæ a e ad lineam a b per primã sexti, quare proportio a e, & ideo lineæ d ad a b, sicut unitatis ad k numerum. Vnitas igitur in k numero quoties d linealis mensura in costa a b reperitur, unitas autẽ in k est secundũ ipsummet k numerũ. Omnis eñi numeri pars est unitas ab ipso denominata, quare & mensura linealis d continebitur in costa a b secundum numerum k. ex diffinitione igitur costam a b notam effecimus, quod expectabatur ostendendum. Tenent autẽ hæc omnia, dum l numerus secundũ quem mẽsuramus quadratum ꝓpositum, quadratus occurret. tunc enim reperibilis est medius proportionalis inter eum & unitatem: ꝙ si numerus l non quadratus fuerit, nullus erit medius proportionalis inter eum & unitatem, neq; unꝗ costa quadrati nota habebitur, stando in terminis quemadmodũ diffiniti sunt. Cum autẽ sæpenumero accidat numeros secundũ quos quadrata nostra metimur esse non quadratos, ne prorsus ignoremus propinquũ ueritati (ut sunt scibilia humana) laxius posthac utemur uocabulo quantitatis notæ, ꝗ initio diffinierimus. Quantitatem igiť oẽm quæ aut nota præcise fuerit, aut notæ quãtitati fermè æqualis, uniuoce notam appellabimus. pulchrius eqdẽ arbitror scire propinquũ ueritati, ꝗ ueritatem ipsam penitus negligere: non modo enim contingere metam, uerumetiã propinque accedere uirtuti dabitur. Non libuit autẽ hoc pacto superius diffinire quantitatẽ notam per præcisum & ꝓpinquum, ne suspecta lectori diffinitio nostra redderetur, fluctuante uocabulo propinqui id agente: nam etsi præcisum pro uero ponere soleamus, ꝓpinquum tamen ueritati uix diffinitionem lectori satis facturam accipiet. Ad rem ipsam demum redeundo, quoties numerus occurret non quadratus, siue integer, siue fractus fuerit, accipiemus loco eius numerum quadratum ipsi ut libet ꝗ ꝓpinquissimum, siue integer, siue fractus fuerit, inter quem & unitatẽ medium ꝓportionalem eliciemus, & procedendo ut supra notam concludemus costam quadrati, quod mensuratur secundum numerum quadratum pro libito acceptum Quemadmodũ autem numerus non quadratus noster, numero quadrato assumpto propinquus est, ita & costa quadrati nostri costæ alterius quadrati præcise cognitæ propinqua, & ideo nota habebitur. ☞ Operatio facillima. Extrahe radicẽ numeri secundum quem mensuratur quadratum ꝓpositum: si quadratus fuerit numerus huiusmodi, aut radicem numeri quadrati sibi propinqui, si non quadratus occurret, ipsa enim radix elicita quadrati tui costam notificabit.

Quantitas nota laxius definitur, & magis usitate.

III.

Si quotlibet quantitates inter se datæ fuerint, aggregatũ ex eis notum habebitur.

Tres quantitates a b c, aut quotlibet inter se datæ sint, quarum aggregatum sit h, dico ꝙ ipsum h aggregatum fiet notum. Quoniam enim inter se datæ sunt

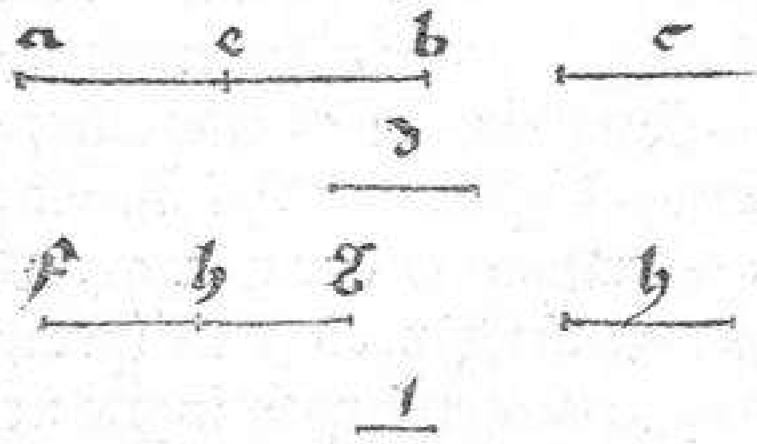


quantitates illæ, mẽsurabit eas communiter una quantitas quæ sit d, mensuret igiť quantitatem a quidem secundum numerum e, & b secundum numerum f: quantitatẽ autem c secundum numerum g, ex his tribus numeris coaceruatis resultet numerus k. Cum igitur sit d in a, quoties unitas in e numero per diffinitionem quantitatis notæ, erit ꝓportio a ad d mensuram, sicut e numerum ad unitatẽ, similiter erit ꝓportio b ad d tanq̃ numeri f ad unitatem, & c ad d ut g ad unitatem; quare per. 24. quinti bis assumptam proportio aggregati ex tribus quantitatibus a b c, quod est h ad d mensuram, erit ut aggregati ex tribus numeris e f g, qui est k ad unitatem, unitas ergo in k numero quoties d mensura in aggregato h continebunt. diffinitio itaq; quantitatis notæ concludet propositum.

IIII.

Duarum inæqualium inter se datarum quantitatum, differentiam cognitum iri.

Sint duæ quantitates inter se datæ, a b quidem maior, & c minor, quarũ differentia sit a e, quam prædico futuram notam. Communis enim mẽsura ambas



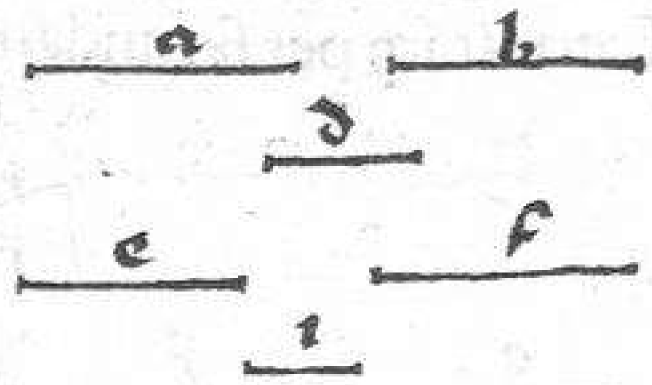
metiens datas quantitates sit d, quæ mẽsuret quãtitatem a b quidem secundum numerum f g, & quantitatem c secundum numerum h, erit itaq; proportio a b ad d sicut numeri f g ad unitatẽ, d autem ad b c sicut unitatis ad h, per æquã igiť a b ad c sicut f g ad h. Quemadmodum ergo a b maior est c quantitate, ita f g maior est h numero, separatoq; numero k g æquali ipsi h, ex f g differentia eorum habebitur f k, & erit diuisim proportio a e ad e b, siue ad c sicut f k ad k g siue ad h. Quantitas autem c ad d mensuram, ut h ad unitatem. per æquam igitur a e ad d sicut f k ad unitatem, & ideo d mensura in a e differentia, quoties unitas in f k numero continebitur; quare per diffinitionem a e differentia nota redditur, quod erat deducendum. ⁋ Operaberis autem hoc pacto. Duorum numerorum secundum quos mensurantur quantitates datæ, minorem ex maiore demas, relictus enim numerus cum mẽsura cõmuni notam efficiet differentiam inter se datarum quantitatũ. Qđ si huiusmodi duo numeri in unitate sola differant, differentia ipsarum quantitatum mensuræ communi reperietur æqualis, modus autem id demonstrandi à pristino non discrepabit.

V.

Omnes duæ inter se datæ quantitates proportionem habent eam, quam duo numeri secundum quos ipsæ mensurantur, unde manifestum proclamabimus, omnem proportionem datam in numeris reperiri.

Sint duæ quantitates a & b inter se datæ, quas ex diffinitione cõmunis quantitas

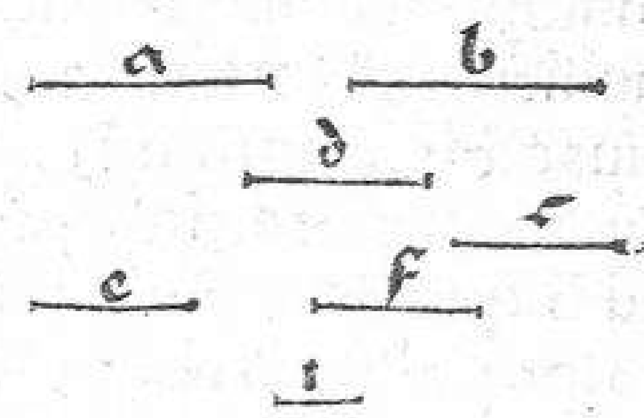
titas d mensuret a quidem secundum e numerū, b uero secundum f, dico ꝙ proportio a ad b est sicut proportio numeri e ad numerū f. quoniam enim d mensurat a secundum e numerū, erit per diffinitionem d in a quoties unitas in e numero, & ideo a ad d ꝓportio tanq̄ e ad unitatem. Item d in b quoties unitas in f numero reperitur, d mensurante b secundum f numerum, quare proportio d ad b sicut unitatis ad f numerum. per æquam igitur a quantitatis ad b quantitatem, tanq̄ numerū e ad numerum f erit ꝓportio, quod libuit concludere.



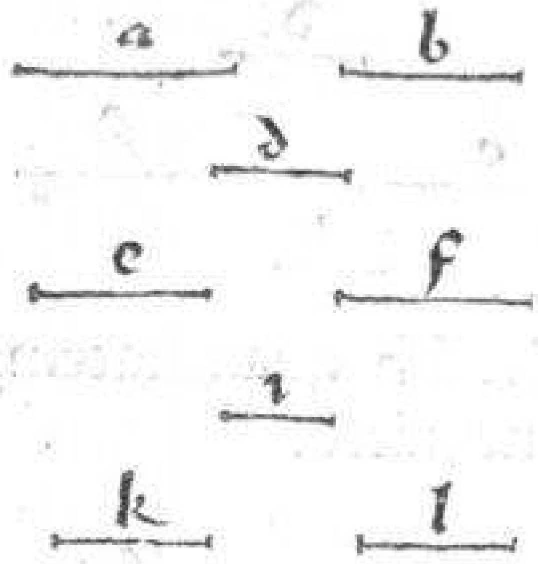
VI.

Proportio duarum quantitatum data, ex altera earum præscita, reliquā suscitabit cognitam.

Altera duarum quantitatum a & b notam ad inuicem proportionem habentium, sit cognita: dico, ꝙ & reliqua nota dabitur. Aut enim ꝓportio illa data est per denominationem, aut per sibi æqualem proportionem. Sit primo data per denominationem, ponaturq́ numerus c denominator huiusmodi proportionis, cumq́ altera duarum quantitatū nota subijciatur, sit antecedens a nota per mensuram d secundum numerū e, quo diuiso per numerum c denominatorē proportionis, exeat numerus f, erit itaq́ per diffinitionē diuisionis c in e, quoties unitas in f numero, & ideo ꝓportio c ad e sicut unitatis ad f, permutatimq́ c ad unitatem sicut e ad f. Proportionem aūt c ad unitatem denominat ipsemet numerus c. denominabit igitur & ꝓportionem e ad f. cumq́ denominet etiam proportionē a ad b, erit per diffinitionem æqualium proportionū a ad b sicut e ad f, & conuersim b ad a sicut f ad e, sed a ad d mensuram sicut e numerus ad unitatem. per æquam igitur b quantitas ad d mensuram sicut f ad unitatem: quare d mensura in b quantitate, quoties unitas in f numero continebitur, ex diffinitione ergo b quantitas reliqua nota redditur. Qđ si b consequentē attuleris datam, sit hoc ꝑ d mensuram secundum numerū f, qui multiplicatus per numerum c denominatorem proportionis, producat numerū e, secundū quem oportebit esse notā quantitatem antecedentē a, erit enim per diffinitionē multiplicationis f in e, quoties unitas in c: quare proportio e ad f sicut c ad unitatem. Proportionis autē c ad unitatem denominator est ipsemet numerus c. omnis enim numeri pars est unitas ab ipso denominata, quare per conuersionē diffinitionis c numerus denominabit proportionē e ad f, denominabat aūt & ꝓportionem a ad b, æquales igiť ex diffinitione sunt proportiones a ad b & e ad f, sed b consequentis ad d mensuram sicut numeri f ad unitatē, ꝙ b nota supponatur per d mensuram secundum numerū f, per æquam ergo fiet proportio a ad d mensuram sicut numeri e ad unitatem. a itaq́ continebit d mensuram, quoties e numerus unitatē, & ideo per diffinitionem notæ quantitatis concludemus propositum. ¶ Si autem data sit ꝓportio quātitatū per sibi æqualē, illa scilicet sibi æqualis terminos habebit cognitos, qui aut erunt numeri, aut ex præmissa proportionē habebunt adinuicem, sicut numeri, qui sint k & l, ita ꝙ a ad b ꝓportio sit tanq̄ k numeri antecedentis ad l numerum consequentem. Positaq́ primum quantitate antecedente a nota per mensuram d secundū numerum e, multiplicetur e per l, & productus



ſcilicet m numerus diuidatur per k numerum antecedentem, ut exeat numerus f., erit itaq; per ſecundam partem uigeſimæ ſeptimi proportio e ad f ſicut k ad



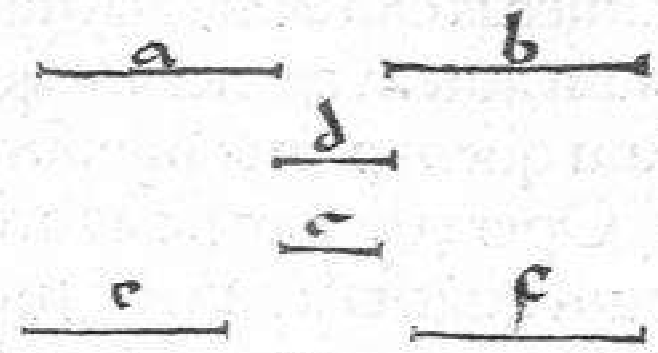
l, & conuerſim f ad e ſicut l ad k, & ideo ſicut b ad a, ſed e ad unitatem ſicut a ad d menſuram ex diffinitione notæ quantitatis, per æquam igitur f ad unitatem ſicut b quantitas ad d menſuram; quare b quantitas continebit d menſuram quoties f numerus unitatem. per diffinitionem ergo quantitatis notæ inferemus propoſitum. Si demum b quantitas conſequens ponatur nota, ſit hoc per menſuram d ſecundū numerum f, ductoq; f in k numerum, productoq; diuiſo per l, exeat numerus e, eritq; per ſecundam partem uigeſimæ quinti ut ſupra; proportio l ad k ſicut f ad e, & conuerſim k ad l ſicut e ad f. ſed erat k ad l ſicut a ad b: quare e ad f ſicut a ad b, f autem ad unitatem ſicut b ad d menſuram, quoniā d menſurat b ſecundū numerū f, per æquam igitur a ad d menſuram ſicut numerus e notus ad unitatem, erit itaq; d in a, quoties unitas in e numero noto, diffinitio ergo quantitatis notæ quod reliquū eſt cōcludet. ¶ Opus habeto bimembre. Si proportio data offeratur per denominationē, & antecedens quantitas fuerit nota, diuide numerum quantitatis antecedentis per numerū denominatorē ꝓportionis, & exibit numerus quantitatis conſequentis. Si aūt conſequentem habeas quantitatem notā, multiplica numerum eius per numerū denominatorē proportionis, & producetur numerus quantitatis antecedentis. In exemplo: Si fuerit a .24. proportio autem eius ad b quantitatē tripla, ecce denominatorē proportionis 3. per quem diuido 24. & exibunt 8. pro quantitate conſequente b. Si autem b ſit 8. ꝓportio uero a ad b quintupla, multiplicabo 8. per 5. denominatorē proportionis, & producentur 40. pro a quantitate. Qđ ſi proportio data fuerit per ſibi æqualem proportionē, & antecedens quantitas fuerit data, multiplicabis numerū quantitatis antecedentis per numerum conſequentē, & productum inde diuides per numerū antecedentem, exibit enim numerus ſecundum quē quantitas conſequens nota habebitur. Si uero quantitas conſequens data fuerit, numerū eius per numerū antecedentem multiplica, & productū per numerum conſequentē partiaris, qui enim exibit numerus, quantitatem antecedentē notificabit. Vt ſi a fuerit 8. & proportio eius ad b ſicut 4. ad 5. multiplicabo 8. per 5. producuntur 40. quæ diuidam per 4. exibunt 10. pro quantitate b. Sed ꝓportio a ad b ſit, ut 3 ad 7, ſitq; quantitas b 28. multiplicabo 28 per 3, producendo 84. quæ diuido per 7. exeunt 12. erit igitur a quātitas 12. Ita in cæteris.

VII.

Si fuerint duæ quantitates inter ſe datæ, quarum altera per menſuram nouam ſit cognita, & reliqua per eandem nouam menſuram nota ueniet.

Vt ſermo tam breuior q̄ lucidior appareat, ueterem diffiniuimus menſuram eam, per quā ambæ quantitates cōmuniter notæ ſunt, nouam uero, per quam altera earum tantum. Hæc autē à præmiſſa in hoc diſcrepat, q̄ illa alteram duntaxat quantitatū ſupponit datam, hæc uero ambas quantitates ſubijcit notas per unam menſuram cōmunem, & inſuper alteram earum per menſuram aliam. Sint igitur duæ quantitates a & b datæ per menſuram cōmunem d, quā dicemus ueterem, altera

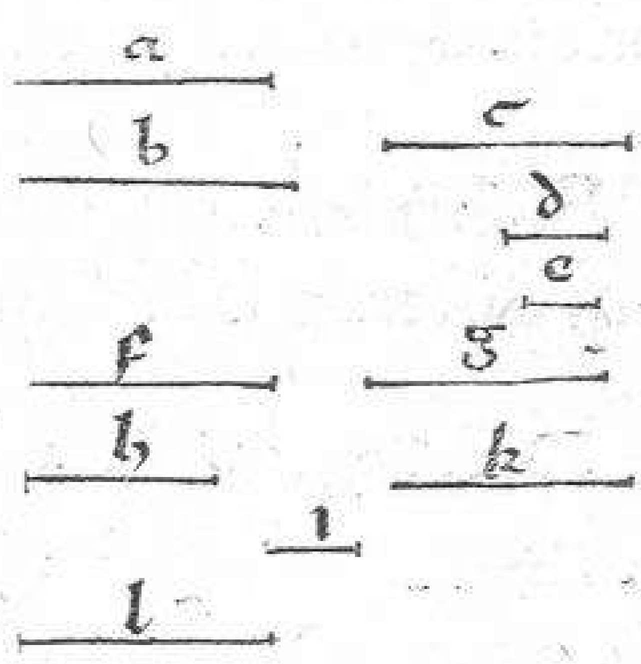
altera insuper earum (uerbi gratia) a data sit per mensuram nouam c: dico, ꝙ & b quantitas per eandem c mensurã nota prosiliet. Metiatur enim d mensura duas quantitates subiectas a & b secundũ numeros e & f, erit itaq; per quintã huius proportio duarum quantitatum a & b, tanq; duorum numerorũ notorum e & f, quæ cum sit nota, erit etiam proportio quantitatum a & b nota. Est autem a quantitas data per mẽsurã c, quare per præmissam & b quantitas per eanden notificabitur mensuram, quod uolebamus inferre. ⁊ Operatio huius habita proportione duarum quantitatum propositarum in terminis notis, ab opere præcedentis non dissonabit.



VIII.

Si utraq; duarum quantitatum ad tertiam data fuerit, ipsæ inter se datæ habebuntur.

Duarum quantitatũ a & b utraq; ad tertiam quantitatẽ c data intelligat: Dico, ꝙ ipsæ inter se reddentur notæ. Quoniã enim utraq; quantitatũ a & b ad quantitatẽ c data est, mensurabit eas cõmuniter una mensura, quæ sit d, similiter duæ quantitates b & c, mensuram habebunt unam cõmunem, quæ sit e. Si itaq; d & e mensuræ æquales fuerint, eas tanq; unam nõ iniuria reputabimus, sicq; duas quantitates a & b, quantitas una cõmunis metietur: unamquãq; secundũ numerum suum, per diffinitionẽ ergo inter se datæ comprobantur. Si uero duæ mẽsuræ d & e diuersas se obtulerint, duæ quantitates dictæ, etsi datæ habeantur seorsum, inter se tamen nondũ datæ sunt. Mensuret igitur d quantitates a & c secundum numeros f & g, mensura autẽ e duas quantitates b & c secundũ numeros h & k. Placeat itaq; duas quantitates a & b inter se notas efficere per mensuram d, quam pro libito primã e uero secundam nuncupabimus: similiter q̃q; a quantitatem primam uocare licebit, b autem secundam, ꝙ hanc cum c quantitate prima mensura, illam uero secunda metiatur, hoc enim pacto sermonis uitabitur cõfusio. Reperiatur itaq; numerus l, ad quem se habeat g numerus sicut k ad h, q̃d facile fiet, si ad uigesimam septimi recurres. Cunq; sit proportio h ad K, sicut quantitatis b secundæ ad quantitatem c tertiam, ex quinta huius, erit & l ad g tanq; b ad c, sed g numerus ad unitatẽ, sicut quantitas c ad mensuram d primam, cum c quantitas nota sit per mensuram d secundũ numerum g. Per æquam igitur l numerus ad unitatem, sicut b quantitas ad d mẽsuram: quare b continebit d mensuram quoties l numerus unitatem, & ideo per diffinitionem quantitatis notæ, b quantitas nota habetur per mensuram d, quã continet secundum numerum l. erat autem & quantitas a per eandem mensurã nota. ex diffinitione igitur inter se datarum quãtitatum constabit a & b inter se datas esse. Qd' si idem per mensurã e consequi libeat, sicut ipsam e mensurã primam, ita & b quãtitatem primã dicemus, ad numerum autem l se habeat k numerus, tanq; g ad f, reliqua ut antehac procedent. Vniuersaliter enim mensura, per quã duas quantitates ad tertiã datas inter se notas efficere conamur, prima uocabitur, reliqua uero secũda. Similem deniq; ordinem duabus quãtitatibus dictis



deputabimus eam notando primã, cui & quantitati tertiæ prima reſpondet menſura, reliquã uero ſecundã. Ad numerum autem reperiendum, qui uidelicet notificaturus eſt quãtitatem ſecundã ſe habeat numerus quãtitatis tertiæ primus, ſicut numerus eiuſdem quãtitatis tertiæ ſecundus ad numerum quãtitatis ſecundæ, primum autem numerum quãtitatis tertiæ duos habentis numeros, uoco eum ſecundum quem prima menſura in ipſo continetur numero, reliquũ autem ſecundum.

¶ Operationem ſic habebis. Numerum quãtitatis ſecundæ duc in numerum primum quãtitatis tertiæ, productum uero per numerũ ſecundum eiuſdem quãtitatis tertiæ partiaris, exibit enim numerus quãtitatis ſecundæ quæſitus, ſecundum quẽ uidelicet menſura prima in ipſa ſecunda quãtitate continetur, ut in exemplo. Sit quantitas a 5. cubitorum, dum c eſt 9. cubitorum, item b 7. pedum, dũ c eſt 26. erit itaq; d cubitus unus, & e pes unus. Volo ſcire quot cubitos habeat quantitas b, multiplico 7 per 9, producuntur 63, quæ diuido in 26, exeunt $2\frac{11}{26}$. Quantitas igitur b duos complectet̃ cubitos, & undecim uigeſimasſextas unius cubiti, ſicq; duas quãtitates a & b inter ſe notas reddidimus, utendo menſura d cubitali. Nõ aliter operabimur, ſi per menſurã e pedalem ipſas nouiſſe libeat quantitates. Cõſtat igit̃ ex hoc, ꝙ 7 pedes $2\frac{11}{26}$ cubitis æquipollent, diuiſoq; numero 7 pedum in numerum cubitorum ſibi æquipollentiũ, exibit numerus pedum correſpondentiũ uni cubito, qui numerus erit $2\frac{8}{9}$. hoc quoniã multis in locis utile eſt, prætereundi non erat conſilium. Poſſumus autem & breuius theorema præſens ſtabilire, ſi ad præmiſſam confugerimus. Libeat enim duas quantitates a & b inter ſe notas efficere per menſurã d, quoniã itaq; duæ quantitates b & c datæ ſunt per menſurã e ueterem, quarũ altera uidelicet c data eſt per menſurã nouã d, erit & b quantitas ex præmiſſa per eãdẽ nouã menſurã d cognita, ſed hypotheſis ſubiecit a quãtitatem notã per d menſurã. Duæ igitur quãtitates a & b, quas una communis menſura d metitur ſecundũ numeros notos, cognitæ per diffinitionem declarantur, quod pollicebamur oſtendendum.

IX.

Si duarum quantitatum utraq; ad tertiam data fuerit, ſummã earũ atq; differentiam, ſi inæquales fuerint, cognoſcemus.

Duarũ quantitatũ a & b utraq; ſit data ad c quantitatem: Dico, ꝙ ſumma ex eis conflata cognoſcetur, cum differentia earũ ſi inæquales fuerint. Si eñ inter ſe datæ fuerint, tertiã & quartam huius conſulemus. ſi uero non inter ſe, ſed ad tertiam duntaxat, quemadmodũ ſupponitur, datæ ſint, per præmiſſam reddemus eas inter ſe datas, quo facto, per tertiã & quartã præallegatas, quod reliquũ eſt abſoluemus.

¶ Operationem autem huius ab operationibus dictarum propoſitionum pendere nemo dubitabit.

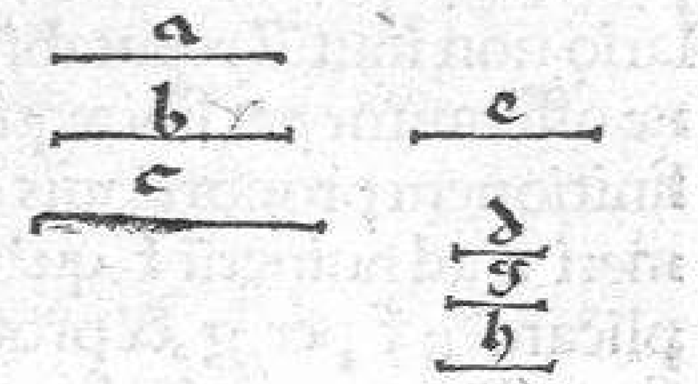
X.

Quotlibet quantitates ad aliam datæ, inter ſe non erunt ignotæ.

Tres quantitates a b c, aut quotlibet datæ ponantur ſingulatim ad quantitatem e: Dico, ꝙ ipſæ inter ſe notæ uenient. Quoniã enim a & e inter ſe datæ ſunt menſurabit eas communiter menſura una, quæ ſit d, ſimiliter b & e communem habebunt menſurã, quæ ſit d, ſed & duæ quantitates c & e per menſurã h notæ

intelli

intelligantur. Si igitur tres mensuræ d g h æquales fuerint tres quantitates propositas inter se datas, ex diffinitione conuincemus: si uero inæquales occurrant, non erunt dictæ quantitates inter se datæ. Volenti ergo tres quãtitates propositas inter se notas efficere, eligenda est una trium mensurarum, per quã id facere placet, sitq; d talis mensura, quam, ut circa octauã diffiniuimus, primã dicemus, quãtitatem quoq; a



primã trium quantitatũ statuemus. Cum itaq; duæ quãtitates a & b ad tertiã e quantitatem datæ sint, erunt ipsæ inter se notæ, quemadmodũ octaua huius docuit per mensurã d communem. Item duabus q̃titatibus a & c datis, existentibus ad quantitatem e tertiã, eas inter se notas, efficiet octaua huius per mensurã d cõmunem. Tres itaq; quantitates a b c, mensura una communis notas reddidit, quare per diffinitionem inter se notarum quantitatũ ueritas constabit propositionis. Non aliter procedendũ erit, si plures q̃ tres huiusmodi occurrent quantitates, neq; refert quãcunq; cõmunium elegeris. Ad summã igitur huius theorematis processus totus non est, nisi octauæ huius tenor repetitus. ¶ Opus q̃q; huius ab operatione illius octauæ, quoties oportuerit resumpta non differet.

XI.

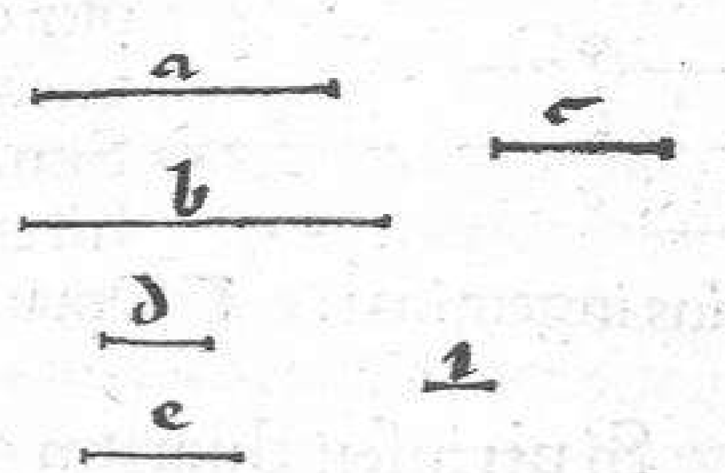
Aggregatum ex quotlibet quantitatibus ad aliam datis, cum differentia duarum quarumlibet si qua fuerit, nõ ignorabit Geometra.

Si enim quantitates illæ inter se notæ fuerint, tertiam & quartã huius repetemus, q; si non inter se, sed ad aliam tantũ, quemadmodũ supponitur, datæ extiterint, posteaq; ex præcedenti theoremate inter se notas reddiderimus eas, ad tertiã huius & quartã confugiemus. ¶ Opus autem, cũ & facile sit, & ab opere dictarum propositionum pendeat, prætereundum censeo.

XII.

Si utriusq; duarum quantitatum ad tertiam data fuerit proportio, earum inter se proportionem patefieri.

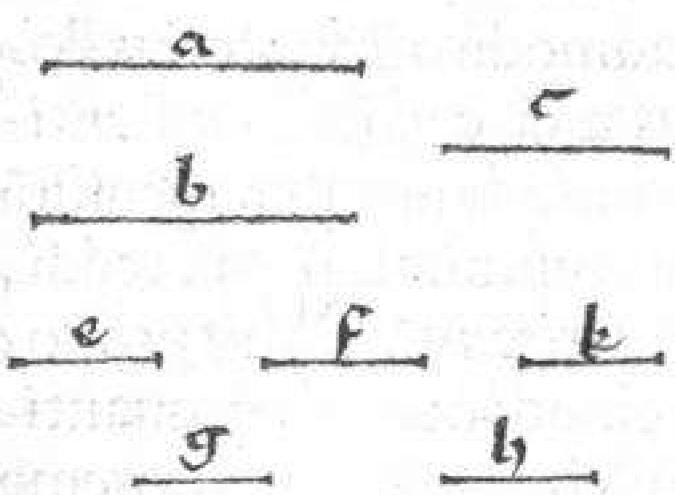
Sint duæ quantitates a & b, quarũ utraq; ad quantitatem c proportionem habeat cognitã: Dico, q; ꝑportio a ad b nota ueniet. Oportet enim notas esse ꝓportiones a & b q̃titatum ad c quantitatem, aut per denominationes, aut sibi æquales ꝓportiones. Sit hoc primo per denominationes. cum itaq; proportio a ad c nota sit, erit denominatio eius nota. sit ergo denominator huius proportiõis numerus d, similiter denominator proportionis b ad c notæ sit numerus e, erit autem proportio a ad c, sicut d ad unitatem, nam utriusq; harũ proportionũ denominator est ipse numerus d. denominat enim ꝓportionem a ad c quẽadmodũ posuimus, sed & proportionẽ sui ad unitatẽ per cõmunẽ animi conceptionẽ, omnis enim numeri pars est unitas ab ipso denominata. per eadem q̃q; media erit proportio b ad c tanq; e ad unitatẽ, & conuersim c ad b sicut unitas ad e, erat autem c



a ad c, ut d ad unitatem. per æquam igitur ꝓportio a ad b sicut d ad e, sed proportio d ad e nota est per diffinitionem: quare & ꝓportio a ad b nota redditur. Liquet itaq; ex dictis proportionem primæ quantitatis ad secundam æqualẽ esse

proportioni

proportioni denominatoris primi ad denominatorem secundum, quod pro corol lario non inutili reputabimus. Quòd si a & b quantitatũ ad c proportiones datæ offerantur per sibi æquales ꝓportiones, oportebit eas in numeris reperiri p diffinitionem proportionis datæ & quintã huius. Sit itaq; ꝓportio a ad c sicut numeri e ad numerũ f, quãtitatis uero b ad c sicut numeri g ad numerũ h, multiplicatoq; f per g, & producto diuiso per numerũ h, exeat numerus k, eritq; per secundã partem uigesimæ septimi ꝓportio h ad g, sicut f ad k. Cum igitur e numerus ad f se habeat, sicut a quãtitas ad c quantitatem, f autem ad k sicut h ad g, & ideo conuersim argumentando, sicut c quantitas ad b quãtitatem, erit per æquam proportio e numeri ad k numerum, sicut a quantitatis ad b quãtitatem, ꝓportio autem e numeri noti ad k numerum notũ data est. quare & proportio a quantitatis ad b quãtitatem cognita elicit, q̃d libuit explanare.

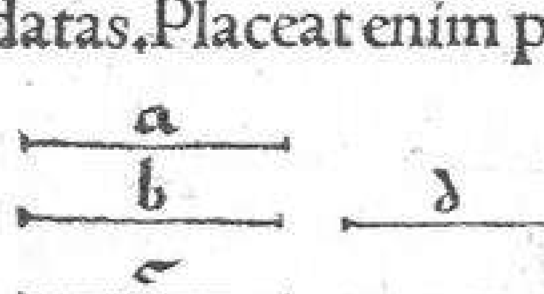


Opus primũ. Denominatorem primæ proportionis per denominatorem proportionis secundæ partiaris, exibit enim denominator ꝓportionis quã habẽt dicti denominatores, primus uidelicet ad secundũ, quæ etiam proportioni primæ quãtitatis ad secundã communis existit. Aut denominatores ipsos serua pro noticia proportionis, satis enim nouisti primæ quantitatis ad secundã, si eam in numeris notis repe risti. Vt si ꝓportio a ad b fuerit quintupla, b uero ad eandẽ c quãtitatem septupla: cum primæ proportionis denominator sit 5, secundæ uero 7, erit proportio a ad b sicut 5 ad 7. Opus aliud. Numerũ consequentem primæ proportionis duc in numerũ antecedentem secundæ proportionis, & productũ diuide per numerum consequentem secundæ proportionis, exibit enim numerus ad quẽ se habet numerus antecedens primæ proportionis, sicut prima quantitas ad secundã. Vt si a ad c fuerit proportio sicut 5 ad 7. b autem ad c sicut 3 ad 8. multiplicabo 7 per 3. producentur 21. quæ diuido per 8, exeunt $2\frac{5}{8}$. a igitur habebit se ad b sicut 5 ad $2\frac{5}{8}$.

XIII.

Si quotlibet quantitatũ ad aliam datæ fuerint proportiones, omnium duarum ex eis proportio manifestabitur.

Tres quantitates a b c, aut quotlibet plures ad quantitatem aliã d proportiones habeant cognitas. Dico, q quælibet duæ ipsarum proportiones sortientur datas. Placeat enim primum proportionem a ad b reddere notã. Cum itaq; utriusq; quãtitatum a & b ad quãtitatem d proportio sit nota, earum inter se proportio non ignorabitur ex præmissa Similiter de omnibus duabus reliquis prædicabimus. Nihil enim alieni præsens addit præmissæ, nisi q processum eius ingeminat.



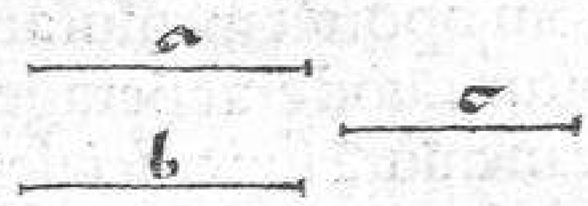
Opus q̃q; huius opus illius est, quoties oportuerit repetitũ.

XIIII.

Si utriusq; duarum quantitatum ad tertiam data fuerit proportio, fueritq; altera earum nota, reliqua quoq; notam se offeret.

Vtriusq; duarum quãtitatũ a & b ad quãtitatem c data sit proportio, sitq; a quantitas nota, Dico, q & b quãtitatem notam fieri oportet. Cũ enim utraq; earum

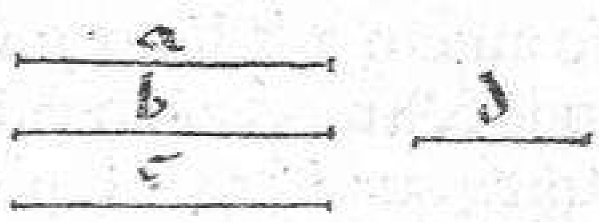
earum ad c datam habeat proportionem, proportio ipsarũ inter se per 12. huius nota ueniet. quare per sextam huius e quantitate nota existente, & b quãtitas nota emerget, quod expectabatur declarandum. ¶ Operatio aũt huius ex operibus duodecimæ & sextæ huius commiscetur. Nam postq̃ ex duodecima huius proportionem huiusmodi quantitatum reperies, per sextam tandem, quæ prius ignota erat, notam efficies quantitatem.



XV.

Si quotlibet quantitates ad aliam quandam proportiones habuerint datas, quarũ una quælibet sit nota, reliquæ omnes notæ prosiliẽt.

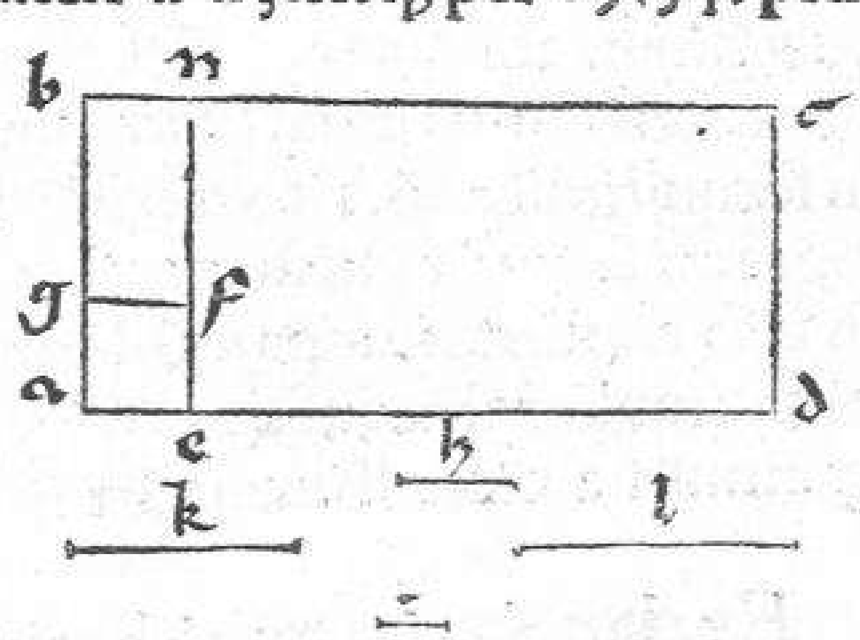
Sint tres aut quotlibet quantitates a b c, quarum unaquæq; ad c quantitatem proportionem habeat datam: sitq; una earum quæcunq; (uerbi gratia) a data. Dico, q̃ reliquæ omnes notæ occurrent. Erit enim per 13. huius proportio a quantitatis ad singulas alias data, quare per sextam huius a quantitate nota existente, singulæ reliquæ innotescent, quod erat concludendũ. ¶ Operationem ex tredecima & sexta huius facile comparabis.



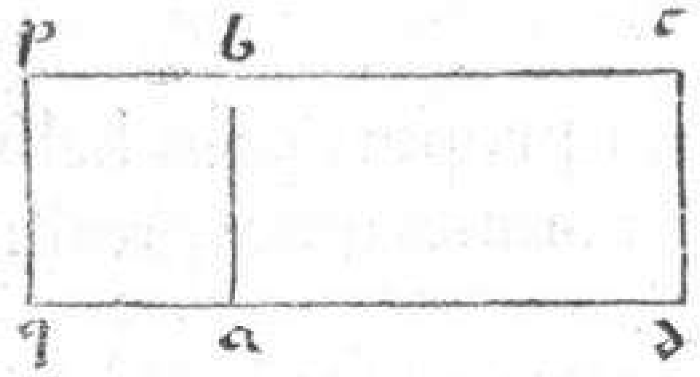
XVI.

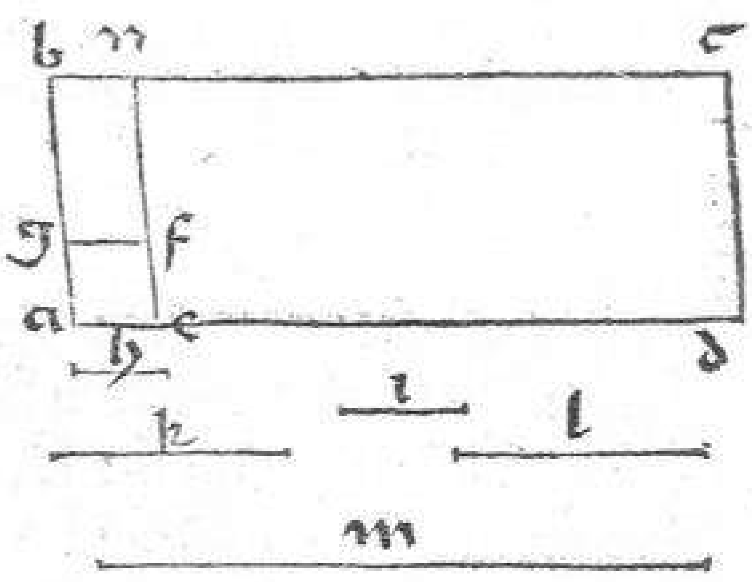
Quod sub duabus inter se datis rectis lineis continetur, parallelogramum rectangulum latere non poterit.

Sit parallelogrammũ rectangulum a b c d, duabus inter se datis contentum lineis a b & a d. Dico, q̃ ipsum prodibit cognitum. Quoniã enim duæ lineæ a b & a d inter se notæ sunt, mensurabit eas communiter una quantitas quæ sit h. mensuret itaq; lineam a b secundum numerum k, & lineam a d secundum numerũ l, & abscindant̃ ex duobus lateribus pallelogrami ꝑpositi: duæ lineæ a g & a e, quarum utraq; mensuræ communi h æqualis existat, productis lineis e n quidem æquedistante ipsi a b & g f, æquedistante lateri a d, eritq; per 29. 34. primi & diffinitionem quadrati superficies a f quadrata. cunq; h siue a g sibi æqualis mensuret latus a b secundum numerum k, erit a g in a b quoties unitas in k, & ideo proportio a g ad a b, sicut unitatis ad k numerum, quare ꝑ primã sexti proportio quadratelli a f ad parallegrammum a n, sicut unitatis ad k numerum. Vnitatis autem ad k numerum proportio data est per animi conceptionem, quare & ꝑportio quadratelli a f ad parallelogrammum a n nota perhibebitur. Item quoniã a e æqualis ipsi h mensurat latus a d secundum numerũ l, erit a e in a d, quoties unitas in l numero. quare proportio a d ad a e est ut numeri l ad unitatem. proportio autem a d ad a e per primã sexti est tanq̃ parallelogrãmi a c ad parallelogrammum a n. parallelogrãmum ergo a c ad parallelogrãmum a n sicut numerus ad unitatem. sed numerus l ad unitatem proportionem habet datam ex communi animi conceptione, unde & proportio a c ad a n scita ueniet. Iam igitur duarum quantitatum superficialium a f & a c, utraq; ad parallelogramũ a n proportionem habet datam, quare per 12. huius earum inter se constabit proportio.



& quoniam quantitas a f nota est: in omnibus nãq; mensurationibus notam supponi oportet mensuram, per sextam huius parallelogramũ a c notum e nunciabitur, quod erat peragendum. Constat autem hoc in ꝓposito quadratellum a f esse mensurã superficialem, ꝙ costam eius a e mensuræ lineali [illegible] æqualẽ initio statuerimus. ¶ Idem alio tramite consequemur. Prolongetur utraq; linearum c b & d a uersus sinistrã, donec duæ lineæ b p & a q sibi, & lineæ a b æquales ueni ent, continuatis'q; terminis earum p & q, per lineam p q claudetur quadratum q b per 29. 33. primi, & diffinitionem quadrati, cuius cum hypothesis notã dederit costam a b, ipsum quoq; ꝑ primã huius notum habebitur. est autẽ ex prima sexti ꝓportio quadrati q p ad parallelogramum a c, tanq; q a siue a b ad a d. proportio autem a b lineæ notæ per hypothesim ad a d notam per diffinitionem data, unde & proportio quadrati q b ad parallelogramũ a c data erit. per sextã igit huius (quadrato q b noto existente) ueritatem theorematis inferemus. ¶ Adhuc aliter & ad operationem aptius. Resumpta figuratione prima, numerus k in numerũ l ductus, efficiat numerũ l m. Cũ itaq;, ut supra memoratũ est, proportio quadratelli a f ad parallelogramũ a n est, sicut unitatis ad k numerum. a n autẽ ad a c sicut unitatis ad l numerum. superius enim erat a c ad a n tanq; numeri l ad unitatem, unitatis demũ ad l numerum sicut numeri k ad numerũ m. est enim k in m, quoties unitas in l ex diffinitione multiplicationis. per æquã igit ꝓportionalitatem erit a f quadratelli ad a c parallelogramum, sicut unitatis ad m numerum. quare a f in a c, quoties unitas in m numero reperitur. ꝑ diffinitionem itaq; notæ quantitatis parallelogramum a c notum effecimus, in eo enim mensura superficialis a f continetur secundum numerum notum, qui est m quod libuit absoluere. ¶ Opus autem docebimus unicum, tametsi demonstratione freti simus uaria. Duos numeros duorum laterum parallelogrami notorum in se multiplicabis, alterum uidelicet in alterum, ꝓducetur enim numerus parallelogrami secundũ quem mensura superficialis, quadratũ scilicet mensuræ linealis in ipso continebitur parallelogramo. Vt si latus a b 5, & latus a d 7, pedes cõplectatur lineales, ductis 5 in 7, creabuntur 35. tot igitur pedes quadrati parallelogramum a c constituent. Ita in cæteris operabere.

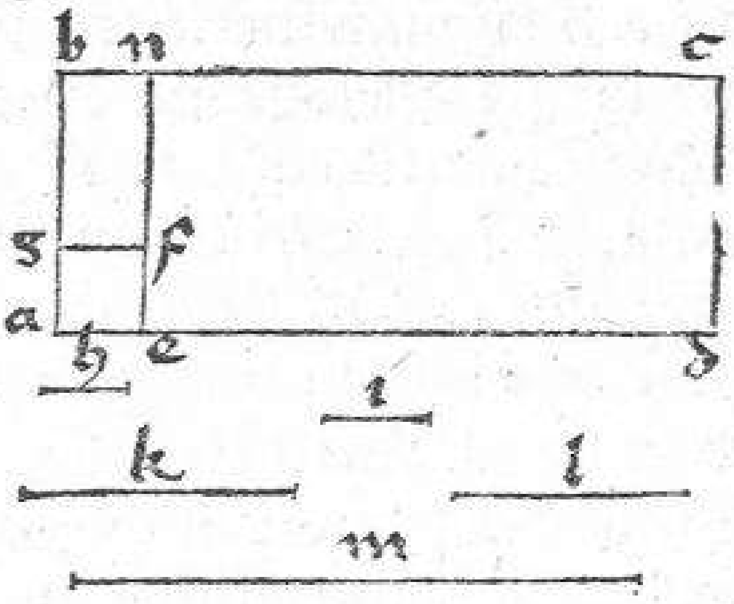




XVII.

Ex dato latere quolibet parallelogrami rectanguli cogniti, reliquũ latus emerget notum.

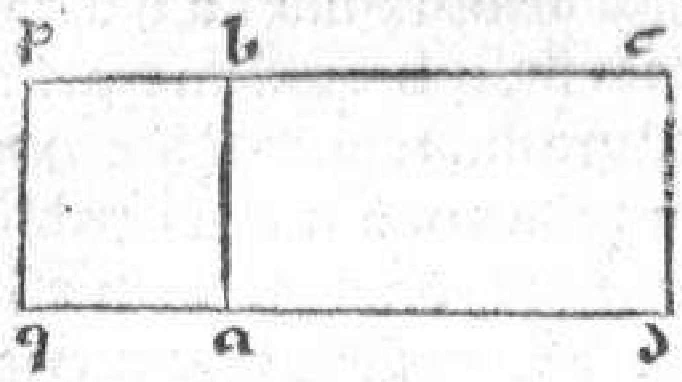
Sit parallelogramum rectangulũ a b c d cognitum, cuius etiam latus unũ quodcunq; fuerit notum habeatur, sit'q; (uerbi gratia) a b. Dico, ꝙ reliquũ latus eius a d scitum erit. Eductis namq; lineis d a & c b ad puncta q & p, donec utraq; linearũ a q & b p æquabitur lineæ a b datæ, compleatur quadratum q b protracta linea p q, erit itaq; per primã sexti ꝓportio q b quadrati ad a c parallelogramum sicut lineæ q a ad lineã a d, est a d.est autem proportio quadrati q b ad ipsum parallelogramum a c data per diffinitionem, q utraq; superficierum q b & a c data sit. q b quidem p primam huius, est enim quadratum lineæ a b datæ, parallelogramum autem a c notum subiecit hypothesis. Proportio igitur & lineæ q a ad lineam a d nota redditur, sed q a & a b sunt costæ quadrati q b æquales, unde & proportionem a b ad a d notam esse oportet. cumq; altera illarum, scilicet a b nota supponatur, erit per sextam huius reliqua linea scilicet a d nota, sicq; reliquum parallelogrami latus a d notum exegimus, quod libuit attingere. ¶ Idem aliter & ad operationem accomodatius. Quoniã latus a b notũ supponit, mensuret ipsum h famosa quantitas secundum numerum k, sitq; utraq; linearum a g & a e ex parallelogrami nostri lateribus absumptarum æqualis mensuræ h, & ducatur e n quidẽ æquedistans lateri a b, g f uero lateri a d æquedistans, eritq; superficies a f quadrata per 29. & 34. primi & diffinitionem quadrati, quæ quidem superficies mensurabit parallelogramũ a c secundum numerũ notum, qui sit m. quoniã parallelogramũ supponitur cognitum, hunc numerum in postremo per numerum k partiamur, ut exeat l numerus. Quia itaq; proportio a b ad h, siue ad a g est, ut numeri k ad unitatem, h mensurante lineam a b secundũ k numerum: erit per primã sexti parallelogrami a n ad quadratellum a f, sicut numeri k ad unitatem. quadratelli autem a f ad parallelogramũ a c, sicut unitatis ad numerum m, q parallelogramũ ipsum quadratello mensuretur secundum numerũ m. quare per æquam proportio parallelogrami a n ad parallelogramum a c est, ut numeri k ad numerum m. est autem a n ad a c, tanq; a e siue h sibi æqualis ad lineã a d per primã sexti. Vnde & h ad a d est ut k numeri ad numerum m, sed k ad m sicut unitatis ad l numerum per diffinitionem diuisionis, quare proportio h ad lineã a d est, sicut unitatis ad l numerum. mensura igitur h in linea a d, quoties unitas in numero l continetur, quare linea a d nota concluditur, quoniã mensura h famosa continetur in ea secundum numerum l notum. reliquum ergo parallelogrami latus effecimus cognitũ, quod intendebamus. ¶ Opus breue. Numerum parallelogrami noti in numerum lateris noti partiaris, & exibit numerus lateris reliqui quæsitus. Vt si parallelogramum a c offeratur 36. pedum superficialium, habens latus a b 4 pedum linealium, diuidã numerum 36 in numerum 4. & exibunt 9. Latus igitur reliquum a d, nouem pedes complectetur lineales.



XVIII.

Ex data proportione laterum parallelogrami rectanguli cogniti, utriusq; lateris pendebit noticia.

Sit parallelogramum rectangulum a b c d cognitum, cuius latera a b & a d proportionem habeant adinuicem notã. Dico, q utrunq; ipsorum notum habebitur. Resumpta enim prima figuratione præcedentis, erit per primã sexti proportio a c parallelogrami ad a p quadratum, sicut lineæ d a ad lineã a q. est autẽ proportio lineæ d a ad lineã a q data, q a q æqualis habeatur lineæ a b. quare & proportio parallelogrami a c ad quadratum a p nota redditur. cumq; notum subiecerimus parallelogramum a c, erit per sextã huius & quadratum a p

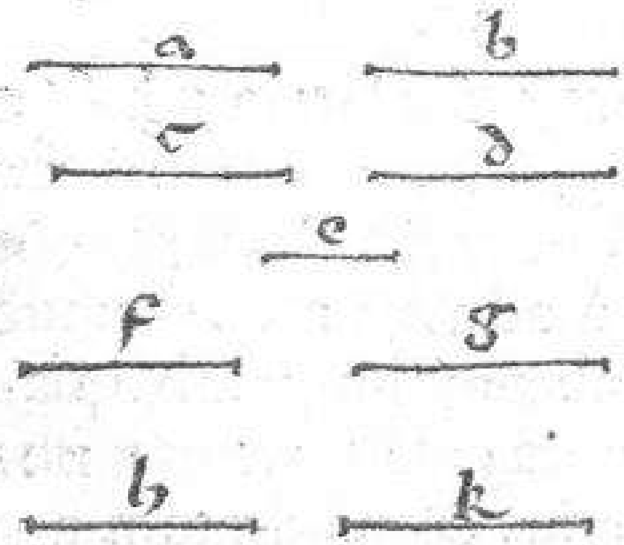


cognitum, inde quoq; per secundã huius costa sura a b non ignorabitur: quæ quidẽ est alterũ ex lateribus parallelogrami propositi, datã autem tradidit hypothesis proportionem laterum dicti parallelogrami, ex latere igitur a b iã cognito sexta huius, reliquum latus a d suscitabit notum. utrunq; ergo parallelogrami latus effecimus mensuratum, quod pollicebatur præsens theorema. ¶ Opus ita compa rabis. Si proportio laterum data est per denominationem, diuide numerum paral lelogrami per denominatorem proportionis, & exibit numerus quadrati lateris consequentis, cuius radix quadrata latus ipsum consequens notificabit, postea ad operationem sextæ huius aut præcedentis confugias, quæ reliquũ latus eliciet cognitum. Vt si parallelogramum a c contineat 48 quadratos pedes, latus autẽ a d lateri a b triplum fuerit, ecce denominatorem proportionis 3. per quem diuido numerum parallelogrami 48, & exeunt 16. numerus qui debetur quadrato lateris a b consequentis, cuius radix quadrata 4, latus a b notum faciet. 4 autem tripli cans, quoniã proportionem triplã elegimus; aut 48 diuisis per 4, exurget latus a d reliquum 12. Qđ si proportio lateris ad latus data fuerit, non per denominatio nem, sed per sibi æqualem proportionem; ut si diceretur, proportio lateris a d antecedentis ad latus a b consequentis est, ut 5 ad 3: multiplicabis numerum paralle logrami dati per terminum consequentem, & productũ partieris in numerum an tecedentem; exibit enim numerus assignandus quadrato lateris consequentis: cũ quo ut antehac ꝓcedendum erit. Vt si parallelogramũ a c fuerit 60. latus autem a d ad latus a b se habeat, ut 5 ad 3. multiplicabo 60 per 3. producũtur 180. quæ diuisa per 5, eliciunt 36. quadratum scilicet lateris a b, cuius radix quadrata 6, ipsum latus a b notificabit. reliqua autem per operationẽ præcedẽtis absoluent.

XIX.

Si quatuor quantitatum proportionalium tres quælibet datæ fuerint, & quarta reliqua innotescet.

Sint quatuor quãtitates a b c d proportionales, quarum tres notæ sint quæcunq;, dico, ꝙ quarta reliqua nota ueniet. Quãuis autẽ ipsa ignota quãtitas nunc primum, nunc secundum, interdũ uero reliqua soleat occupare loca, tamen ne ope ris uarietas, quæ necessario hanc mutationem consequitur, lectorẽ perturbet: placuit semper ignotæ quãtitati postremũ deputare locum. Præsens igitur theorema facile confirmabimus, si prius quo pacto quãtitas ignota, quocunq; nobis offerat loco, postrema fiat docebimus. Constat autem huiusmodi quatuor quãtitatum ꝓ portionalitas ex duabus proportionibus, quarũ unius ambo termini sunt cogniti, & illã faciemus primã, secundæ autem ꝓportionis unus duntaxat notus est terminus, qui si fuerit antecedens, iã ordinate sunt quatuor illæ quantitates, ut uolumus, habebit enim ignota quartum locum. Si uero consequens secundæ proportionis notum fuerit, conuertemus ambas proportiões, & trãsferetur ignota quãtitas ad postremũ locũ. Nunc ad confirmationem proportionis descendamus. Quatuor quãtitatum proportionaliũ a b c d, tres primæ sunt notæ secundum tres numeros f g & h, simili ordine positos

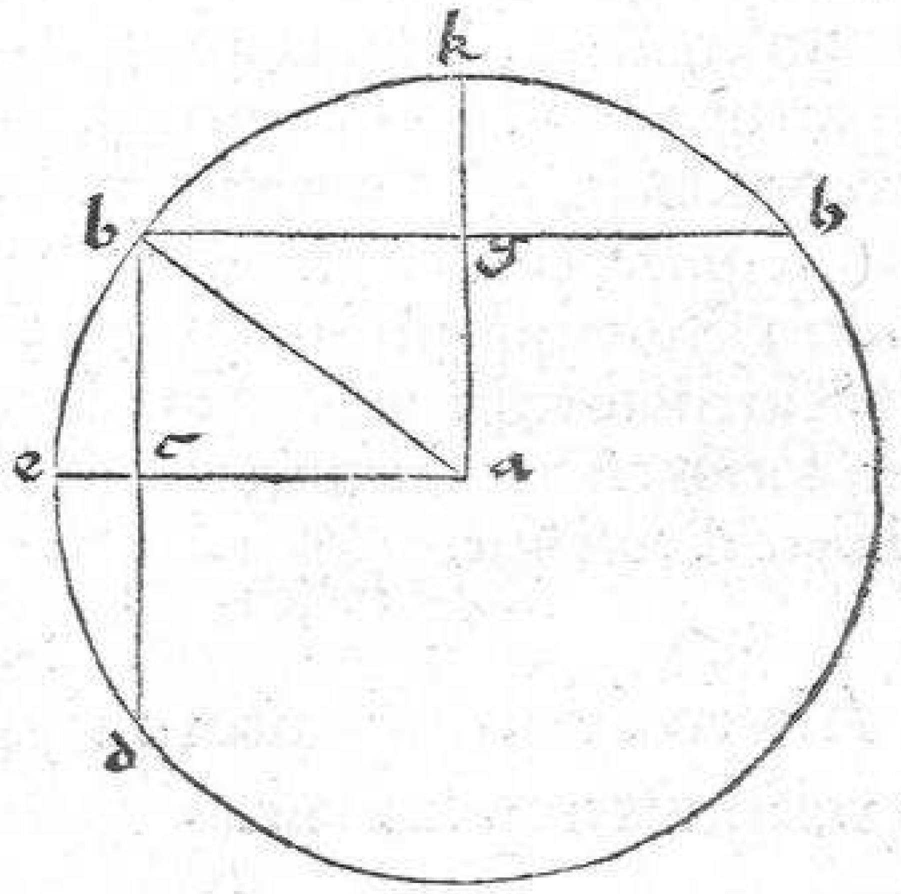


ne positos, ita q̃ quãtitas tertia c, scilicet nota sit per mensuram e secundũ numerum h. reperiaturq́ numerus k, ad quem se habeat h, sicut f ad g. quod fiet, si productum ex h in g, per numerum f partiemur, quemadmodum ex uigesima septimi elementorũ trahitur. erit autem numerus k, secundũ quem nota habebit, postrema quãtitatũ p mensurã quidẽ e. Nã ex quinta huius ꝓportio a quãtitatis ad b erit, sicut numeri f ad numerũ g. sed a ad b sicut c ad d ex hypothesi, & f ad g sicut h ad k, quare c ad d sicut h ad K, & cõuersim d ad c tanq̃ k ad h, & c ad mensurã e, sicut h numerũ ad unitatẽ, q̃ e mẽsuret c secundũ numerũ h. p æquã igitur ꝓportio d quãtitatis postremæ ad e mensurã, tanq̃ numerũ k ad unitatem. est itaq̃ e mensura in d, quoties unitas in k numero. d ergo quãtitas nota redditur per mensurã e secundũ numerũ k, quod libuit explanare. ¶ Opus, multiplica numerum secundæ quãtitatis per numerum tertiæ, & productũ in numerum primæ quãtitatis diuide, exibit enim numerus postremæ quãtitatis quæsitus. Vt si a fuerit 4. & b 9. c uero 12. multiplico 12 per 9, producũtur 108, quæ diuisa per 4, eliciunt 27 numerũ uidelicet quantitatis postremæ.

. XX .

In omni triangulo rectangulo, si super uertice acuti anguli, secundũ quantitatem lateris maximi circulum descripseris, erit latus ipsum acutum, subtendens angulum sinus rectus conterminalis sibi arcus dictũ angulum respicientis: lateri autem tertio sinus complementi arcus dicti æqualis habebitur.

Sit triangulus rectanglus a b c, angulum c rectum habens, & a acutum, super cuius uertice a secundum quãtitatem lateris maximi a b, maximo scilicet angulo oppositi describatur circulus b e d, cuius circũferentiæ occurrat latus a c quoad satis est prolongatũ in e puncto. Dico quòd latus b c angulo b a c oppositum est sinus arcus b e dictum angulum subtendentis. Latus autem tertium, scilicet a c, æquale est sinui recto complementi arcus b e. Extendatur enim latus b c occurrendo circumferentiæ circuli in puncto d. à punctis autem a quidem centro circuli exeat semidiameter a k æquedistans lateri b c. & à puncto b corda b h æquedistans lateri a c. secabunt autem se necessario duæ lineæ b h & a k, angulis a b h & b a k acutis existentibus, quod fiat in puncto g. Quia itaq̃ semidiameter a e cordam b d secat orthogonaliter propter angulum a c b rectum, secabit & ipsam per æqualia ex tertia tertij elementorũ. & arcum b d per æqualia ex 29. eiusdem. quemadmodum igitur tota linea b d per diffinitionem corda est arcus b d, ita medietas eius, linea scilicet b c est sinus dimidij arcus b e respicientis angulũ b a e siue b a c. quod asseruit prima pars theorematis nostri. Secundam deinceps partem ueram cõfiteberis, si prius per 34. primi angulum a g b rectum esse didiceris. semidiameter enim a K, & cordam b h, & arcũ eius ex supra memoratis medijs per æqua scindet. quare per diffinitionem linea recta b g sinus erit arcus b K. Est autem linea b g æqualis la



teri trianguli a b c. per 34.primi,ꝙ ſupficies a g b c æquediſtãtibus contineať lineis.angulus uero c a g,ſiue e a k rectus eſt per 29.primi,propter æquediſtantiam linearum b c ad a g,quare per ultimã ſexti arcus e k circumferentiæ ſuæ quadrãs probabitur.arcus itaq; b k complementum ipſius arcus b e diffinietur, cuius ſinus b g lateri a c æqualis nuperrime concludebatur.utranq; igitur proportionis partem ſatis oſtendiſſe uidemur.

XXI.

Omnem angulum rectum notum eſſe oportet.

Vnus enim rectus angulus ad quatuor rectos notã habet proportionem, ſumma autem quatuor rectorum nota eſt,cum gradus unus ſcilicet 360. pars quatuor rectorum;qua tanq̃ menſura famoſa utuntur uniuerſi Geometræ;ſecundũ numerum notum 360.contineatur in quatuor rectis.quare per ſextã huius & unus angulus rectus notus habebitur,quod erat lucubrãdum. Quarta autẽ pars ex 360 eſt 90.Iuſto igitur computo 90 gradus angulo recto uẽdicabimus. Miraberis forſitan,quo pacto diuerſi generis quãtitates menſura gradualis metiatur. Dicimus enim circumferentiã circuli uel arcum tot uel tot complecti gradus,item quatuor rectos angulos,uel alium angulum quemcunq; aliquot continere gradus. Quid igitur uocabulo gradus ſignificare uelimus,paucis habeto.Menſura famoſa arcuum eſt gradus circumferentialis ſcilicet 360.pars circumferentiæ circuli, menſura autem famoſa angulorum eſt gradus angularis,uidelicet 360.pars quatuor rectorum angulorum,id eſt,ſpacij plani,quod circa punctum quodlibet exiſtit.Imaginãdo enim duas ſemidiametros circuli ſuper puncto quocunq; tanq̃ centro deſcripti;gradum circumferentiæ circuli dicti intercipientes,angulus quem ipſe ſemidiametri ambiunt gradus uocabitur angularis,quoniã angulus ille 360.in quatuor rectis,ſiue toto ſpacio centrum circuli ambiente continetur; ſicut & gradus circumferentialis in tota circumferentia.huius enim anguli ad quator rectos,& illius arcus ad totã circumferentiã,eandem eſſe proportionem,ex ultima ſexti facile comprobabiť. ¶ Trahimus poſtremo ex iam recitatis,ꝙ cuilibet angulo & arcui ſe reſpicienti de circũferentia circuli ſuper uertice ipſius anguli deſcripti, unus & idem ſeruit numerus.uerbi gratia,ſi angulum quemlibet 36 graduũ ſtatuimus, erit & arcus ſe reſpiciens 36 graduum,& econtra.quod quidem ex identitate numeri totius circumferentiæ circuli & quatuor rectorum,ultima ſexti ratiocinante pendere dinoſcitur.

XXII.

Altero duorum acutorum,quos habet triangulus rectangulus,dato,reliquus non latebit.

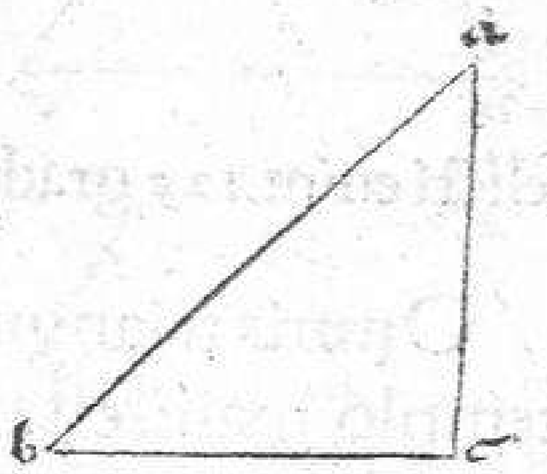
Duo enim acuti anguli,quos habet triangulus rectangulus,per 32.primi,ualent unum rectum,ꝙ tertius angulus ſit rectus,aggregatũ itaq; ex duobus dictis acutis angulis notum eſt,quoniã ex præmiſſa rectus angulus notus eſt,ſed & alter acutorũ ex hypotheſi datus eſt,quare per quartam huius reliquum cognoſcemus.

¶ Opus,numeri anguli acuti dati,ex numero unius recti minuas, & relinquetur quantitas alterius.Vt ſi angulus b fuerit 20, minuo 20 ex 90, relinquuntur 70,tantum igitur habebo angulum c reliquum.

Si duo

XXIII.

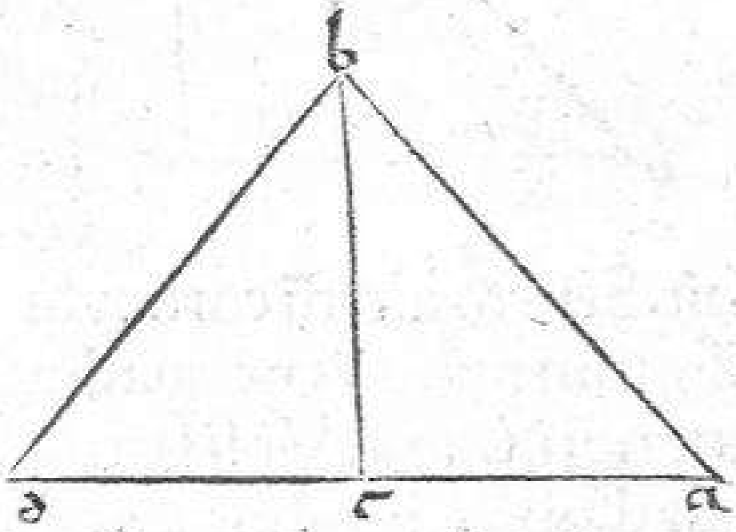
Si duo latera trianguli, rectum continentia angulum, fuerint æqualia, duo acuti anguli eis oppositi reddentur noti.



Duo latera a c, c b trianguli a b c rectanguli, rectum angulum c ambientia, sint æqualia. Dico, ꝙ uterꝗ angulorum b & c notus prodibit. Erunt enim per hypothesim & quintā primi duo anguli a & b æquales, cumꝗ per 32. primi ipsi ualeant unum rectum, angulo c recto existente, erit uterꝗ eorum medietas per 21 huius cogniti. quare per 6. huius uterꝗ eorum notus habebitur, quod libuit explanare. ◸ Opus. Quantitatem anguli recti dimidiabis, & apparebit utriusꝗ angulorū acutorum quātitas. Verbi gratia. Recto angulo habente 90 gradus, dimidiabo 90, & habebo 45 pro medietate recti, tantusꝗ pronunciabitur uterꝗ angulorum a & b.

XXIIII.

Si latus trianguli rectum subtendens angulum, alteri duorum recto subiacentium fuerit duplum, angulus acutus ab eis contentus, reliquo angulo acuto duplus enunciabitur. Vnde etiam utrunꝗ eorum agnoscet Geometra.

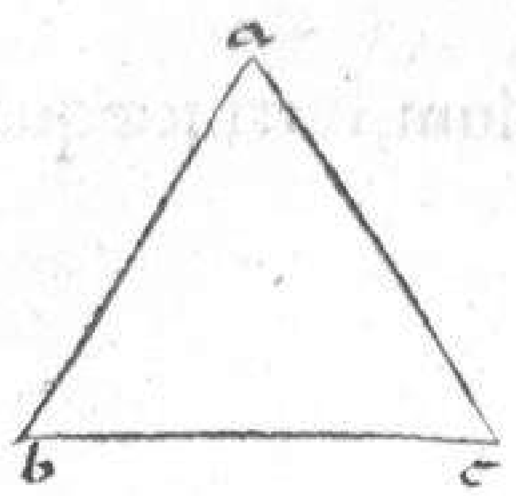


Sit triangulus a b c, rectum angulum c habens quem subtendat latus a b duplum lateri a c. Dico, ꝙ angulus b a c duplus erit angulo a b c. Extendatur enim a c usꝗ ad punctum d, donec c d habeat æq̄lis lateri a c, ducta linea b d, erit itaꝗ a b linea æqualis ipsi a d, ꝙ utriusꝗ medietas sit a c. sed per quartā primi duæ bases a b, b d triangulorum a b c, & b c d sunt æquales, anguli quoꝗ a b c & d b c æquales. totus igitur angulus a b d duplus est ad angulum a b c. est autem totus angulus a b d æqualis angulo b a d, siue b a c per quintā primi triangulo a b d æquilatero existente. unde & angulus b a c duplus erit ad angulū a b c, qđ oportuit demonstrare. ◸ Ex hoc patebit corollarium. Quoniā enim in triangulo nostro angulus a duplus iam declaratus habeatur ad angulum b, id est, sicut 2 ad 1, erit coniunctim aggregatū ex duobus angulis a & b ad angulum b, sicut 3 ad 1. Illud autem aggregatum æquipollet angulo recto, hypothesi & 32. primi docentibus. proportio igitur anguli recti ad angulum b nota est, uidelicet sicut 3 ad 1. quare per sextā huius angulus b notus erit, recto per 21. huius noto existente. postremo etiā residuus ex recto angulus, scilicet a p 4 huius notus declarabit.

XXV.

Duobus trianguli cuiuscunꝗ cognitis angulis, tertium reliquum datum iri.

Trianguli a b c, duo anguli a & b sint cogniti. Dico, ꝙ & angulus c notus emerget. Tres enim anguli a b c, duobus rectis æquantur. 32. primi id confirmāte. duo aūt recti sunt noti per 21 & 3 huius, quare & aggregatum ex tribus angulis tri-

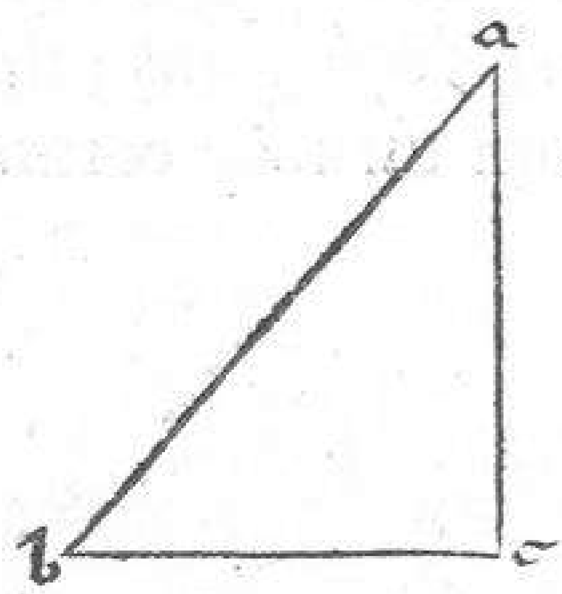


lis trianguli propositi notum habebitur. cunq; duos eorũ datos subiecerit hypothesis, p 4. huius tertius reliquus nõ ignorabitur, quod libuit inferre. ¶ Opus. Summã duorum angulorum, qui dati sunt ex quãtitate, duorum rectorum minuas, & relinquetur tertij anguli quantitas desiderata. Vt si angulus a fuerit 20, & angulus b 35 graduũ, collectos 20 & 35 gradus, qui reddunt 55. ex 180 minuo. relicti enim 125 gradus, angulo c adnumerabuntur.

XXVI.

Omnis trianguli rectanguli duobus lateribus cognitis, tertium extemplo manifestari.

Triangulus a b c angulum c rectum habeat, cuius duo latera quælibet sint nota. Dico, q reliquum eius latus notum habebitur. Si enim duo latera rectũ continentia angulum offerantur nota, erunt per primã huius quadrata eorum nota. aggregatum quoq; ex eis per tertiã huius notum, quod æquipollet quadrato a b per penultimã primi, unde ipsum notũ, & ideo per secundam huius costa sua, latus scilicet a b non ignorabitur. Si uero alterũ eorum sit datum cum latere rectum subtendente angulum, quadratũ minoris demptum ex quadrato maioris, per penultimã primi & quartã huius relinquet quadratũ reliqui lateris notum, & ideo per secundã huius costa eius cognita orieť, quæ fuere lucubrãda. ¶ Opus uulgare. Si latera rectum ambientia angulum fuerint data, quadrabis ea, quadrataq; congregabis, & collecti ex eis radix quadrata quãtitatem lateris quæsiti manifestabit. Si uero alterũ eorum sit datum cum latere rectum subtendente angulum, quadratum minoris ex quadrato maioris demas, & relicti quadrata radix tertium latus notificabit. Vt si latus a c fuerit 12, & b c 5, quadrabo 12, exurgunt 144. itẽ quadrabo 5, ueniunt 25. colligo 144 & 25, fiunt 169. quorum radicem quadratam inuenio 13. tantumq; fore didici latus a b. Sed ponatur latus a b 29, & latus a c 20. duco 29 in se, ueniunt 841. similiter 20 in se, faciunt 400. aufero 400 ex 841. relinquũtur 441, quorum radicẽ quadratã 21 lateri b c deputabo. Ita in cæteris.

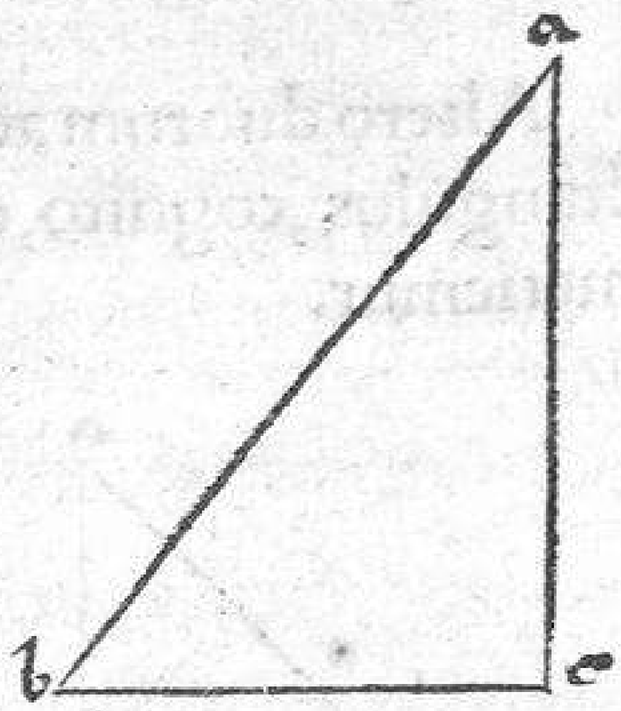


XXVII.

Trianguli rectanguli duobus lateribus cognitis, omnes angulos datum iri.

Si alterum datorum laterum recto opponatur angulo, satis est. si uero nõ, per præcedentem ipsum addiscemus, nam absq; eo propositum attingendi nõ erit potestas. Sit itaq; triangulus a b c, angulum c rectum habens, cuius duo latera a b & a c sint data. Dico, q omnes anguli ipsius noti erunt. Super uertice enim anguli acuti b, quem uidelicet latus subtendit datum tanq; centro, secundum quantitatem lateris b a circulo descripto, erit per 20 huius a c sinus arcus sibi conterminalis, qui respondet angulo a b c quem inquirimus. cũq; duæ lineæ a b & a c inter se datæ sint ex hypothesi per mensurã ueterem, a b autem semidiameter circuli descripti data sit per mensurã nouã, quæ quidem est una partium sinus totius, erit & a c nota per eandem mensurã docente septima huius, dum igitur a b est

sinus to-sinus totus uel sinus quadrantis, erit a c sinus notus, & per tabulā sinus, qua neglecta, hoc in propsito nihil efficere possumus, arcū eius addiscemus. cognito autē arcu dicti sinus, da[?] & angulus quē respicit arcus ille, nā arcus ipse & angulus secundū eundē numerū mēsuranť, quēadmodū tota circūferētia & q̄tuor recti anguli secundū eundē numerū cōiter mēsurātur, q̄d in 21 huius cōmemorauimus. per 22 itaq; huius reliquū acutum angulum b a c cognoscemus. Rectum autem angulum a c b, 21 huius notum demonstrabat. Vniuersos igitur trianguli nostri angulos reddidimus notos, quod decuit explanare.



¶ Opus. Numerū lateris rectum subtendentis angulum constitue primum, & numerum lateris respicientis angulum quæsitum pro secundo ponas, numerū uero sinus totius tertium. Multiplica igitur secundum per tertium, & productum diuide per primum, exibit enim sinus arcus respicientis angulum quæsitum, cui per tabulā sinus arcum suum elicias, cuius etiā numerus angulum quæsitum manifestabit. hunc si ex anguli recti quantitate dempseris, relictum numerabis secundum angulū acutum. Vt si a b fuerit 20 a c 12, & b c 16, sinus autem totus quemadmodū in tabula nostra supposuimus 60000, multiplicabo 12 per 60000, producuntur 720000, quæ diuido per 20, exeunt 36000, huius sinus arcum tabula præbet gradus 36, & minuta 52 ferè. tantū igitur pronunciabimus angulum a b c, qui tandem sublatus ex 90, relinquet 53 gradus & 8 minuta ferè, & tantus habebitur angulus reliquus acutus.

XXVIII.

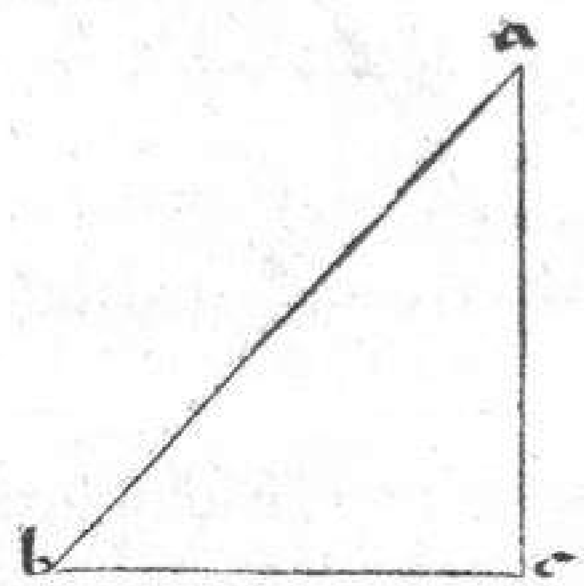
Data proportione duorum laterum trianguli rectanguli, angulos eius percontari.

Aut enim alterum duorū laterum opponitur recto angulo, aut non. Si primū sit latus a b recto angulo a c b oppositum, cuius proportio ad latus a c sit nota. Dico, φ anguli huius trianguli innotescent. Est enim a c sinus arcus anguli a b c per huius, dum a b est semidiameter circuli scilicet sinus totus, proportio ergo sinus totius ad sinum anguli a b c nota est, hinc sinus ille notificabitur, & tandē angulus a b c non latebit. Si uero proportio duorum laterum b c & a c data fuerit, erit proportio quadratorū notum data, & coniunctim proportio aggregati ex quadrato b c cum quadrato a c, hoc est quadrati a b propter angulum c rectum ad quadratum a c nota erit: unde & linearum proportio non ignorabiť, reliqua ut ante. ¶ Operatio. Si alterum duorum laterum recto angulo opponatur, multiplica terminū minorem proportionis datæ per sinum totum, & productum diuide per terminū maiorem, exibit enim sinus anguli, cuius latus breuius opponitur. Si uero duorum laterum recto circumstantiū data fuerit proportio, duc utrunq; terminorū in se, & collecti ex productis radicē accipe quadratā, ipsa enim erit terminus lateri, quod rectum subtendit angulum accomodandus, perduceris ergo ad iter pristinū. Vt si proportio a b ad a c fuerit sicut 9 ad 7. multiplico 7 in sinum rectum totum 60000, fiunt 420000. quæ diuido per 9, exeunt 46667 ferè. arcus autem respondens huic sinui recto est gr. 51. minuta 3 ferè, & tantus habebitur angulus a b c. Sed ponatur proportio a c ad c b sicut 12 ad 5. duco 12 in se, fiunt 144. item 5 in se, reddunt 25. hæc coniungo, faciunt 169. horum radix est 13. attribuenda lateri a b, sic proportio a b ad a c erit ut 13 ad 12.

unde ut prius angulo a b c cognoscendo uia parata est.

XXIX.

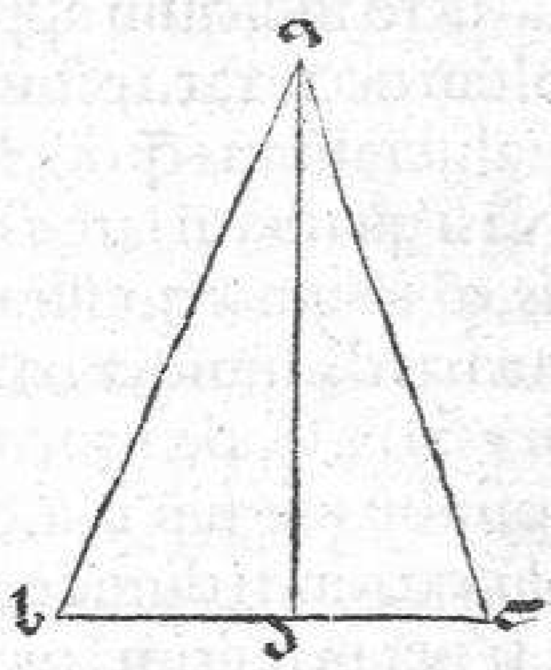
Altero duorum acutorum angulorum, quos habet triangulus rectangulus, cognito, cum uno eius latere & angulos [illegible] & latera metiemur.



Trianguli a b c angulum c rectum habētis, angulus b sit cognitus cū latere uno quocūq; (uerbi gratia) a c. Dico, φ omnes eius anguli cum lateribus omnibus innotescent. Anguli profecto cognoscentur ex 21 & 22 huius. restat igitur inuenire latera. Per 20 autem huius & tabulam sinus hypothesi iuuante, erit utrunq; laterum a c & b c cognitum, ut a b est sinus totus, duo itaq; latera quælibet trianguli propositi datam inuicem habebunt, pportionem, cunq; ex hypothesi unū eorum datum sit per mēsurā nouam, erunt per 6 aut 7 huius reliqua data, quod libuit attingere. ¶ Opus pulchrū & perutile. Sinum arcus anguli dati, & eius cōplementi addiscas, habebisq; tria latera nota per mensuram ueterem, quæ est pars una sinus totius, nam latus rectum subtendens angulum est sinus totus. Si igitur latus, quod rectum subtendit angulum, fuerit datum per mensuram nouam, pone sinum totum pro primo, & sinum arcus anguli, cui opponitur latus quæsitum, pro secundo, numerū autem nouæ dationis tertiū. multiplicatoq; secundo per tertium productum diuide per primum, & exibit numerus lateris quæsiti. Si uero alterum duorum laterum recto subiacentium detur, uolendo mensurare latus rectum subtendēs angulum, pone sinum arcus anguli, cui opponitur ipsum latus datum pro primo, & sinum totum pro secundo, numerum autem dationis nouæ tertium, absolutoq; opere uulgari quatuor numerorū proportionaliū ad metam perduceris cupitam. Quod si reliquū latus recto substratū angulo inuestigaueris, pone sinū arcus anguli, cui opponitur, latus datum pro primo, & sinum complementi eius pro secundo, numerū uero dationis nouæ tertium, reliqua ut antehac executurus. In exemplo. Detur angulus a b c 36 graduū, & latus a b 20 pedū, subtraho 36 â 90, manebunt 54 gradus, qui determinant quantitatem anguli b a c. inuenio autem lineam a c 35267 ex tabula sinus, b c uero 48541, dum a b est sinus totus 60000. Multiplico igitur 35267 per 20, producuntur 705340, quæ diuisa per 60000, eliciūt 11 $\frac{45}{60}$ ferè. latus itaq; a c habebit pedes 11 & $\frac{45}{60}$, id est tres quartas pedis unius. Similiter multiplico 48541 per 20, producuntur 970820, quæ diuiso per 60000, exeunt 16 & 11 minuta ferè, tantumq; latus b c pronunciabitur. Quòd si ponatur latus a c 20, reliquis ut antea manentibus, erit iterum a c latus 35267, & b c 48541, dum a b est sinus quadrantis 60000. Ad inueniendū igitur latus a b, multiplico 60000 per 20, producuntur 1200000, quæ diuido per 35267, exeunt 34 & 2 minuta ferè, habebit itaq; latus a b pedes 34 & 2 minuta ferè. Sed libeat mensurare latus b c, multiplicabo 48541 per 20, producuntur 970820, quæ diuisa per 35267, eliciunt 27 & 32 minuta ferè. latus igitur b c 27 & 32 minuta ferè pedis unius complectit. ¶ Hic parumper ausculta, quādoquidem opus nostrū Triangulorū Astronomiæ seruit plurimū, quæ fractionibus nōtam uulgaribus φ Physicis utit, quo pacto fractiones uulgares in physicas cōmutentur, non erit silentio prætereundum. Omni nanq; integrorū absoluta diuisiōe si aliquid de numero diuiso; quod necessario minus inuenietur diuisore; relictum fuerit, mero duorum rectorum, qui enim relinquitur numerus, angulo, quem basis respicit, deputabitur. Si uero angulus, quem duo æqualia ambiunt latera, notus offeratur, numerum eius à numero duorum rectorum minues, nam relicti numeri medietas utrunq; æqualiũ angulorum patefaciet. In exemplo: Sit angulus b 30 graduum, erit autem & angulus c sibi æqualis 30. hi collecti, reddunt 60. qui sublati ex 180. numero duorum rectorum usitato, relinquũt 120. & tantus erit angulus a. Sed ponatur angulus a 150. minuo 150. ex 180. ualore scilicet duorum rectorũ relinquuntur 30. quorũ medietas 15 utrunq; angulorũ b & c cognitũ efficit.

XXXVI.

Perpendicularem duobus trianguli æquicrurij notis lateribus conterminalem, cui basis nota per medium diuisa substernitur, faciliter indagare.



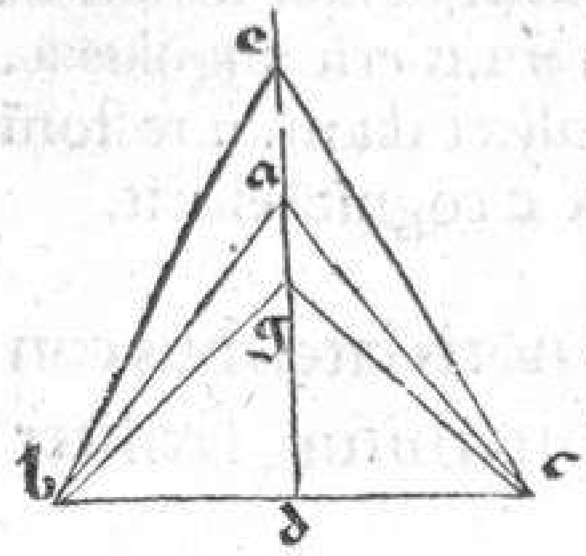
Sit triangulus æquicrurius a b c, cuius basis b c data sit, lateraq; a b & a c cognita, à quorũ cõmuni puncto a ad basim b c descendat perpendicularis a d, cadens intra triangulum, quemadmodũ ex præcedenti & 30. huius concluditur. Dico, q ipsa ppendicularis a d nota ueniet. Quoniam enim uterq; angulorũ supra basim apud punctum d rectus est, erit per penultimã primi tam quadratũ lineæ a b æquale duobus quadratis linearum a d & d b, q quadratum a c duobus quadratis linearum a d & d b. sunt autẽ duo quadrata linearum a b & a c æqualia, ppter costas suas æquales, quare & aggregatum ex duobus quadratis a d & d b æquale aggregato ex duobus quadratis a d & d c. dempto igitur cõmuni quadrato a d, relinquetur quadratum b d æquale quadrato d c, unde & linea d b æqualis lineæ d c concluditur. cumq; tota b c nota sit ex hypothesi, erit per sextam huius utraq; linearum d b & d c nota, sunt enim eius medietates. quadratum itaq; lineæ d c per primã huius notum habebitur, sed & quadratum a c per eandem iuuante hypothesi notum est, à quo cum superet quadratum d c in quadrato a d per penultimã primi, si quadratum d c notum abstraxeris, relinquetur per quartã huius quadratum perpendicularis a d notum, & ideo per secundã huius ipsa ppendicularis a d cognita, quod placuit attingere. ¶ Opus. Quadratum dimidiæ basis ex quadrato lateris minuas, relicti enim radix quadrata ppendicularẽ manifestabit. Vt si basis b c fuerit 10. & utrunq; laterum a b & a c 13. quadrabo medietatem basis, quæ est 5. exurgũt 25. item quadrabo numerum lateris scilicet 13. producuntur 169. à quibus postq; 25 dempsero, relinquentẽ 144. pro quadrato perpendicularis a d, quorum radicẽ quadratã 12 perpendicularis sibi uendicabit.

XXXVII.

Quales habeat angulos æquicrurius triangulus, ex cognitis lateribus & basi faciliter indagare.

Qualitatem anguli dicimus rectitudinem acutiem & obtusitatem. Duobus ad hoc iudicijs perducemur, quorũ unũ accipitẽ ex ppendiculari ad basim demissa & basi, aliud uero ex latere & basi. Nam si ppendicularis dimidiæ basi fuerit æqualis, angulus, cui basis opponitur, rectus erit, si uero minor fuerit medietate basis obtusus, & si maior acutus, quorũ demonstrationem breuiter afferemus. Sit enim in triangu-

triangulo æquicrurio a b c perpẽdicularis a d æqualis medietati basis d c, erit itaq; ex processu 23 huius bis assumpto uterq; angulorum d a c, & d a b medietas recti, totus igitur angulus b a c rectus habebitur. Si autem a d perpendicularis minor fuerit medietate basis b c, prolongetur d a in e, donec d e fiet æqualis lineæ d c, ductis lineis e b & e c nouũ æquicruriũ triangulum claudentibus per 4 primi, cuius angulus b e c ex recitato processu rectus declarabit̃. unde & per 21 primi angulus b a c maior eo, & ideo obtusus enunciabitur. Sed si perpendicularis a d maior fuerit medietate basis d c, abscindatur ex ea d g æqualis d c, extensisq; lineis b g & g c, probabitur ut prius angulus b g c rectus, qui p 21 primi maior est angulo b a c, angulũ itaq; b a c minorem esse recto, & ideo acutum nemo dubitabit.

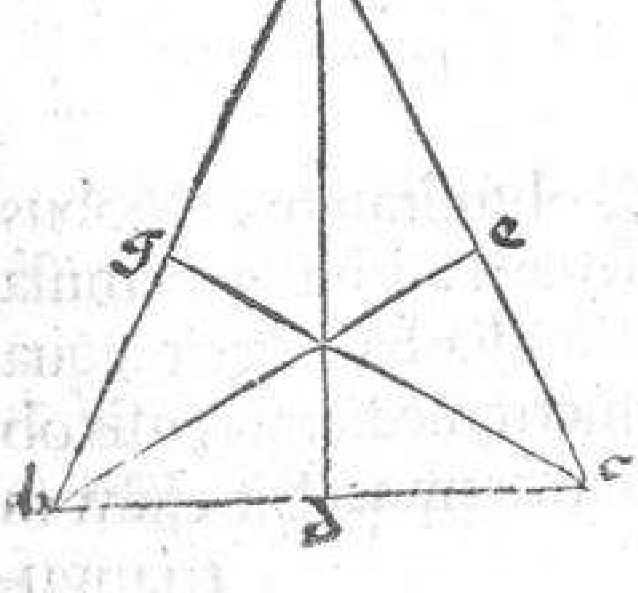


Aliud uero indicium apparebit hoc pacto. Si latus medietati basis potentialiter duplum occurrat, rectus prædicabitur, quem basis subtendit angulus. si uero potentialiter minus q̃ duplum obtusus, & si maius q̃ duplum acutus, quod sic cõstabit. Nã si quadratũ lateris, q̃d suã dicimus potẽtiã, duplũ fuerit quadrato dimidiæ basis, cũ ipsum æqpolleat p penultimã primi duobus quadratis ipsius scilicet ppendicularis & dimidiæ basis, planũ erit quadratũ ppẽdicularis æquari quadrato dimidiæ basis, & ideo ppẽdicularẽ dimidiæ basi. ad prius igit̃ explanata si refugerimus cõstabit angulũ b a c esse rectum. Si uero quadratũ lateris a b minus fuerit q̃ duplũ quadrati dimidiæ basis, erit & aggregatũ ex duobus quadratis linearũ a d & d b per penultimã primi minus q̃ duplũ quadrati b d. unde quadratũ a d minus oportebit esse quadrato b d, & ideo costam huius lineam scilicet a d minorẽ costa illius b d, ex prædictis ergo angulum b a c obtusum esse non ignorabimus. Quod si quadratũ a b maius fuerit duplo quadrati b d, cõcludemus ut nunc nũc fecimus lineam a d longiorem linea b d. quamobrẽ ex supra memoratis in primo indicio angulus b a c acutus explorabitur. Qualis itaq; sit angulus, quem basis subtendit, gemino monstrauimus indicio. utrunq; autem reliquorũ, quos dicta sustentat basis, acutum esse docuit corollarium 34 huius. Opus uero posteaq̃ ex præcedenti perpendicularem didiceris, ex processu huius facile comparabis.

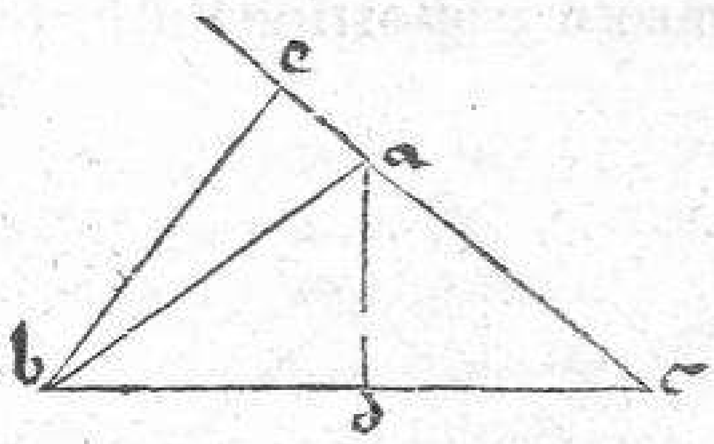
XXXVIII.

Trianguli æquicrurij siue latus quodcunq; dederis, siue perpendicularem cum uno angulorum, & reliqua latera & perpendiculares mensurabuntur.

Sit triangulus æquicrurius a b c, cuius unum latus quodcunq; sit notũ cum uno angulorum eius. Dico, q̃ reliqua duo latera nota fient cum perpendicularibus. Detur enim primo alterum duorũ laterũ & sit a c, demissaq; perpendiculari a d ad basim b c, erit triangulus a d c rectangulus, cuius angulus c acutus ex corollario 34. huius notus habebitur, siue per hypothesim solam, siue per hypothesim & 34. huius, quare per 28 huius latere a c noto existente, tam linea a d perpendicularis, q̃ d c notæ occurrent, duplicata autem d c nota proueniet basis b c data. latus autem a b cum sit æquale lateri a c, nemini erit ignotum. Sic igitur & latera reliqua



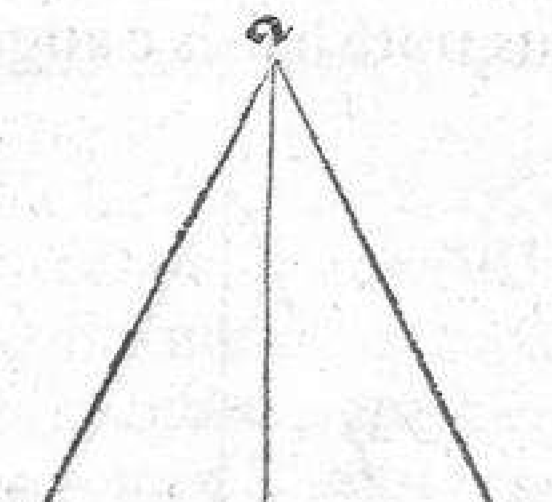
liqua & perpendicularem unam mensi sumus. Qđ si detur basis b c cum aliquo angulorum, erit & eius medietas d c data, habebitq; triangulus a d c rectangulus notum latus d c, & angulum c acutum cognitum, quare per 29 huius reliqua eius duo latera non ignorabuntur, quorũ unum est perpendicularis a d quæsita, reliquũ uero etiam triangulo æquicrurio proposito commune est. Perpendicularẽ autem b e aut c g basi conterminalẽ, ex 32 huius perpendiculari a d nota existente, faciliter addiscemus. Postremo ex perpendiculari nobis data, cum angulo quocũq; reliqua scibilia depromemus. Deť em̃ primo ꝑpendicularis a d basi insistens, qua intra triangulum cadet, ut supra confirmauimus, oportet autẽ & angulum c acutum esse notum, siue per hypothesim solam, siue per hypothesim & 35 huius. Triangulus itaq; a d c rectangulus, cum & latus a d notum habeat, & angulum c datum, reliqua sua latera a c & d c, per 29 huius adducet cognita, cumq; d c sit medietas basis, tota quoq; basis b c trianguli ꝓpositi non erit ignota. est autẽ a b æqualis ipsi a c, notæ igitur uenerunt omnes lineæ trianguli ꝓpositi, perpendicularem autem b e aut c g, 32. huius afferet cognitam. Sed si deť angulus quicunq; cum altera perpendiculariũ b e & c g, habebit triangulus b e c latus b e cognitum cum angulo acuto c, & ideo per 29 huius b c linea dabiť cum eius medietate d c. Iterum ergo triangulus a d c rectangulus, notum latus d c habens cum angulo c, latus suũ a d, perpendicularem scilicet trianguli æquicrurij ꝓpositi cum latere a c per 29 huius manifestabit. Vna igitur ex lineis memoratis quæcunq; cum unico angulo quicquid in triangulo æquicrurio inquiri solet, apertum efficiet, quod libuit absoluere. ¶ Opus autẽ huius, ne diutius æquo detinearis, missum facimus, quod quidem haud difficulter colligemus, si ad 29 & 32 huius confugerimus.



XXXIX.

Lateribus trianguli æquicrurij cum basi cognitis, omnes ipsius angulos manifestare.

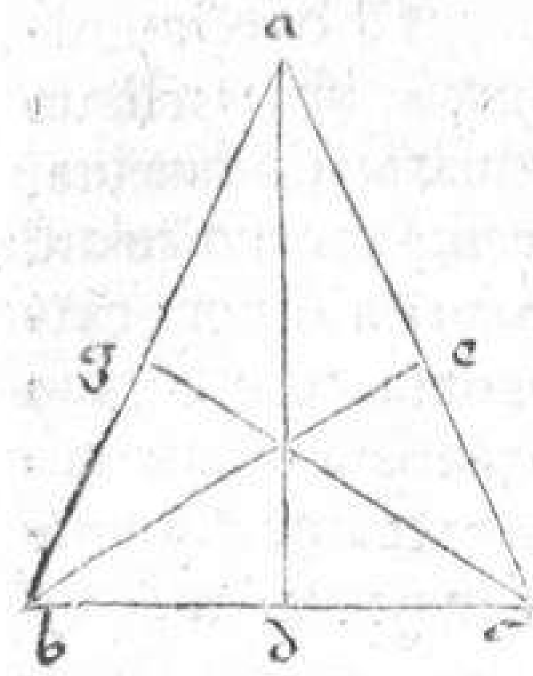
Triangulus a b c æquicrurius duo latera a b & a c nota habeat cum basi b c. Dico, ꝙ omnes eius anguli noti fiẽt. Demissa enim ad d basim ꝑpendiculari a d, erit d c nota, cum sit medietas basis, ut supra cõmemorauimus. duo igitur latera a c & d c trianguli, a d c rectanguli nota sunt, quare per 27 huius angulus eius c, qui & triangulo a b c cõmunis est, notus comprehẽditur. unde & per 35 huius reliqui anguli trianguli a b c propositi non latebunt, quod censebam demonstratũ iri. ¶ Operationes autem 27 & 35 huius, si commisceas opus theorematis præsentis facile conflabis.



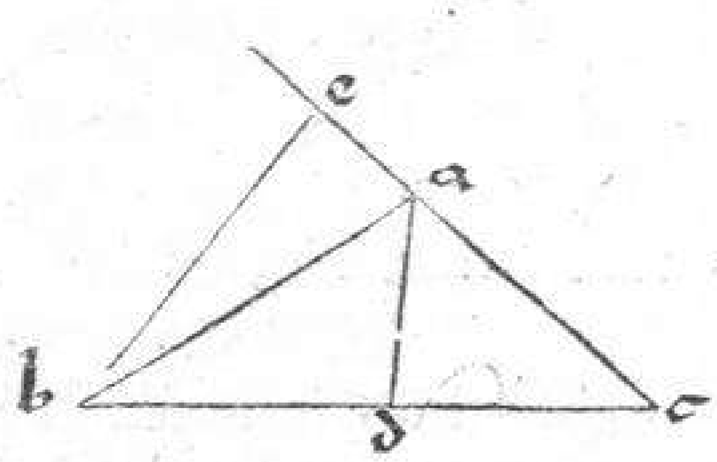
XL.

Si perpendicularem trianguli æquicrurij datam habueris, ex basi nota latus, aut econtra ex latere noto basim elicies.

Sit triãgulus æquicrurius a b c, cuius altera perpendiculariũ a d & b e, uel c g data sit, Dico, ꝙ si etiam basis b c nota fuerit, latus a c cognitũ erit, & econ-



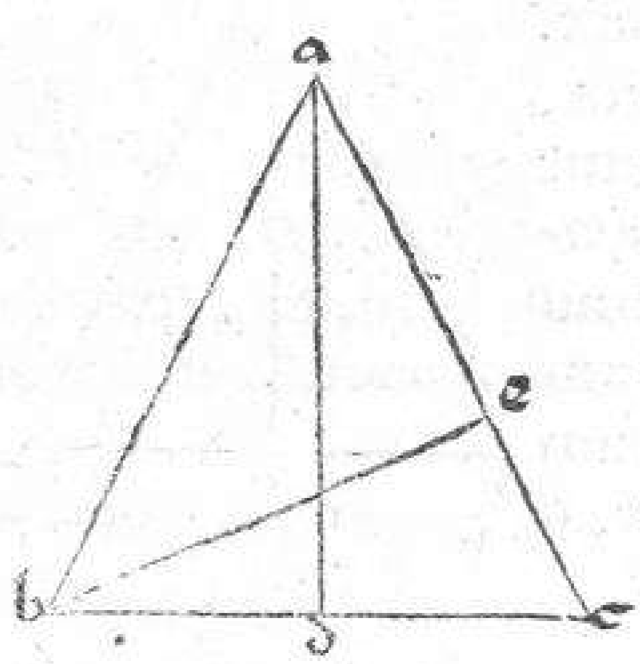
tra, si latus a c uel a b notum fuerit, basis ipsa non ignora-bitur. Sit enim primo perpendicularis a d nota cum basi b c, erit itaq; & d c medietas basis cognita, quare per 26 hu-ius a c nota dabitur. Si uero a c latus offeratur notum, erit per allegatam 26 huius linea d c nota, quae cum sit medie-tas basis, duplata basim, ipsam constituet. Sit deinceps ppen dicularis b e uel c g nota cum basi b c, siue intra siue extra triangulum cadat, duobus itaq; triangulis rectangulis b e c & a d c, angulus c cõmunis erit, quare per 32 primi aequi-anguli concludentur, & ideo per quartam sexti erit propor-tio e c ad c d, sicut b c ad c a. tres autem primae harum li nearum proportionaliũ notae sunt, e c quidem ex hypothesi & 26 huius, b c ex hypothesi, & d c medietas ipsius b c. quare per 19 huius a c quarta nota ueniet, scilicet latus trianguli aequicrurij quaesitum. Si uero perpendicularẽ b e da tam habueris cũ latere a b, erit per 26 huius a e no-ta. est autem ex diffinitione aequicrurij trianguli a c aequalis ipsi a b, quare & a c nota, & per tertiã aut quartã huius e c cognita. duobus itaq; lateribus b e & e c trianguli b e c rectanguli notis existentibus, erit per 26 huius linea b c nota, basis scilicet trianguli nostri. Quo autem pacto perpendicularis una reliquam suscitare soleat, superius explanatũ est. ¶ In ope ratione huius non morabimur, quam quidem ex operibus praeallegatarum ppo-sitionum faciliter conflabimus.



XLI.

Vno duntaxat angulo trianguli aequicrurij cognito, utrunq; latus ad basim & perpendiculares, notas habebit proportiones.

Sit triangulus aequicrurius a b c, unum habens notum angulũ quemcunq;, cuius duae perpendiculares sint a d & b e. Dico, q; proportio a c lateris ad ba-sim b c, & ambas perpendiculares nota fiet. Erit eñ triangulus a d c rectangu lus, notũ habẽs c angulũ acutũ ex hypothesi sola, aut ex hypothesi & 35 huius, qua re per 30 huius proportio a c ad a d perpendicularem nota erit, sed & eiusdem a c ad lineã d c ex eadẽ 30 p portio non ignorabitur. cumq; proportio d c ad c b sit nota, est enim ut medietatis ad totum, erit per 12 huius proportio a c ad basim b c cognita. Sic quo pacto no tae fiant proportiones lateris a c ad perpendicularẽ a d & basim b c iam explanauimus. Rursus triangulo a b e rectangulo angulũ a notum habente, aut per hypo-thesim solam, aut per hypothesim & 35 huius, erit p 30 huius proportio a b lateris ad perpendicularem b e no ta. quicquid autem de altero laterum a b & a c praedicamus, & de reliquo cum sint aequalia enunciatum intelligemus. uerum igitur est, quod theorema ppo-suit.



¶ Operari aũt, si uoles, propositiones theorema nostrũ confirmantes repetito.

In tertio

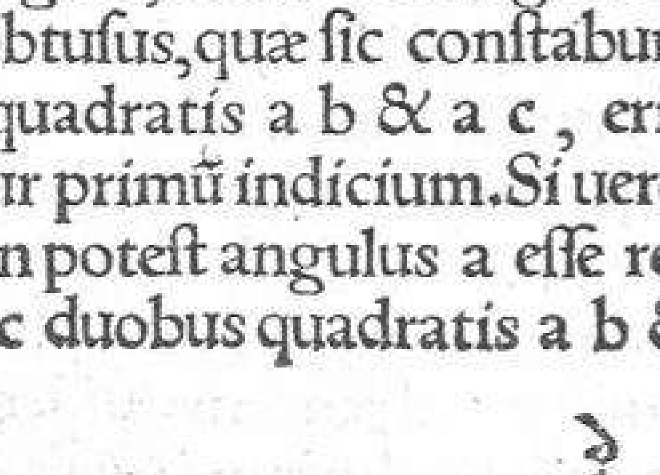
In tertio demum triangulorum genere ludendum censeo.

Tria superius triangulorũ diffiniuimus genera, quorũ primo ab æqualitate laterum sumenti originem modicum accidit uarietatis, in eis quas Mathematici scrutantur rebus. in secundo autem magis uaria est scibiliũ inquisitio, ꝙ ipsum ab unitate simplicitateq́ laterum recedat. tertium uero genus, quo amplius à primo distat genere, eo difficilius se offert. In primo præterea genere, omnes anguli, non quidem ad spontaneam positionem tuam, sed necessitate cogniti sunt, unũquenq; enim eorum tertiam partem duorũ rectorum demonstrauimus, uno autem latere quolibet dato, reliqua duo non latebunt, ꝙ ipsa dato lateri sint æqualia. Secundũ uero triangulorũ genus angulos suos non præbet cognitos, nisi aliquid ex angulis suis aut lineis præcognitũ habeatur, quod & in lateribus mensurandis euenire compertum est. Tertij autem generis tanta tamq́ uaria est intricatio, ut non satis sit unum angulũ cum uno latere præsciuisse ad reliqua cognoscenda, aut duo eius latera tantũ, uerum ut latera & angulos metiamur uniuersos, aut tria latera præscienda sunt, ad tres angulos reperiendos, aut duo latera cum uno angulo, aut duo anguli cum uno latere. duobus enim angulis datis, tametsi tertius extemplo notus reddatur per 25 huius, non tamen latera nota ueniunt, uerum proportiones ipsorum laterũ duntaxat, quemadmodũ infra docebimus, notas fieri oportet. Postremo in his triangulis absq; notitia duorum casuũ aut alterius eorum, quos perpendicularis ex ipsa basi separat, nihil efficiet Geometra, quæ quidem perpendicularis diuersimode cadere solita, nunc intra nunc extra triangulum, ut supra tetigimus, multiuariam ignotorum faciet inquisitionem. Principio igitur explorandum arbitror, quales sint uniuersi anguli, quos habet propositus nobis triangulus trium datorũ laterum, unde perpendicularis quælibet quo pacto casura sit, dirigẽte 32. huius callebimus, cuius demum perpendicularis quantitatem metiri non prorsus inutile uidebitur.

XLII.

Triangulus notorum trium laterum, qualem quemuis angulum habeat percontari.

Sit triangulus a b c trium inæqualiũ, & notorum inter se laterum, cuius quales sint anguli experiũdum est. Faciamus primo periculũ de angulo a. dico autẽ, ꝙ si quadratũ lateris b c, ipsum angulũ a subtendẽtis, æquale fuerit duobus quadratis laterum a b & a c, quæ dictum ambiunt angulũ, rectus erit angulus ille. si uero minus illis quadratis, erit acutus, & si maius, obtusus, quæ sic constabunt. Si enim quadratum b c æquale reperiatur duobus quadratis a b & a c, erit per ultimam primi angulus a rectus. certum est igitur primũ indicium. Si uero quadratum b c minus fuerit quadratis a b & a c, non potest angulus a esse rectus, neq; obtusus, eo nanq; recto existente, quadratũ b c duobus quadratis a b & a c per penultimam primi æquabitur, quod est cõtrariũ posito. Sed non obtusus, sic enim per 12. secundi quadratũ b c maius duobus quadratis a b & a c habetur, quod cum repugnet posito, relinquit angulum a esse acutum, & ita secundum firmauimus indiciũ. Quòd si quadratũ b c maius fuerit quadratis a b & a c, nõ poterit angulus a esse re

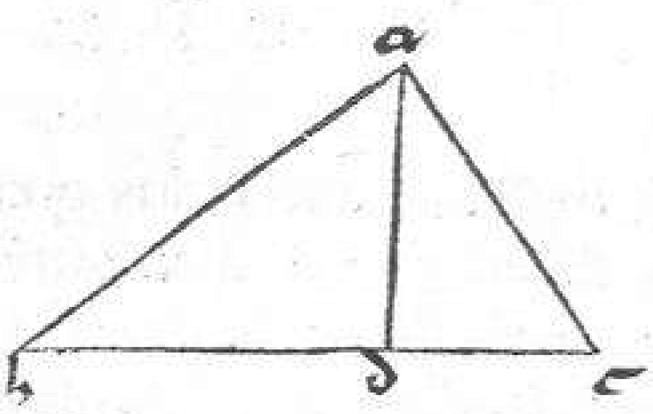


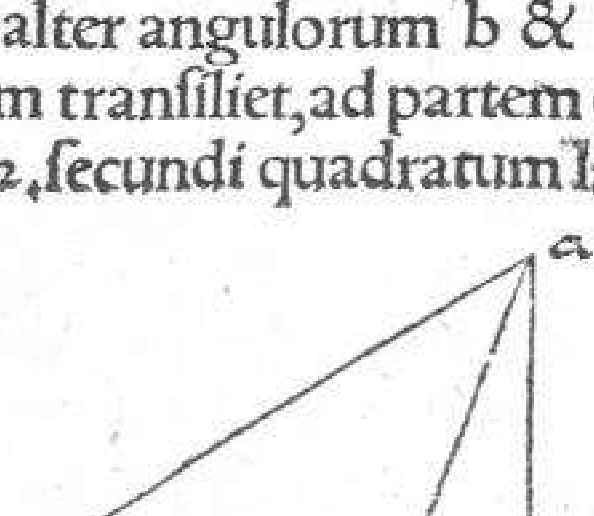
ctus neq; acutus,nam si alterum illorum dixeris,erit quadratum b c, aut æquale duobus quadratis a b & a c per penultimam primi,aut minus eis per 13.secundi,neutrũ aũt horum cum posito stabit, cui igitur dubiũ erit angulũ a obtusum esse? Ad reliquos demũ angulos quales sint,simili pducemur examine. ¶ Operationem ex processu iam facto non potes non comprehendere. In exemplo. Sit latus a b 7,latus b c 9,& latus a c 12,uolo scire qualis sit angulus a, quadrabo singula latera,quadratũ de 7 est 49.quadratũ de 9 est 81. quadratũ uero de 12 est 144.colligo duo quadrata 49 & 144.resultant 193.cum itaq; quadratũ de 9,quod est 81 sit, minus q̃ 193.pronuncio angulũ a esse acutũ.Ita in cæteris.

XLIII.

Datis tribus lateribus trianguli,duos casus, quos perpendicularis à puncto angulari ad basim descendens,ex ipsa distinguit basi,comperire.

Perpendicularis intra triangulũ manens,duos casus profecto distinguet ex ipsa basi.quæ uero cũ altero laterum coincidit,unum duntaxat casum habebit.pꝫpendiculari autem extra triangulum cadente,casus huiusmodi non sunt portiones basis,uerum basis est pars alterius eorum.Sanè igitur intelligenda erat diffinitio casus ab initio posita.uocabulo enim basis,basim simpliciter dictam,& basim quantũ oportet prolongatam significauimus. Cognitio autem casuũ dictorũ,aut alterius eorum,necessaria est ad perpendicularem trianguli tria latera nota habentis cognoscendam, per quam deniq; perpendicularem anguli quæri solent. Cum autem de his,quæ in triangulis rectangulis quæri solent,superiori loco satis dixisse uideamur,ad triangulos non rectangulos præcepta futura sonabunt potissimũ, licet quædam ad rectangulos etiam applicari possit.Ex puncto igitur a trianguli a b c tria latera habentis nota uersus lineam b c procedat perpendicularis a d,distinguens ex basi duos casus b d & d c,dico q illi duo casus noti uenient. Qua nanq; lege siue intra siue extra triangulũ cadat huiusmodi perpendicularis præcedens & 31.huius indicabunt. Cadat itaq; primo intra triangulum duobus angulis b & c acutis existentibus.argumento igitur 13.secundi quadratũ lateris a b superabit à duobus quadratis linearũ a c & c b,in eo,quod fit ex b c in c d bis.cũq; tam quadratum a b notum sit ex hypothesi & prima huius, q̃ aggregatum ex quadratis a c & b c ex hypothesi,prima & tertia huius,erit per quartam huius,quod fit ex b c in c d bis notum, & eius dimidiũ,quod fit ex b c in c d notum.est autem latus b c notum ex hypothesi,quare per 17.huius linea c d nota ueniet, alter uidelicet duorũ casuum, quo dempto ex linea b c nota p hypothesim,reliquus casus b d innotescet. Quod si alter angulorum b & c obtusum se præbeat,perpendicularis a d trianguli aream transiliet,ad partem quidem anguli obtusi,qui uerbi gratia sit c, erit igitur p 12.secundi quadratum lateris a b maius duobus quadratis linearũ a c & c b, in eo,quod fit ex b c in c d bis. Ex prius igitur adductis locis(ut breuis sim)excessus ille notus erit,scilicet, quod fit ex b c in c d bis,& eius dimidiũ quod ex b c in c d. cunq; b c nota sit ex hypothesi,erit per 17. huius & c d nota,sic minorem duorum casuũ notum enisi sumus, cui si basim



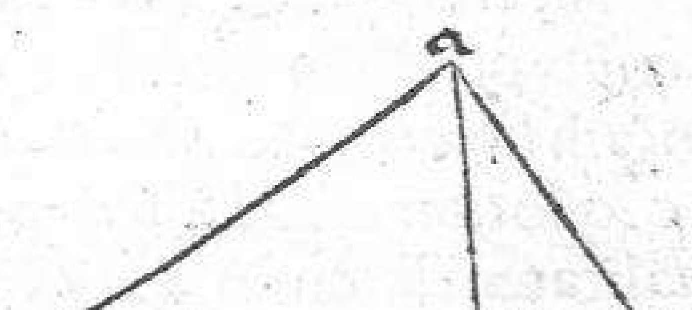


si basim b c notam adieceris, resultabit casus maior b d notus, quæ fuere lucubranda. ¶ Operatio uaria processum huiusmodi consequitur. Nam si uterq; angulorum, quos basis sustinet, acutus fuerit, deme quadratũ lateris uni eorum oppositi ex aggregato duorũ quadratorũ reliqui scilicet lateris & ipsius basis, quodq; relinquitur, dimidiatũ in basim partiaris, exibit enim casus, qui est apud angulum acutum prædictũ, quem ex basi minuendo, reliquũ habebis casum. In exemplo. Ponat quis mihi latus a b 20. pedum, b c 21. & a c 13. monitu præcedẽtis utrunq; angulorũ b & c acutum esse conijcio. quadrabo igitur a b, fiunt 400. quadratũ autem a c, quod est 169. coniungam quadrato b c, quod est 441. & resultabunt 610. à quibus demo quadratũ a b, manent 210. quorum dimidiũ 105. diuido per 21. exeũt 5. & tantus est casus d c, aufero 5 ex 21 numero basis, manẽt 16 pro casu reliquo. Quòd si alter angulorum prædictorũ obtusus extiterit, à quadrato lateris obtusum subtendentis angulum subtrahe aggregatũ quadratorum reliqui lateris & basis ipsius, quodq; remanebit, dimidiatũ per basim partire, exibit enim casus minor, cui posteaq; basim adijciemus, emerget casus maior. Ponat̃ in exemplo a b 51. b c 38. & a c 25. erit igitur angulus c obtusus, quadrabo a b, ueniunt 2601. quadrabo b c, exurgunt 1444. item quadratum a c est 625. colligo duo quadrata b c & c a, resultant 2069. quæ dempta ex quadrato a b, relinquunt 532. quorum dimidiũ 266 diuido per b c scilicet 38. exeunt 7. & tanta est linea c d, casus uidelicet minor, cui adiungo basim 38. congregantur 45 pro casu maiore.

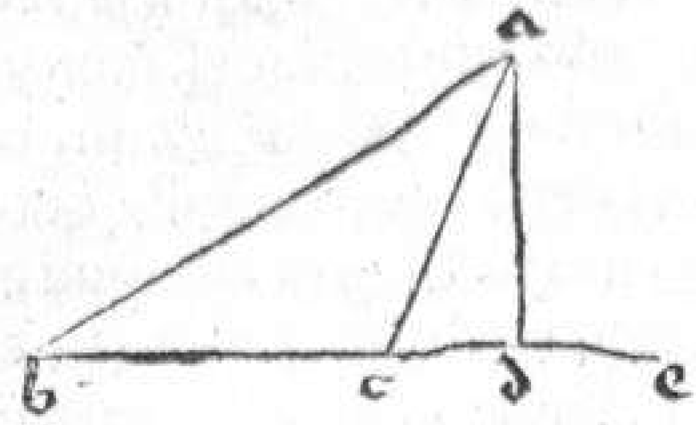
XLIIII.

Quod præcedens docuit, alio tramite inuestigare.

Trianguli a b c tria latera supponantur nota, a b quidem longius latere a c, perpendicularis autem a d cadat intra triangulũ super basim b c, erit itaq; casus b d maior casu d c ex hypothesi, penultima primi & cõmuni animi conceptione, sit igitur e d æqualis ipsi d c ducta linea a e. Cum autem per penultimã primi quadratũ a b æquipolleat duobus quadratis a d & d b, quadratum uero a c duobus quadratis a d & d c, quadrato perpendicularis a d communi ablato, erit per cõmunem scientiam differentia quadratorum b d & d c æqualis differentiæ quadratorum a b & a c. duo autem quadrata linearum a b & a c nota per hypothesim, ex quarta huius notam



habebunt differentiam, quare & differentia quadratorũ b d & d c non ignorabitur, sed per sextam secundi quadratũ b d æquatur ei, quod fit ex e b in b c cum quadrato e d. differentia igitur quadratorum b d & e d siue d c est id, quod fit ex e b in b c, erat autem hæc differentia nota, quare quod fit ex e b in totam b c notum declarabitur. cumq; ipsam b c notam attulerit hypothesis, erit per 17 huius ipsa b e nota, quam basi b c cognita dementes, lineã e c relinquemus cognitam & eius medietatem d c, quæ est casus minor. huic cum sit æqualis lineæ e d, si adiecerimus b e prius notam, casum maiorem b d scitum reddemus. Quòd si perpendicularis aream trianguli egrediatur, continuata basi b c, donec concurret cum perpendiculari in puncto d, ponatur ipsi c d æqualis d e. pristino igitur fretus argumento, confiteberis differentiam quadratorũ a b & a c æqualem esse differentiæ quadratorũ b d & d c, quam quidem differentiam hypothesis, prima & quarta huius latere non sinunt. quadratũ autem b d superat quadratum c d,



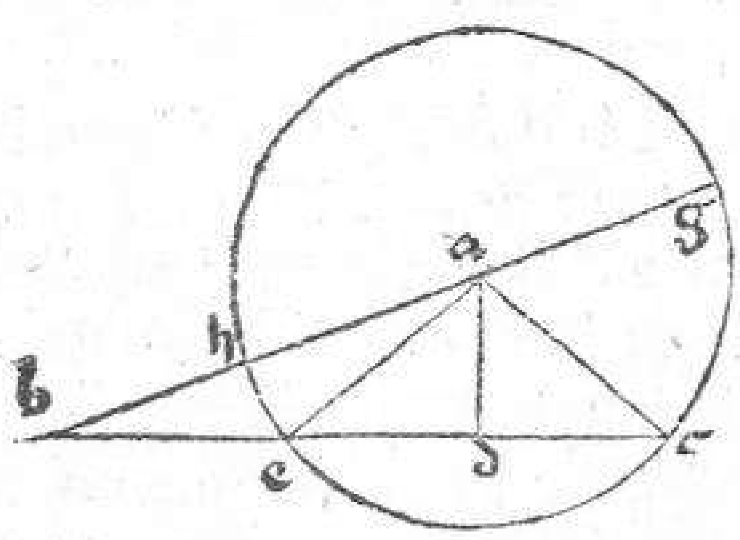
per 6.secundi in eo, quod fit ex c b in totã b e. q̃d igitur fit ex c b in totam b e, notum habebitur, est autem ipsa b c data per hypothesim, quare per 17. huius tota b e cognoscetur, ex qua si dempseris basim b c datam, residua c e nota u[illegible]tur, cũ eius medietate c d. casum itaq; c d minorem enisi sumus, cui si basim adiunxeris datam, casus maior b d mensuratus emerget, quod decuit explanare. ⁋ Operatio. Subtrahe quadratum lateris minoris a quadrato maioris, relictoq; diuiso per basim, quod exibit ab ipsa basi minuas, si perpendicularis intra triangulũ ceciderit, aut ab eo quod exibit basim demas, si extra ceciderit, eius autẽ quod relinquitur dimidiũ, ꝓ casu minori teneto, cui si id, quod ex diuisione elicitum est, sociaueris, casum maiorem congregabis, perpendiculari quidem intra triangulũ cadente. sed si extra ceciderit, casum minorem cum basi summabis, resultabit enim casus maior quæsitus. In exemplo. Sit latus a b 20. a c 13. & basis b c 21. quadratũ de 13. est 169. quadratũ de 20. est 400. subtraho 169. à 400. manent 231. quæ diuido per 21. exeunt 11. hæc sublata ex 21. relinquũt 10. medietas de 10. est 5. tantumq; minorem pronuncio casum, cui adiectis 11. colligo 16. pro casu maiori, hæc dum perpẽdicularis intra. Sed extra offeratur latus a b 51. a c 25. & basis b c 38. quæ quidẽ perpẽdicularẽ extra triangulum cadere significant. subtraho quadratum de 25. quod est 625. ex quadrato de 51. scilicet 2601. manent 1976. quæ diuisa per 38. eliciunt 52. à quibus demo 38. manent 14. quorum medietatem scilicet 7. casui minori deputabo, colligo 7 & 38. resultant 45. tantũ igit̃ maiorem enunciabo casum.

⁋ Quod sub differentia laterũ & congerie cõmuni continetur, æquum est ei, quod sub differentia casuum atq; congerie eorum, scilicet ipsa basi contineẽ rectangulũ.

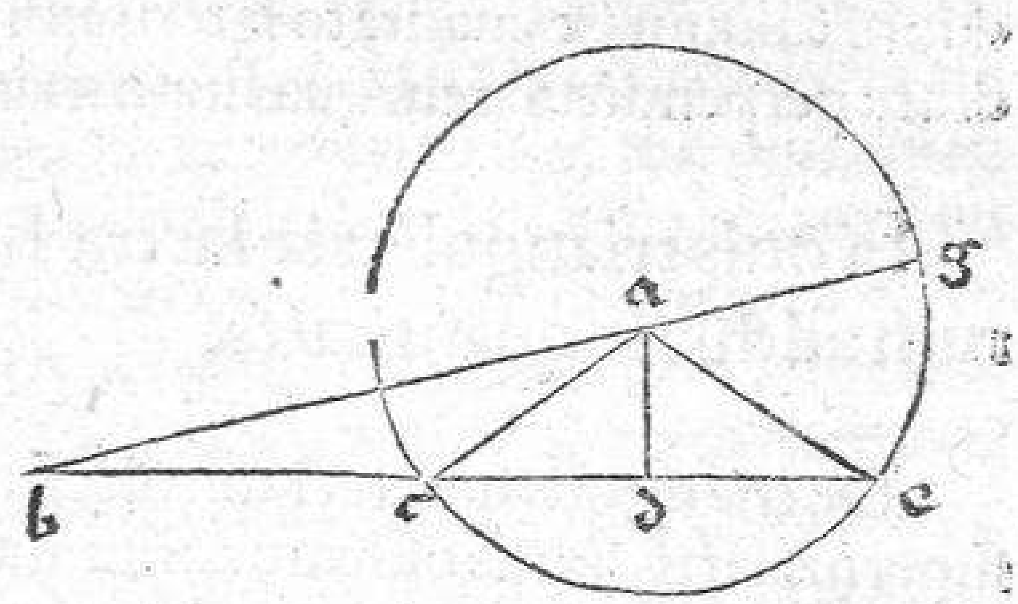
XLV.

Huiusmodi casus per alia media numerare.

Sit triangulus a b c non rectangulus trium notorum laterum inæqualium, à cuius puncto angulari a demittatur perpendicularis a d supra basim b c trianguli superficiem non transgrediens, quæ ex basi b c duos separet casus b d & d c, quorum alterũ altero maiorem esse in præcedenti conclusimus, propter inæqualitatem laterum a b & a c, hos casus mensurandos præstolamur. Super puncto a tanq̃ centro secundum quantitatem lateris minoris a c describo circulũ h e c, cuius circumferentia necessario secabit & basim b c, & latus a b, q̃ a c linea longior sit perpendiculari a d, breuior autẽ latere a b, secet itaq; basim b c in puncto e, quo cum centro circuli copulabo per lineã e a, lineam uero a b secet in puncto h. extendã deinceps b a ultra centrum circuli, donec occurret circumferentiæ eius in puncto g, erit igitur linea e d per tertiam tertij æqualis d c casui minori, & ideo linea b e est differentia casuum. Quoniã autem à puncto b extra circulum signato, duæ lineæ b g & b c productæ circulũ secent, erit per 35 tertij, quod fit ex g b in b h æquale ei, q̃d ex c b in b e, sed quod fit ex g b in b h, notum est per 16 huius, linea enim g b nota est cum sit æqualis duobus trianguli lateribus a b & a c per hypothesim datis, sed & b h differentia scilicet duorum laterum scita est per hypothesim & quartam huius



tam huius. quare & quod sub c b & b notum habebitur, cumque lineam b c notã subiecerit hypothesis, erit per 17 huius linea b e nota, differentia scilicet casuum, qua dempta ex basi b c nota, relinquetur linea e c cognita, cuius medietas d c est casus minor. Item casui dicto minori lineam b e notam adijcias, & prodibit casus maior. Si uero perpendicularis extra triangulum ceciderit descripto circulo super capite ipsius perpendicularis secundũ quantitatẽ lateris minoris cõtinuet latus longius ultra centrum circuli, donec obuiabit circumferentiæ circuli in puncto g, queadmodum supra fecimus. Extendatur denique basis, ut in ea residere possit perpendicularis demissa, coueniantque perpendicularis ipsa & basis prolongata in puncto d. non tamen ibi sistat, sed procedat quousque offendet circuli circũferentiã in puncto e, ducta semidiametro a e. pristino igitur freti syllogismo declarabimus quod fit ex e b in b c notum. cumque ex hypothesi notam habeamus basim b c, erit per 17. huius linea e b (summa uidelicet duorum casuum) nota: dempta ergo basi b c nota per hypothesim ex b e iã inuenta, residua c e nõ erit ignota. & eius medietas c d, casus scilicet minor. Item si basim b c casui minori iam noto adiunxerimus, casus maior b d notus conflabitur, quæ fuere depromẽda.



¶ Operatio. Aggregatum ex duobus lateribus per differentiam eorum multiplica, productoque per basim diuiso, quod exibit à basi subtrahas perpendiculari intra triangulũ cadente. aut basim ex eo quod diuisione facta elicitur minuas. residui enim dimidiũ erit casus minor quæsitus, cui si id quod ex diuisione elicitum est, addideris perpendiculari intra cadente, aut ei basim adieceris, si extra ceciderit perpẽdicularis, casum maiorem constitues. Verbi gratia. Sit latus a b 25. a c 17. & basis b c 28. congregabo 25 & 17, resultabunt 42. differentia duorum laterũ est 8. multiplico igitur 42 per 8, producuntur 336. quæ diuido per 28. numerum scilicet basis, exeunt 12. subtraho 12. ex 28. manent 16. quorum medietas est 8. Casus ergo minor erit 8. Itẽ addo 12. ad 8. ueniunt 20. & tantus habebitur casus maior. In hoc exemplo oportuit perpendicularem cadere intra triangulum. Sed offeratur mihi latus a b maius 20. a c 13. & basis 11. quo fit ut perpendicularis a d triangulũ egrediatur. Summa duorum laterum est 33. differentia eorum est 7. multiplico 33. per 7. producuntur 231. quæ diuido per 11. numerum scilicet basis, exeunt 21. à quibus minuo 11. manent 10. medietas de 10 est 5. tantusque numerabitur casus minor. Item congregabo numerum basis 11. cum casu minori 5. redduntur 16. pro casu maiori. Triplicem igitur huiusmodi casus metiendi artem absoluimus. Nunc quid utilitatis ipsi afferant paucis lucubrabimus.

XLVI.

Perpendicularem à quouis puncto angulari ad oppositum sibi latus protensam ex notis tribus trianguli lateribus reddere mensuratam.

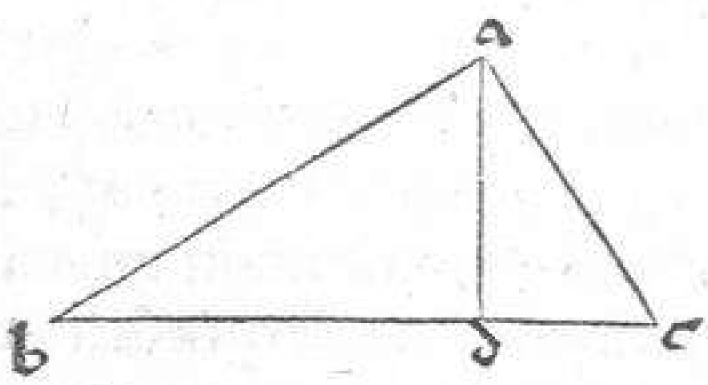
Sit triangulus a b c, ex cuius puncto angulari a descendat perpendicularis a d ad basim b c, si intra triangulum ceciderit, aut ipsi basi quantũ oportet continuate occurrens, si extra triangulum prosiliet. Di-

liet. Dico, ꝙ ipsa perpendicularis a d nota ueniet. Nam huiusmodi perpendiculari descendente concludentur duo trianguli rectanguli, latus commune habentes, ipsam scilicet perpendicularem, quorum sinister sinistrũ trianguli propositi latus, & casum sinistrum pro lateribus duobus reliquis accipit, dexter autẽ latus dextrũ cum casu dextro, quemadmodũ in figura apparet. per 26. igitur huius, quæ ex penultima primi pendet, perpendicularis a d nota ueniet, latere a b noto existente per hypothesim, casu autem b d per quamlibet trium præmissarum. Idem efficies si triangulo a d c rectangulo usus fueris. ¶ Opus breue. Quadratum alterius duorũ casuum ex quadrato lateris sibi cõterminalis minue, relicti enim radix quadrata perpendicularem quæsitam manifestabit.

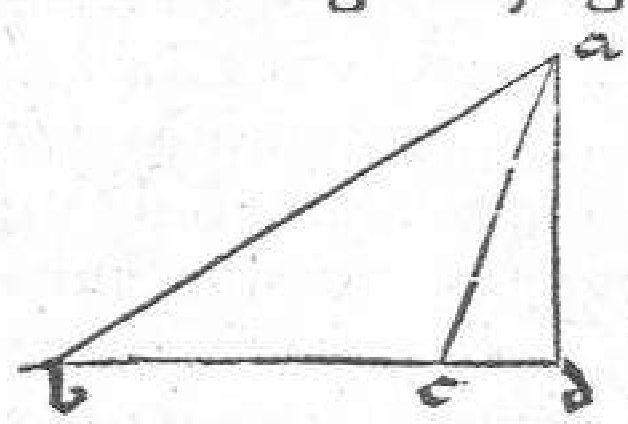
XLVII.

Si quis trianguli tria latera habuerit cognita, trium eius angulorum addiscet quantitates.

De triangulis non rectangulis sermo futurus habebitur, de rectangulis enim superius satis dixisse uidemur. Sint itaq; trianguli a b c tria latera nota, dico, ꝙ tres eius anguli non latebunt. Demittatur enim ex puncto a ad basim b c ꝑpendicularis a d, quæ cadat, ne intra triangulum an extra superiores docuerunt. Cadat primo intra triangulum, erit autem ipsa nota ꝑ præmissam. triangulus igit̃ a d c rectangulus duo latera a d & a c nota habens, per 27. huius angulos suos acutos manifestabit. Similiter triangulus rectangulus a b d notos habebit acutos angulos. duobus autem angulis b & c cognitis, qui triangulis dictis rectangulis & proposito nostro triangulo a b c cõmunes sunt, tertius angulus b a c per 25. huius non ignorabitur. omnes ergo angulos trianguli a b c notos effecimus. Cadat demum perpendicularis a d extra triangulum, argumentis igitur pristinis duo anguli a b d & a c d noti



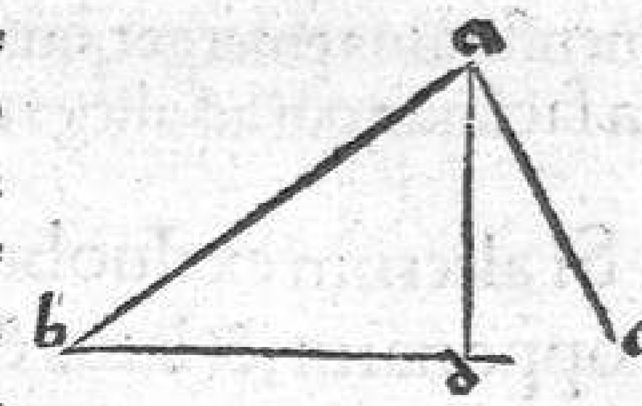
declarabuntur. cunq; ex 13 primi duo anguli a c d & a c b duos rectos notos, per 21 & 3 huius ualeant, erit per 4 huius & angulus a c b cognitus, unde per 25. huius angulus b a c non ignorabitur. Poteris autem hæc breuius concludere, si loco perpendicularis duos casus acceperis. Nam propter duo latera a b & b d nota ex hypothesi, & aliqua trium conclusionũ, quas de casibus numerandis tradidimus, per 27 huius notus erit angulus b, similiter propter latus a c notũ ex hypothesi, & casum d c superius numeratum, angulus c patefiet, duo autem anguli b & c cogniti, socium suum angulum a per 25 huius suscitabunt. ¶ Ne autem æquo diutius obtundaris, operationem duabus ex rebus colliges, nam perpendicularem ex præmissa, aut utrunq; duorum casuum ex aliqua trium præcedentium numerabis. angulos autem triangulorum partialium rectangulorum, qui & triangulo ꝓposito cõmunes habentur, 27 huius non sinet ignotos, qui tandem 25 huius dirigente, tertium angulum elicient mensuratum.



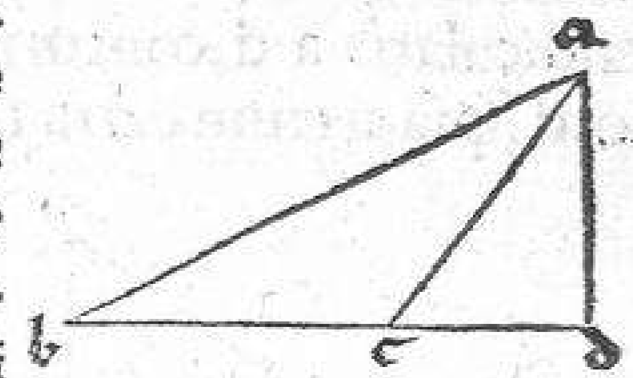
XLVIII.

Duobus trianguli notis angulis, laterum proportiones inuicem cognitum iri.

Trian-



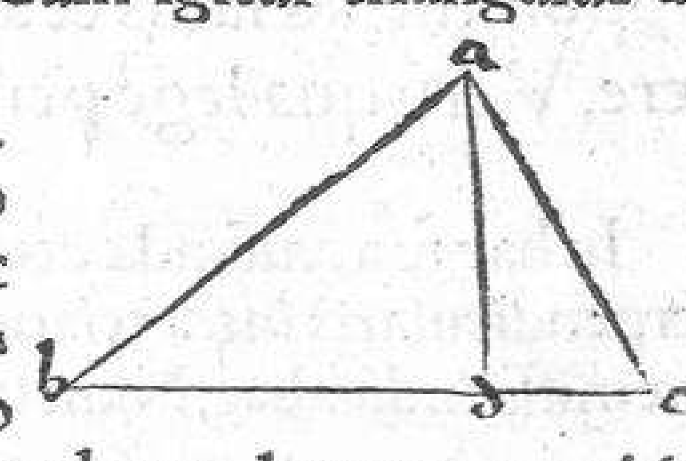
Trianguli a b c duos angulos supponamus datos. Dico, quòd quorumlibet duorum laterum proportio nota uidebitur. A communi enim termino duorum laterum, quorum proportionem eniti uoles, demitte perpendicularem uersus reliquũ latus, quæ cadat ne intra an extra triangulum ex angulis, quos basis sustentat, facile doceberis, illud autem processum nostrũ non uariabit, erit enim trianguli partialis a b d rectanguli angulus b notus ex hypothesi, iuuãte 25 huius, si opus fuerit, quare per 30 huius proportio a b ad a d nota accipietur. simili argumento proportio a c lateris ad eandem perpendicularem nota declarabitur. utroque igitur laterum a b & a c ad ppendicularem a d proportionem habente, erit per 12. huius eorum inter se proportio nota. Similiter procedemus circa duo latera quæcunque elegerimus, quod erat absoluendum. ¶ Operationi autem immorari non est consiliũ ipsam enim ex operibus allegatorum theorematum facile comparabimus.

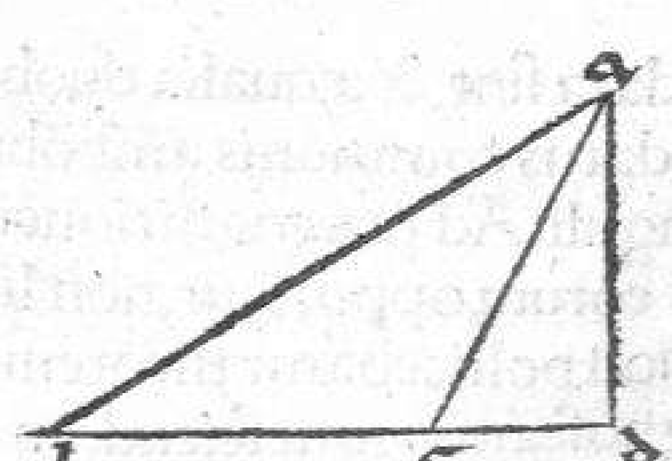


XLIX.

Si duo latera trianguli data notum ambiant angulum, reliquos angulos residuumque latus dimetiri.

Sint duo latera a b & b c trianguli a b c, nota cum angulo quem ambiunt a b c. Dico, quòd latus a c notum erit cum duobus angulis reliquis. Demittã enim â uertice anguli ignoti perpẽdicularem ad latus sibi oppositum, quæ uerbi gratia sit a d. nondum autem ex hypothesi nostra scire poterimus, cadat ne perpendicularis illa intra triangulum an extra, hoc enim non statim consequitur noticiã anguli, quem duo data ambiunt latera, nihilominus metam attingemus cupitam, & qua lege perpendicularis ipsa incedat explorabimus. Cum igitur triangulus a b d rectangulus angulum b acutum habeat datum ex hypothesi cum latere a b, erit per 29 huius utraque linearum a d & b d cognita respectu lateris a b. si itaque b d iam inuẽta per syllogismũ minor reperietur basi b c nota per hypothesim, perpendicularem intra triangulum cadere nemo dubitabit. si uero maior fuerit basi b c, cadet extra, & si æqualis, coincidet perpendicularis a d cum latere a c, eritque ppter hoc triangulus a b c rectangulus. Sit ergo b d casus primo minor basi b c data, quo ablato ex b c nota, relinquetur per 4 huius linea d c cognita. cumque iam pridem a d perpendicularem notam concluserimus, habebit triangulus a d c rectangulus duo latera a d & d c nota, quare per 26 huius latus eius a c notũ elicietur, quod & triangulo nostro cõmune est, sed & angulus eius acutus a c d argumento 27 huius inuenietur. duobus autem angulis b & c cognitis, tertius angulus a per 25 huius latere non poterit. Quòd si linea b d maior occurrat basi b c, dempta ipsa basi nota p hypothesim ex linea b d inuenta per argumentationem, manebit c d nota, deinde ut prius linea a c nota prodibit cum angulo a c d, quem si ex duobus rectis abstuleris, relinquetur per 13 primi & 4 huius angulus a c b cognitus, tandemque ex 25 huius angulus



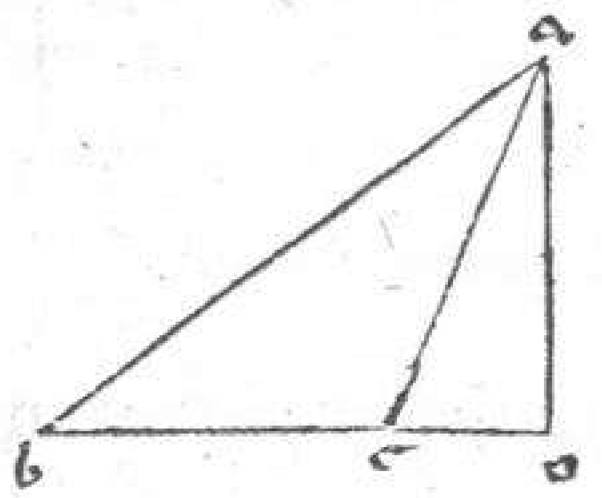


a mensuratus emerget, quæ fuere lucubranda. ¶ Operationis uero tenorē missum facimus, qui ad allegata theoremata confugienti ultro se ingeret.

L.

Si alterum ex duobus notis lateribus trianguli, angulo obtuso dato opponatur, & latus & angulos reliquos non ignorabit Geometra.

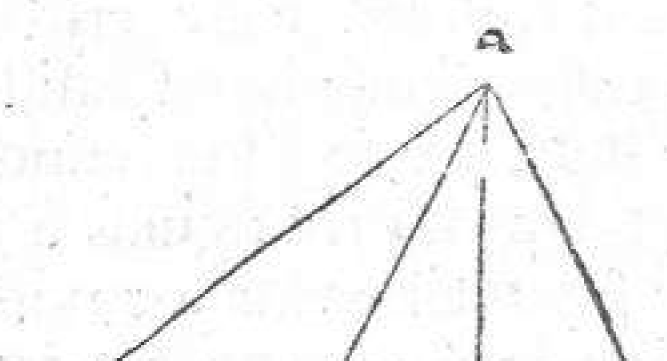
Duo latera a b & a c trianguli a b c nota sint, quorum alterum scilicet a b opponatur angulo a c b obtuso dato. Dico, quod & latus b c cognitum ueniet cū duobus angulis a & b. Ex termino enim communi datorum laterū descendat perpendicularis a d, concurrens cum basi b c, quantum oportet prolongata in puncto d, ipsam enim extra triangulum cadere cogit 31 huius. Triangulus itaque a c d angulum a c d notum habebit, ipse enim a c d angulus cum angulo a c b per hypothesim noto duobus rectis æquiualent, cūque latus a c trianguli rectanguli prædicti notū sit ex hypothesi, erit per 29 huius utraque linearum a d & d c nota respectu lineæ a c. item triangulus a b d rectangulus duo latera a b & a d nota habens, a b quidem per hypothesim, a d uero per argumentationē iam factam, ex 26 huius & 27 latus suū b d notum afferet cum angulo b, quare dempta c d prius cognita ex tota b d iam nota, relinquetur basis b c nō ignota. duo autem anguli b & c trianguli a b c, tertium angulū a per 25 huius excitabunt. Verum igitur enunciabat theorema nostrum. ¶ Operationem ex eis, quæ circa triangulos rectangulos tradidimus, facile colligemus.



LI.

Trianguli duo latera data cum angulo acuto, cui alterum eorum opponitur, ad latus & angulos reliquos cognoscendos nequaquam sufficere. Verū qua lege perpēdicularis cadat, si callebimus, oīa patefient.

In hac re accusanda uenit infirmitas anguli acuti, qui nequit docere cadat ne perpendicularis intra triangulum propositum an extra, quod obtusus angulus in præmissa indicabat. Nam sit triangulus a b c, cuius duo latera a b quidem maius, & a c minus sint data cū angulo b acuto, sitque angulus c acutus non datus, & à puncto a demittatur a d perpendicularis ad basim, quæ per 31 huius cadet intra triangulum. ex processu autē 45 huius, casus b d maior erit casu d c, abscindatur ergo ex b d linea e d æqualis ipsi d c, ducta linea a e, quæ per quartā primi æqualis erit lineæ a c. Quāuis itaque latera a b & a c trianguli a b c data sint, & æqualia duobus lateribus a b & a e trianguli a b e, angulus autē b datus communis ambobus triangulis, tamen bases eorum uarie sunt & reliqui anguli. Ad præcognitionem igitur duorū laterum & unius anguli acuti, cui alterū eorum opponitur, non ligatur noticia reliqui lateris & angulorū reliquorum, quod pollicebatur theorema nostrum. ¶ Vt autem latus & angulos reliquos agnoscamus, præsciendum est, qua lege perpendicularis à communi termino datorum laterum exorta cadat. Si enim intra triangulum ceciderit, triangulus a b d



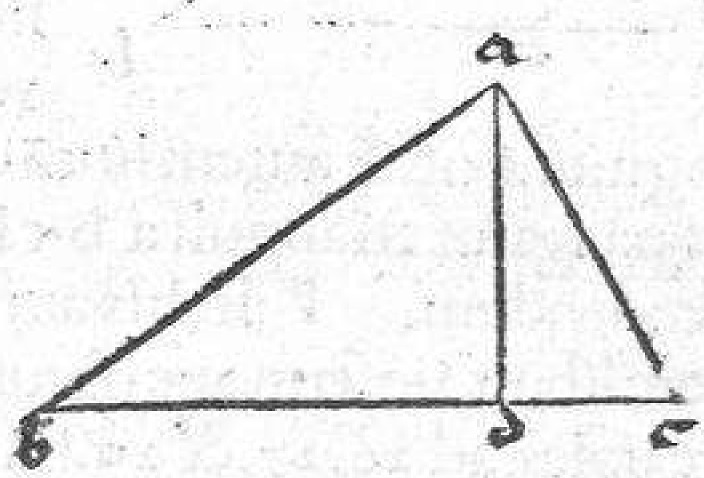
rectangulus

rectangulus habebit latus a b notum ex hypothesi cum angulo acuto b, quare p 29 huius tam perpendicularis a d nota uidebitur, ꝙ casus b d. Ex duobus autẽ lateribus a d & a c notis, trianguli a d c rectanguli per 26 & 27 huius linea d c inuenietur cum angulo c. duas igitur lineas b d & d c iam singulatim notos, si congregabimus, tota basis b c per 3 huius mensurata ueniet. duo etiam anguli b & c noti tertium angulum a 25. huius dirigente, cognitum elicient. Quòd si perpendicularis a d extra triangulum ceciderit, oportuit angulum a c b esse obtusum, præmissam igitur consulendo, & basim b c & angulos reliquos trianguli nobis propositi metiemur. ¶ Opus autem cum & facile sit, & ex superioribus pendeat, missum facio.

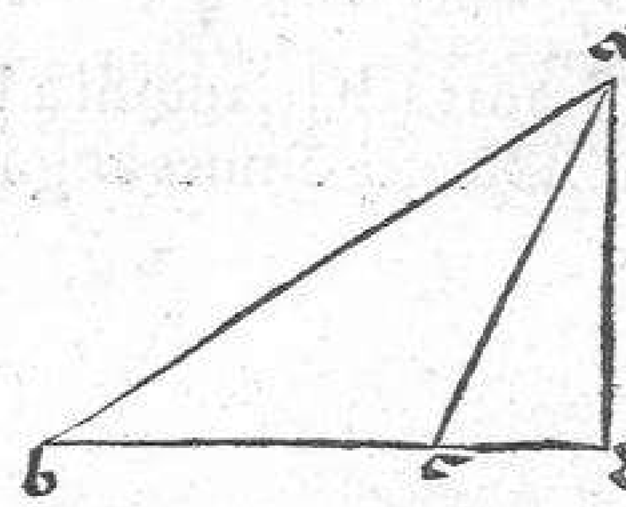
LII.

Si latus trianguli datum duos sustentet notos angulos, reliqua duo latera non erunt ignota.

Sit triangulus a b c, latus a b datum habens, cui insideant duo anguli a b c & b a c noti. Dico, ꝙ duo eius latera reliqua fient cognita. Pro angulo autem tertio mensurando, non est terendus dies, quem 25. huius exemplo notũ afferet. Ab a termino lateris a b dati exoriaт̃ ꝑpendicularis ad basim b c ignotã, quæ cadat ne intra triangulum an extra anguli, quibus subiacet basis, per 31. huius edocebunt. Cadat igitur prius intra triangulnm, triangulus itaꝗ a b d rectangulus angulum b acutũ habens datum cum latere a b per 29. huius, reliqua duo latera sua a d & d b cognita afferet respectu lateris a b. item triangulus a d c rectangulus cum latus a d iam notum habeat, pari ratione sua latera a c & c d, manifestabit respectu perpendicularis a d notæ. cũꝗ perpendicularis a d



data sit ad latus a b, erit & utraꝗ linearum a c & a d per 8. huius ad ipsum latus a b data. latus ergo a c trianguli propositi notum effecimus cũ duobus casibus b d & d c. quibus collectis b c basis cognita resultabit. Sed cadat perpendicularis a d extra triangulum, eritꝗ per media prætacta trianguli rectanguli a b d utrunꝗ latus a d & d b notum respectu a b. item triangulo a c d rectangulo angulum a c d notum habente propter duos angulos b a c & a b c notos ex hypothesi, quibus ipse per 32. primi æquipollet, cũ latere a d, per 29. huius, reliqua duo sua latera a c & c d cognita habebunт̃. Sic ergo latus a c trianguli a b c propositi notũ erit



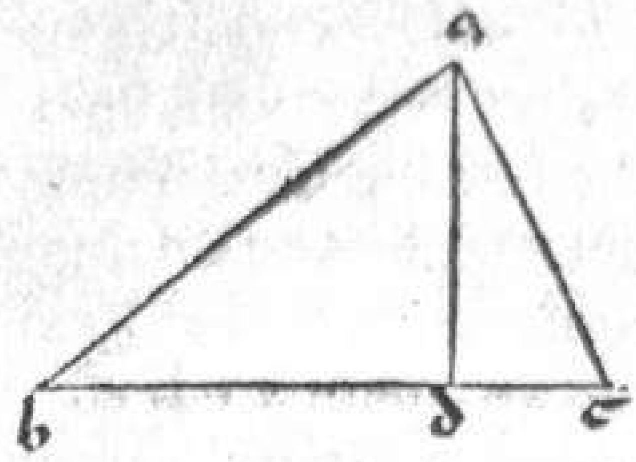
cum duobus casibus b d & d c, quorum minor ex maiore demptus relinquet basim b c notã, quod uolebamus explanare. ¶ Operatio autem ex allegatis comparabitur theorematibus.

LIII.

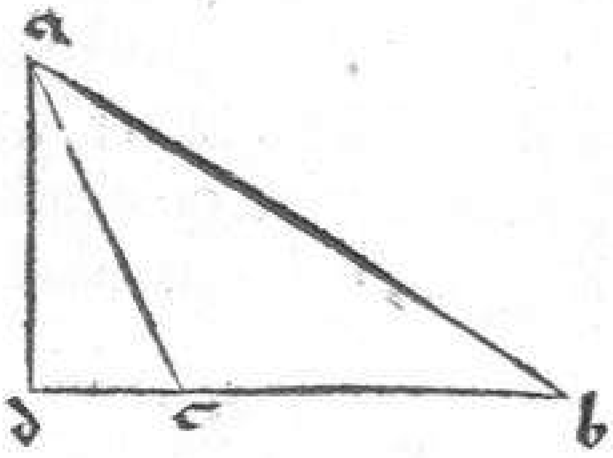
Latus trianguli notum, quod alteri duorum datorum angulorum opponitur, reliqua suscitabit latera.

In triangulo a b c latus a b notũ angulo a c b dato opponatur, sitꝗ angulus a b c datus. Dico ꝙ reliqua duo latera non erunt ignota. De angulo autẽ ter

 tio



tio, quemadmodum in præcedenti, nihil ambigui nos uexabit. Lateri duobus datis subiacenti angulis insistat perpendicularis a d ex puncto angulari sibi opposito sumens originem, quæ qualiter cadet anguli dati 31. huius commonente exploratū reddent. Cadat igitur primo intra triangulū, ut fiat triangulus a b d rectangulus, qui cū habeat latus a b notum cum angulo a b d acuto, habebit & latus c d cognitum cum latere suo c d, 29. huius dirigente. Similiter triangulus a d c, cum & latus a d iam notum habeat, & angulū a c d ex hypothesi datū, duo latera sua reliqua a d & d c manifestabit. omnes igitur lineas b d, a d, a c & d c mensura una, per quā a b nota supponebatur, secundū numeros metietur notos, quare etiā linea b c ex duabus b d & d c notis resultās non erit incognita. Sed cadat perpendicularis a d extra triāgulum concurrens cum basi b c, quātum sat est continuata. Cum itaq; angulus a b c notus supponatur cum latere a b, erit per 29. huius triāgulo a b d rectangulo existente, utraq; linearum a b & d b nota.

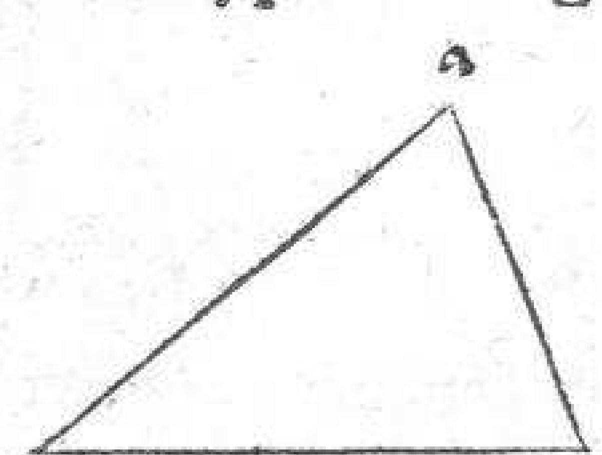


Rursus in triāgulo a d c rectangulo, cum latus a d iā sit notum, angulus autem a c d propter uicinum suū a c b ex hypothesi notum 13. primi arguente, notus habeatur, erit per 29. huius utraq; linearum a c & c d respectu lineæ perpendicularis a d, & ideo respectu a b cognita. postq; autem lineā c d ex d b minuemus, relinquetur basis b c cognita. reliqua igitur trianguli a b c latera, noticiæ nostræ subiecimus, quod expectabatur ostendendum. ¶ In his autem postremis conclusionibus operationem missam facere libuit, ne sermone obtunderemus nimio, quā quidem operationem, si colligere uoles, ad 26. 27. & 29. huius refugias.

LIIII.

Trium laterum trianguli inter se datis proportionibus, omnes eius angulos mensurare.

Latus a b trianguli a b c, tā ad latus eius a c, q̄ ad b c proportionem habeat datā, Dico, q̄ omnes anguli eius noti fient. Pro libito enim ipsum latus a b in q̄tlibet partes scindas, quarum una hoc in proposito mensura communis habebitur. cum itaq; a b latus sit notum per mensurā huiusmodi, erunt per 6. huius reliqua duo latera nota per eandem mensurā, & ideo per 48. huius triāguli a b c omnes anguli patefient, quod erat ostendendum. ¶ Operatio autem huius, postq; unum latus quodcunq; tanq̄ numerum notum pro libito posueris, & reliqua inde latera per opus sextæ huius didiceris, ab operatione 48. huius nō discrepat.

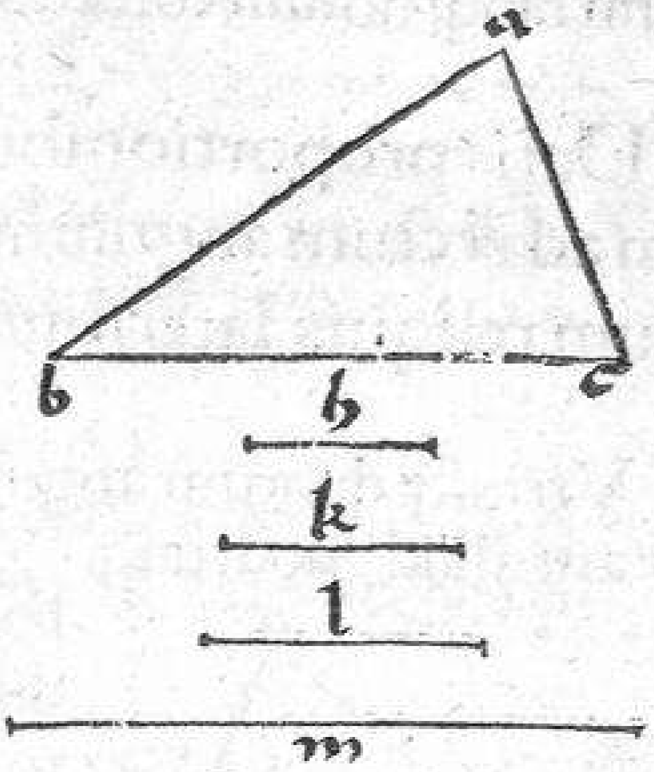


LV.

Tribus angulis trianguli cuiuslibet datas, inter se proportiones habentibus, unusquisq; eorum cognitus habebitur, latera quoq; inter se proportiones accipient notas.

Sit trian-

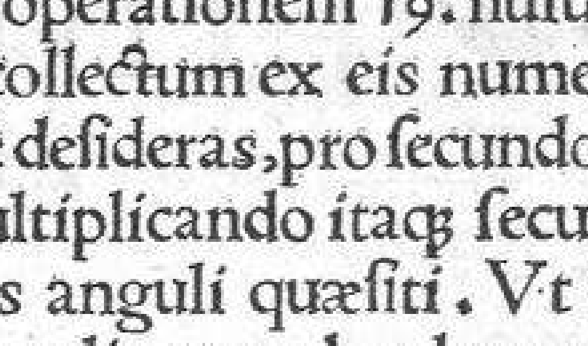
Sit triangulus a b c, cuius tres anguli inter se proportiones habeāt datas. Dico, ꝙ quilibet eorum notus erit, proportionesq́ꝫ laterum inter se datas fieri oportebit. Quoniā enim anguli a ad angulum b data est proportio, sit ipsa ut numeri h ad numerum k (necesse eñ est eā in numeris notis inueniri) & ꝓportio anguli b ad angulum c nota. tanq̃ꝫ numeri k ad numerum l, cum itaqꝫ proportio anguli a ad angulum b, sit sicut numeri h ad numerum k, erit coniunctim a & b angulorum ad angulum b sicut h & k numerorum ad k numerum, est autē b ad c sicut k ad k. per æquā igit̃ a b ad c tanq̃ꝫ h k ad l, & coniunctim a b c ad c sicut h k l ad l. aggregati itaqꝫ ex tribus angulis a b c ad angulum c est sicut aggregati ex tribus numeris h k l ad numerum l proportio. summa igitur trium angulorum a b c ad ipsum angulum c proportionē habet notā, summa autem huiusmodi per 32. primi duobus rectis æquipollet, quos oportet esse notos ex supradictis, unde & summa trium angulorum dictorum nota conuincitur, per sextam ergo huius angulus c notus declarabitur, qui cum ad reliquos angulos datas habeat proportiones, erunt & reliqui anguli ꝑ 6. huius noti. quare per 49. huius tria latera trianguli a b c proportiones inter se notas accipient, ambas ergo theorematis partes satis ostēdisse uidemur ¶ Operatio. Tribus angulis tres accomodabis numeros, ita ꝙ primus angulus ad secundum se habeat sicut numerus primus ad secundum, secundus uero angulus ad tertium, sicut secundus numerus ad tertium, quod facile fiet, si operationem 19. huius consulueris, quo facto, summabis dictos tres numeros, & collectum ex eis numerum pro primo statuas, numerum uero anguli, quem nosse desideras, pro secundo, & numerum duorum angulorum rectorum pro tertio. multiplicando itaqꝫ secundum per tertium, & diuidendo in primum, exibit quantitas anguli quæsiti. Vt si proportio anguli a ad angulum b fuerit sicut 10 ad 7. anguli autem b ad angulum c sicut 7 ad 3. colligo tres numeros 10. 7. & 3. fiunt 20. pro primo numero. libeat autem inuenire angulum a, cuius numerus est 10. quem pro secundo, numerus autem duorum rectorum usitatus est 180. multiplico igitur 180. per 10. producuntur 1800. quæ diuido per 20. exeunt nonaginta. angulum igitur a inuenio 90. gradus continentem, ut duo recti sunt 180. quare & ipse rectus habebitur. Repertis autem angulis ad operationem 49. huius confugiendum erit, ut proportiones laterum addiscamus.



LVI.

Data proportione duorū laterum, unoq́ꝫ angulo cognito, reliqui duo anguli noti fiēt. Vnde utriusqꝫ dictorum laterum ad tertium proportio non latebit.

Sit proportio a b lateris ad b c latus trianguli a b c data, cum uno angulo quocunqꝫ. Dico, ꝙ reliqui duo anguli noti uenient, & proportio utriusqꝫ dictorum laterum ad tertium latus data erit. Diuiso enim ad libitum latere a b in quotlibet partes, una earum tanq̃ꝫ mensura communi utemur, quæ quoties in latere b c contineatur, sexta huius edocebit.



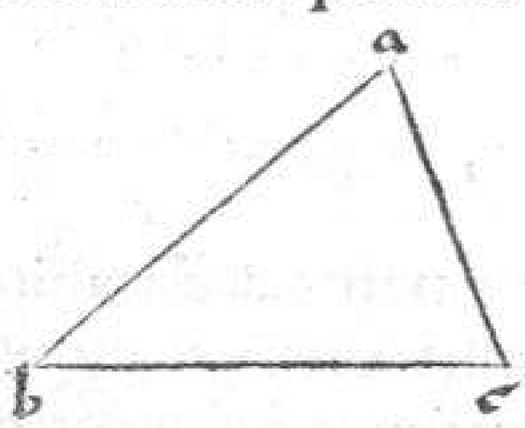
duo igitur latera a b & b c inter se data habebuntur, cunq; angulus unus quicunq; per hypothesim datus sit, erit per 50. 51. aut 52. huius reliquum latus cognitum, quare per diffinitionem laterum omniũ inter se proportiones habebimus datas, sed & per easdem reliqui anguli mensurabunt̃, quod intendebamus cõcludere.

¶ Operationem ex allegatis comparabimus locis, si prius alterum quorum laterum tanq; notum constituerimus.

LVII.

Datis proportionibus duorum angulorum, utriusq; uidelicet seorsum ad rectum angulum, unoq; latere quolibet cognito, omnes anguli cum reliquis lateribus cognoscentur.

Vtriusq; duorum angulorum a & b ad rectum data sit proportio, sitq; latus a b aut aliud quodcunq; cognitum. Dico, q͏̃ omnes anguli trianguli a b c noti fient cum lateribus. Erit enim per sextam huius uterq; dictorum angulorum cognitus, recto per 21. huius noto existente, quare per 53. & 54. huius, quod reliquũ est, absoluemus. ¶ Operationi autem nihil loci damus, q͏̃ ipsa ex supradictis facile decerpatur.



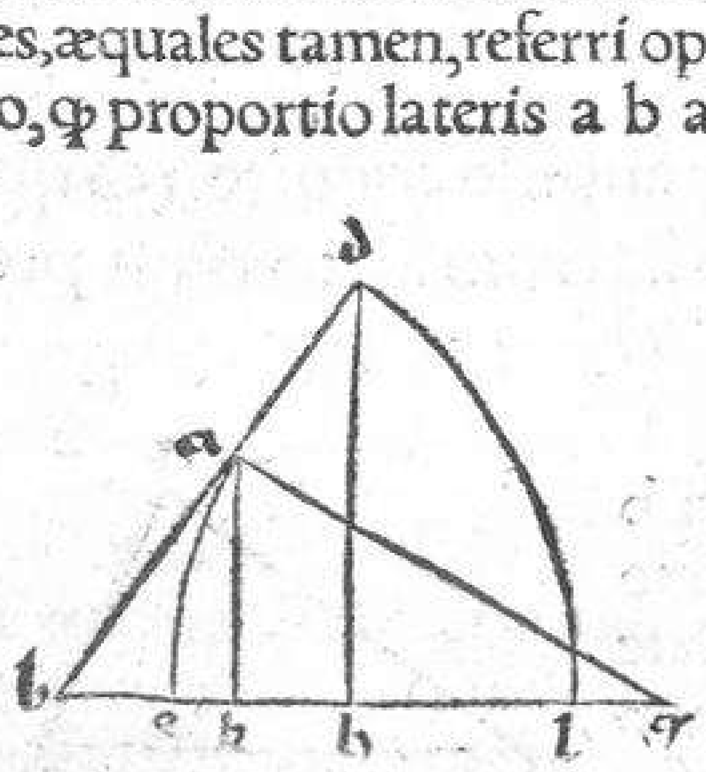
F I N I S.

LIBER SECVNDVS TRIANGVLORVM.

I.

In omni triangulo rectilineo proportio lateris ad latus est, tanq; sinus recti anguli alterum eorum respicientis, ad sinum rectum anguli reliquum latus respicientis.

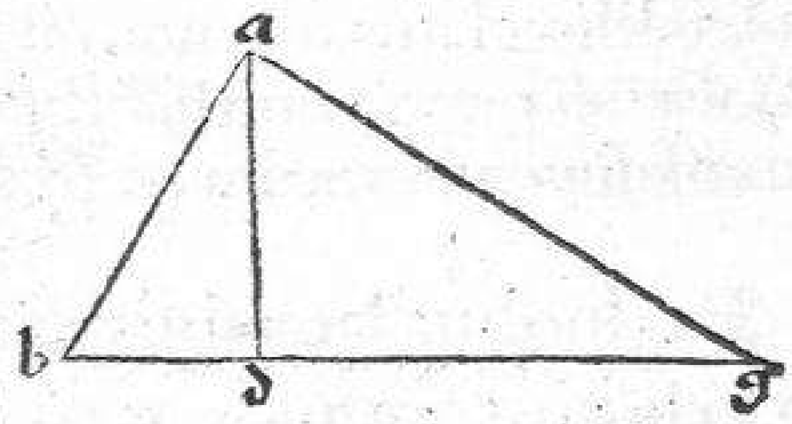
Sinum anguli, ut alibi uocamus, sinum arcus angulum ipsum subtendentis. Sinus autem huiusmodi ad unam & eandem circuli semidiametrum, siue ad plures, æquales tamen, referri oportebit. Sit igitur triangulus a b g rectilineus. Dico, q͏̃ proportio lateris a b ad latus a g est ut sinus anguli a g b ad sinum anguli a b g. item lateris a b ad b g tanq; sinus anguli a g b ad sinum anguli b a g. Si enim triangulus a b g fuerit rectangulus, ex 28 primi huius comparabimus demonstrationem. Si uero non fuerit rectangulus, duo tamen latera a b & a g fuerint æqualia, erunt quoq; duo anguli eis oppositi, & ideo sinus eorũ æquales, unde de ipsis duobus lateribus propositionem nostram uerificari constat. Quod si alterum altero longius extiterit, sit uerbi gratia a g lõgius, dirigaturq; b a usq; ad d, donec tota b d æqualis habeatur lateri a g; deinde super duobus punctis b & g factis centris, describi intel-



bi intelligantur duo circuli æquales secundum quantitates linearum b d & g a, quorum circumferentiæ occurrant basi trianguli in punctis l & e, ita, ut arcus d l quidem angulum d b l siue a b g, arcus autem a e angulum a g e siue a g b subtendat: ex duobus demum punctis a & d duæ perpendiculares a k & d h basi incidan[illegible] autem ꝙ d h est sinus rectus anguli a b g, & a k sinus rectus anguli a g b. est autem per 4. sexti Euclidis proportio a b ad b d, & ideo ad a g sicut a k ad d h. quare certum est, quod asserebat propositio.

II.

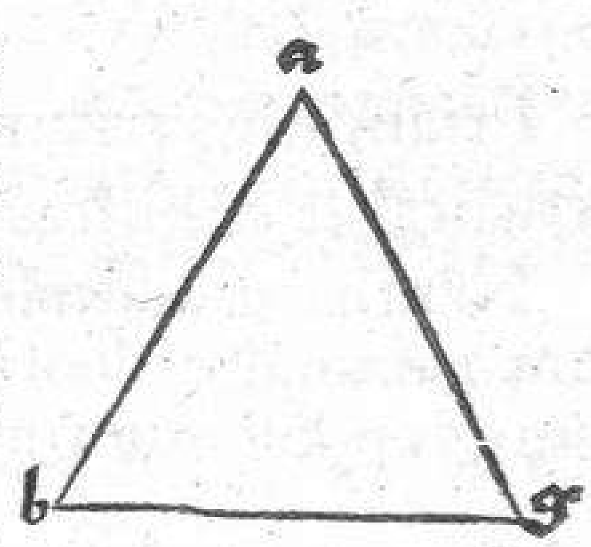
Cognito aggregato ex duobus lateribus trianguli, cū duobus angulis sibi oppositis, unumquodcꝫ trianguli latus secernere.



Triangulus a b g congeriem duorum laterū a b & a g habeat datam, & utruncꝫ angulorum a b g & a g b notum. Dico, ꝙ tria latera eius inuenientur. Erit enim ex præcedenti proportio a b lateris ad latus a g cognita propter angulos datos, & ideo cōiunctim proportio b a & a g ad a g dabitur: cumcꝫ congeries duorum laterum a b & d g sit nota per hypothesim, erit & latus a g cognitum, hinc & a b latus non latebit. ex hypothesi autem duo anguli a b g & a g b noti, latere non sinunt angulum b a g, sic demum ex duobus angulis b a g & a g b cognitis cum latere a b, tertium quocꝫ latus b g notum concludemus. Potest autem aliter, quancꝫ prolixius, idem absolui, si prius ex puncto a ad basim b g perpendicularem a d demiserimus; habebit enim triangulus partialis a b d rectangulus, angulū a b d acutū cognitū, quare p 31 primi huius proportio a b ad a d nota prodibit; ex eisdem quocꝫ medijs proportio a g ad a d non latebit, utrūcꝫ ergo duarum linearum a b & a g ad perpendicularem a d proportio nota conclamabitur; hinc per 28 primi huius earum inter se proportio scita ueniet, & ideo coniunctim aggregati ex eis ad utrancꝫ earum proportio notificabitur quāobrem utracꝫ earum nota prosiliet, hinc tandem linea b g, quemadmodū in primo præcepimus, cognoscetur.

III.

In triangulo æquicruri, si unus angulus datus fuerit cum uno latere quocuncꝫ, reliqua cognitum iri.

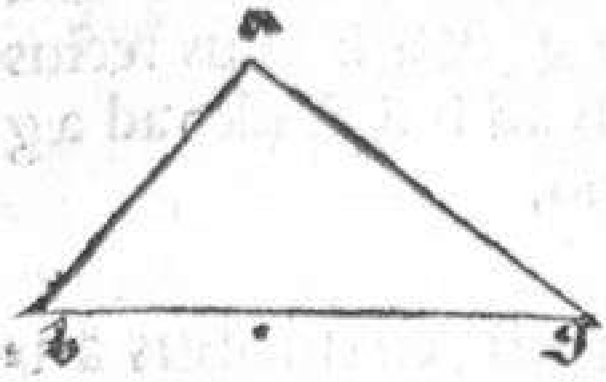


Quancꝫ in primo sufficienter hanc rem explicasse uidear, libet tamen paulisper circa triangulos æquicrures, & deinde circa triangulos uarios immorari; q̄ ea quæ superius quærebantur breuiori tramite consequamur. Sit talis triangulus a b g, duo latera a b & a g habens æqualia, cuius unus angulus quicuncꝫ sit datus cū linea terali eius. Dico, ꝙ reliquæ lineæ eius notæ uenient. Erūt enim p 38 primi huius duo reliqui anguli cogniti. unde & per ante præmissam reliquæ lineæ faciliter notificabuntur. Sic abscꝫ perpendiculari undecuncꝫ ducta, propositum attingere didicimus. Quòd si unus angulus eius trianguli duntaxat fuerit datus, proportionem laterum non ignorabimus, erunt enim per 35 primi huius & reliqui anguli dati; hinc & per ante præmissam uerum esse, quod asserebam confiteberis.

Si quis

IIII.

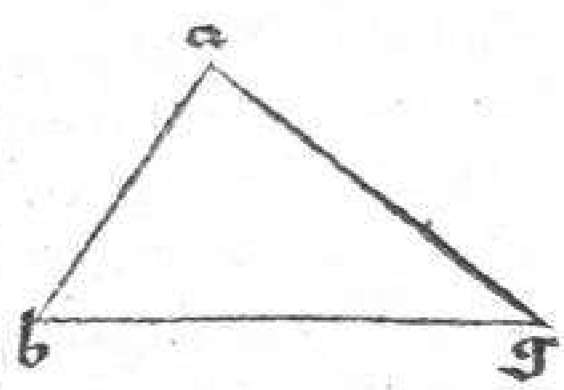
Si quis trianguli uarij duos angulos seorsum dederit cũ uno latere eius quolibet, reliqua latera faciliter metiemur.



Det mihi quispiã duos angulos trianguli a b g tria latera inæqualia habentis, cum uno ipsorũ laterũ, uerbi gratia a b. Dico, quod reliqua duo latera accipiet cognita. Nam 32. primi elementorũ intercedẽte tertius quoque angulus innotescet; cumque per antepræmissam proportio sinus anguli a g b noti ad sinum anguli a b g noti sit uelut lateris a b ad latus a g. tresque harum quantitatum notæ sint, cui nisi prorsus ignaro quarta quantitas, uidelicet latus a g non manifestabitur? Idem eodemque modo lateris b g cognoscendi præceptum habebitur. Hoc pacto perpendicularem undecunque etiam duxisse superuacaneum censebitur.

V.

Ex duobus lateribus trianguli datis cum angulo alteri eorũ opposito, reliquos angulos ac tertium latus notificare.



Sit talis triangulus a b g, duo latera a b & a g habẽs cognita cum angulo a b g. Dico quod reliqui duo anguli cum tertio latere suo innotescẽt. Superiori enim freti syllogismo ex duobus lateribus a g & a b cognitis cum sinu recto anguli a b g noti per hypothesim, angulus a g b notus emerget. Hinc quoque 32. primi ratiocinante tertius angulus b a g haud ignorabitur. Proportio autẽ sinus anguli a b g noti per hypothesim ad sinũ anguli b a g noti per argumentationẽ est ut lateris a g ad latus g b, quare & latus g b non erit ignotum. Quãuis autem ex duobus lateribus a b & b g cognitis cũ angulo b a g ab eis comprehenso aliter quam in primo reliquos angulos cum tertio latere dimetiendi sit potestas, quemadmodũ nunc recitabitur. Non tamẽ per hãc uiam operandum suadeo. erit enim propter angulum b a g notum congeries duorũ angulorũ a b g & a g b cognita. cumque proportio sinus unius eorũ ad sinũ alterius sit cognita: est enim sicut duorũ laterum a b & a g proportio data, fieret per tertij uterque angulorũ a b g & a g b notus. Sed hæc uia nihil facilitatis addit, quare in tali proposito à primi recedere non licebit.

VI.

Triangulus trium notorum angulorũ lateribus suis proportiones uendicabit cognitas.

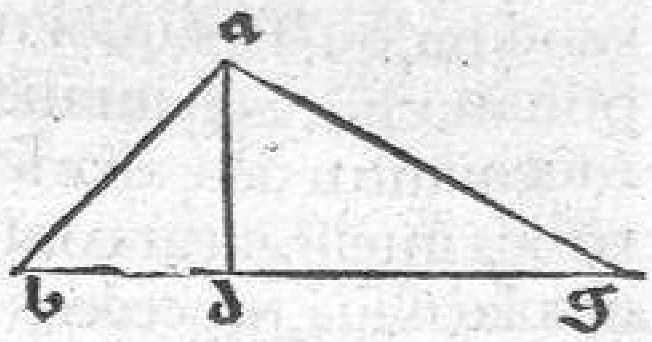
Nihil habet difficultatis hæc propositio, nisi 1. huius negligenter præterieris: nam quorumlibet duorum laterum ea erit proportio, quam habent sinus angulorum eis oppositorum ordine uidelicet præpostero, ut superius traditum est.

VII.

Data perimetro trianguli cũ duobus angulis eius, unumquodque latus seorsum cognoscere.

Congeries trium laterũ trianguli a b g sit data cũ duobus angulis eius a b g & a g b, Dico quod omnia latera eius seorsum innotescent. Erũt enim tres anguli eius noti,

noti,quare per argumentionem sæpe adductam propor=
tio a b ad a g nota erit, & ideo coniunctim aggregatũ
ex b a & a g ad lineã a g ꝓportionẽ habebit notã. Itẽ
ꝓportio a g ad g b nota erit,unde & ꝓportio b a,a g
ad g b cognita ꝓueniet, & ideo cõiunctim tota ꝑimeter
triãguli a b g ad lineã b g notã habebit ꝓportionẽ. cũq;

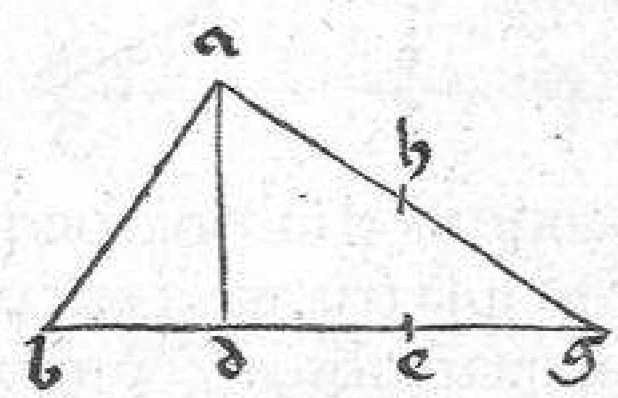


ꝑimetrũ ipsam dederit hypothesis,erit & linea b g cognita.hinc ꝙq; reliqua duo latera nota declarabunt. Poteris præterea idẽ cõcludere ducta ꝑpendiculari a d: nam per 30 primi huius utriusq; linearum a b & a g ad perpendicularem a d proportio nota erit,quare earum inter se proportio manifestabitur. item a b ad b d nota elicietur proportio,item ꝓportio a g ad g d similiter nota erit,unde & utriusq; duarum linearum a b & a g ad lineam b g proportio data proclamabitur: hinc ut prius congeries trium laterum ad ipsam b g lineam ,proportionem habebit datam,cætera ut ante.

VIII.

Datis proportionibus trium laterum,perpendicularisq; nota, cuncta latera dimetiri.

Trianguli a b g bina latera proportiones habeant cognitas,sitq; perpẽdicularis a d data. Dico,ꝙ tria eius latera innotescent. Nam si duo latera a b & a g fuerint æqualia,erit b d æqualis ipsi d g,unde proportio a b ad b d cognoscetur:& ideo quadrati a b ad quadratum b d proportio scita ueniet:quare etiam euersim argumentã-



do quadrati a b ad quadratum a d nota dabitur proportio:cumq; quadratum a d sit notum,propter costam suã ex hypothesi datam,erit quadratum a b notum, & inde ipsa linea a b non ignorabitur,ex qua demum & proportionibus laterum ꝑ hypothesim datis,reliqua latera innotescent. Quòd si alterum duorum laterum a b & a g altero maius extiterit,sit a b breuius:eritq; ob hoc casus b d breuior casu d g,abscindatur d e æqualis ipsi b d .ex processu igitur primi huius, quod fit ex e g in g b est æquale excessui quadrati a g supra quadratum a b, quorũ quidẽ quadratoꝝ ꝓportio nota erit,unde & diuisim eius,ꝗd fit ex e g in g b ad quadratũ a b ,ꝓportio nota declarabit. Hæc aũt ꝓportio per 6.elementoꝝ cõponit ex ꝓportiõe nota lineæ g b ad lineã a b.& ex ꝓportione e g ad a b,cũq; tã ꝓportio composita ꝙ ipsa componens prima sint notæ,erit & reliqua componens nota: unde & proportio b e ,& ideo medietatis eius b d ad lineam a b scita consurget quadratiq; a d ad quadratum b d innotescet,& ideo euersim quadratum a b ad quadratum a d notam feret proportionem:quadrato igitur a d noto redundabit quadratum lineæ a b cognitum,hinc ipsa a b lineæ cum reliquis trianguli lateribus innotescent.

IX.

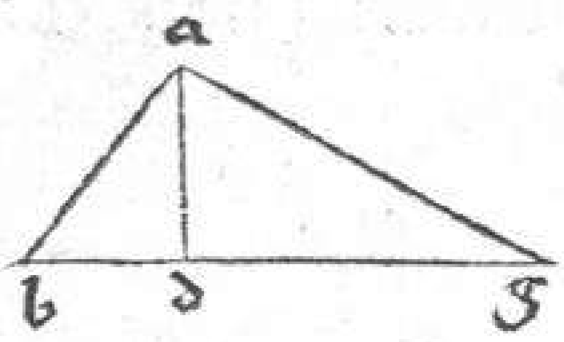
Ex proportionibus trium laterum trianguli , tres angulos eius inuestigare.

Resumpta priori figuratione concludemus propter hypothesim,ut in præmissa,proportionem a b ad b d notam,& ideo per primi angulus b a d , & inde angulus a b d cognoscetur,deinde propter angulum a b g iam notum cum proportione duorum laterum a b & a g data angulus a g b huius arguente innotescet.

tescet. hinc & tertius angulus non poterit ignorari. Habes tamen in primo alium modum, qui si planior uidetur, repetendus est. Si libeat aliter hanc absoluere exponatur linea quantalibet notæ quantitatis respectu perpendicularis a d, ad quã inueniantur duæ aliæ secundũ proportiones laterũ trianguli a b g datas: ex his tribus intelligatur constitutus triangulus, & per primi huius inue...tur perpẽdicularis sua, procedens à termino cõi duorũ laterum proportionaliũ duobus lateribus a b & a g. hæc eñ perpendicularis secundi trianguli habebit se ad perpendicularẽ a d sicut latus quodlibet secundi trianguli notũ ad latus trianguli a b g sibi correlatiuum: cũq; tres huiusmodi quantitatum sint notæ, quartam cognitũ iri necesse est. Hæc trahuntur ex similitudine duorum triangulorum totalium atq; partialium, quam ex sexti elementorum facile est colligere.

X.

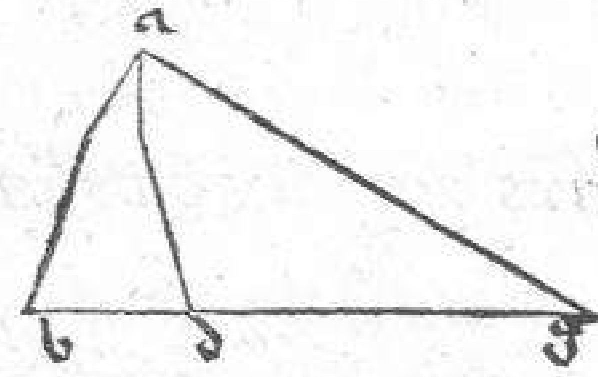
Data area trianguli cum proportionibus laterum, unumquodq; eorũ notificari. Vnde & angulos suos metiri licebit.



Repeto triangulum a b g cũ perpendiculari sua a d, quẽadmodũ apud huius figurauimus, ubi cõcludebatᷣ proportio a b ad perpendicularem a d nota: hinc & ꝓpter hypothesim perpendicularis a d ad basim b g & ideo ad eius medietatem habebit notam proportionem: cunq; quod sub ipsa perpendiculari & dimidia basi continetur, sit notũ, uidelicet area ipsa trianguli, erit per primi huius tã perpendicularis a d ꝙ basis b g nota. quamobrem & propter datas laterum proportiones reliqua latera & tandẽ anguli ipsi non latebunt. Quòd si modus ille uel prolixius nimium uel difficilis uideatur, alium aggrediaris: non dico tamen faciliorem, sed fortasse tibi magis placiturum. Ex tribus lineis quantiscunq;, notis per mensurã, ex qua area trianguli data surrexit, habentibus tamen proportiones ueluti tria latera trianguli propositi intellige constitutum triangulũ, cuius perpendicularem quamcunq; uoles per primi huius metiaris: quæ ducta in dimidiã basim sibi substratẽ suscitabit aream huiusmodi trianguli secundi cognitã: cunq; duo huiusmodi triangulos constet esse æquiangulos, erit area trianguli secundi ad aream trianguli primi, quæ iam notæ sunt, sicut quadratum lateris cuiuslibet secundi trianguli ad quadratum lateris sibi relatiui primi trianguli, unde quadratum illius lateris de primo triangulo, & ideo latus ipsum notificabitur, hinc quoq; reliqua non latebunt.

XI.

Data perpendiculari quacunq; cum duobus angulis trianguli quibuslibet omnia latera mensurare.

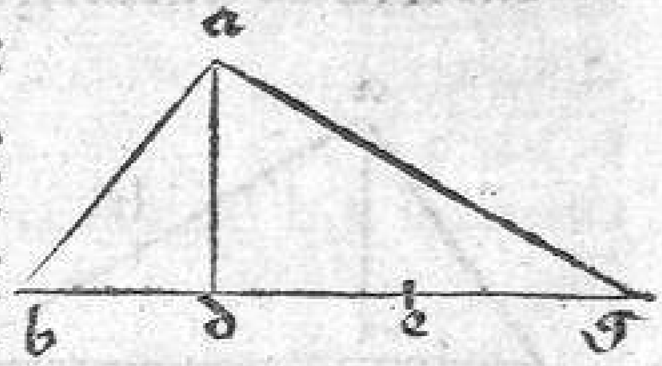


In triangulo a b g sit perpendicularis a d cognita cũ duobus angulis. Dico, ꝙ omnia latera innotescent. Habebit enim triangulus a b d partialis rectangulus latus a d cognitum cum uno angulo acuto, nam duobus angulis triãguli a b g cognitis, tertius latere nõ potuerit. quare per primi huius utraq; linearum a b & b d mensurata ueniet. per eadẽ rursus media utranq; linearũ a g & g d metiemur: hinc tota b g, & ideo omnia latera trianguli propositi cognoscentur, quod erat explanandum.

Data per

XII.

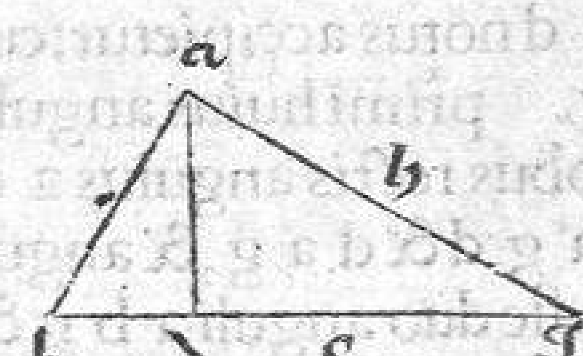
Data perpendiculari atq; basi, & proportione laterum cognitis, utrunq; latus cognoscere.



Hoc problema geometrico more absoluere nō licuit hactenus, sed per artē rei & census id efficere conabimur. Habeat itaq; triangulus a b g perpendicularem a d, & basim b g cognitas, proportionemq; laterum a b & a g datam, quærimus utrunq; eorum. Sit uerbi gratia ꝓportio a b ad a g tanq; 3 ad 5. ita, ut latus a b sit breuius latere a g, quo demum euenit ut casum b d breuiorē casu d g nemo inficiari possit, sit ergo d e æqualis ipsi b d, deturq; perpendicularis a d 5, & basis b g 20 pedes. pono lineam e g 2 res, ita, unde linea b e erit 20. demptis duabus rebus, & eius medietas b d 10 minus 1 re, reliqua uero d g, erit 10 & una res. duco b d in se, producitur 1 census & 100, demptis 20 rebus, quibus addo quadratū perpendicularis scilicet 25. colliguntur 1 census & 125. demptis 20 rebus. item b g in se, fiunt 1 census, 20 res & 100. quibus adijcio quadratum perpendicularis 25. colliguntur 1 census 20 res & 125. sic habebo duo quadrata linearum a b & a g, quorum proportio est ut 9 ad 25. duplicata scilicet proportio 3 ad 5, quæ erat ꝓportio laterum. cum itaq; proportio quadrati primi ad quadratum secundum sit tanq; 9 ad 25. si duxero 25 in quadratum primum, itemq; 9 in quadratum secundum, quæ producentur erunt æqualia, restaurans q; ut assolet defectibus, & ablatis æqualibus, utrobiq; perducemur ad 16 census & 2000 æquales 680 rebus; quamobrem quod restat, præcepta artis edocebūt. Linea ergo g e quam posui 2 res nota redundabit, hinc residua ex basi b e & eius medietas b d, quæ cum perpendiculari a d, latus a b notum suscitabūt, unde tandē & latus a g notum pronunciabitur, quæ libuit efficere.

XIII.

Cognito utroq; casuum, & proportione laterum data, quantitates laterum emoliri.



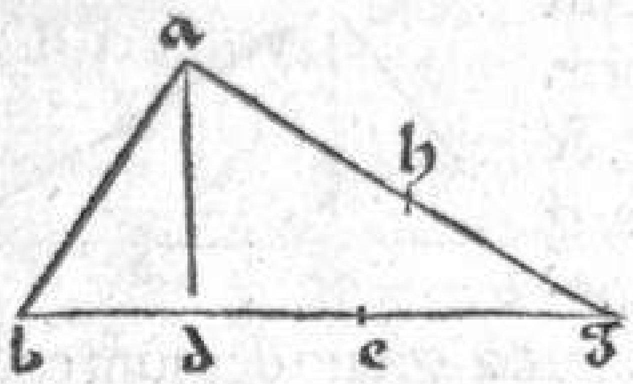
In triangulo a b g ducta perpendiculari a d, sit uterq; casuum b d & d g datus cum proportione laterum. Dico, q; utrunq; latus cum perpendiculari ipsa innotescent. Sit casus b d breuior, nam si essent æquales duo casus, latera quoq; haberentur æqualia, eorum tamen cognitio non consequitur casus datos & ꝓportionem laterum, quæ est æqualitatis. secetur ergo ex longiori casu linea d e æqualis casui breuiori; differentia quoq; duorum laterum sit h g. cum igitur ꝓportio a g lateris ad a b sit data, erit diuisim ꝓportio h g ad a h data, & ideo h g ad duplam ipsius a h scilicet congeriem duarum linearum a b & a h data erit; quare etiam coniunctim ꝓportio h g ad summam duorum laterum a b & a g non erit ignota. quod autem sub h g & duobus lateribus a b & a g cōiunctis continetur, æquum est ei, quod sub e g & g b. illud autem notum est ꝓpter duos casus ex hypothesi notos, unde & per processum primi huius, quod sub h g & g a a b continetur, notum erit; cunq; proportio linearum hoc continentium sit nota, erit per primi huius tam linea h g q; congeries duorum laterum nota; hinc tandem dempta h g nota ex aggregato laterū noto residui medietas pro latere breuiori reputabitur, unde & longius innotescet la-

 tus, quæ

tus, quæ fuere demonstranda.

XIIII.

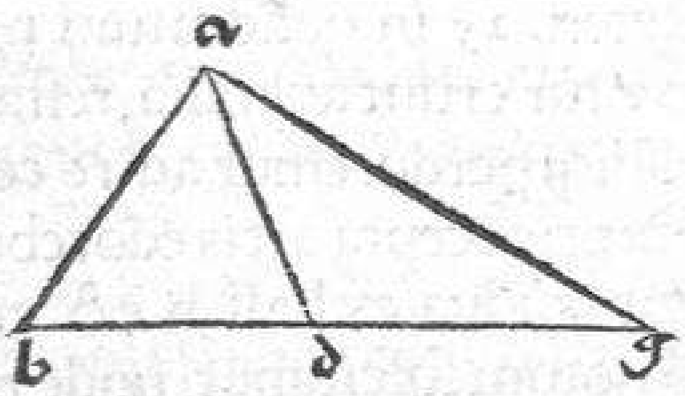
Si uterq; duorum casuum inæqualium datus fuerit, aggregatumq; ex lateribus datum, utrunq; latus secernere.



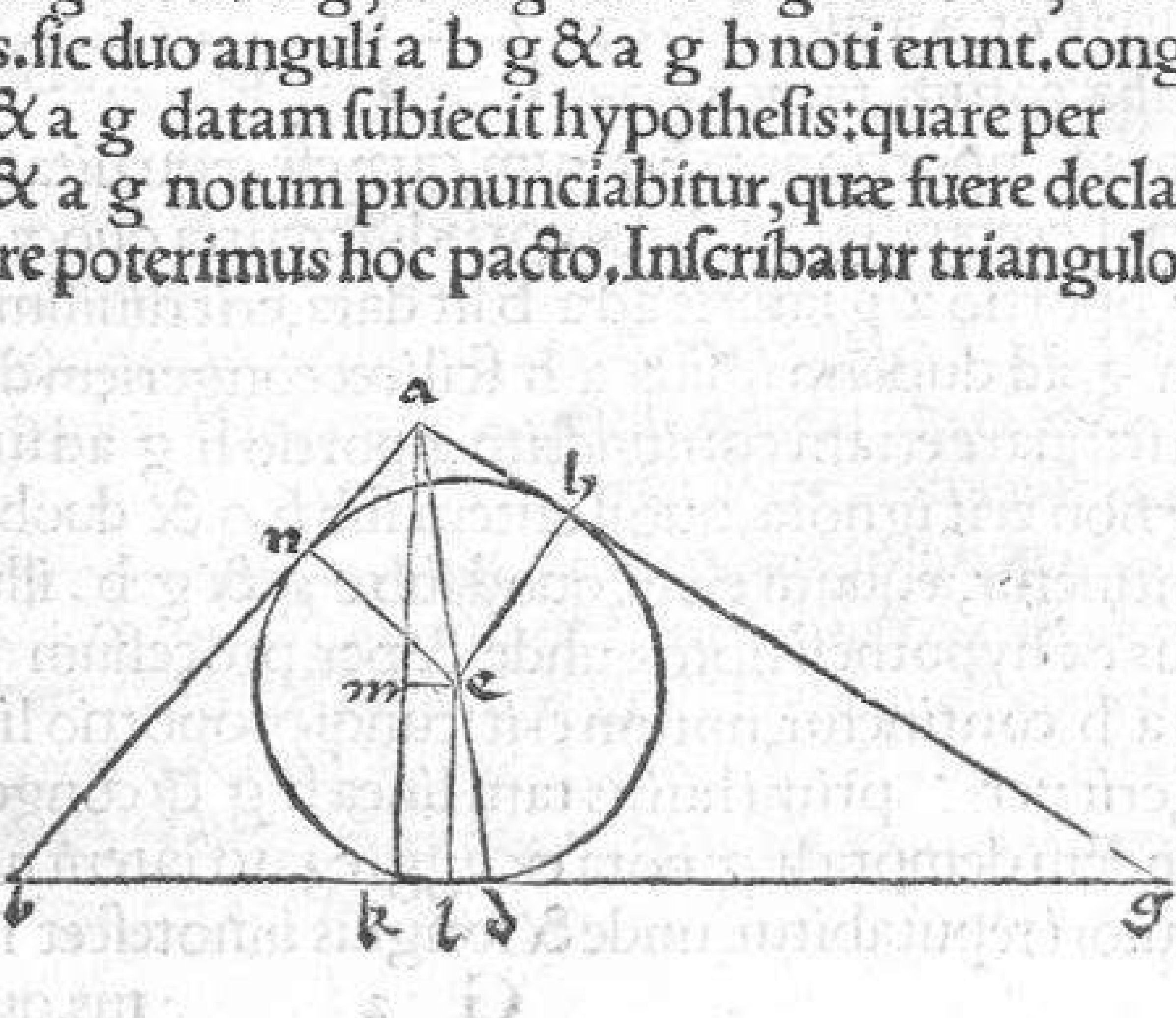
Resumo triangulum præcedentis, in quo datus sit uterq; casuum b d & d g, summaq; duorum laterum a b & a g sit nota. Dico, ꝙ utrunq; latus agnoscetur. Erit enim quod fit ex e g in g b cognitum, & ideo quod fit ex h g in g a, a b coniunctim notum erit. cũq; congeries ipsorum laterum sit data, erit per primi huius h g nota differentia scilicet laterum, quã si ex summa duorum laterum dempseris reliqui medietas quantitatem lateris minoris proclamabit. hinc quoq; reliquum latus non ignorabitur, quod erat absoluendum.

XV.

Basis trianguli data notum subtendens angulum cum aggregato laterum cognito, utriq; laterum & utriq; angulorum sibi oppositorũ uiam mensurationis aperient.



Triangulus a b g basim b g notam habeat cũ angulo b a g dato, sitq; congeries laterum a b & a g cognita. Dico, ꝙ utrunq; latus eius cũ utroq; angulorum eis oppositorum innotescent. Diuidatur enim angulus b a g per mediũ demissa linea a d ad basim contingente in puncto d, erit igitur per tertiam sexti elementorum ꝓportio b d ad d g sicut a b ad a g, & permutatim ꝓportio a b ad b d sicut a g ad g d: quare per quinti elementorũ proportio aggregati ex lateribus a b & a g ad basim b g, sicut lateris a b ad lineam b d; cumq; hæc proportio sit data est enim uterq; terminus eius datus, erit proportio a b ad b d data, sed & angulus b a d notus accipietur: cum sit medietas anguli b a g per hypothesim noti: quare per primi huius angulus a b d mensuratus habebitur: hinc quoq; reliquus de duobus rectis angulus a d b latere non poterit, qui cum sit æqualis duobus angulis a g d & d a g, & angulus d a g sit notus, erit residuus angulus d a g mensuratus. sic duo anguli a b g & a g b noti erunt. congeriem autem duorum laterum a b & a g datam subiecit hypothesis: quare per huius quarti utrunq; laterum a b & a g notum pronunciabitur, quæ fuere declaranda. Illud autem aliter attingere poterimus hoc pacto. Inscribatur triangulo a b g circulus h n l, cuius centrum necessario erit in linea a d, queadmodũ ex quarti elementorum trahitur, ꝙd sit e, à quo ad tria puncta cõtactuum h n & l, educantur tres semidiametri e h, e n & e l, deinde ex puncto a descendat perpendicularis a k occurrens basi in puncto l: oportet autem punctum k reperiri



periri in parte lateris a b,à linea diuidēte angulū per æqualia puncta b & d,si latus ipsum breuius fuerit latere a g: erit enim angulus a b g maior angulo a g b, & ideo duo anguli a b g & b a d,q̄bus æquipollet angulus a d g,maiores erūt duobus angulis d a g & a g d,scilicet angulo a d b,adiectis utrobiq; æqualibus angulis b a d & d a g;angulus ergo a d g maior,& angulus a d b minor recto conuincetur.hinc etiam cōstat semidiametrū e l secuisse lineam b d,ducatur insuper linea e m æquedistans basis,& ideo perpendicularis ad lineam a d, præterea basim b g æqualem esse duabus lineis b n & g h,nō negabis,si tertij elementorum satis didicisti,sublata ergo basi b g data ex congerie laterum data,relinquetur congeries duarum linearum a n & a h cognita,& ideo medietas eius scilicet linea a h mensurata:oportet enim duas lineas a n & a h circulū contingētes esse æquales.triangulus ergo a e h rectangulus ex latere suo a h cognito cum angulo acuto e a h noto propter duplum eius notum,duo latera sua a e & e d cognita depromet.sic circuli triangulo proposito inscripti semidiameter nota colligetur,ex qua in medietatem perimetri trianguli notam resultat area trianguli nota:ex area autē nota & medietate basis ꝑpter hypothesim cognita per primi huius perpendicularis a k mēsurata declarabitur,cui si lineā k m æqualē ipsi e l semidiametro circuli dempseris,relinquetur linea a m cognita,ex qua demum & linea a e superius nota,angulum e a m metieris,quo tandem sublato ex medietate anguli b a g dati scilicet ex angulo b a d,relinquetur angulus b a k notus,qui deinde angulum a b g latere non sinet:sed & duo anguli b a g & a b g tertium socium suū angulum a g b notum suscitabunt,postremo igitur p. huius latera trianguli nota prosilient.

XVI.

Data basi alicuius trianguli cum perpendiculari cui subsistit, & aggregato laterum cognito, utrunq; eorum secernere.

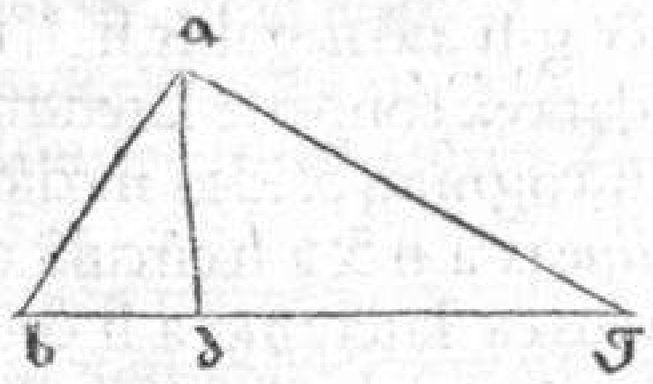
Hæc partim conuertit præcedentem,& ideo figuram suā resumet,ubi ex perpendiculari nota cum medietate basis aream trianguli metiemur,cunq; perimeter trianguli sit nota,erit semidiameter e n circuli sibi inscripti nota:linea quoq; a n nota proclamabit,ut in præcedenti;quare & linea a e & angulus e a n notificabuntur,unde & duplus angulus n a h siue b a g non latebit,k m autem æqualis semidiametro e l siue e n cognitæ cum perpendiculari a k per hypothesim nota,differentiam suam scilicet a m lineam notificabunt:quæ rursus cum a e pridem cognita,angulum a e m notum reddent,æqualem uidelicet angulo a d b: ex duobus autem angulis n a e siue b a d & a d b cognitus,angulus quoq; a b d siue a b g notus declarabitur:erat autem b a g cognitus. quare residuus a g b non ignorabitur,& ideo per huius utrunq; latus notum enunciabitur, quod placuit determinare.Non autem necesse est perpendicularem a k intra triangulum cadere,sed contingit eam cadere extra triangulum,nonnunq; etiam coincidere lateri minori,si fuerint inæqualia latera,maiori enim coincidere non potest: huius rei indicia erunt talia.Si acciderit lineam a n suo modo repertam cum semidiametro circuli inscripti triangulo coniunctim æquales esse perpendiculare a k datæ,necessario perpendicularis dicta coincidet lateri a b,id est, oportuit angulum a b g trianguli propositi esse rectum:si uero tale aggregatum minus fuerit,ipsa perpendiculari datæ signum est eam intra triangulum cecidisse,& si maius extra.super hoc autem demonstrationem conscribere non est consilium, cum faci

 le quidem

le quidem sit, parum autem utilitatis adducat: tuo igitur quod reliquum est seruatur ingenio, figuræ præterea aliter cadenti demonstrationē suam, nisi rudissimus fueris, accomodare poteris.

XVII.

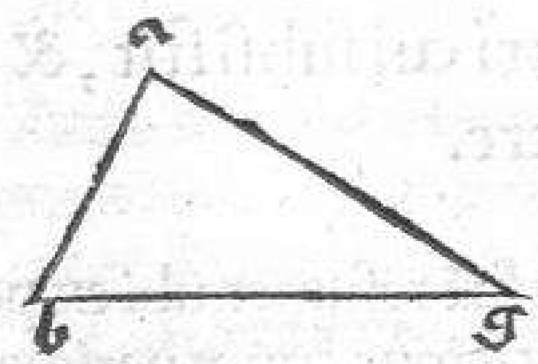
Datis duobus angulis & uno casu quocunq;, omnia latera cum perpendiculari manifestare.



Sit triangulus a b g qualis proponitur, in quo ꝑpendicularis a d duos casus ex basi distinguat b d & d g; quorum alter uerbi gratia b d sit cognitus cū duobus angulis trianguli a b g. Dico, ꝙ omnia latera sua noticiā non fugient. Erunt enim per hypothesim 32. primi elementorum suffragante tres anguli trianguli a b g cogniti, quare triangulus partialis a b d rectangulus angulum a b d acutum habens notum cum latere b d, reliqua duo latera sua a b & a d per primi huius notificabit: hinc in triangulo a g d partiali angulum a g b acutum habente notum cum latere a d, utraq; linearum a g & g d innotescet per eandem primi huius; collectis ergo duabus a d & d g, resultabit tota basis cognita, & problematis integra consummabitur intentio.

XVIII.

Data proportione duorum laterū trianguli cum angulo alteri eorum opposito, reliquos duos angulos mensurare.



Talis esto triangulus a b g, cuius duo latera a b & a g ꝓportionem habeant notā, sitq; angulus a b g datus. Dico, ꝙ reliqui anguli non latebunt. Erit enim per huius ꝓportio a g lateris ad a b tanq; sinus anguli a b g ad sinum anguli a g b, tribus autem harum notis existentibus quarta quātitas nota ueniet. inde ergo angulus a g b notificabitur, & tandem tertius b a g angulus latere nō poterit. Constat deniq; utrunq; laterum a b & a g ad ipsam basim b g notam habitum ire proportionem, si supra memorata repetieris, quod quidem corollarij uice libuit annectere.

XIX.

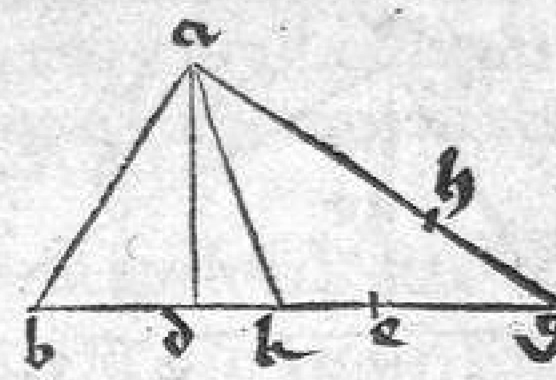
Datis duobus casibus cū differentia laterū utrūq; eorū percontari.

Est enim quod sub differentia casuum & ipsa basi continetur æquale ei, quod sub differentia laterum atq; ipsorum congerie continetur; eo igitur cognito & differentia laterum data per primi huius congeries laterum mensurabitur; unde etiam utrunq; eorum noticiæ subijcietur.

XX.

Si quis differentiam laterum dederit, differentiamq; casuum cū angulo quē basis subtendit, omnia latera cognita recipiet.

Esto triangulus a b g, in quo perpendicularis a d duos casus b d & d g secernat, quorum differentia e g sit data; differentia etiam laterū quæ sit h g nota supponaponatur cum angulo b a g. Dico, ꝙ omnia latera & omnes anguli cognoscendi uenient. Descendat nanqꝫ ex uertice trianguli à linea a k, diuidens angulum b a d per æqualia; erit itaqꝫ ꝓportio a g ad g k, sicut duarum b a, a g coniunctorum ad basim b g, quemadmodum superius in huius ratiocinati sumus: ꝓportio autē b a, a g ad basim b g est, ut e g ad h g per

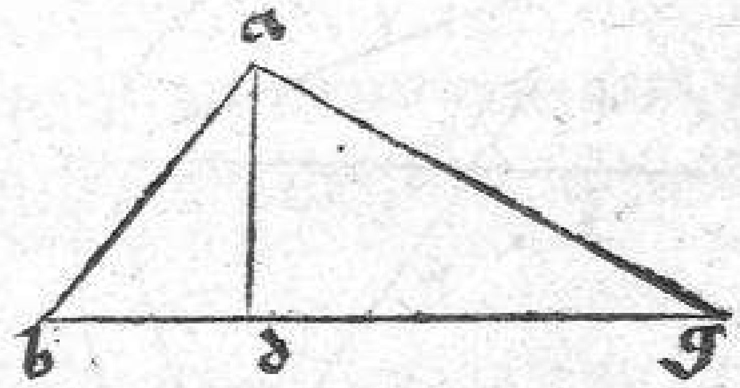


primi huius, & secundā partem sexti elementorum, quæ cum sit nota ꝓpter terminos suos ex hypothesi datos, erit & proportio a g ad g k cognita; cunqꝫ angulum b a g dederit hypothesis, erit eius medietas g a k cognita, quare per corollarium huius angulum a g k siue a g b notum comparabimus, & ideo tertius angulus b a g trianguli ꝓpositi non latebit. inde quoqꝫ per huius proportio a g lateris ad latus a b scietur, & diuisim proportio hæ differentiæ laterum notæ ad latus breuius a b nota erit, unde & latus a b & tandem reliqua omnia ex supra dictis cognoscemus.

XXI.

Datis duobus lateribus trianguli cuiuslibet cum proportione casuum, quantitatem basis agnoscere.

Sint duo latera a b & a g trianguli a b g cognita, proportioqꝫ casuum b d & d g sit data. Dico, ꝙ basis ipsa nota proueniet. Est enim differentia quadratorum a b & a g nota ꝓpter hypothesim, æqualis differentiæ quadratorum b d & d g, quemadmodū in huius ostēdimus,



cunqꝫ proportio casuum sit data, erit & ꝓportio quadratorum suorum data: & diuisim differentia huiusmodi quadratoꝝ ad quadratum casus minoris b d notam habebit proportionem, cūqꝫ differētia ipsa sit nota, erit & quadratum casus minoris cognitum, unde & casus ipse minor & deinceps reliquus innotescent, tota igiť basis nota elicietur. Non mireris autem, ꝙ hactenus ut plurimū perpendicularem intra triangulū cadere supposuerim, quāuis nonnunqꝫ extra triangulum cadere cogatur, habet enim hoc omnis triangulus infallibiliter propriū, ꝙ ab aliquo punctorum eius angularium ad latus sibi oppositū ducibilis est perpendicularis una intra angulum ipsum casura. Qđ si extra triangulum perpendicularis ceciderit, paucis rebus mutatis & cognitu facilibus, quicquid facto opus est, cōsequeris: nollem equidem ingenium tuum pauculis quibusdam inueniendis non fatigari.

XXII.

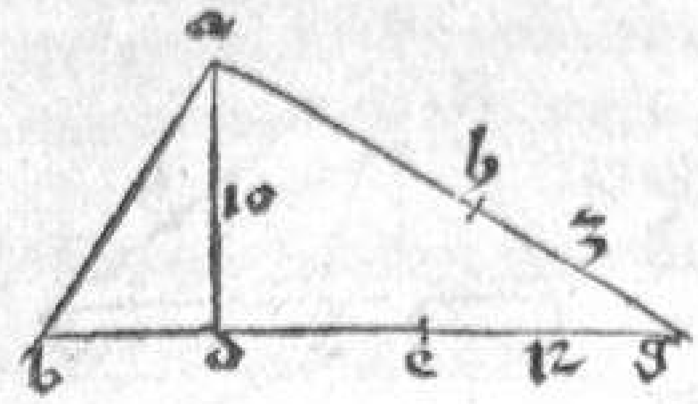
Datis duobus casibus cum proportione laterum, utrunqꝫ eorum dimetiri.

Hæc uidetur conuertere præcedentem, deductionem autem eam prorsus habet quā præcedens, quāobrem tanqꝫ satis lucubratā tibi relinquo.

XXIII.

Data differentia duorum laterum, differentiaqꝫ duorum casuū cū ipsa perpendiculari cognita omnia latera propalare.

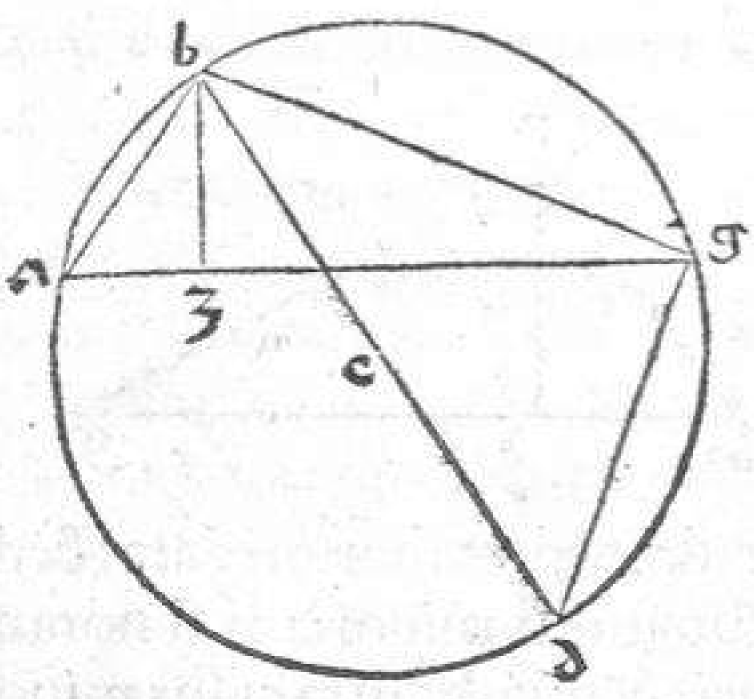
Sit talis triangulus a b g, cuius duo latera a b & a g differentiā habeant notā h g, ductaqꝫ ꝑpendiculari a d duorum casuum b d & d g, differentia sit e g: hæ duæ diffe-



duæ differentiæ sint datæ,& ipsa perpendicularis a d data. Dico, quod omnia latera trianguli nota concludentur. Per artem rei & census hoc problema absoluemus. Detur ergo differentia laterum ut 3, differentia casuum 12, & perpendicularis 10. pono pro basi unā rem, & pro aggregato laterum 4 res, nā proportio basis ad congeriem laterū est ut h g ad g e, scilicet unius ad 4. erit ergo b d $\frac{1}{2}$ rei, minus 6, sed a b erit 2 res demptis $\frac{1}{2}$. duco a b in se, producuntur 4 census & $2\frac{1}{4}$. demptis 6 rebus. itē b d in se facit $\frac{1}{4}$ census, & 36 minus 6 rebus: huic addo quadratum de 10 qui est 100. colliguntur $\frac{1}{4}$ census & 136 minus 6 rebus, æquales uidelicet 4 censibus & $2\frac{1}{4}$ demptis 6 rebus. Restaurando itaque defectus, & auferendo utrobique æqualia, quemadmodum ars ipsa præcipit, habebimus census aliquot æquales numero, unde cognitio rei patebit, & inde tria latera trianguli more suo innotescēt.

XXIIII.

Datis tribus lateribus trianguli rectilinei, diametrum circuli eum circumscribentis inuenire.

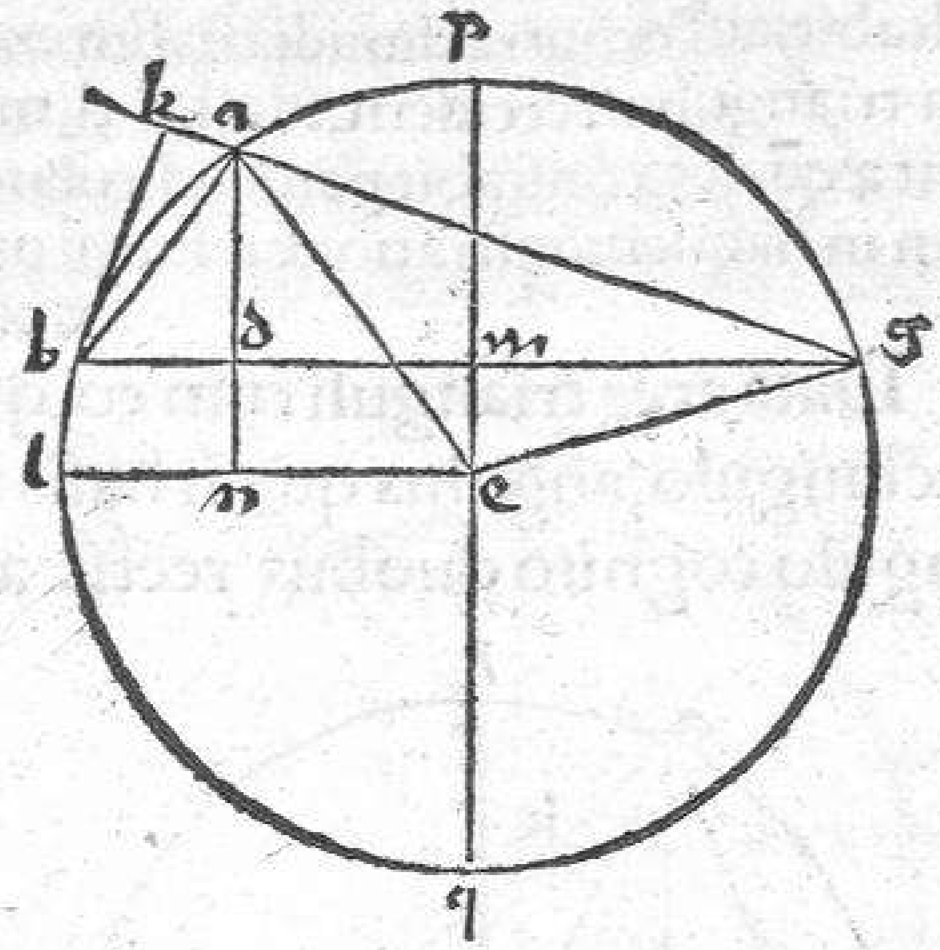


Hæc tametsi de angulis trianguli inueniendis nihil proponat, utilis tamen sequentibus uidebitur. Sint tria latera a b, b g & g a, trianguli a b g nota, quærimus diametrum circuli eum circūscribentis. Esto circulus huiusmodi a b g d, oportet autem duos angulos quicunque fuerint trianguli a b g esse acutos, qui sint, uerbi gratia, a & g, quos facile cognosces, si primo triangulorum libello satis incubuisti: demittaturque à puncto b perpendicularis b 3, & diameter circuli prædicti b e d, cuius terminus d copuletur puncto g per lineā d g, habes itaque duos triangulos a b 3 & b d g æquiangulos, uterque enim angulorum b a g & b d g in circumferentia consistens suscipit arcum b g, sed uterque angulorum a 3 b & b g d rectus est: a 3 b quidem ex dispositione figuræ, b g d autem ex dispositione & 30. tertij elementorum, quare & tertius tertio æqualis cōuincetur: unde & per quartā sexti proportio 3 b ad b g est ut a b ad b d. tres autem harum notæ sunt, duæ scilicet a b ad b g per hypothesim; perpendicularis uero b 3 ex primi huius inuenitur, ergo & quarta, quæ est diameter circuli, nota ueniet, quod expectabas ostendendum. Elegimus autem duos angulos acutos, ut perpendicularis intra triangulum coartaretur facilitatis gratia, nam si caderet extra, parumper uariandus esset processus. Quòd si acciderit quadratum alicuius trium laterum quadratis duorum reliquorum laterum simul iunctis æquiualere: uerbi gratia, quadratum a g æquari duobus quadratis linearum a b & b g, erit a g diameter circuli circumscribentis triangulū, neque ampliori quæsito opus est: fiet enim per ultimā primi elementorum angulus a b g rectus, & ideo per cōuersionem 30. tertij a b g semicirculus habebitur, & a g diameter circuli, quod erat exequendum.

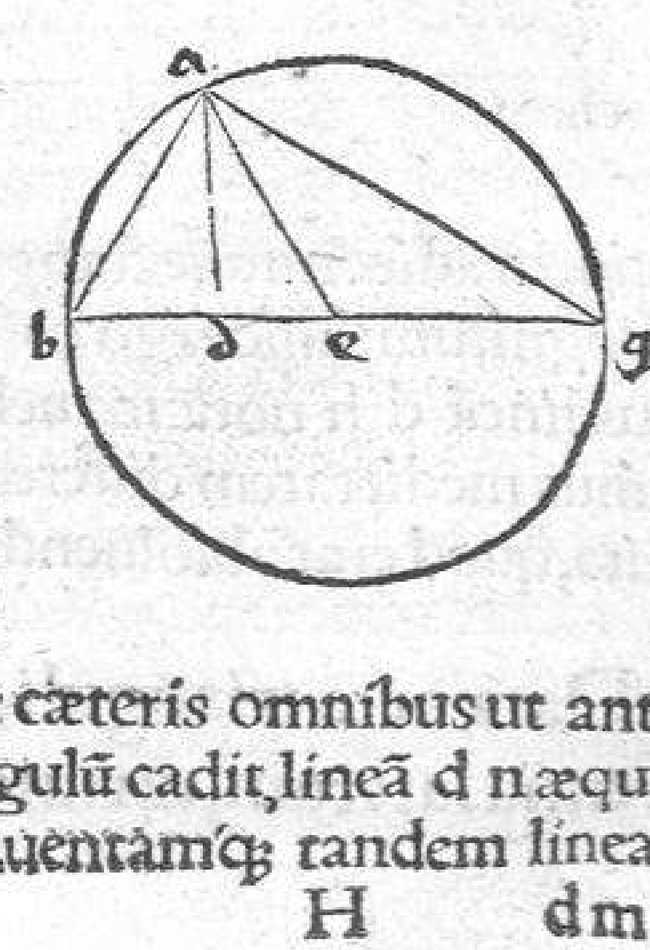
XXV.

Si basim trianguli notam acceperimus cū perpendiculari siue area trianguli, eum quoque quem basis subtendit angulum datum habuerimus, utri mus, utriusqꝫ lateris noticiam extemplo reddemus.

Sit triangulus a b g, basim b g notam habens cum perpendiculari a d, siue cum area sua, nã alterum ex altero pendet: sit quoqꝫ angulus b a g datus. Dico ꝙ utrunqꝫ laterum eius noticiã attingemus. Detur enim angulus b a g obtusus, extendaturqꝫ g a donec perpendicularis b k ex puncto descensura residere possit in eadem, erit itaqꝫ propter angulum b a k notum proportio a b ad b k nota per huius: proportio autẽ a b ad b k est tanqꝫ eius quod a b & a g ad id, quod sub b k & a g continetur, quare & illa proportio nota erit: quod autem fit ex b k in a g notum est, quia duplũ areæ trianguli, igitur & quod sub a b & a g continetur, rectangulum erit notũ: exarata demum circulo triangulũ a b g circumscribente, diameter eius notificabitur ex præcedenti propter perpendicularem a d notã cum eo, quod sub a b & a g continetur noto: huiusmodi diameter sit p q, secans cordã b g per medium, & ideo orthogonaliter in puncto m, eductisqꝫ ex centro e tribus semidiametris e g, e a & e l, quæ æquedistet cordæ b g, cui incidat perpendicularis a d satis prolongata in puncto n. propter semidiametrum igitur e g & dimidiã basi m g notas cum angulo e m g recto, notificabitur linea e m, cui æqualis est ipsa d n: hinc tota a n cognita resultabit, quæ deinceps auxilio semidiametri e a notæ, angulo apud n recto existente, suscitabit lineã n e cognitã, cui æqualis habetur linea d m, qua dempta ex dimidia basi b m, relinquetur casus minor: ea uero adiecta, resultabit casus maior cognitus: hinc ex casibus notis & perpendiculari a d latera duo cognita fient. Hæc autem tenent, quando duorum laterũ a b & a g alterum altero maius extiterit, cuius rei indicium erit, si linea d n ex perpẽdiculari uidelicet a d & linea m e resultãs, minor fuerit semidiametro: si enim esset æqualis semidiametro, duo latera a b & a g necessario fuissent æqualia, unde etiã perpendicularis a d diuisisset basim per æqualia: sic ex perpendiculari nota cum dimidia basi resultaret utrunqꝫ latus cognitum. In his rebus demonstrandis non sisto gradum, cum facilia admodum ostensu reputentur.



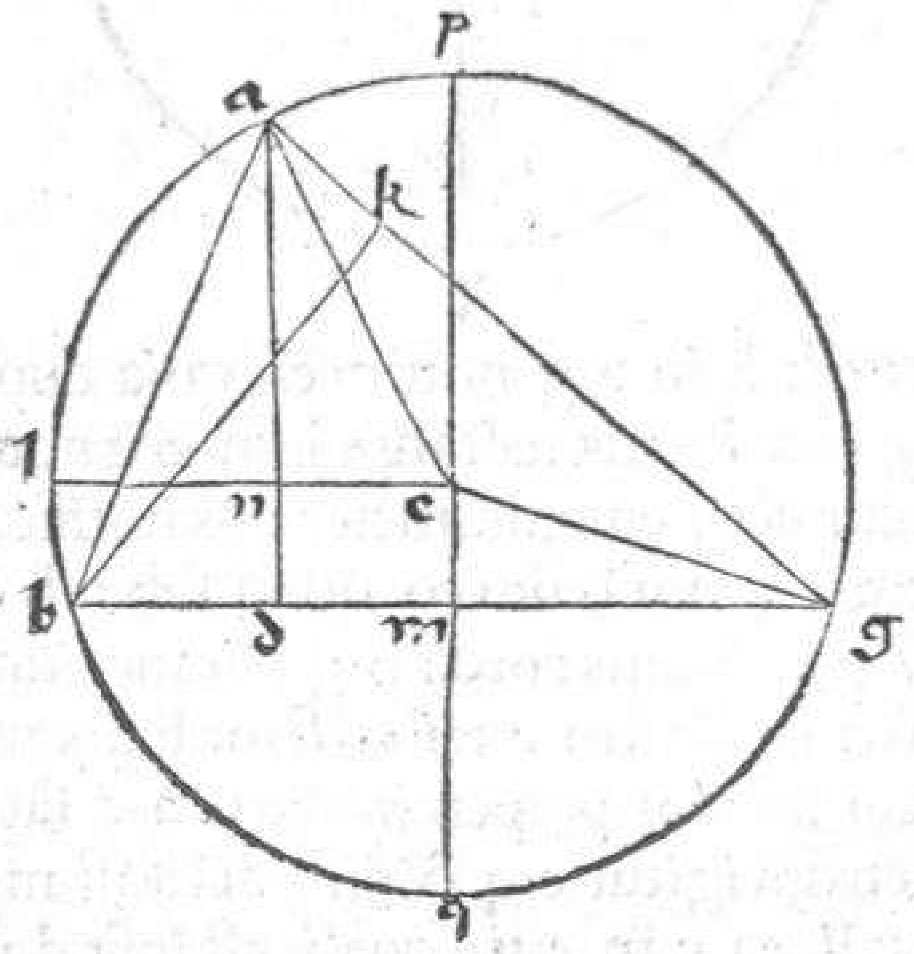
Si autem angulus b a g fuerit rectus, erit b g necessario diameter circulo triangulum b a g circumscribentis, cuius medietati æqualis si fuerit perpendicularis a d data, erunt duo latera trianguli æqualia, utrunqꝫ uidelicet corda quadrantis, unde facillime cognoscetur. Si uero perpẽdicularis fuerit minor dimidiæ basi, erũt duo latera inæqualia, educta igitur semidiametro e a, quæ est æqualis dimidiæ basi, nota erit d e, hinc ut prius uterqꝫ casuum cum utroqꝫ laterũ innotescent. Quòd si angulus b a g acutus offeratur, erit portio b a g maior semicirculo, & ideo semidiameter e l secabit perpendicularem: quare cæteris omnibus ut antea procedentibus, nisi ꝙ perpendicularis b k intra triangulũ cadit, lineã d n æqualem ipsi e n ex perpendiculari a d nota minuemus, inuentamqꝫ tandem lineam



d m, ex dimidia basi dememus, ut relinquatur casus minor, perpendiculari saltem a d intra angulum cadente, quod accidit, dum linea d m minor dimidia basi resultabit; aut econtra dimidiā basim ex linea d m minuemus, si perpendicularis extra triangulum ceciderit, id est, si d m dimidiā basim superauerit, quæ duæ si fuerint æquales, constabit perpendicularem a d coincidisse lateri breuiori, quod autem in hac demonstratione restat, si pauculum habes ingenium, eniti poteris.

XXVI.

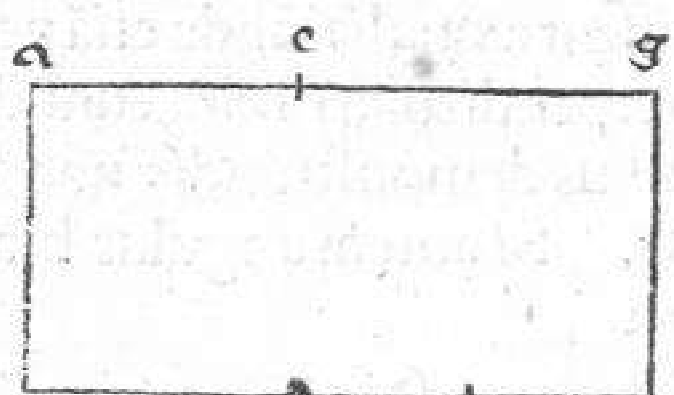
Data area trianguli cum eo, quod sub duobus lateribus continetur rectangulo, angulus quem basis respicit, aut cognitus emerget, aut cū angulo cognito duobus rectis æquipollebit.



Resumptis figurationibus præcedētis, si perpendicularis b k uersus lineā a g ꝓcedens, extra triangulum ceciderit, erit per ea, quæ in præcedenti commemorauimus, proportio b k ad b a nota, & ideo per primi huius angulum b a k notum accipiemus, sic angulus b a g cum angulo b a k noto duobus rectis æquiualebūt. Si uero perpendicularis b k intra triangulum ceciderit, quemadmodū in tertia figuratione præcedentis cernitur, erit ut prius a b ad b k notā habens proportionē, & ideo angulus b a k siue b a g notus concludetur. At si perpendicularis b k coinciderit lateri a b, necesse est angulum b a g fuisse rectum, & ideo cognitum, quod quidem accidit, quando area trianguli propositi æquatur ei, quod sub duobus lateribus eius continetur rectangulo.

XXVII.

Data differentia duarum linearum, quæ rectangulum spaciū continent notum, utranq; earum dimetiri.



Sint duæ lineæ a b & b c inæquales, rectangulum spacium a c continentes notum, sitq; differentia earum d c cognita. Dico, ꝙ utraq; earum nota reddetur. Erit enim quod fit ex d b in b c parallelogramū rectangulū notum, ꝙ b d sit æqualis ipsi a d; diuisaq; d c differentia per medium in h, erit quadratum lineæ d h cognitum, quod quidem adiectum rectangulo a c noto, per sextā secundi conficiet quadratum b h cognitum: hinc ergo costa sua scilicet linea b h notificabitur, ex qua si reiecerimus lineā d h notā, manebit b d, & ideo ipsa a b nota: sed & eidē b h notæ addemus medietatem differentiæ, scilicet lineam h c notam, ut resultet tota b c cognita, quod erat absoluendum.

XXVIII.

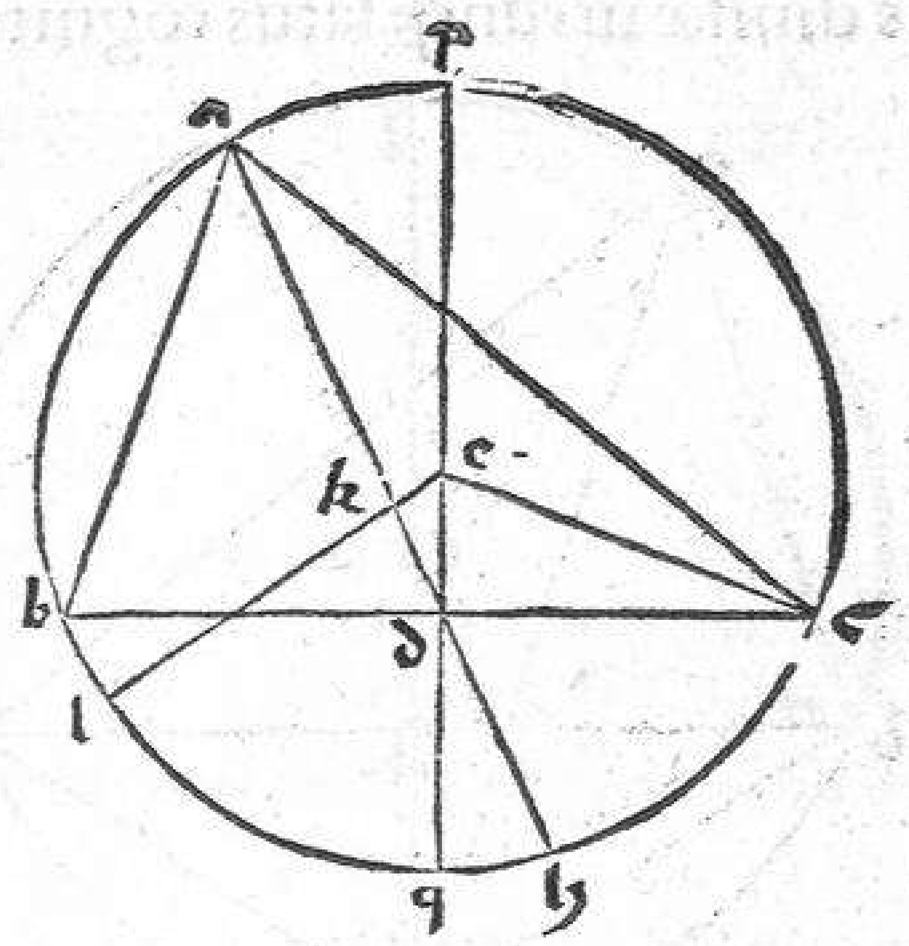
Data area trianguli, & angulo quem basis respicit cognito cum differentia laterum, utrunq; eorum innotescet.

Per mo-

Per modum enim circa huius explanatum concludemus, quod sub duobus lateribus cōtinetur cognitum: cumque differentiā eorum notā attulerit hypothesis, erit per præcedentem utrunque eorum cognitū, cuius gratia fatigati sumus.

XXIX.

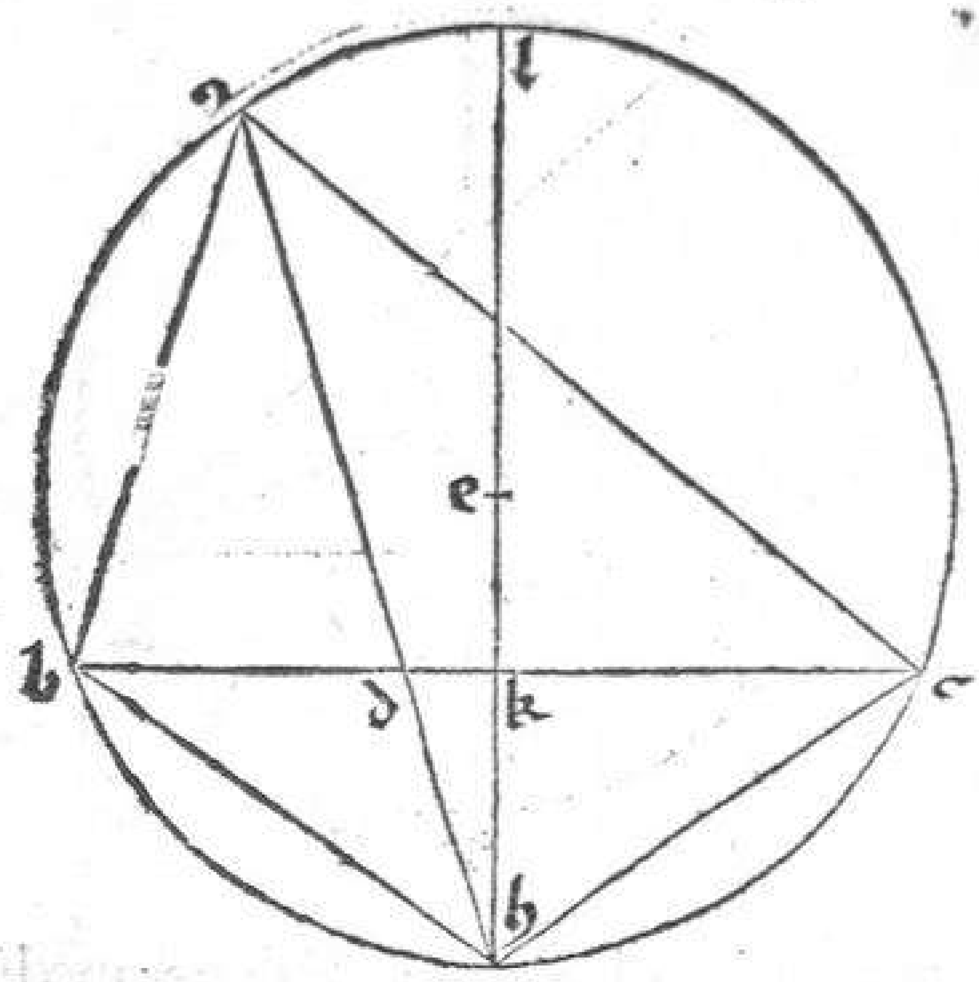
Si ab angulo trianguli noto descendat linea quædam cognita, basim datam diuidens per æqualia, utrunque latus, reliqui etiam anguli non erunt ignoti.



Sit triangulus a b c, angulum b a c notum habens, à cuius uertice a descendat linea a d nota respectu basis b c, quā per medium scindit in puncto d. Dico, quod utrunque laterum a b & a c notum ueniet cum reliquis duobus angulis. Circumscribo enim huic triangulo circulum a b h c super centro e, cuius diameter p q per punctum d transeat, orthogonaliter secans ipsam b c datam lineā: continuetur'que linea a d, donec occurret circumferentiæ circuli in h, educantur denique duæ semidiametri e c quidem cōterminalis duobus lateribus trianguli propositi: e l autem secans cordā a h si possibile sit per medium & orthogonaliter: erit itaque angulus c e d æqualis angulo b a c dato, & ideo per primi huius propter angulum apud d rectum, proportio d c notæ ad lineam d e nota erit, quare linea d e nota habebitur. est autem quadratum lineæ b d notæ, ꝓpter hypothesim æquale ei, quod fit ex a d in d h per tertij elementorū, cumque a d sit nota, erit & d h inde quoque nota a h cum eius medietate a k non ignorabitur: hinc residua k d scita dabitur. ex duabus itaque lineis d e & d k cū angulo k recto per primi huius cognoscetur angulus d e k, & ideo arcus l q notus accipietur, propter triangulum autem d e c notorum angulorum linea d c, & ideo etiam dupla eius b c respectu semidiametri circuli e c notam habebit proportionem, unde & corda a h, quæ nota prius erat respectu lineæ b c, iam respectu diametri circuli huius cognita dabitur: unde & per tabulam sinuū aut cordarum arcus a b h innotescet. oportuit autem arcum b q c esse notum propter angulum b a c datū, dempto igitur arcu l q prius noto ex arcu b q scilicet medietate arcus b q c, relinquetur arcus b l notus, qui deinde reiectus ex arcu a l scilicet medietate arcus a l h, manebit arcus a b notus, cui si addideris totum arcum b q c notum, resultabit arcus a b c cognitus: horum duorum arcuum cordas ex tabula colligemus, sic duo latera trianguli propositi respectu diametri circuli nota uenient: erat autem & basis b c respectu eiusdem nota, unde & ipsa latera respectu basis mensuratas habebunt longitudines, angulos autem trianguli ꝓpositi reliquos latere non sinunt duo arcus a b & a c, in quos ipsi cadunt supra circumferentiam consistentes. Contingit autem lineam a h esse diametrum circuli, quod quando fiet, iam cōmemorata satis edocebunt, conclusimus enim tam ipsam a h, quam diametrum circuli respectu basis b c notam habere quantitatem. Poterit etiam quispiam dare angulum b a c rectum, unde basis b c fieret diameter circuli, & a d semidiameter: tunc autem problema erit uarium, nisi alia quædā conditio accesserit. In hac autem figuratione angulum b a c acutum subiecimus qui si obtusus offerretur, quãuis figuratio paulisper uariaretur, processus tamen idem fermè ad intentum nos perducet.

XXX.

Si quis triangulus duo latera habeat inæqualia, à quorum communi termino descendat linea angulum per æqualia diuidens, basim autem per inæqualia, sitq; ipsa linea diuidens nota cum portionibus basis diuisæ utrunq; latus cognitum iri.

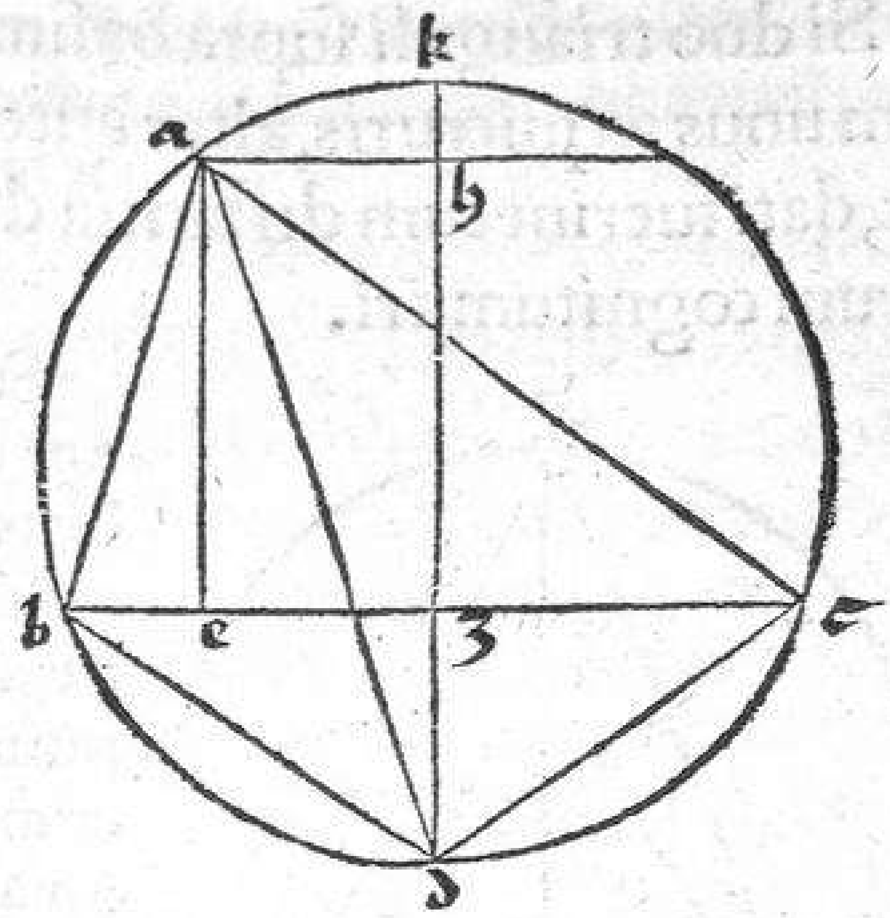


Sit talis triangulus a b g, cuius latus a b breuius latere a c: à cuius angulo a descendat linea a d nota, angulum quidẽ b a c diuidens per medium, basim autem in duas partiales a d & d c notas. Dico, q utrunq; laterum a b & a c innotescet. Circumscribatur enim huic triangulo circulus a b h c centrum e habens: protensaq; a h usq; ad occursum circũferentiæ in h, ducant duæ cordæ b h & c h, quas cõstat esse æquales ꝓpter angulum b a c per æqualia diuisum. ducatur rursus diameter circuli l h, quæ cum diuidat arcum b c per medium, diuidet etiam per tertij cordam eius b c per æqualia, unde & per tertij orthogonaliter eam secabit. cũ autem utraq; linearum b d & d c sit nota, erit per tertij sexti & primi huius linea d h nota: est autem & d k cognita uidelicet differentia dimidiæ basis & minoris sectionis: angulo igitur k recto existente, linea k h per primi huius nota pronunciabitur, ex qua demum & dimidia basi cognita, nisi primi huius mentiatur, utraq; cordarum b h & h c æqualium nota resultabit. quadrangulum itaq; a b h c circulo inscriptum, duas diametros a h & b c notas habebit, quod autem sub eis continetur, æquũ est duobus rectangulis, quorum alterum sub b h & a c, alterum sub h c & a b continetur: hoc enim alibi demonstratum est. Hæc autem duo rectangula parallelograma æquantur ei, quod sub b h & congerie duorũ laterum continetur, ꝓpter æqualitatem linearum b h & h c. quod igitur sub b h & aggregato laterum a b & a c continetur, erit cognitum: unde & propter lineam b h cognitã primi huius ratiocinante, cõgeries duorum laterum nota proueniẽt. est autẽ ꝓportio b d ad d c sicut a b ad a c per tertiã sexti, & cõiunctim b c ad c d sicut congeries duorũ laterũ ad ipsum latus a c: cumq; tres huiusmodi quantitatũ sint notæ, erit & quarta scilicet linea a c inuenta: unde & reliquum latus a b non poterit latere. hæc pro lateribus cognoscendis, ad angulos autem inueniendos, iam paratum habes iter, si huius intento tuo accomodaueris.

Poterimus 30 huius aliter absoluere hoc pacto. Sit triangulus a b c, aream habens notam cum basi b c & angulo b a c. Dico, q utrunq; laterũ a b & a c notum prodibit. Intelligo enim huic triangulo circumscriptũ circulum a b d c, in quo produco cordam a l æquedistantem ipsi b c, & diametrum d k utriq; dictarum cordarum perpendiculariter incidentem: huic quidem in puncto 3, illi autẽ in puncto h: sitq; a e perpendicularis ac b c, si oportuerit prolongatã. quoniã igitur aream trianguli cum basi b c notam subiecimus, erit perpendicularis a e

scita,

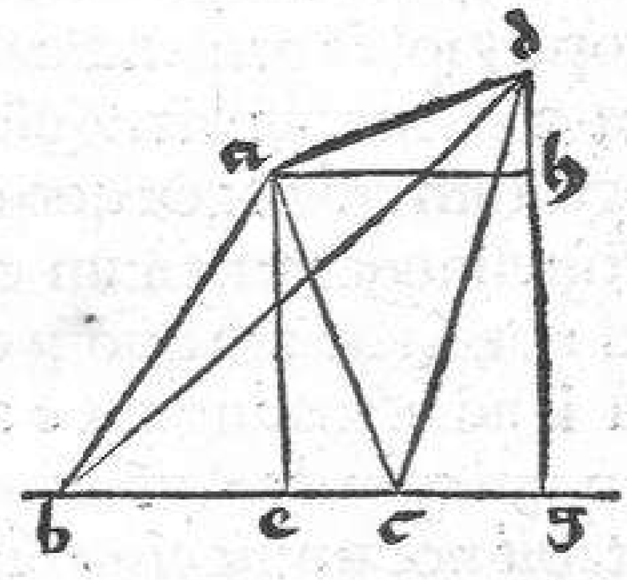
ſcita, ipſa enim in baſim dimidiam ducta, conficit aream trianguli datã: hinc æqualis 3 h, ob eam rem non erit ignota. propter angulum autem b a c & ideo arcum b c cognitum, erit corda b c cognita per tabulam ſinuũ aut cordarum reſpectu diametri circuli; unde & ſagitta 3 d eadem relatione nota fiet: cum autem perpendicularis a e cognita habeatur reſpectu cordæ b c, erit & ipſa reſpectu diametri circuli nota, & ei æqualis 3 h: tota igitur ſagitta d h reſpectu diametri circuli nota conſurget, & ideo arcus a d cognitus dabitur, à quo ſi dempſero arcum b d, medietatem ſcilicet arcus b c pridem noti, relinquetur arcus a b notus: hinc corda a b cognoſcetur reſpectu diametri circuli, & conſequenter reſpectu lineæ b g. arcus deniq; a b iam notus arcui b c adiectus, totum arcum a d c cognitum ſuſcitabit, & ideo corda eius reſpectu diametri circuli, tandemq; reſpectu lineæ b c manifeſtabitur. Angulos autem a b c & a c b propter arcus a b & a c iam notos nemo ignorabit.



XXXI.

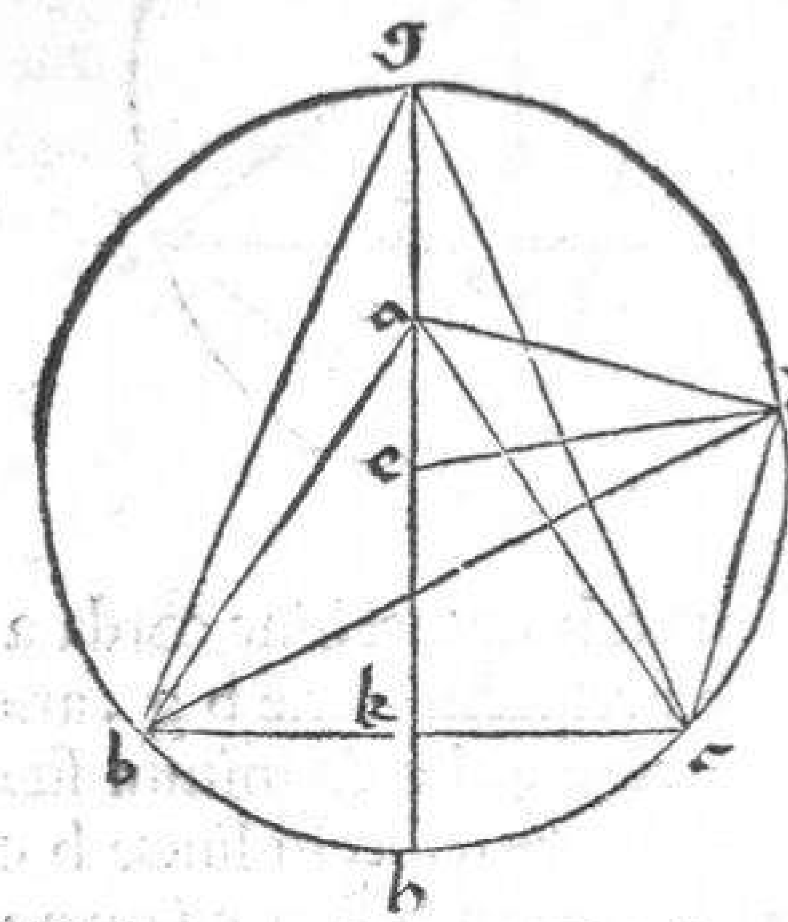
Duobus triangulis ſupra baſim unam notam conſtitutis, binaq; latera æqualia ac cognita habentibus, quantum uertices eorum diſtent inquirere.

Supra baſim b c notam conſtituantur duo trianguli a b c & d b c, quorum utriuſq; latera ſint cognita: ducatur linea a d uertices eorum coniungens, quã præſens quærit problema. Ex uerticibus a & d duæ deſcendant perpendiculares ad baſim, ſi opus fuerit, ſatis extenſam, quæ ſint a e & d g, has perpendiculares quo pacto inuenias, ſuperius cõmemoratum eſt: ſi igitur fuerint æquales, diſtantia duorum uerticũ erit per primi elementorũ æqualis lineæ e g, quæ eſt aggregata ex duobus caſibus e c & c g in hac figuratione, quos ſuperius menſurare docuimus: unde & diſtantia uerticum nota erit. Si uero perpendiculares nõ fuerint æquales, à ſummitate minoris earum quæ ſit, uerbi gratia, a e, ducatur a h æquediſtans baſi, & occurrens reliquæ perpendiculari in puncto h, quæ nota erit quoniã æquali lineæ e g aggregato duorum caſuũ: lineam quoq; d h non ignorabit Geometra, cum h g ſit æqualis a e perpendiculari notæ: hinc & ꝓpter angulum a h d rectum primi huius ratiocinãte, linea a d latere nõ poterit, quæ hactenus quærebatur. Ad lineã autem a h cognoſcendã nõ ſemper oportebit colligere duos caſus, quemadmodũ in præſentiarum iuſſimus: ſed nonnunq; alterũ ex altero demi, ut relinquatur linea e g ſiue a h cognita, & ſicut hic cõiunximus caſum minorem unius trianguli minori caſui alterius, ita interdum caſum minorem unius maiori caſui alterius coniungere opus erit: quod quando fiet, tuo ingenio relinquitur diſcernendum.



XXXII.

Si duo trianguli supra basim unam notam constituti fuerint, quorum unus æquicruris, alter autem uarius, & anguli, quos basis subtendit, dati fuerint cum distantia duorum uerticum suorum, bina latera eorum cognitum iri.



Supra basim datam b c constituantur duo trianguli, a b c quidem duo latera a b & a c habens æqualia, d b c autem duo latera habens inæqualia, & sit uterq; angulorũ b a c & b d c datus, ductaq́; linea a d distantia scilicet duorũ capitum sit data. Dico, ꝙ utriusq; eorum duo latera erunt data. Sit enim pro libito angulus b a c maior angulo b d c, demittaturq́; ex puncto a perpendicularis ad basim cõmunem, quæ necessario diuidet basim per æqualia, quod fiat in puncto k: hæc perpendicularis intelligatur utrinq; indefinitæ quantitatis: circuli itaq; circumscripti triangulo d b c circumferentia secet eam superius in g, inferius autem in puncto h: constabit itaq; lineam g h esse diametrum huius circuli per corollarium primæ tertij, in qua sit centrum circuli e: ductaq́; semidiametro e d & duabus cordis g b & g c, erit angulus b g c æqualis angulo b d c: cũ igitur uterq; triangulorum a b c & g b c æquicrurium habeat angulum notum cum basi data, erunt per primi huius bina latera eorum nota cum perpendicularibus suis: unde etiam tota diameter g h nota fiet, quadratum enim dimidiæ basis k c notæ æquatur ei, quod fit ex g k iam nota in k h, hinc k h & consequenter tota g h diameter nota ueniet: dempta autem differentia perpendiculariũ g a propter ipsas perpendiculares cognita ex semidiametro g e nota residuabitur linea a e scita: sic triangulus a e d tria latera nota habens, angulum suum e a d cognitum efficiet, ex quo demptus angulus e a c notus, quoniã medietas b a c dati, relinquet angulum c a d mensuratum: is demum cum duabus lineis c a & a d notis, tertiam quoq; c d manifestabit. Item dimidius angulus b a c, qui est b a k adiectus angulo e a d prius cognito, conflabit totum angulum b a d notum, qui cum duobus lateribus a b & a d iamdudum cognitus, lineam b d suscitabit notam: sic ergo duo latera trianguli d a c dimensi sumus, quod libuit attingere. Paulo aliter ratiocinabimur circumferentia circuli b c d g secante perpendicularem infra punctum a, quod reuera contingit, dum angulus b d c maior angulo b a c oblatus fuerit. Quòd si duo dicti anguli æquales subijciãtur, circumferentia circuli b c d g per punctum a transeat necesse est: cognita igitur diametro circuli ut antea, itemq́; duabus lineis a b & a d, quæ erũt cordæ dicto circulo inscriptæ, non erit difficile mensurare utranq; cordarũ b d & c d, si circa cordas circuli inueniendas parumper exercearis. quod igitur in hac re superest, tuæ relinquimus industriæ.

XXXIII.

Si cuiuslibet trianguli angulum per æqualia diuidat linea ad basim notã descendens, fuerintq; sectiones basis inæquales notæ: itemq; angulus acutus, quẽ linea diuidens, cum ipsa basi continet notus datus, utrunq; latus trianguli cognitum reddetur. In trian-

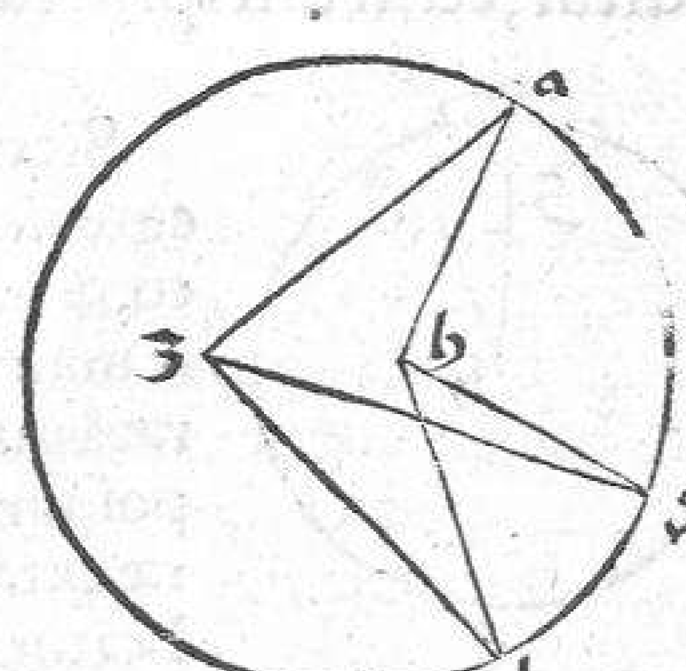
In triangulo a b g ducatur linea a d, diuidens angulum quidem b a c per æqualia, basim autem b c notam per inæqualia in puncto d; sitq; utraq; sectionum b d minor & d c maior data cum angulo a d b acuto. Dico, q utrunq; latus cognoscetur. Oportet autem angulum a d b, quemadmodum cõmemorauimus, esse acutum propter b d minorem sectionẽ cui insidet, erit enim tertia sexti ratiocinante a b minor a c, & ideo angulus a b c maior angulo a c b conuincetur, angulus a d c ualet duos b a d & a b d. item angulus a d b æquiualet duobus a c d & d a c; cumq; angulus b a d sit æqualis angulo c a d, resultabit angulus a d c maior angulo a d b, & ideo hic quidem obtusus, ille uero acutus enunciabitur. Circumscribatur ergo triangulo a b c circulus a b h c, reliquaq; disponantur quemadmodũ in huius; ex angulo itaq; a d b siue h d k noto cũ angulo k recto, & linea d k differentia dimidiæ basis datæ & minoris sectionis, utraq; linearum d h & h k nota proueniet cum angulo d h k; deinceps utraq; linearum b h & h c propter dimidiam basim notam cum linea h k cognita dabitur; cumq; quod sub duabus b d & d c continetur sit æquale ei, quod sub a d & d h continetur; tres autem harum sunt notæ, erit per & primi huius linea a d nota, sic duas diametros a h & b c quadrangulo a b h c circulo inscripti notas habemus; unde & reliqua sicuti in huius absoluere licebit.

F I N I S.

LIBER TERTIVS TRIANGVLORVM.

I.

Si sphæra plano secetur, communis sectio superficiei sphæricæ & plani secantis erit circumferentia circuli. Vnde constabit pedem perpendicularis à centro sphæræ ad superficiem secantem descendentis circuli huiusmodi centru messe.



Cõmunis sectio superficiei sphæricæ & plani eam secantis sit linea a b g, quam dico esse circumferentiam circuli. Planum enim secans aut per centrum sphæræ incedit, aut non. Si p centrum eius, quoniã omnes rectæ lineæ à centro sphæræ ad ipsam sectionem cõmunem in plano huiusmodi eductæ, æquales sunt, diffinitione sphæræ id confirmante, manifestũ q planum intra lineam a b g conclusum est circulus, ipsaq; linea a b g circumferentia eius. Si uero planum prætereat centrũ sphæræ, demittatur à centro sphæræ, quod sit 3, ad ipsum planum perpẽdicularis recta linea 3 h, à cuius pede scilicet puncto h, lineæ rectæ quotlibet educantur ad sectionem prædictam

dictam, sintq; tres huiusmodi h a, h b & h g, protractis semidiametris sphæræ 3 a, 3 b & 3 g. Trium itaq; triangulorum a h 3, b h 3 & g h 3 unusquisq; angulum iuxta 3 rectum habet, propter lineam 3 h perpēdiculariter plano incidentem, latera autem rectos angulos subtendentia, sunt semidiametri sphæræ æquales, dempto igitur quadrato perpendicularis singulatim à quadratis semidiametrorum remanebunt per penultimā primi & cōmunem scientiā quadrata trium linearum h a, h b & h g æqualia; unde & lineas ipsas æquales esse oportet. Non aliter ꝓbabis alias lineas quotlibet à puncto h ad sectionem cōmunem eductas sibi & tribus lineis iam memoratis æquales esse. diffinitio igitur circuli theorematis concludet ueritatem. ¶ Ex his aūt & diffinitione centri trahitur pedem demissæ perpendicularis esse centrum circuli iam dicti, quod pollicebat̄ corollariū.

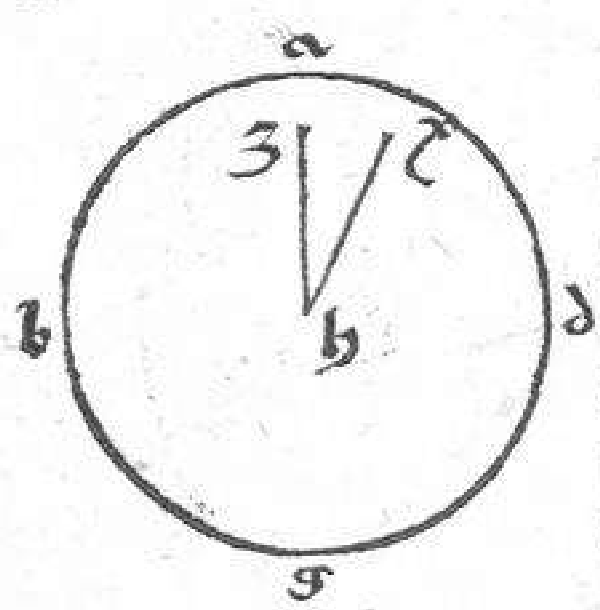
II.

Omnis linea recta à centro sphæræ ad centrum circuli minoris in ea producta, perpendicularis est ad superficiem ipsius circuli.

Hæc conuertit corollarium præcedentis. Sit circulus minor a b g d in sphæra signatus, cuius centrum h, quod cum centro sphæræ 3 copulabo per lineam 3 h. Dico, ꝙ linea 3 h perpendicularis est ad superficiem huius circuli. Productis enim duabus semidiametris a g & b d circuli minoris, terminos earum centro sphæræ copulabo per semidiametros sphæræ a 3, b 3, g 3 & d 3. per diffinitionē igitur circuli & sphæræ linea 3 h cōmuni existente ex 8 primi omnes anguli, quos facit linea 3 h cum lineis sibi in superficie circuli minoris conterminalibus sunt recti. quare linea 3 h perpendiculariter incidit duabus diametris a g & b, & ideo per 4. undecimi perpēdicularis est ad superficiem circuli a b g d, quod libuit deducere. Qđ autem linea à centro sphæræ superficiei circuli minoris perpendiculariter incidens, ad centrum ipsius circuli minoris terminetur, ex processu primæ huius satis didicimus.

III.

Linea recta, quæ à centro circuli in sphæra positi, orthogonaliter egreditur, centrum sphæræ necessario continebit.

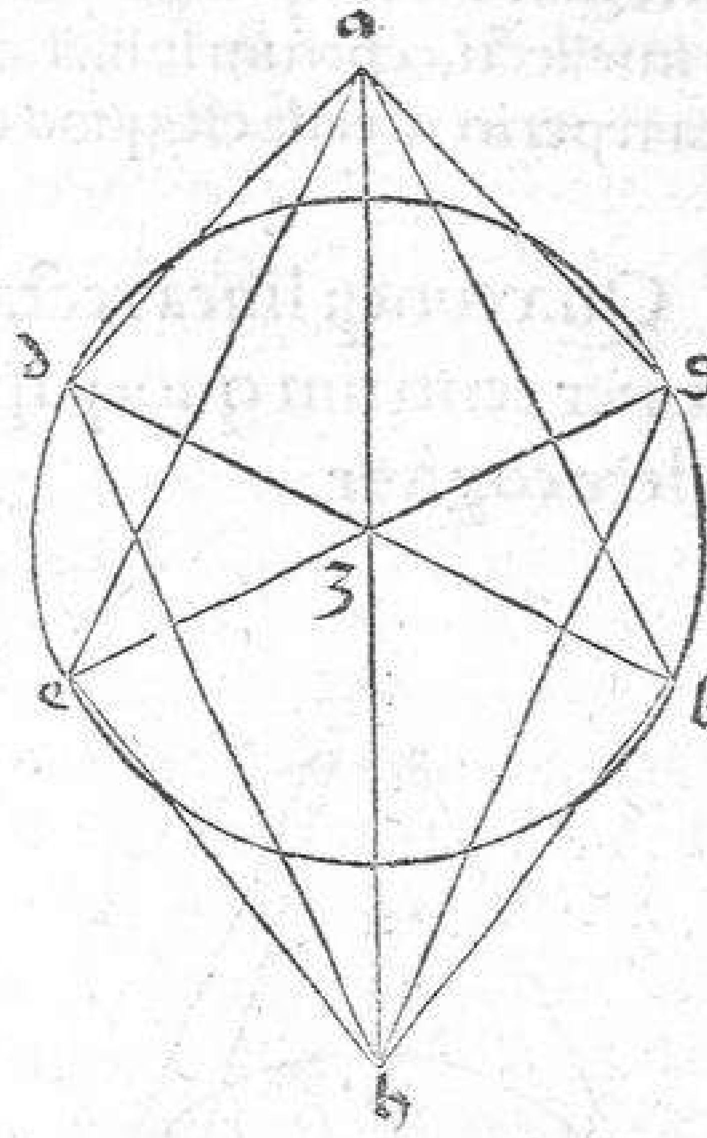


Sit circulus in sphæra a b d g, cuius centrum h, à quo egrediatur orthogonalis linea h k utrunq; indefinita. Dico, ꝙ in ea centrum sphæræ reperietur. Si enim circulus ille maior extiterit, cum centrum eius sit centrum etiā sphæræ, à quo orthogonalis ipsa nascitur, planum est quod ꝓposuimus. Si autem fuerit circulus minor, & centrū sphæræ extra orthogonalem, sententia quidem aduersarij habeatur, sit ipsum x, producta igitur linea x h, per præmissam erit perpendicularis ad superficiem circuli a b g d. ab uno itaq; puncto h superficiei a b g d duæ orthogonales egrediuntur, quod est impossibile, & contra undecimi, quo interempto, relinquitur ueritas conclusionis nostræ.

Omnis

IIII.

Omnis linea recta à polo circuli ad eius centrum demissa, perpendicularis ad superficiem circuli conuincitur, productaq́; ultra circuli centrum, donec superficiei sphæricæ obuiabit, reliquum circuli polum offendet.



Sit circulus d e b g, cuius quidem polus sit a punctus, centrum uero 3, demittaturq́; à polo a ad centrum 3 linea a 3 quā dico esse perpendicularem ad superficiem circuli. Duarum enim diametrorum d b & e g terminos cum puncto a copulabo per lineas a d, a e, a b & a g, quo fit, ut trianguli a b 3 & a d 3 bina latera sint æqualia, a 3 enim commune est ambobus, 3 b autem & 3 d sunt semidiametri eiusdem circuli, duas demum bases a d & a b æquales affert poli diffinitio. quare angulus a 3 d æqualis est angulo a 3 b, & ideo a 3 perpendicularis est ad lineam d b. Similiter probabimus eandē a 3 perpendicularem esse ad lineam 3 g. cum itaq; triū linearum conterminaliū una duabus reliquis orthogonaliter insistat, erit ipsa perpendicularis ad superficiem reliquarum duarum argumento 4, undecimi. hæc autem superficies est ipse circulus d e b g, primam igitur theorematis partem ostendisse uidemur. Secundæ uero parti assenties, si linea a 3 usq; ad punctū superficiei sphæricæ h producta, ipsum h punctum omnium diametrorū terminis coniunges. omnes enim facti trianguli, quibus uertex cōmunis est, centrum circuli 3 bina latera habēt æqualia, h 3 enim commune, reliqua uero sunt semidiametri eiusdem circuli, sed & anguli eorum apud punctum 3 æquales sunt, quia recti: quare bases dictorum triangulorum uniuersæ æquabuntur, per diffinitionem igitur h punctus circuli dicti polus habebitur, quod erat lucubrandum.

V.

Omnis recta linea à centro circuli in sphæra orthogonaliter exiēs, per polos eius utrinq; continuata transibit.

In figuratione præhabita intelligatur lineam 3 a orthogonaliter à centro circuli 3 exiuisse, reliquis ut antehac conseruatis. Dico, duo puncta a & h esse polos circuli d e b g. Quia enim linea a 3 orthogonalis est ad superficiē circuli, per centrum eius transiens, erit ipsa per conuersionē diffinitionis orthogonalis ad omnem circuli semidiametrū. posito igitur quadrato 3 a communi, cum omnia quadrata semidiametrorū sint æqualia, erunt per penultimā primi & cōmunem animi conceptionem quadrata omnium linearū ab a puncto ad circumferentiā circuli demissarum æqualia, & ideo ipsæ lineæ æquales. per diffinitionem ergo poli constabit ueritas propositionis. Idem similiter concludere de puncto h licebit.

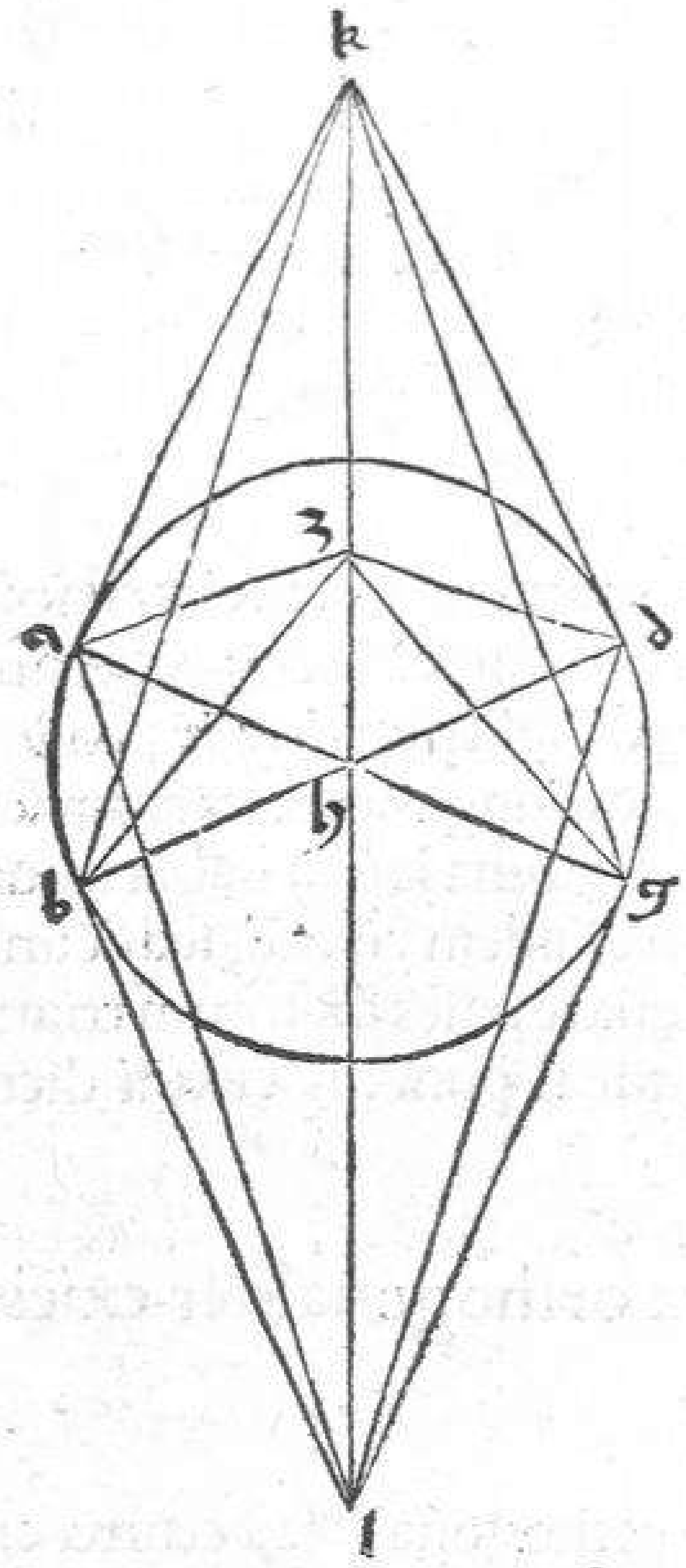
VI.

In linea recta centrū sphæræ cū centro circuli minoris in ea signati cōtinuāte, si quātū oportet utrinq; ꝓlōgēt, ipsius circuli polos īueniri

Circuli minoris a b g d in ſphæra conſtituti cētrum ſit h, quod cum centro ſphæræ ʒ continuetur per lineam h ʒ. Dico, ꝙ in linea h ʒ quantū ſat eſt prolō gata, duos polos circuli a b g d reperiemus. Erit enim per 2 huius linea h ʒ perpendicularis ad ſuperficiē circuli dicti, quare per tertiā huius utrinq; continuata, donec ſuperficiei ſphæricæ occurret ad duos circuli memorati polos terminabitur. Quatuor itaq; huiuſmodi puncta, centrum uidelicet circuli minoris in ſphæra intellecti, centrum ſphæræ & duos circuli minoris polos in una ſemper recta linea reperiri neceſſe eſt, quod erat explanandum.

VII.

Quæcunq; linea recta per polos circuli in ſphæra ſignati tranſiuerit, per centrum quoq; ipſius tranſire, ipſiq; circulo orthogonaliter incidere cogitur.



Figuratio 7. & 8.

Linea k l tranſiens per duos polos k & l circuli a b g d, ſecet eum in puncto ʒ. Dico, ꝙ punctus ʒ ſit centrum circuli a b g d, & ꝙ linea k l orthogonaliter incidat circulo a b g d. A puncto enim ʒ egrediantur plures ꝙ duæ rectæ lineæ ad circumferentiā circuli dicti, quæ ſint ʒ a, ʒ b, ʒ g & ʒ d, quarum terminos utriq; polorum connectemus per lineas polares duplices concludendo quatuor triangulos uerticem cōmunem habentes polum k, baſes autē quatuor polares lineas à polo l deriuatas, quo fit, ut anguli eorum apud polum k 8. primi arguente, æquales habeātur. angulus uidelicet a k l æqualis angulo b k l, & ita de cæteris. Trāsferamus nos demum ad quatuor triangulos, quibus latus k ʒ cōmune eſt, reliqua uero latera æqualia habentes quatuor ſcilicet polares lineas ab ipſo polo k deſcēdentes, qui cum angulos ſuos apud k æquales habeāt, quemadmodum oſtendimus per 4. primi, & baſes habebunt æquales, lineas uidelicet ʒ a, ʒ b, ʒ g & ʒ d. quare per 9. tertij punctus ʒ erit centrum circuli a b g d. primam igitur theorematis partem roborauimus. unde & per quartam huius ſecundæ parti aſſentire compellimur, linea k l per polum centrum'q; circuli dicti tranſeunte, quæ uolebamus declarare.

VIII.

Linea recta quæ per duo quatuor punctorum dictorum incedit, reliqua duo præterire non poterit.

Quatuor illa puncta notamus centrum ſphæræ, centrum circuli minoris in ea & duos polos eius. Sit itaq; circulus minor in ſphæra quatuor characteribus a b g d repræſentatus, cuius centrum h, duo'q; poli k & l, centrum autem ſphæræ ſit ʒ. Dico, ꝙ linea recta duo eorum quæcunq; continens, & reliqua duo, ſi ſatis porrecta fuerit, complectetur. Nam, ut à capite initium ſumamus, polum k & centrum ſphæræ ʒ in linea k ʒ ſtatuamus, extenſa'q; k ʒ occurrat circulo a b g d in

puncto

puncto h, cui nondum nomen centri imponimus. producantur deniq; lineæ polares k a, k b, k g & k d, itẽ semidiametri sphæræ 3 a, 3 b, 3 g & 3 d, sed & lineæ a h, b h, g h & d h, satis tamen erat trinas huiusmodi non quaternas producere. quatuor igitur trianguli in uertice k cõmunicantes, quorum bases sunt quatuor semidiametri sphæræ, cum sint æquilateri per diffinitionem sphæræ & poli, linea k 3 cõmuni existente, per 8. primi erunt æquianguli, postea uero ꝙ angulos eorum apud k æquales esse didicimus ad quatuor triangulos, quibus & dicti anguli cõmunes sunt, bases autem quatuor in puncto h confluentes, transeundum est, qui cum bina latera, quatuor dictos æquales angulos ambientia, habeãt æqualia per diffinitionem poli, linea k h cõmuni existente, per quartã primi bases habebunt æquales. à puncto igitur h plures ꝙ duæ lineæ æquales exeunt ad circumferentiã circuli a b g d: quare per 9. tertij h centrũ erit circuli prædicti, & ipsum est in linea k h indeterminata, in qua cum habeatur etiam centrum sphæræ, concludimus per præmissam reliquũ quatuor punctorum uidelicet polum l in ea reperiri. Ponantur demum duo puncta, k polus & h centrum circuli minoris in linea k h, erit itaq; per 4. huius linea k h perpendicularis ad superficiem circuli a b g d, quare per tertiam & quintam huius reliqua duo puncta, centrum uidelicet sphæræ & polus l in linea k h indefinita reperientur. Qđ si duos polos k & l in linea k l statuerimus, conclusionem nostram probaturi quatuor puncta a b g d ipsi polo l per lineas suas, quemadmodum figura docet, connectemus. quæ cũ sint æquales diffinitione poli id exigente, similiter & quatuor lineæ polares à polo k deriuatæ, sibi inuicem æquentur, linea k l cõmuni existente quatuor triangulis à k l, b k l, g k l & d k l, erunt quatuor eorum anguli apud polum k æquales. Rursus propter angulos huiusmodi æquales, lineasq; polares superiores æquales, linea k h communi assumpta, ex quarta primi quatuor bases a h, b h, g h & d h æquales conuincemus. per 9. igitur tertij h centrum erit circuli a b g d: unde & per supradicta centrum sphæræ in ipsa linea k l necessario reperietur. Postremo in linea 3 h, quemadmodũ ex præmissa trahitur, necessario reperiuntur duo poli circuli a b g, sed in linea 3 l continebitur, & centrum circuli h & polus eius k, quod non aliter ꝙ de linea k 3 confirmandum erit. similiter quod circa lineã k h diximus, lineæ quoq; l h attribuemus. Ex quatuor autem sæpedictis punctis nõ nisi sex eliciunt̃ cõbinatiões quas enumerauimus, uerũ igit̃ est q̃d ꝓposuimus.

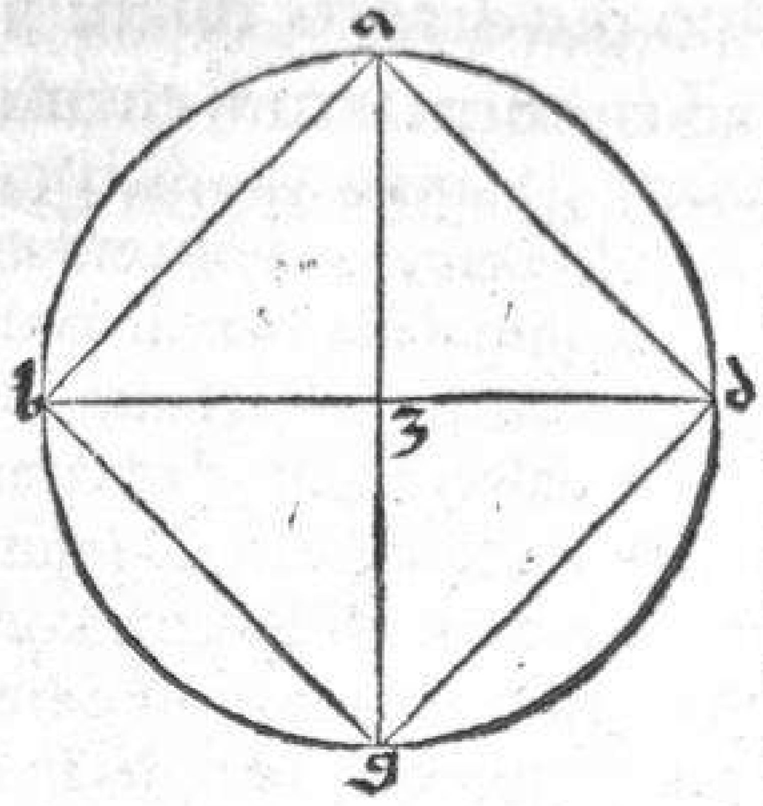
IX.

Circulum in eadem sui parte duos habere polos est impossibile.

Quilibet circulus ex sphæra ipsum continente duas scindit partes, quarũ unã supra, reliquã autẽ infra se relinquit. Dico itaq;, ꝙ in neutra illarum duos circuli unius polos reperire est possibile. Nam si ita opinaberis, cõtinuemus ipsos cũ centro circuli per duas rectas lineas, erit igitur utraq; earum orthogonalis ad superficiem circuli per huius. cumq; ab uno puncto scilicet centro circuli exurgant, mẽtietur nobis undecimi Euclidis, quod est inconueniens. Non ergo uerum est q̃d putabas. Sonat autem hæc conclusio de polis in superficie unius sphæræ signãdis, nõ enim me latet eundẽ circulũ in multis contineri posse sphæris se secantibus, in quarum superficiebus licebit ex eadem etiam parte circuli multos assignare polos. quotquot autem signaueris polos, huiusmodi una linea recta orthogonaliter à centro circuli egrediens, omnes eos complectetur.

X.

Si lineam polarem circulus quispiam diametro sphæræ potentialiter subduplam habuerit, ipse circulus maior erit.



Sit a polus circuli in sphæra signati, cuius linea polaris a d quadratum habeat subduplũ quadrato diametri sphæræ. Dico, ꝙ circulus ille erit maior. Ducatur enim ab a polo per centrum circuli dicti, quod sit 3 linea a 3, quæ continuata occurrat superficiei sphæræ in puncto g, erit itaq; a g diameter sphæræ, nam per quartã & tertiam huius ipsa incedit per centrũ sphæræ. Intelligatur deinceps superficies plana transiens per lineas a d & a g, secando sphæram. fiet autem cõmunis sectio circumferẽtia, circuli quidem ex prima huius, magni uero per diffinitionem, habebit enim & centrum & diametrum sphæræ. diameter autem circuli in sphæra signati sit linea d 3 b, & linea polaris secunda g d. Quoniam igitur quadratum a g duplum est quadrato a d per hypothesim. quadratũ autem a g duobus quadratis linearum a d & d g æquale est per penultimã primi, ꝙ angulus a d g in semicirculo rectus sit, erit quadratum a d æquale quadrato d g, & ideo linea lineæ æqualis. uterq; autem angulorum a 3 d & g 3 d est rectus per 4. huius & diffinitionem lineæ perpendicularis ad superficiem, linea igitũ d 3 communi, erit per penultimã primi & cõmunem scientiã quadratũ a 3 æquale quadrato 3 g, & ideo costa a 3 costæ 3 d æqualis. est autem a g diameter sphæræ, ut supra declarauimus, necessario igitur 3 centrum circuli signati erit centrum sphæræ: per diffinitionem itaq; circulus ille maior est. Quandocunq; ergo linea polaris circuli cuiusdam potentialiter subdupla est diametro sphæræ, aut æqualis costæ quadrati magno circulo sphæræ inscriptibilis, ipse circulus maior est, quod expectabas declarandum.

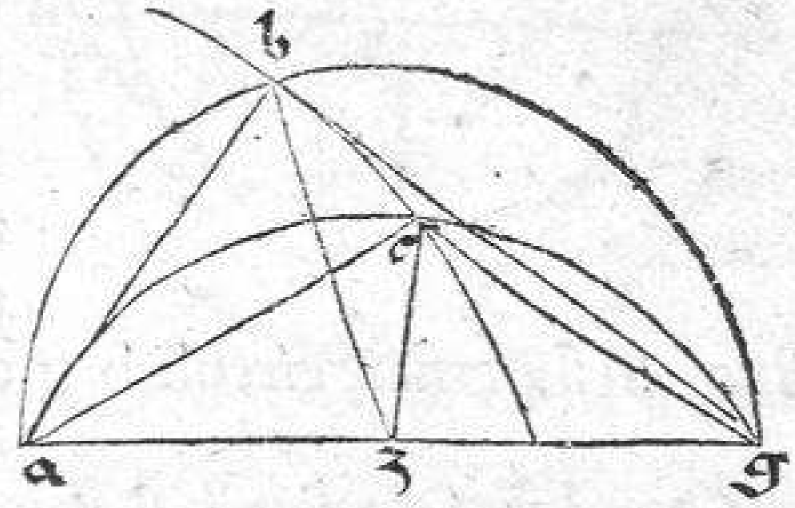
XI.

Omnis circulus maior in sphæra lineam polarem utranq; habet potentialiter subduplam diametro sphæræ, æqualemq; lateri quadrati, quod ipsi circulo magno inscribitur. Vnde manifestum est arcum circuli magni, à polo ad circumferentiam circuli signati demissum, esse quadrantem circumferentiæ suæ.

In figura præcedentis addo duas lineas a b & b g, intelligendo 3 centrum & lineam b 3 d diametrum circuli in sphæra signati. Dico, ꝙ utraq; linearũ a b & b g polarium potentialiter subdupla est diametro sphæræ, & æqualis lateri quadrati, magno circulo ipsius sphæræ inscriptibilis. Erit enim per 4. huius unusquisq; quatuor angulorum apud 3 rectus, quatuor itaq; trianguli, quibus uertex communis est punctus 3, bina latera habentes æqualia, semidiametros scilicet sphæræ, per 4. primi bases habebunt æquales. unusquisq; autem angulorum totalium, qui apud puncta a b g d sunt, rectus declaratur ex 30. tertij. per diffinitionem igitur a b g d quadratum est, inscriptum quidem circulo maiori a b g d: sicq; secunda pars theorematis ostensa est, unde & per penultimã primi confirmabimus primam partẽ mam partem. Corollariũ autẽ nemo dubitabit postq̃ ex tertij quatuor cordas æquales, costas scilicet quadrati prædicti, quatuor arcus æquales abscindere declarabimus,

XII.

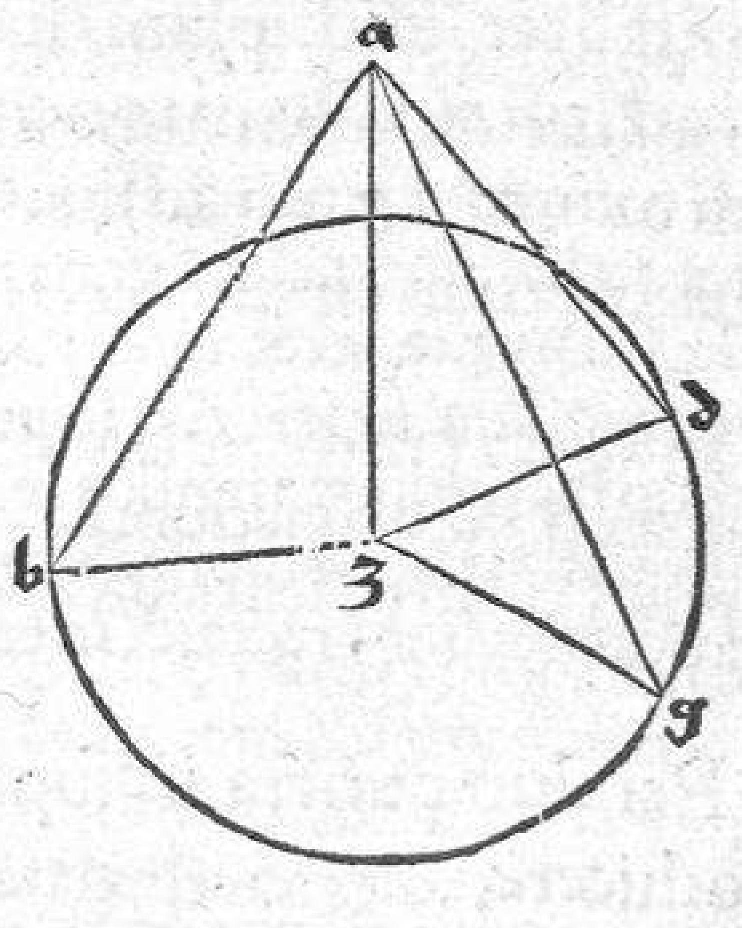
Si ab aliquo puncto superficiei sphæræ duo quadrantes duarum circumferentiarum magnarum egredientes, ad eundem arcum circuli magni terminentur, punctus ille erit polus circuli, ad cuius arcum dicti quadrantes terminantur.



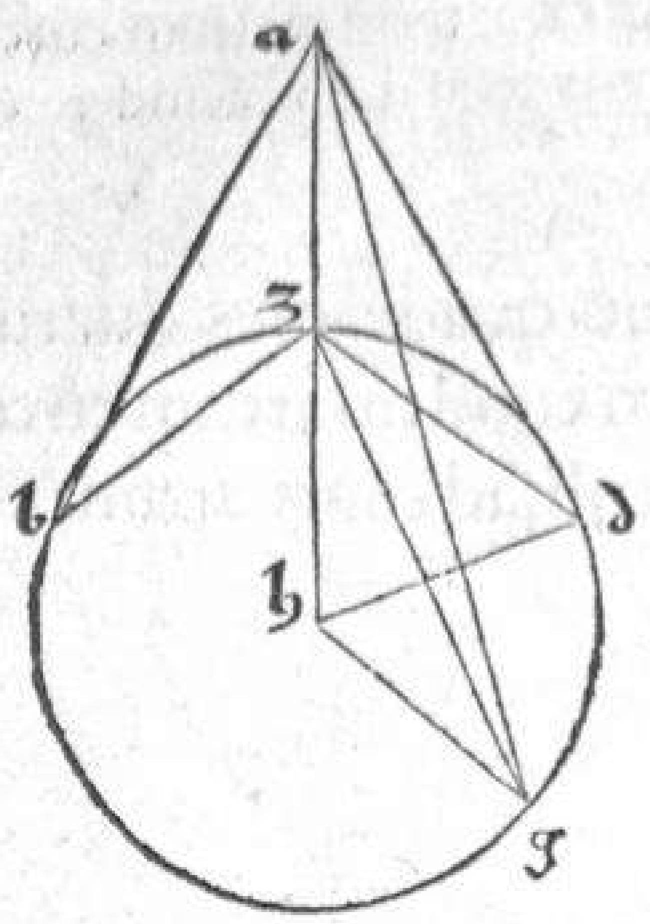
Sit punctus a in superficie sphæræ signatus, à quo egrediantur duo quadrantes circumferentiarum magnarum angulariter coniuncti, qui sint a b & a c, & terminentur ad arcum circuli magni b c. Dico, q̃ a sit polus circuli magni, cuius erat arcus ille b c. Producam enim per centrum sphæræ 3 diametrum a 3 g, complendo duas semicircumferentias magnas a b g & a c g. item binas cordas duorum quadrantum dictorum & duorum quadrantum residuorum, qui sunt g b & g c. duas postremo semidiametros circuli b c, quæ sint 3 b & 3 c. Quoniam igitur duo trianguli a 3 c & c 3 g bina latera habent æqualia, duasq́ bases suas a c & c g per præcedentem æquales, erunt per 8. primi duo eorum anguli apud 3 æquales: quare duæ lineæ a 3 & 3 c ꝑpendiculariter sibi inuicem insistunt. Non aliter declarabitur lineam a 3 perpendiculariter insistere lineæ 3 b. per 4. igitur undecimi linea a 3 ꝑpendiculariter incidit superficiei complectenti duas lineas 3 b & 3 c, quæ quidem superficies est ipse circulus magnus, quem supra notauimus, & ideo per 5. huius punctus a erit polus circuli b c, quod erat demonstrandum.

XIII.

Si à puncto superficiei sphæricæ ad circumferentiam circuli cuiuscunq; in sphæra signati, plures q̃ duæ æquales rectæ lineæ descenderint, punctus ille dicti circuli polus habebitur.



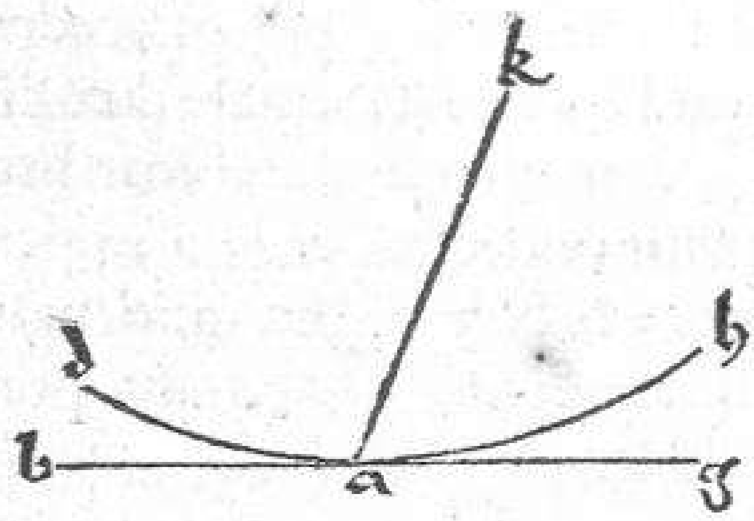
Sit punctus a in superficie sphærica notatus, à quo ad circumferentiã circuli b g d plures q̃ duæ æquales rectæ lineæ descendãt, quæ sint uerbi gratia tres a b, a g & a d. Dico, q̃ a sit polus circuli b g d. Demittatur enim ab a puncto ad superficiem circuli b g d, per 11. undecimi perpendicularis a 3, cuius pedi puncto scilicet 3 tria puncta b g d copulabimus per tres lineas 3 b, 3 g & 3 d, claudendo tres angulos a 3 b, a 3 g & a 3 d, quorum angulos apud 3 punctum rectos esse oportet, conuersa diffinitione lineæ perpendicularis ad superficiem. cum itaq; tres lineæ æquales ad circumferentiam circuli descendentes, illos rectos subtendant angulos, per penultimam primi & cõmunes scientias linea a 3 communi existente, tribus dictis triangulis tres lineæ 3 b, 3 g & 3 d æquales habebuntur: qua



re per 9. tertij 3 erit centrum circuli b g d, & ideo per 5. huius punctum a esse polũ circuli b g d confiteberis, quod libuit attingere. Assumpsimus autẽ in hoc processu punctum 3 cadere intra circulum cuius rei certitudinẽ accipies hoc pacto. Non enim potest punctus 3 esse in circumferentia circuli, si eñi ita fuerit sententia quidem aduersarij, â centro circuli, quod sit h, in nulla linearũ 3 b, 3 g & 3 d existente, ducantur tres semidiametri h 3, h g & h d, erit itaq; per octauam primi angulus 3 h d æqualis angulo 3 h g, pars toti, quod est impossibile. Simile inconueniens concludemus aduersario putanti punctum 3 extra circulum cadere. huiusmodi autem impossibilibus interemptis, reliquũ est, ut punctus 3 in superficie circuli b g d reperiatur.

XIIII.

Omnes duæ superficies planæ in puncto uno communicantes, in linea quoq; recta per punctum ipsum incedente, si indefinitæ extendantur cõmunicabunt. hæc autem linea communis earũ sectio habebitur.



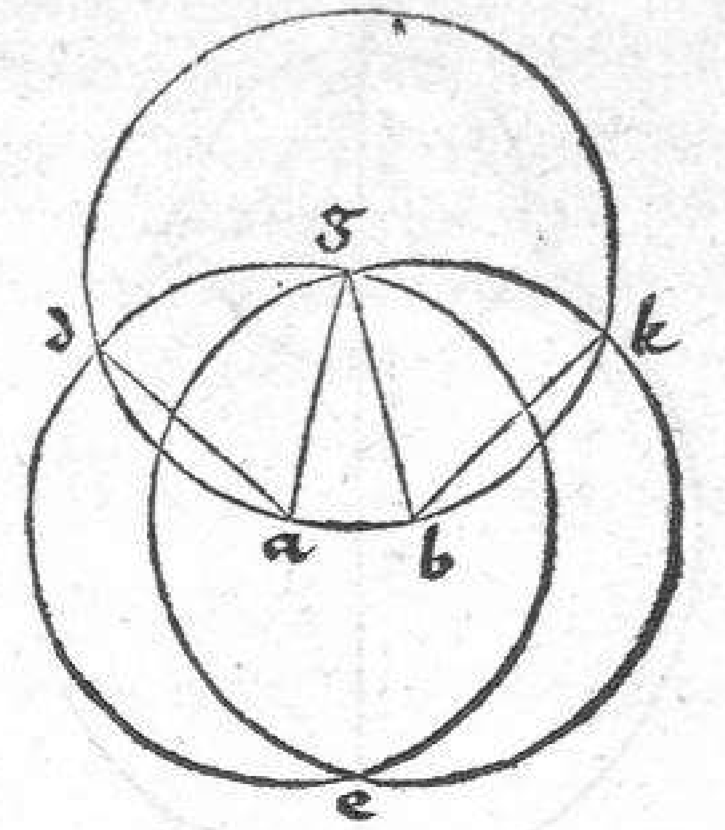
Sit punctus a communis duabus planis superficiebus. Dico, q; ipsæ superficies, si indefinitæ extendantur, in linea per a punctum transeunte, cõmunicabunt, & in ea linea se intersecabunt. Intelligatr enim tertia superficies plana duas prædictas in puncto a communi secans, fiatq; sectio cõmunis superficiei tertiæ cum altera propositarum, linea recta b a g per 3. undecimi, quæ si fuerit, etiam in reliqua constabit prima pars theorematis. Si uero non sit communis sectio huius tertiæ superficiei, & reliquæ duarum propositarum linea d a h, educaturq; â puncto a in superficie tertia linea a k, argumento igitur 13. primi duo anguli d a k & k a h duobus rectis æquiualent. similiter duo anguli b a k & k a g duos ualẽt rectos, quare duo recti minores erunt duobus rectis, quod est impossibile. quo interempto, primam propositionis partem astruemus. Similiter probabimus, q; duæ superficies illæ in linea communi prædicta se intersecabunt. Si enim non intersecent se in ea, intelligatur tertia superficies secans prædictas duas, non quidem in linea communi iam dicta, sed in alia. secet autem & hæc tertia superficies lineam in qua communicãt duæ propositæ superficies in puncto â, â quo educatur linea a k in superficie tertia, quo facto, duos angulos rectos duobus angulis rectis minores esse concludemus, quod est impossibile. Non possunt igitur duæ propositæ superficies nõ communicare in linea recta, & in ea se intersecare, quod erat lucubrandum.

XV.

Per duo puncta in superficie sphæræ signata, circulum magnum producere.

In superficie sphæræ notentur duo puncta a & b, per quæ si producendum uelis circulum magnum super puncto a tanq; polo, secundum quantitatem costæ

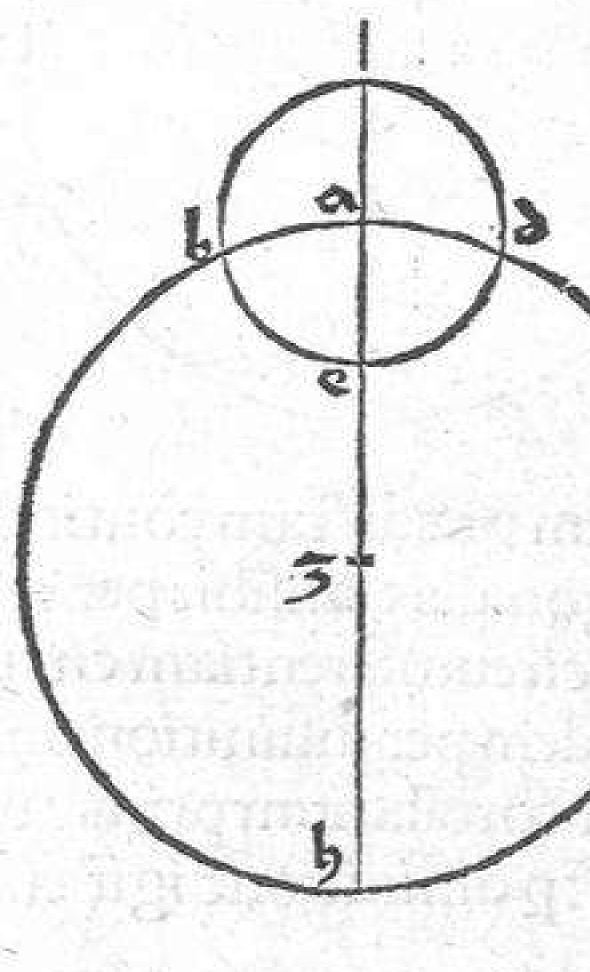
quadrati



quadrati magno circulo sphæræ iſcriptibilis, quæ ſit a d, deſcribe circulum e d g. ſecundum eandẽ quoq; quantitatem, ſcilicet ſecundum lineã d b k, æqualem ipſi a d ſuper polo k circulum e g k deſcribas, hos duos circulos ſe inuicem ſecare ex præmiſſa liquet, ꝙ centrum ſphæræ cõmune habeant. ſecent igitur ſe circumferentiæ eorum in punctis e & g, quorum alterum uidelicet g duobus punctis a & b copulabo per lineas a g & b g, quas neceſſe eſt eſſe æquales, & utranq; earum æqualem eſſe lineæ a d aut b k coſtæ ſcilicet quadrati magni. duæ enim polares lineæ a d & a g æquales ſunt, ponebatur autem b k æqualis ipſi a d, quare & a g æquabitur lineæ b k, cui etiam b k æqualis exiſtit: ſunt enim b g & b k lineæ polares, ab eodem polo unius circuli deſcendentes. circulus igiť deſcriptus ſuper g puncto tanq; polo, trãſibit per utrũq; punctorum a & b, magnus autem erit per 8. huius, ꝙ linea polaris ſua g a æqualis ſit coſtæ quadrati magni. Quo igitur pacto ꝓpoſitum efficere oporteat, ſatis oſtendimus.

XVI.

Circulus magnus per unum polum alterius circuli incedens, per reliquum quoq; tranſibit polum.

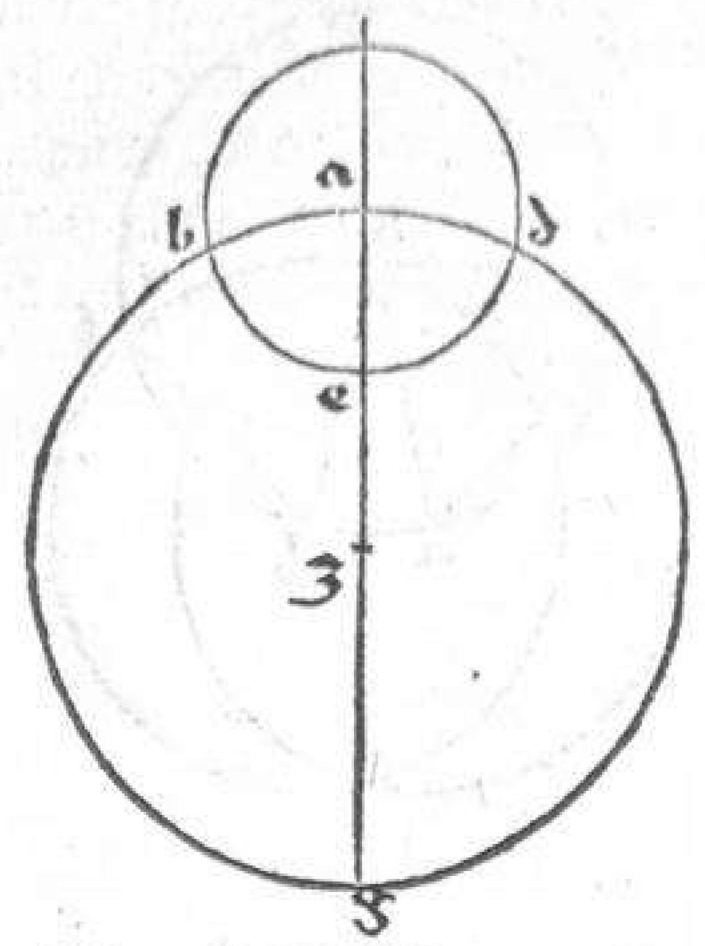


Circulus magnus a b g d per polum a circuli b e d tranſeat. Dico, ꝙ tranſibit etiam per reliquũ eius polum. Continuemus enim polum a cum centro 3 circuli magni prædicti, quod & ſphæræ ipſi commune eſt per lineam a 3, quæ producta amplius, donec ſuperficiei occurret ſphæricæ per 4 aut 7. huius, reliquum polum circuli b e d offendet, qui ſit h. Si itaq; linea 3 h pars ſcilicet lineæ a h fuerit in ſuperficie circuli magni a b g d, uerũ enunciabat ꝓpoſitio: ſi uero non, lineæ rectæ a h pars erit in plano, & pars in ſublimi, quod eſt impoſſibile per primam undecimi. Circulus igitur a b g d, per polum a circuli b e g tranſiẽs, reliquum eius polum præterire non poterit, quod libuit declarare.

XVII.

Circulus magnus in ſphæra per polum alterius circuli tranſiens, eum per æqualia & orthogonaliter ſecabit.

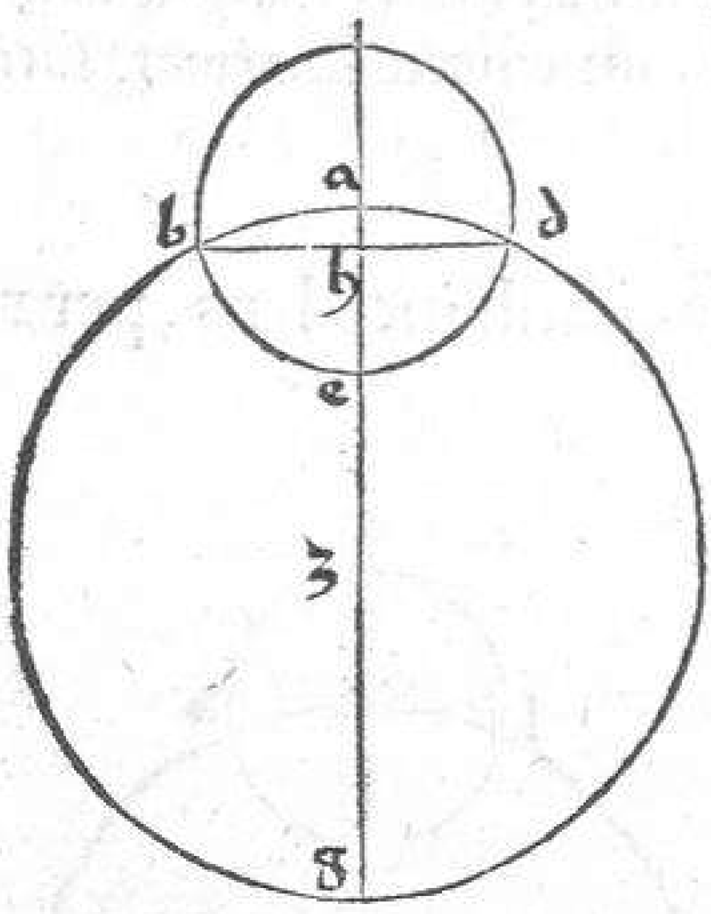
Sit circulus magnus a b g d, cuius centrum 3 tranſiens per polum a circuli b e d. Dico, ꝙ circulus a b g d ſecabit circulum b e d per æqualia & orthogonaliter. Ducatur enim â polo a ad centrum 3 circuli a b g d: quod & ipſi ſphæræ eſt commune; linea a 3, quæ cum ſit in ſuperficie circuli a b g d, & trans



& transeat per centrum circuli b e d, ex diffinitione quidẽ circuli magni, si b e d circulus magnus fuerit, aut per septimam huius, si minor, necesse quoque erit, ut circulus a b g d per centrum circuli b e d transeat, quare secabit eum per æqualia. Præterea quoniam linea a 3 ex polo a ad centrũ circuli b e d descendit (siue illic quiescat, siue ultra porrigatur, nihil refert) erit ipsa per quartam huius perpẽdicularis ad superficiem circuli b e d. quare per 18. undecimi superficies circuli a b g d per ipsam lineam a 3 incedens, orthogonalis erit ad superficiem circuli b e d, quæ fuere lucubrãda.

XVIII.

Si quis in sphæra circulus alium per æqualia & orthogonaliter secuerit, ipse magnus erit, & per polos eius quem secat transibit.



Hæc conuertit præmissam. Circulus a b g d secet circulum b e d ꝑ æqualia & orthogonaliter. Dico, ꝙ circulus a b g d magnus est. Sit enim cõmunis eorum sectio linea b d, quam oportet esse diametrum circuli b e d, quemadmodum ex hypothesi trahitur, cuius punctus h sit centrum circuli b e d, à puncto autem h in superficie circuli a b g d egrediatur orthogonalis ad diametrũ b d, quæ etiam orthogonalis erit ad superficiem circuli b e d, ex diffinitione superficiei orthogonaliter supra superficiem erectæ & quarta undecimi. quare per quintam huius orthogonalis illa transibit per polos circuli b e d, unde & circulus a b g d orthogonalem prædictam continens per polos huiusmodi incedet. Item ꝑ 3 huius ipsa orthogonalis transibit per centrum sphæræ. si igitur utrinq; ad superficiem sphæræ aut circumferentiam circuli a b g d porrecta fuerit, ipsa erit diameter: sphæræ quidem per diffinitionem, circuli autem a b g d, ꝙ per centrum eius transeat aut per corollarium primæ tertij. secat enim cordam b d per æqualia & orthogonaliter: ꝑ diffinitionẽ igit̃ circulus a b g d magnus est, quæ oportuit explanare.

XIX.

Omnes circuli magni in sphæra per æqualia se inuicem secant.

Commune enim omnibus circulis magnis in sphæra diffinitur centrum sphæræ. quicunq; igitur duo circuli in hoc uno puncto participãt, & in linea recta punctum ipsum recipiente, tanq; sectione communi participabunt 12. huius confirmante. hæc autem sectio communis utriusq; circulorum erit diameter, utrunq; eorũ ꝑ æqua scindẽs, quare & ipsi ꝑ æqua se scindent, q̃d nostra enũciabat cõclusio.

XX.

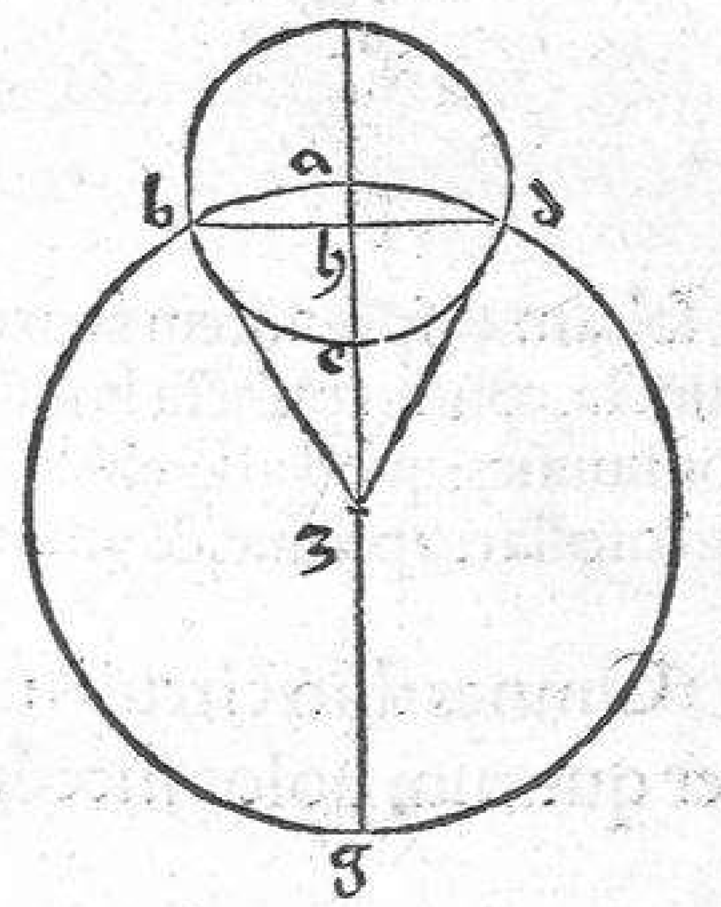
Omnis circulus magnus per polos circuli in sphæra magni ad quẽ ipse erectus est transibit.

Linea

Linea nanque à centro eorum communi (omnes enim circuli magni in centro sphæræ participant) ad sectionem communem in altero eorum orthogonaliter egrediens ad reliquum, erit orthogonalis per diffinitionem supeficiei supra superficiem erectæ & quartam undecimi. quare per quintam huius ad polos eius perueniet. cumque ipsa superficiem circuli erecti non egrediatur, necessario ipse circulus erectus circuli substrati polos complectetur, & hoc decuit confirmare.

XXI.

Quicunque circulus magnus alium in sphæra minorem circulum orthogonaliter secat, ipsum quoque per æqua partietur. & si per æqualia scindet, orthogonaliter eum secabit. Vnde polos circuli minoris præterire non poterit circulus ipse magnus.

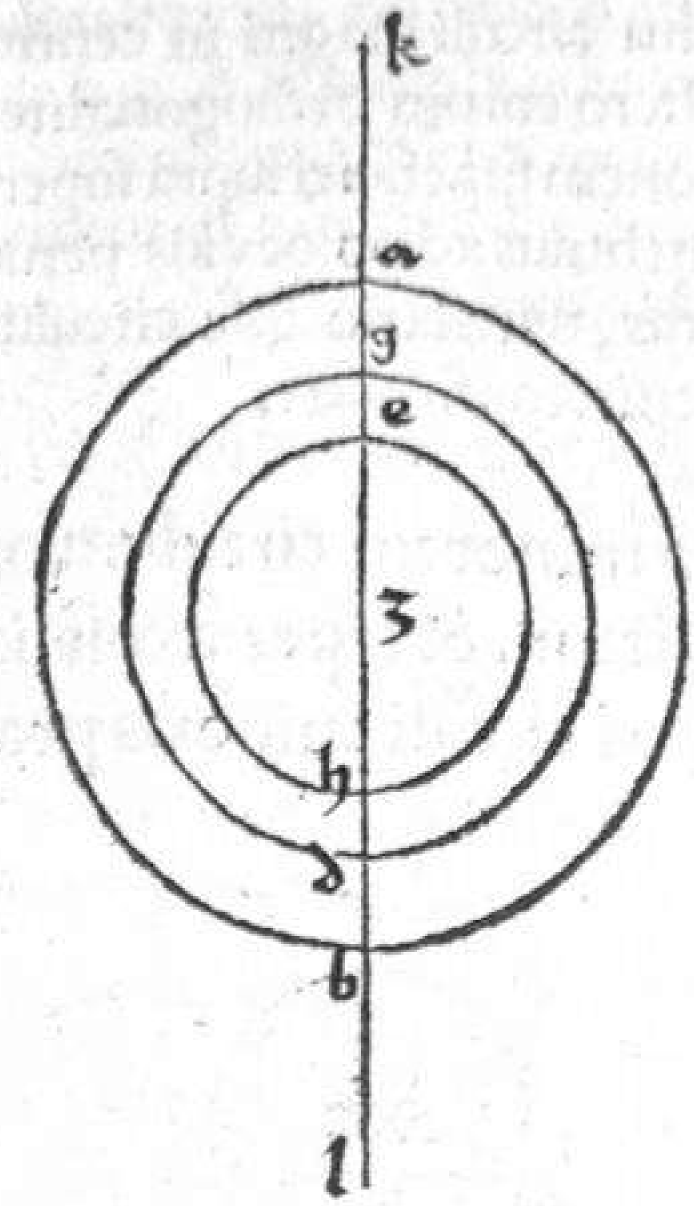


Secet enim circulus magnus a b g d, cuius centrum 3 circulum minorem b e d orthogonaliter secundum lineam b d. Dico, quod secabit eũ per æqualia, quem si per æqua secuerit, orthogonaliter quoque secuisse prædicabo. Diuisa enim sectione cõmuni b d per æqualia in puncto h, ducatur à centro sphæræ circuli magni a b g d, quod est 3, ad punctum h linea 3 h, quæ ex diffinitione sphæræ & octaua primi ductis duabus semidiametris 3 b & 3 d, perpendicularis erit ad sectionem communem b d. quare per diffinitionem superficiei erectæ ad superficiem & quartam undecimi linea 3 h orthogonalis erit ad superficiem circuli b e d, & ideo per corollarium primæ huius punctus h erit centrum circuli b e d, & linea b d diameter eius, quæ cum secet circulum b e d per æqualia, eundem quoque circulus a b g d secabit per æqualia, quod asseruit prima pars theorematis. Secet denique eũ per æqualia, linea d b diametro circuli minoris existente, in qua punctus h centrum eius accipiatur, quod cum centro 3 circuli magni & sphæræ ipsius copulabimus per lineam 3 h, quam ex secunda huius perpendicularem esse oportet ad superficiem circuli b e d. quare & per 18. undecimi superficies circuli a b g d ad ipsam orthogonalis erit. Circulus igitur a b g d circulũ b e d orthogonaliter secabit, quod erat exponendũ. Necesse autẽ est, ex utraque hypothesi & eis quæ in processu præsenti recitauimus, lineam 3 h utrinque superficiei sphæricæ occurrentem circuli b e d polos inuenire, cũque ipsa superficiem circuli a b g d egredi non possit, ipse circulus a b g d maior polos circuli minoris non præteribit, quod pollicebatur corollarium.

XXII.

Omnes circuli in sphæra, quibus eidem sui poli sibi inuicem æquedistant: & si fuerint æquedistantes quotlibet circuli, duos polos habebunt communes. Vnde patet, quotlibet circulorũ in sphæra æquedistantiũ centra cum polis suis in una reperiri linea recta.

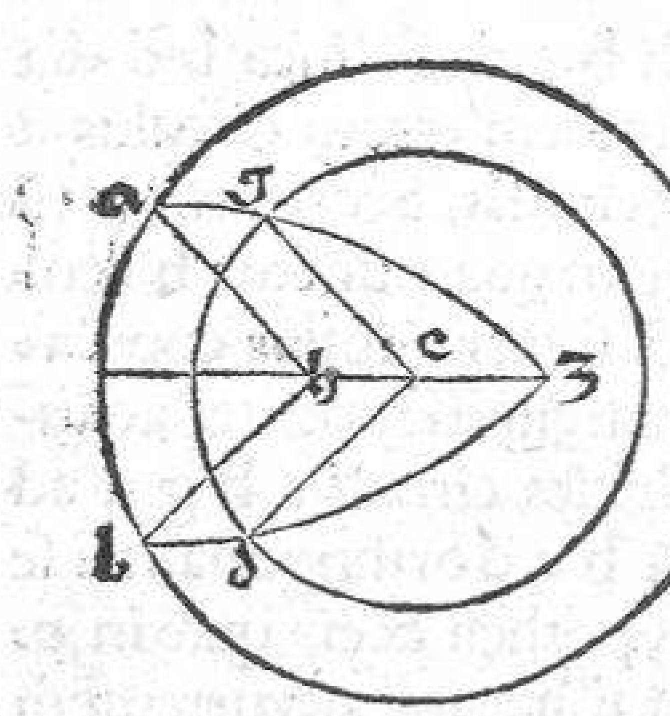
Sint tres aut plures circuli quotlibet a b g d, & e h in sphæra una, quibus duo poli k & l cõmunes existant. Dico quod ipsi inter se æquedistabunt, qui si ponantur



æquedistantes in polis duobus cõmunicabunt. Continuabo em̃ duos polos k & l per lineam k l, quæ p 7. huius transibit p centrum sphæræ, centraq; omnium circulorum æquedistantium, quare per quartã huius uniuersis circulis orthogonaliter incidet, & ideo per undecimi circuli dicti inter se æquedistabunt, quod enunciabat prima pars theorematis nostri. Sed ponamus eos æquedistantes, pducamusq; à centro sphæræ ad centrum unius eorum lineam rectam, quæ per 2. huius ppendicularis erit ad superficiem circuli, ad cuius centrum ipsa pducitur. Hæc autem linea utrinq; ad supeficiem sphæræ extensa, reliquis omnibus circulis æquedistantibus ppendicculariter incidet ex hypothesi & undecimi. quare per corollarium primæ huius per centra singulorũ transibit, & ideo ex 5. huius per polos omnium incedet. cumq; polos in superficie sphæræ dũtaxat signare soleamus, ipsa autem sæpedicta linea in superficie sphæræ duo tantum offendit puncta, constat puncta huiusmodi esse polos omnibus circulis æquedistantibus communes, quod asserebat secunda pars ppositionis. Corollarium autem huius ex corollario primæ, & 7. huius confirmabitur.

XXIII.

Omnes duo circuli magni ex circulis in sphæra æquedistantibus, per quorum polos incedunt, arcus absumunt similes.

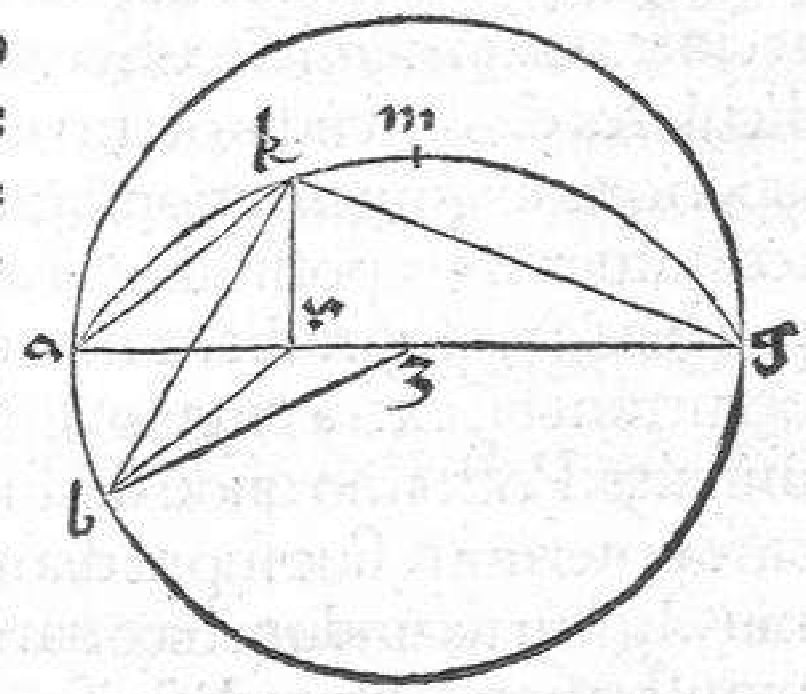


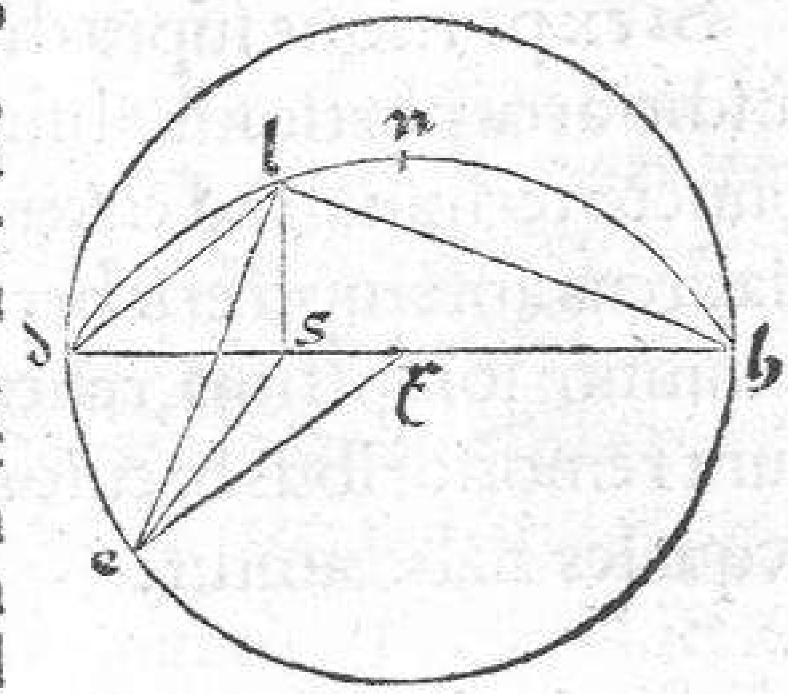
Sint duo circuli æquedistantes a b & g d in sphæra una, cõmunem ex præcedenti habentes polum 3, per quem & sibi oppositum polum incedãt duo circuli magni, quorum arcus duntaxat in figura hac posuisse satis est, qui sint 3 a & 3 g, secantes circumferentias circulorum æquedistantium, circuli quidem a b in punctis a & b, circuli uero d g in punctis g & d. Dico, q duo arcus a b & g d sint similes. Egrediatur enim à polo 3 ad polum sibi oppositum linea recta, quam constat esse cõmunem sectionem duorum circulorũ magnorũ in qua necesse est reperiri duo centra circulorum a b & g d ex corollario præcedentis. sit igitur h centrum circuli a b, & e centrum circuli g d, à quibus binæ educantur semidiametri ad quatuor puncta sectionum, quæ sint h a, & h b quidem circuli a b, e g autẽ & e d circuli g d. oportet autẽ has semidiametros esse in cõmunibus sectionibus duorum circulorũ magnorum & ipsorum æquedistantium, q puncta eas terminantia in utrisq; circulis existant. Quoniã itaq; circulus a g 3 secat duos circulos æquedistantes a b & g d, erunt per undecimi duæ lineæ a h & g e sectionis cõmunis æquedistantes, similiter duæ lineæ b h & d e æquedistabunt. duæ igitur lineæ a h & b h angulariter coniunctæ æquedistant duabus g e & d e angulariter coniunctis, & ideo per undecimi angulus a h b, æqualis erit angulo g e d, utriusq; ergo eorum ad quatuor rectos una est pportio, quæ quidem, ut ex ultima sexti trahitur, est tanq; utriusq; duorum arcuũ a b & g d

& g d ad suam circumferentiam. proportio itaqꝫ arcus a b ad suã circumferentiam est ut arcus g d ad suam. per diffinitionem igitur duo arcus a b & g d duobus circulis magnis intercepti sunt similes, quod oportuit explanare. Non aliter ꝓcedemus, si plures q̃ duo æquedistantes circuli nobis offerantur, nisi ꝙ media, quibus freti sumus, quoties res ipsa poposcerit ingeminemus.

XXIIII.

Si super duas diametros duorum circulorum æqualium erigantur duæ portiones unius circuli æquales, aut duorum circulorum æqualium, ex ipsis autem portionibus accipiãtur duo arcus æquales, quorum uterqꝫ minor sit dimidio arcu portionis suæ, itemqꝫ ex circũferentijs circulorum arcus æquales conterminales quidẽ arcubus portionum acceptis, lineæ rectæ continuantes extrema arcuum acceptorũ æquales erunt. & si lineæ ipsæ sint æquales, arcus autem portionum æquales, minores tamen dimidijs arcubus suarum portionum, arcus quoqꝫ circulorum æquales erunt.





Sint duo circuli a b g & d e h æquales, à quorum diametris a g & d h exurgant duæ portiões æquales a k g & d l h unius circuli, aut duorũ circulorum æqualium, orthogonales ad circulos subiacentes, quarum portionum uertices sint puncta m & n, diuidentia arcus portionũ per æqualia, accipiaturqꝫ ex una earũ arcus a k minor arcu a m, ex reliqua uero d l minor arcu d n. sed & duo arcus a b & d e circulorum substratorũ æquales statuanẽ. ꝓductas itaqꝫ lineas rectas b k & e l æquales, concludam hac argumentatione. A duobus pũctis k & l duas ꝑpendiculares k r & l s, demitto ad sectiones cõmunes circulorum & portionum, punctaqꝫ b & e pedibus ꝑpendicularium demissarum & centris circulorum copulabo, b quidem per lineas b r & b 3, e autem per lineas e s & e x, duasqꝫ cordas k g & l h in portionibus ipsis ponã. Quia itaqꝫ duo arcus a k & d l æquales sunt, erũt duo anguli k g r & l h s æquales, uterqꝫ autem angulorum apud puncta r & s rectus est, latus autem k g trianguli k g r æquatur lateri l h trianguli l h s ꝓpter duos arcus k g & l h æquales. quare per 26. primi duo latera residua trianguli k g r duobus lateribus reliquis trianguli l h s æqualia erunt, r g quidem ipsi s h & k r lateri l s. demptis ergo circulorum æqualibus semidiametris, relinquetur r 3 æqualis ipsi s x, est autem b 3 æqualis ipsi e x. sunt enim ex hypothesi duo circuli æquales, quorum ipsæ semidiametri habentur, angulus autem b 3 r æquatur angulo e x d ꝓpter arcus a b & d e, quos hypothesis æquales subiecit, ultima sexti cooperante: quare per quartam primi basis b r trianguli b 3 r æquabitur basi e s trianguli e x s. Cum autem utraqꝫ linearum k r & l s demissa sit perpendiculariter ad sectionem cõmunem su-nem superficierum, ex diffinitione superficiei ad superficiem erectæ & quarta undecimi, erit utraq; earum perpendicularis ad superficiem circuli sibi substrati, & ideo per diffinitionem perpendicularis ad omnem lineam in substrata superficie sibi conterminalem. duo igitur anguli b r k & e s l recti sunt, quos cum circundẽt æqualia latera quemadmodũ deductum est, erunt per 4. primi duæ lineæ b k & e l rectis angulis oppositæ æquales, quod enũciabat theorematis nostri prima pars. Qđ si eas lineas ponendo æquales uelimus ostendere æqualitatem arcuum a b & d e, reliquis ut antehac manentibus, hoc pacto ratiocinabimur, ꝓpter duas lineas b k & k r æquales duabus e l & l s, angulosq; apud r & s rectos penultima primi & cõmunibus scientijs confirmantibus, linea b r æqualis erit lineæ e s, basis uidelicet trianguli b r 3 basi trianguli e s x, quorum etiam bina latera sunt æqualia, quemadmodũ in priori processu explanauimus, quare per 8. primi duo eorum anguli b 3 r & e x s in centris suorum circulorũ quiescentes æquabuntur, & ideo per tertij duos arcus a b & d e æquales esse oportebit, quod ꝓmittebat secunda pars ꝓpositionis. Aduertendum tamen, ꝙ si ex erectis portiõibus arcus æquales absumpserimus, non minores, sed maiores dimidijs arcubus suarum portionum cæteris ut antea manentibus, eandem per omnia passionem demonstrabimus, syllogismo etiam non mutato. Præterea si erexeris semicirculos æquales, idẽ accidet, uerum semicirculis erectis, aut portionibus minoribus semicirculo ꝑpendiculares demittendæ occurrent diametris circulorum substratorũ, forma igitur superioris argumentationis haud mutabitur. Si uero portiones semicirculo maiores statuerimus, possibile erit ex eis abscindere arcus æquales adeo paruos, ut perpendiculares supradictæ non offendant diametros substratorum circulorum, sed occurrant eis extra circulos suos prolongatis, aut fortasse fient diametris conterminales. Postremo quod de duobus substratis circulis diximus, ad unicum applicare poterimus, siue supra diametrum eius unam portionem, siue plures erexerimus. Igitur secundum hæc uariabis parumper figurationem, ꝓcessum autem demonstratum, si supradicta satis tenueris, facile comparabis.

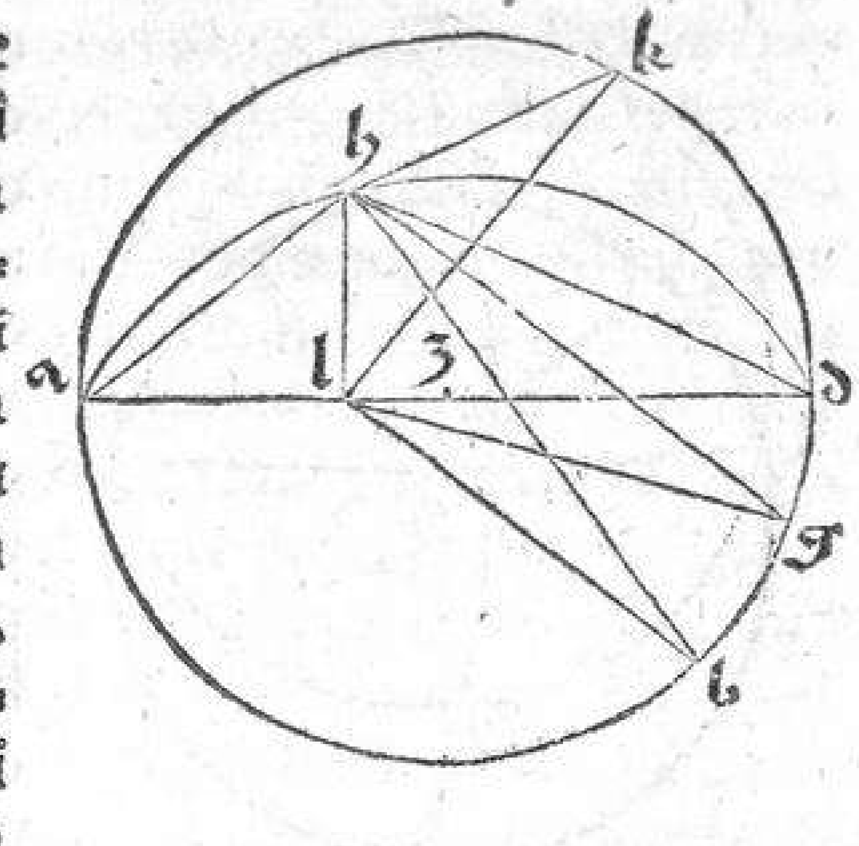
XXV.

Si ex portione supra diametrum circuli erecta arcum minorem dimidio arcu portionis absumpseris, omnium linearum rectarũ ab eius puncto terminali ad circumferentiam circuli substrati demissarũ corda arcus absumpti erit breuissima, corda autem residui arcus portiõis omnium longissima, reliquæ uero, quo breuissime sunt uiciniores, eo sunt remotioribus breuiores, æqualiter autem à breuissima remotæ, æquales habebuntur.

Sit circulus a b g d super centro 3, cuius diameter a 3 d sit corda portionis a h d orthogonaliter insistentis circulo dicto, sumaturq; arcus a h minor dimidio arcu portionis, à cuius puncto h ad circumferentiam circuli a b g d demittant̃ lineæ rectæ, h a quidem corda arcus h a, & h d corda arcus residui, itemq; quotlibet aliæ lineæ rectæ, quarũ duæ h b & h g inæqualiter à breuissima distantes, duæ uero h b & h k æqualiter ab ea remotæ, demonstrationi perficiendæ sufficient. Dico, ꝙ corda a h omnium demissarum linearum est breuissima, & corda d h omnium longissima, linea autem h b breuior linea h g, quod sic accipias. A puncto h ad diametrum a d perpendicularis descendat h l, cuius pedi puncto

scilicet

scilicet l duo puncta b & g connectantur per lineas b l & g l, oportet autem punctum l distare à centro ʒ uersus a punctum, quoniã ex primi huius casus a l minor est casu l d, ppter latus a h trianguli a h d, minus latere h d, quod comitatur hypothesim. puncto igitur l præter centrũ circuli a b g d signato, erit per tertij linea l a omnium ab eo puncto ad circumferentiam circuli egredientium linearum breuissima, l d autem omnium longissima, item l b breuior linea l g. Cum autem h l in superficie alterius duarum superficierum orthogonaliter se secantium, sectioni earum communi orthogonaliter insistat, erit ipsa



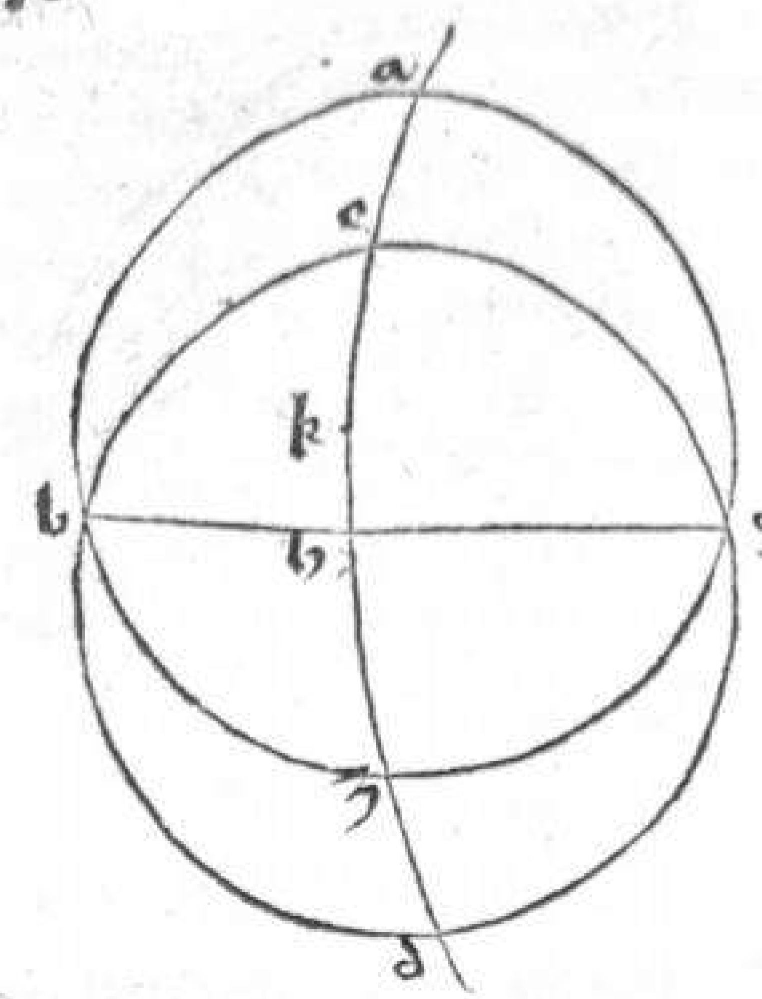
per diffinitionem superficiei ad superficiem erectæ, & quartam undecimi orthogonalis ad reliquam, & ideo per diffinitionem lineæ erectæ ad superficiẽ, ipsa erit orthogonalis ad omnem lineam sibi in reliqua superficie conterminalem, quare omnes anguli, quos ambiunt lineæ à puncto l egredientes, cum ipsa linea h l recti habebuntur. si igitur quatuor triangulos in latere h l communicantes notaueris, quorum reliqua latera sunt lineæ ab h puncto demissæ, & ab l puncto egredientes per penultimã primi & cõmunes animi conceptiones confiteberis lineam h a omnium demissarũ linearum esse breuissimam, & h d longissimam, h b uero breuiorẽ linea h g, & lineã h k æqualem h b, quæ pollicebamur demonstranda. Huiusmodi passionem demonstrabimus etiam de semicirculo erecto supra diametrum circuli, non aliter ꝙ de portione quam minorem posuimus semicirculo, simile præterea accidit portioni maiori semicirculo, uerũ perpendicularis h l nõ semper residebit in diametro circuli substrati, nam possibile est abscindere arcũ ex huiusmodi portione adeo paruum, ꝙ perpendicularis dicta non occurrat diametro, nisi extra circulum prolongetur, aut fortasse cõcurret cum ea in termino suo, quod cũ euenerit, utemur & tertij in processu demonstratiuo, ubi pridem adduximus tertij, reliqua uero omnia prorsus repetemus.

XXVI.

Circulus magnus in sphæra transiens per polos duorum circulorũ se secantium, diuidit arcus separatos eorum per æqualia. & si diuiserit arcus eorum separatos per æqualia, transibit per polos eorum. ꝙ si arcus unius eorum per æqua partiatur, per polum alterius eorum transeundo, ipse quoqꝫ arcus separatos reliqui diuidet per æqualia, & per polos amborum incedet.

Sint duo circuli in sphæra a b g & e b g qualescunqꝫ secantes se in punctis b & g, per quorum polos incedat circulus magnus a e ʒ d, secans binos arcus separatos circulorum a b g & e b g in punctis a, e, ʒ & d. Dico, ꝙ arcus a b æqualis est arcui a g, & b ʒ æqualis g ʒ. item duo arcus b e & e g inuicem, duoqꝫ arcus b d & d g sibi æquales erunt. Polus nanqꝫ circuli a b g sit k, & polus circuli e d g sit punctus h, à quo ad duo puncta b & g protrahantur duæ rectæ h b & h g, quas oportet esse æquales, h polo circuli e d g existente. Quoniam igitur circulus a e ʒ d transit per polos amborum circulorum, ipse secabit utrunqꝫ

 eorum

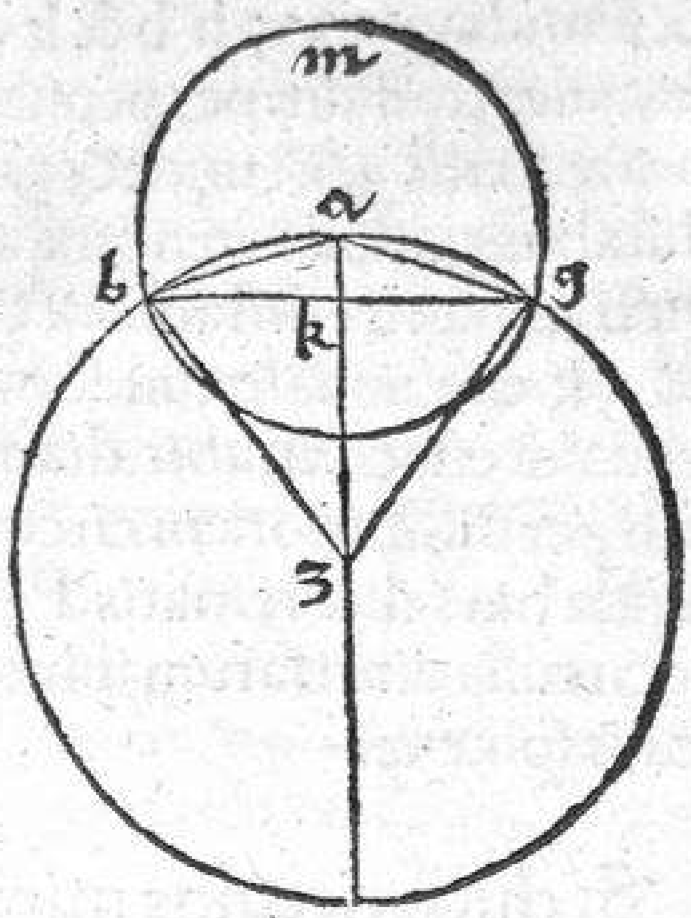


eorum per æqualia & orthogonaliter ex huius. quare portio a e 3 erigitur supra diametrum circuli a b g, ex qua abscindit arcus 3 h minor dimidio arcu portionis, â cuius termino h duæ rectæ æquales ad circumferentiam circuli a b g descendunt, fit igitur per huius arcus b 3 æqualis arcui 3 g. cumque uterque arcuum a b 3 & a g 3 sit semicircumferentia circuli, quod circulus a e d transiens per polum circuli a b g, secet eum per æqualia, demptis utrobique æqualibus arcubus, manebit arcus a b æqualis arcui a g. Non aliter ostendemus arcũ e b æqualem esse arcui e g, si portionem e h d supra diametrũ circuli e b g erectam esse intellexerimus, erit eñ arcus e k minor dimidio arcu portionis suæ, lineæque â puncto k ad duo puncta b & g demissæ, æquales probabuntur, k polo circuli a b g existente. Hinc etiam reliqui duo arcus b d & d g æquales ostendentur, primæ igitur parti theorematis assentire compellimur, sed pone circulum a e 3 d diuidere arcus separatos eorum per æqualia in punctis a e 3 & d. Dico, quod transibit per polos eorum. Si enim non, transeat alius circulus magnus per polos eorum, quod quidem possibile est per & huius, qui per iam demonstrata transibit etiam per quatuor puncta a, e, 3 & d. secabunt ergo se duo circuli magni in sphæra in istis quatuor punctis, quare per huius unusquisque arcuum a e, a 3, e 3 & e d erit semicircumferentia, omnes autem semicircumferentiæ unius circuli æquales phibentur, pars igitur æqualis erit toti, quod est impossibile. Non potest ergo circulus alius transire per polos huiusmodi, nisi ille qui dicta quatuor puncta transcurrit. Cum itaque per omnia duo puncta in superficie sphæræ signata transire possit circulus magnus, ut ex huius didicimus, & nõ potest transire per duos polos k & h alius circulus præter eum, qui per quatuor puncta a, e, 3, d incedit, manifestum est, quod circulus magnus per quatuor dicta puncta transiens, duos polos præterire non poterit, qui tandem ex huius per reliquos duos polos incedere cogitur, & illud pponebat pars secunda. Postremo si circulus a e 3 d secuerit, uerbi gratia, arcum b a g per mediũ in puncto a, & trãsierit per polos alterius se secantium circulorum. Dico, quod secabit & reliquũ p æqualia per polos amborum transeundo. Si enim non, secet eos alius quispiam p æqualia, aut transeat per polos eorum, ille igitur per polos amborum incedens, secabit arcus separatos eorum per æqualia. cõmunicabunt itaque duæ circumferentiæ circulorum magnorum in tribus punctis, uidelicet duobus polis alterius eorum & puncto a, eritque unusquisque arcuum inter duo quælibet puncta comprehensus, semicircumferentia per huius, unde sequitur partem suo toti æqualem esse, quod est impossibile. Non igitur stabit hæc hypothesis, nisi circulus ille transeat per polos amborũ, & secet utriusque arcus separatos per æqualia, quæ fuere demõstranda.

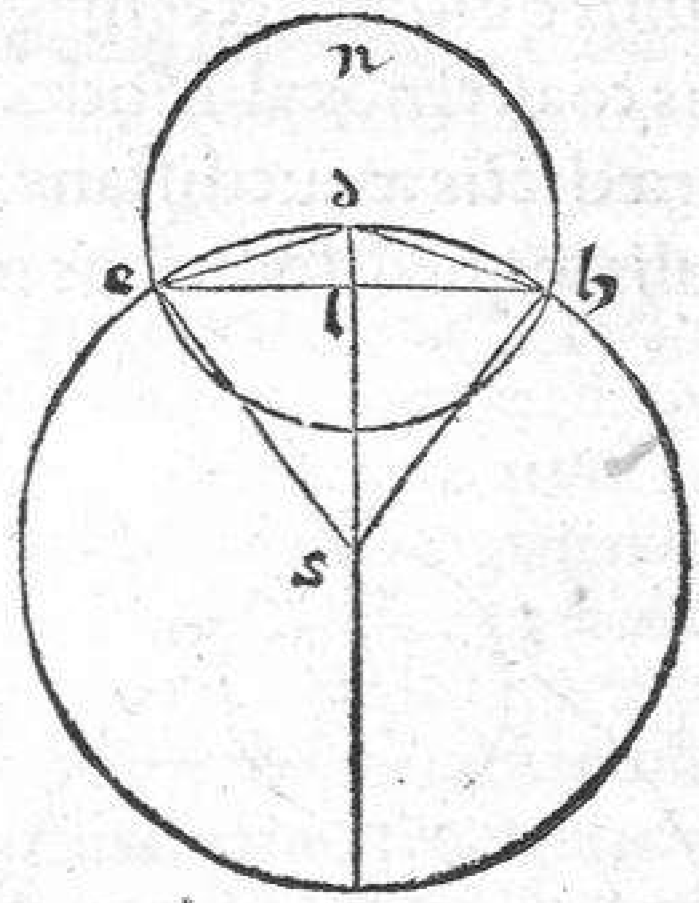
XXVII.

Omnes circuli secundum æquales lineas polares descripti in sphæra una, aut diuersis æqualibus tamen, æquales existunt. & si circuli æquales fuerint, lineas eorum polares æquari necesse est.

Si lineæ polares lateri quadrati magni æquales habeantur, constabit per 8. huius

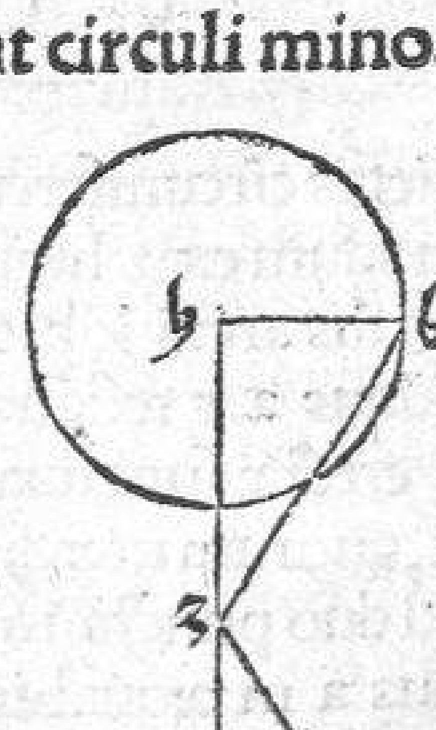


huius & diffinitionem: omnes circulos & magnos & æquales inuicem esse. Sed ponamus eas minores aut maiores huiusmodi latere quadrati magni, sintq́ a g & d h secundum quas duo circuli b m g & e n h in sphæra una, aut diuersis æqualibus tamen describantur, quos dico esse æquales. Transeant enim per polos eorum qui sint a & d duo circuli magni a b g, cuius centrum z, & d e h super centro s, q per 15. huius secabũt descriptos circulos per æqualia & orthogonaliter, sintq́ communes sectiones lineæ b g & e h, descendant demum à polis a & d aliæ duæ polares lineæ a b & d e pdictis duabus æquales, à centris autem circulorum binæ egrediãtur semidiametri z b & g z circuli a b g, s e autem & s h circuli d e h, erit igitur ex hypothesi & tertij arcus a g æqualis arcui d h, itemq́ arcus a b æqualis arcui d e, quare per communem scientiam totus arcus b g toti arcui e h æqualis habebitur, & ideo per tertij corda b g, quæ est etiam diameter circuli b g m æqualis erit cordæ e h, quæ est diameter circuli e h, quare per diffinitionẽ circulorum æqualium patebit prima pars theorematis. Conuertendo autem processum iam recitatum, facile concludemus æqualitatem linearum polariũ, si prius circulos ipsos subiecerimus æquales, erunt enim duæ eorum diametri b g & e h æquales per conuersionem diffinitionis circulorũ æqualium, unde & per tertij arcus b g & e h, quorum ipsæ sunt cordæ, æquales inuenientur. quare per cõmunem scientiam arcus eorũ dimidij a g scilicet & d h nõ erũt inæquales, & ideo per tertij cordæ suæ a g & d, quæ & polares lineæ sunt, æquales demonstrabuntur. utranq́ igitur theorematis partem firmauimus, quod quidem studiosus expectabat discipulus.



XXVIII.

Omnes minores circuli æquales à centro sphæræ eos continentis æqualiter distant, & si ab eo centro æqualiter distiterint circuli minores quotlibet, ipsos æquales esse conuincemus.

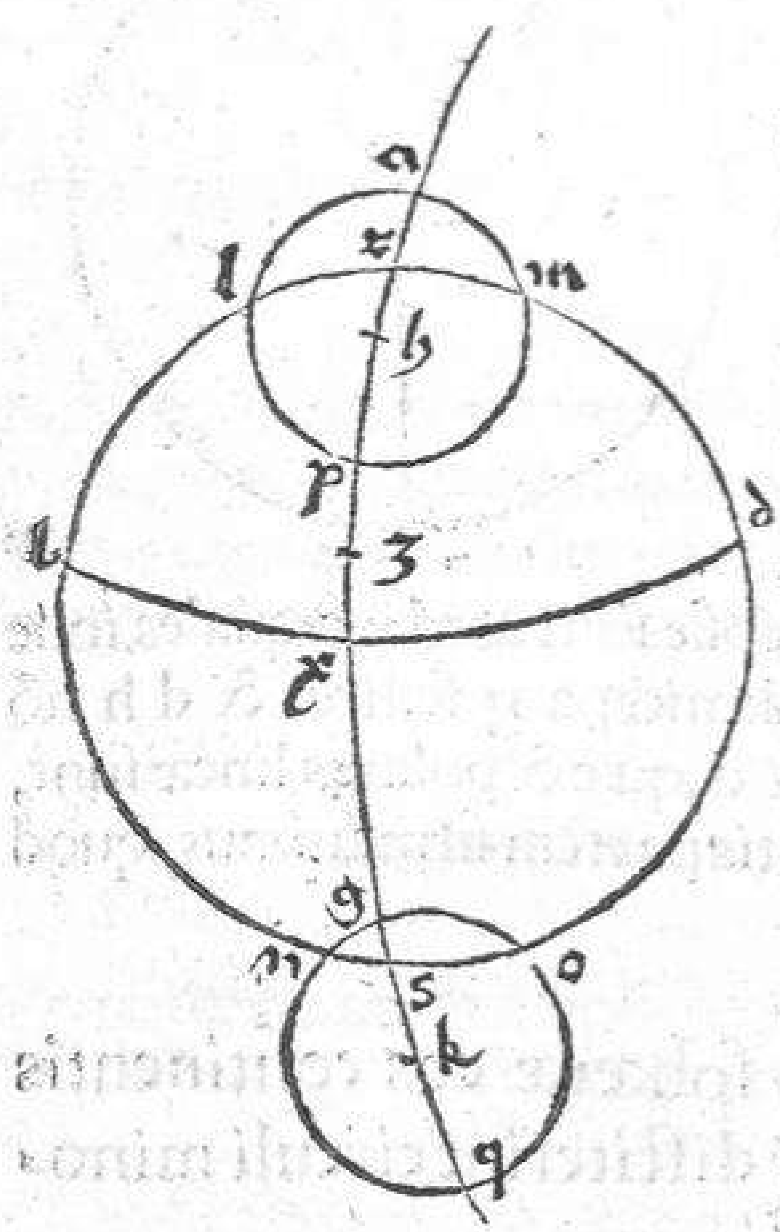


Sint duo circuli minores a b & g d. aut plures quotlibet in sphæra æquales. Dico, q̃ ipsi æqualiter distent à centro sphæræ, qui si fuerint æquedistantes à centro sphæræ, æquales necessario habebuntur. Primam partem sic confirmabimus. A centro sphæræ quod sit z ad centra duorũ circulorum h & k educantur duæ lineæ z h & z k, duæq́ semidiametri sphæræ z b & z g, quarum duos terminos connectemus per lineas h b & k g, eritq́ per huius utraq́ linearum z h & z k perpendicularis ad superficiem circuli cui incidit, & ideo per diffinitionẽ perpendicularis ad semidiametrum sibi conterminalem, quare uterq́ angulorum z h b & z k g rectus habetur. oportet autẽ & semi

& semidiametros h b & k g esse æquales, ꝓpter circulos eorum, quos hypothesis æquales tradidit. per penultimam igitur primi & communes scientias erit 3 h linea æqualis 3 k, unde & per diffinitionem circuli dicti æqualiter à cẽtro sphæræ distabunt, quod intendebat prima pars ꝓpositionis. Sed ponãtur duo circuli prædicti æqualiter distantes à centro sphæræ, quamobrem oportebit duas lineas 3 h & 3 k esse æquales, unde ex medijs præassumptis duas semidiametros h b & k g æquales esse constabit. diametris ergo circulorum æqualibus existentibus, ipsi circuli per diffinitionem circulo℞ æqualium æquales habebuntur, quod asseruit secunda pars theorematis. Poterimus autem & has mutuas passiones demonstrare de circulis diuersarum sphærarum æqualium tamen, non aliter quàm de circulis unius sphæræ.

XIX.

Si duos circulos minores in sphæra æquales & æquedistantes, circulus quidam secet magnus per polos eorum non transiens, arcus ex eis coalternos abscindet æquales. circulus præterea magnus duobus prædictis æquedistans, arcus circuli inclinati interceptos duobus circulis æquedistantibus minoribus per æqualia secabit.



Ex duobus circulis minoribus a l p & g n q in sphæra una æqualibus & æquedistantibus, circulus magnus l b o d per polos eorum non incedens, secet arcus coalternos l a m & n g o, quibus quidẽ circulis æquedistet circulus magnus b x d, secans duos arcus l n & m o circuli l b o d in duobus punctis b & d. Dico, ꝙ arcus l a m æqualis est arcui n g o, & arcus l p m arcui n q o æqualis, & ꝙ circulus magnus b x d æquedistans duobus minoribus, duos arcus l n & m o per æqua scindet in punctis b & d. Duos enim polos per huius communes esse oportet, tribus dictis circulis æquedistantibus, qui sint h & k, polus autem circuli l b o d sit punctus 3. per duos itaq; polos h & 3 incedat circulus a h 3 k huius edocente, qui transibit etiã per punctum k ex huius. Cum itaq; arcus r s sit semicircumferentia per huius, arcusq; h k sit medietas circumferentiæ, ꝙ duo poli h & k diametrum sphæræ terminent, quemadmodum ex huius trahitur, ablato arcu communi h s, relinquetur arcus h r æqualis arcui k s. ex autem huius duo arcus k g & h a æquales sunt, quare & residuus a r residuo g s æqualis habebitur. Supra diametrum autem circuli l b o d erectæ sunt duæ portiones æquales, ex quibus sumuntur arcus æquales r h & s k, quorum uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ, lineæq; à punctis h & k ad duo puncta m & o protensæ, æquales sunt per huius, quare per huius arcus a m æquabitur arcui s o, arcus autem r m æqualis est arcui l r, similiter arcus s o arcui s n, cum circulus a h 3 k per polos horum circulorum se secantiũ transeat. Rursus quoniam supra diametros duorum circulorum a l p & g n q, erectæ sunt duæ portiones æquales a p & g q, ex qbus absumpti sunt arcus æquales a r & g s, quorum uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ, lineæ uero à

punctis

punctis r & s ad puncta circulorum substratorum m scilicet & o protensæ sunt æquales, propter arcus r m & s o, quos æquales nuperrime conclusimus, erit per huius arcus a m æqualis arcui g o, arcus autem a m æquatur arcui a l, & arcus g o arcui g n propter circulum magnum a h 3 h, per polos circulorum se secantium transeuntem. quare totus arcus l a m æquabitur toti arcui n g o, reliquusq; l p m reliquo n q o non erit inæqualis. constat ergo prima pars propositionis nostræ. Postremo unusquisq; quatuor arcuum r b, b s, s d & d r est quadrans circumferentiæ, quandoquidem circulus a h 3 k per polos duorum circulorum b l o d & b x d magnorum transit, à quibus singulatim quadrantibus, si dempseris quatuor arcus æquales l r, r m, n s & s o, relinquentur quatuor arcus l b, b n, o d & d m inter se æquales. utrunq; igitur arcuum l n & m o circulus magnus b x d duobus minoribus æquedistans, per æqualia scindit, quod secundo loco demonstrandum extitit.

XXX.

Omnis anguli sphæralis ad quatuor rectos eam esse proportionē, quam basis eius ad circumferentiam suam.

Si ultimam sexti Euclidis satis uidisti, non latebit te nostri theorematis demōstratio, per habitudines enim æquemultiplicium usitato iuuabis te syllogismo.

XXXI.

Cuncti sphærales anguli, siue in sphæra una, siue diuersis, quorum bases sunt similes, sibi inuicem æquabuntur.

Erit enim basibus similibus ad suas circumferētias una proportio per cōuersionem diffinitionis arcuum similium, angulorū autem ad quatuor rectos præcedens, eam cōclusit ꝓportionem, quam basium ad suas circumferentias, erit igitur omnium angulorum ad quatuor rectos una proportio, per 7. ergo quinti anguli ipsi æquales erunt, quod oportuit declarare.

XXXII.

Omnium angulorum æqualium bases inueniri similes.

Aequaliū nanq; angulorum ad quatuor rectos eandem constat esse proportionem, quæ quidem per huius est, ut basium ad suas circumferentias. basiū igit huiusmodi angulorum ad suas circumferentias eadem habetur proportio, quare per diffinitionem similiū arcuum bases ipsæ similes conuincent, quod est ꝓpositū.

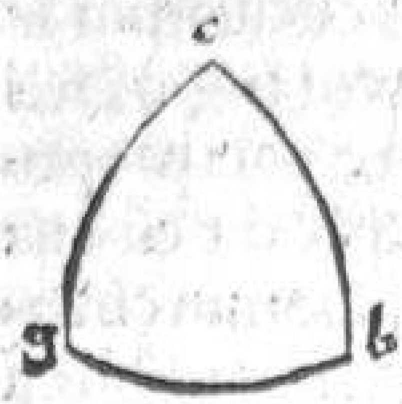
XXXIII.

Quorum dissimiles sunt bases, angulos inæquales esse, angulorum quoq; inæqualium dissimiles reperiri bases.

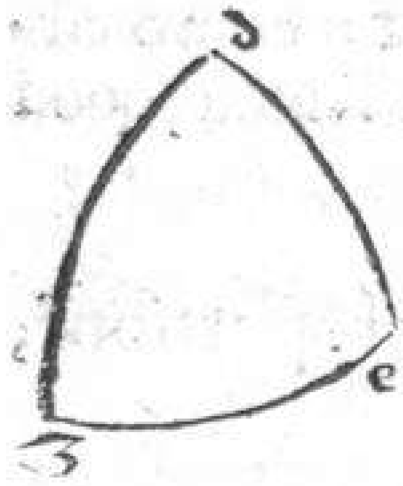
Hæc ex contrario subiecti præmissæ & ante præmissæ contrarium infert passionum suarum aduersarium ducendo ad impossibile. Si enim bases dissimiles admiserit, angulos autem æquales, erunt ex præmissa bases similes, igitur similes & dissimiles esse confitebitur easdem bases, quod est inconueniens. Quòd si angulis inæqualibus existentibus bases putauerit similes, sequitur ex antepræmissa & angulos esse æquales. quare eosdem angulos æquales inuicem & inæquales affirmabit, quod, quoniam repugnantiam parturit, esse non potest. Destructis autem impossibilibus, ueritatē ꝓpositionis inferemus.

XXXIIII.

Iuxta punctum quotlibet in ſuperficie ſphæræ ſignatum, angulo propoſito æquum angulum ſtatuere.

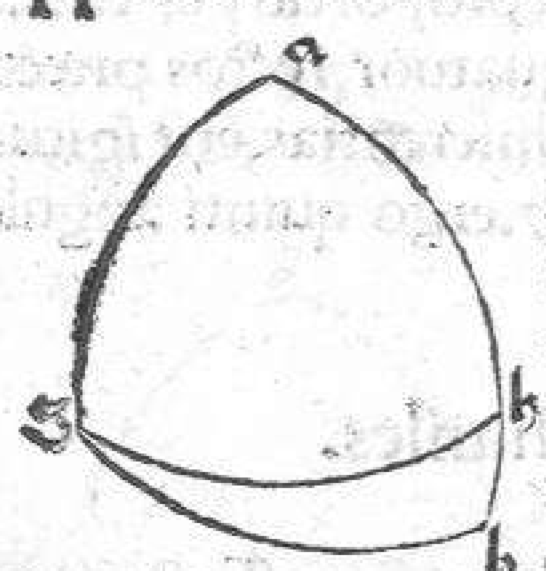


Sit angulus propoſitus b a g, cui iuxta pũctum d in ſphæra quacunq; æqualem conſtituere libet. Angulo b a g ſubſterno baſim ſuam b g, deinde ſuper puncto d ſecundum diſtantiam quantamlibet deſcribo circulum, ex cuius circumferentia abſcindo arcum e 3 ſimilem arcui b g, quod per 23 primi & ultimam ſexti facile comparabis, duoq; puncta eius terminalia e & 3 puncto d per duos arcus circulorum magnorum copulabo, qui ſint d e & d 3, quos dico apud punctum d continere angulum æqualem angulo b a g, cuius ratio propter ſimilitudinem duarum baſium b g & e 3 ex huius manifeſta apparet. Facilius tamen id efficies in ſphæra una, aut diuerſis æqualibus tamen. Super puncto enim d ſecundum diſtantiam a b circumduces circulum, ex cuius circumferentia arcum e 3 abſcindes æqualem arcui b g, reliqua ut antehac diſponendo. Erunt enim duo circuli, ex quarum circumferentijs baſes abſcinduntur, per huius æquales. cumq; baſes ipſæ ſint æquales, erunt etiam ſimiles, per igitur huius ſyllogiſmum conficies.

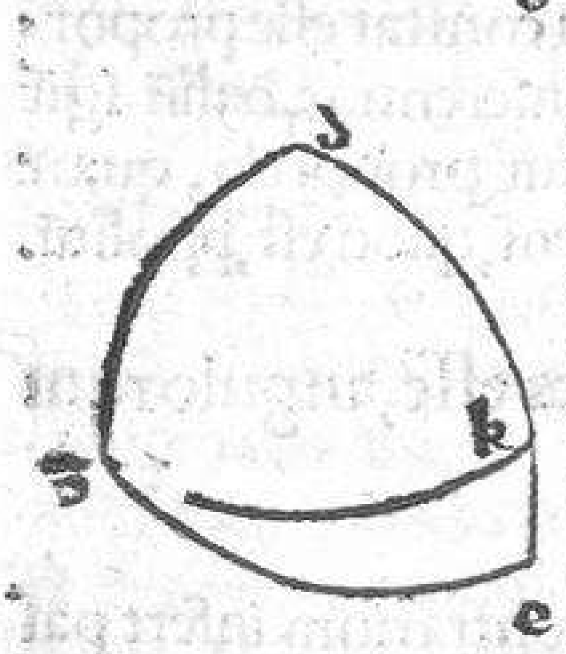


XXXV.

Omnium duorum triangulorum ſphæralium, quorum cuncta latera unius cunctis lateribus alterius æqualia ſunt, oẽs angulos æquis oppoſitos lateirbus æquales eſſe.



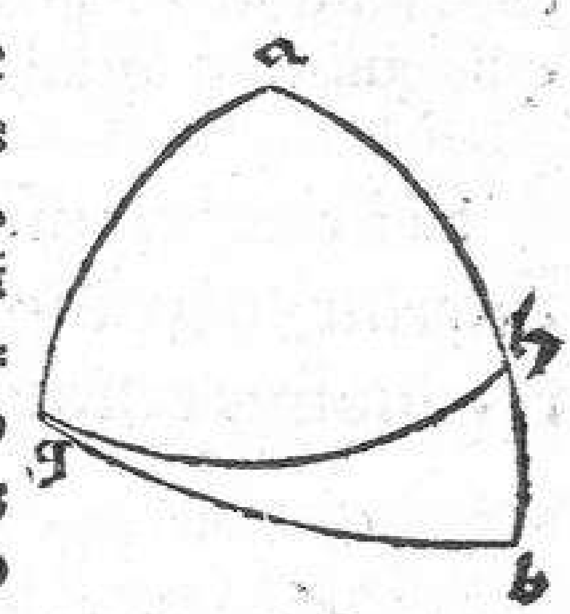
Omnes trianguli, de quibus futurum habebimus ſermonem, in ſuperficie unius ſphæræ, aut duarum uel pluriũ æqualium tamen, ex arcubus circulorum magnorum conſtantes intelligemus. Sint itaq; duo trianguli a b g, & d e 3, quorum trina latera ſunt æqualia, latus quidem b g unius lateri e 3 alterius, & reliqua reliquis. Dico, ꝙ anguli æqualibus oppoſiti lateribus ſunt æquales, angulus uidelicet a angulo d, & reliqui ſuis relatiuis. Si enim utriq; arcuum angulos a & d ambientium fuerint quadrantes, erunt duo puncta a & d poli circulorum b g & e 3 per huius, quare per huius duo anguli a & d æquales erunt, ꝙ baſes eorum ſint ſimiles, imò æquales. Si uero bini arcus dictos angulos continẽtes fuerint æquales, minores tamẽ quadrãte diuiſim, deſcriptis duobus circulis ſuper polis a & d ſecundum diſtantias æquales a g & e 3, circuli ipſi æquales erunt per huius, arcus autem eorum ad bina puncta b g & e 3 terminati (neceſſe enim eſt eos ad pũcta dicta terminari propter æqualitatem binorum arcuum à punctis a & d deſcendentium) arcus inq; illi æquales erunt, quoniam habebunt cordas æquales, ꝓpter arcus b g & e 3 eis conterminales, quos quidem hypotheſis ſubiecit æquales, quare per 21. huius anguli a & d æquales habebuntur. Qđ ſi bini arcus, qui ambiunt duos angulos a & d, inæquales fuerint, ſint minores eorum duo arcus a g & d 3, ſuperq; punctis a & d factis polis ſecundum



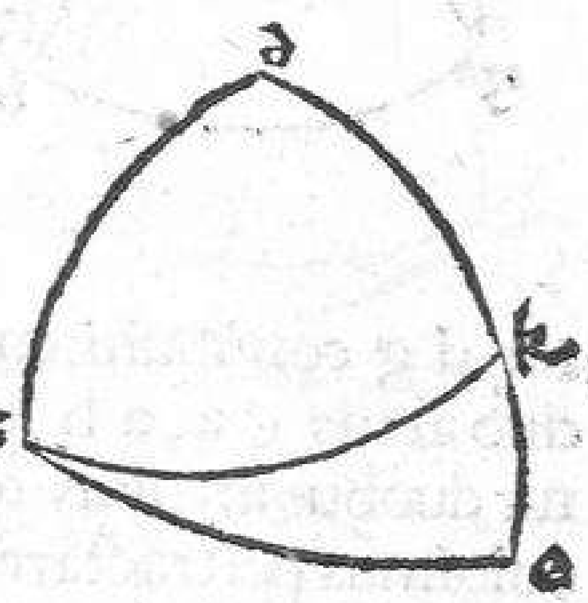
distantias æquales a g & d 3 describantur circuli g h & 3 k, quos constat esse æquales per huius, supra quorum diametros erectæ sunt duæ portiones æquales, ex quibus quidẽ portionibus accepti sunt duo arcus h b & k e æquales, quorum uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ. b g autem recta linea, si producta fuerit, æquans est ipsi e 3, propter arcus b g & e 3 æquales, erit igitur per huius arcus g h æqualis arcui 3 k. illi autem duo arcus, cum sint bases duorum angulorum a & d, per huius angulos suos afferent æquales. Quemadmodum autem circa angulos a & d processimus, circa reliquos quoq; faciemus, & hæc instituimus declaranda.

XXXVI.

Omniũ duorũ triangulorum, quorum duo latera unius duobus lateribus alterius sunt æqualia, angulusq; unius dictis lateribus cõtẽtus angulo alterius, basis quoq; unius basim alterius æquabit, reliqui demum anguli unius reliquis angulis alterius, quisq; uidelicet suo relatiuo æquabuntur.

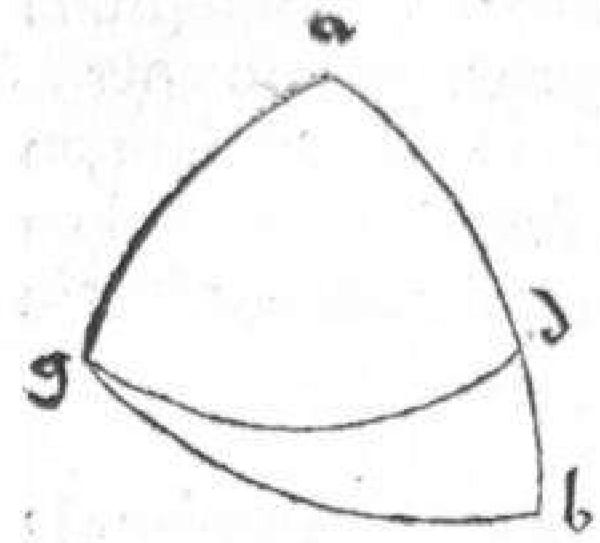


Trianguli a b g latus a b lateri d e trianguli d e 3 æquale habeatur, latus uero a g æquale lateri d 3, & angulus a æqualis angulo d. Dico, q latus b g lateri e 3 æquabit. angulus etiam b angulo e, & angulus g angulo 3 æquabũtur. Si enim utrunq; laterum a b & a g fuerit quadrans circumferentiæ, similiter utrunq; laterum d e & d 3, erũt duo puncta a & d poli circulorum b g & e 3 per huius, cũq; positi sint anguli a & d æquales, erunt per huius bases eorum similes, arcus scilicet b g & e 3, & ideo æquales, q circuli eorum æquales habeantur. Si uero bini arcus, qui duos angulos a & d ambiunt, inter se fuerint æquales, non tamen quartæ circulorum, necesse est circulos descriptos super polis a & d secundum distantias a g & d 3 transire per puncta b & e, eruntq; ex hypothesi & huius arcus horum circulorum, quos latera triangulorũ intercipiunt similes, & ideo æquales, q circuli eorum huius confirmante æquales habeantur, unde etiam eorũ cordas æquari oportet, quæ quidem cordæ arcubus b g & e 3 lateribus scilicet triangulorum ꝓpositorum cõmunes sunt, quare & arcus ipsi æquales erunt. Postremo duorum arcuum a b & a g alter altero maior sit arcus, uerbi gratia, a b maior arcu a g, itemq; d e maior d 3. describãtur itaq; super duobus polis a & d, secundum distantias æquales a g & d 3 circuli g h & 3 k, quos huius æquales arguit. ex portionibus autem æqualibus supra diametros eorum erectis duo arcus h b & k e absumuntur æquales, quorũ uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ. est autẽ arcus g h similis arcui 3 k ex hypothesi & huius, & ideo æqualis eidem, q circuli sui æquales existant, quare per huius linea b g, si producta fuerit, æquabitur lineæ e 3, unde & arcus b g & e 3, quorum ipsæ sunt cordæ, æquales reperientur. Tres igitur arcus triangulũ a b g claudentes, tribus triangulum d e 3 ambientibus, æquales habentur, angulusq; a unius angulo d alterius æqualis, unde & per præcedentem reliquos angulos unius reliquis duobus angulis alterius æquales uideri necesse est, pro quibus hactenus fatigati sumus.



XXXVII.

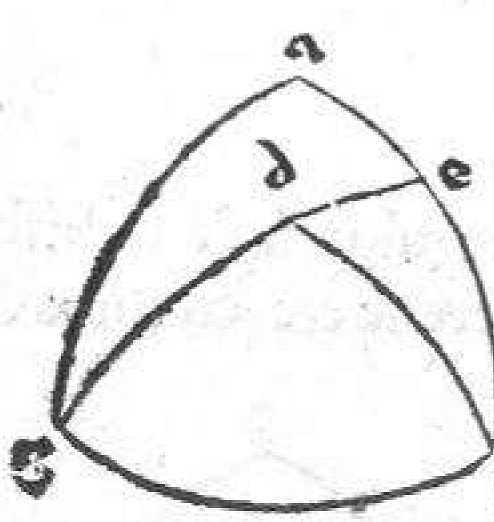
Omnis trianguli duo quælibet latera tertio reliquo sunt longiora.



Duo latera a g & g b trianguli a b g collecta dico esse longiora latere a b. Si enim latus a g æquale fuerit lateri a b, aut longius eo, planum est duo latera a g & g b congregata superare latus a b. Si uero minus eo fuerit secundum distantiam a g, super polo a describatur circulus, cuius arcus g d latus triãguli a b offendat in puncto d. Supra diametrum itaq; circuli g d erecta est portio circuli, ex qua sumptus est arcus d b minor dimidio arcu portionis suæ, quare per   huius linea b d recta, si producta fuerit, breuior est linea b g, unde & arcus b d breuior arcu b g. adiectis igitur utrobiq; æqualibus a g & a d arcubus, erit per communem scientiam aggregatum ex duobus arcubus a g, g b maius aggregato ex duobus arcubus a d, d b scilicet arcu a d, quod libuit absoluere. Non aliter de duobus reliquis quibuscunq; ad tertium collatis procedemus.

XXXVIII.

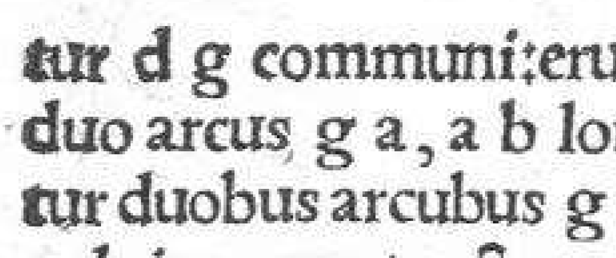
Si à duobus pũctis terminalibus unius lateris trianguli duo arcus exierint, intra angulum ipsum concurrentes, erunt ipsi collecti minores duobus reliquis trianguli lateribus.



A duobus pũctis b & g terminãtibus latus b g triãguli a b g exeant duo arcus b d & g d, intra triangulum confluentes in puncto d. Dico, q duo arcus b d, d g congregati, minores sunt duobus arcubus a b & a g coniunctis. Protendatur enim arcus g d in e punctum lateris a b, eruntq; per præcedentem duo arcus g a, a e longiores arcu g e. quare adiecto communi e b fient duo arcus g a, a b longiores duobus g e & e b. item duo arcus d e, e b longiores sunt arcu d b, facto igitur d g communi: erunt duo arcus g e, e b longiores duobus g d, d b, sed erãt duo arcus g a, a b longiores duobus g e, e b, multo igitur longiores habebuntur duobus arcubus g d & d b cõiunctis. unde & illi uiceuersa minores istis, q̃d uoluimus pertractare. Cõstat autem ex dictis, q si ab aliquo puncto terminali lateris trianguli arcus, producatur latus sibi oppositum secans, erunt duo arcus scilicet productus, & ex latere trianguli resectus minores duobus trianguli lateribus.

XXXIX.

Cuiuslibet trianguli sphæralis tria latera duobus semicirculis esse minora.



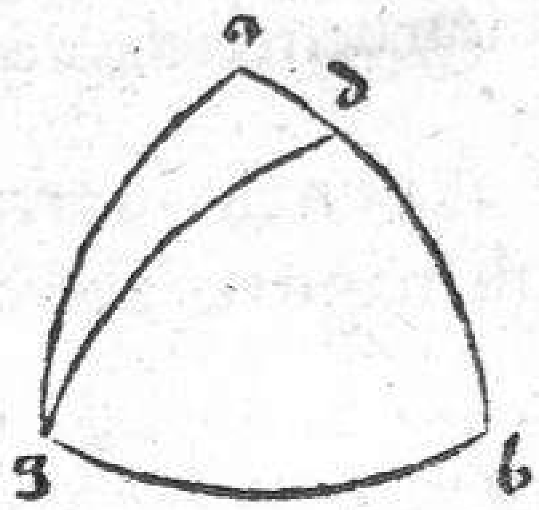
Producantur duo latera a b & a c ut concurrãt in d. erit itaq; b c minor duobus arcubus b d & c d, adiectis itaq; communibus a b & a c, tres arcus a b, a c & b minores erunt duobus semicirculis a b d & a c d.

XL.

Cuiuslibet trianguli duos æquales angulos habentis, duo quoq; lateral eos respicientia æquari necesse est.

Habeat

Habeat nanq; triangulus a b g duos angulos b & g æquales. Dico, ꝙ latus a b æquabit̃ lateri a g. Si enim non, alterum altero maius erit, sitq; a g longius ipso a b ex quo abscindam arcum g d æqualem arcui a b producendo arcum b a. Duo itaq; trianguli a b g & b g d bina latera habent æqualia, angulosq; hisce contentos lateribus æquales, angulum uidelicet a b g æqualem angulo b g d ex hypothesi. quare per huius angulus d b g æqualis erit angulo a g b, quem hypothesis subiecit æqualem angulo a b g. unde & angulus d b g angulo eidē a b g æqualis habebit̃: pars scilitet toti, q̃d est impossibile. Nō erit ergo alterū altero maius, & ideo æqualia inuicē relinquent̃, quod expectabas demonstrandū.



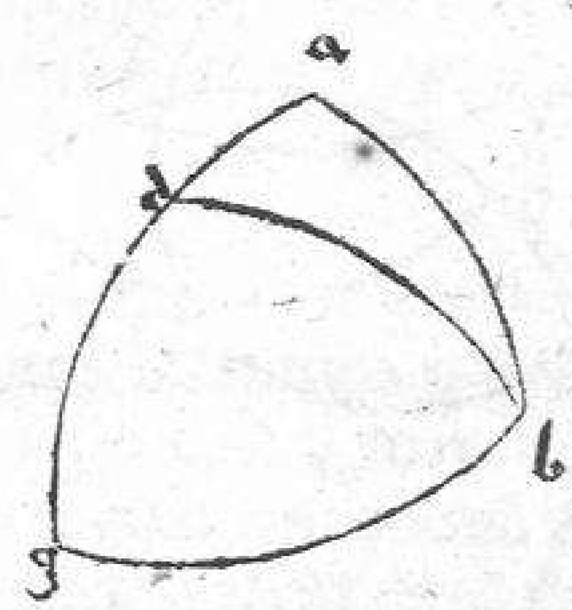
XLI.

Duo latera cuiusuis trianguli æqualia angulos æquales subtendere oportet.

Hæc conuertendo præmissam ex passione eius subiectū inferre suum pollicetur. Triangulus ergo a b g duo latera a b & a g habeat æqualia. Dico ꝙ angulus g æqualis erit angulo b. Non enim alter eorū altero maior esse potest. quod si forsitan ita arbitreris, sit angulus g maior angulo b, fiatq; per huius iuxta terminum g arcus b g angulus b g d æqualis angulo a b g, producto arcu g d. Trianguli itaq; d b g duo anguli d b g & d g b æquales sunt, quare per præcedentem duo eius latera d b & d g sibi inuicem æquabuntur. adiectoq; cōi arcu a d erit aggregatū ex duobus arcubus a d, d g æquale arcui a b, qui ponebatur æqualis arcui a g. Vnde & aggregatum ex duobus arcubus a d, d g æquabitur arcui a g, quod est impossibile, repugnans huius. Deceptus igitur affirmabas alterum altero maius esse, quare propositioni nostræ assentire compelleris. Hanc autem & præcedentem ostensiue potuimus demonstrare, uerum breuiores in omni opere uias eligendi fuit consilium.

XLII.

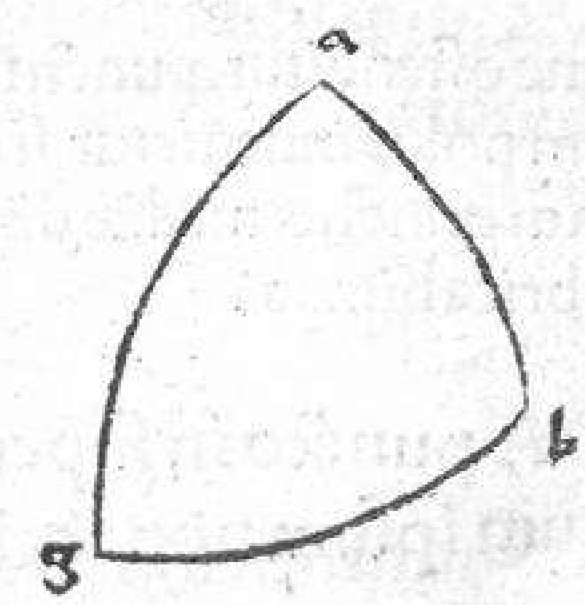
In omni triangulo sphærali maiorem angulū longius subtendit latus.



Angulus enim b trianguli a b g maior occurrat angulo g. Dico ꝙ latus a g longius est latere a b. Iuxta punctum enim b arcus b g fiat angulus d b g æqualis angulo a g b. erit igitur per huius arcus d b æqualis arcui d g. adiectoq; arcui a d cōi erit arcus a g æqualis aggregato ex duobus arcubus a d, d b, quod quidē aggregatū per huius maius est latere a b. unde & latus a g latere a b lōgius habebit̃, q̃d placuit addiscere.

XLIII.

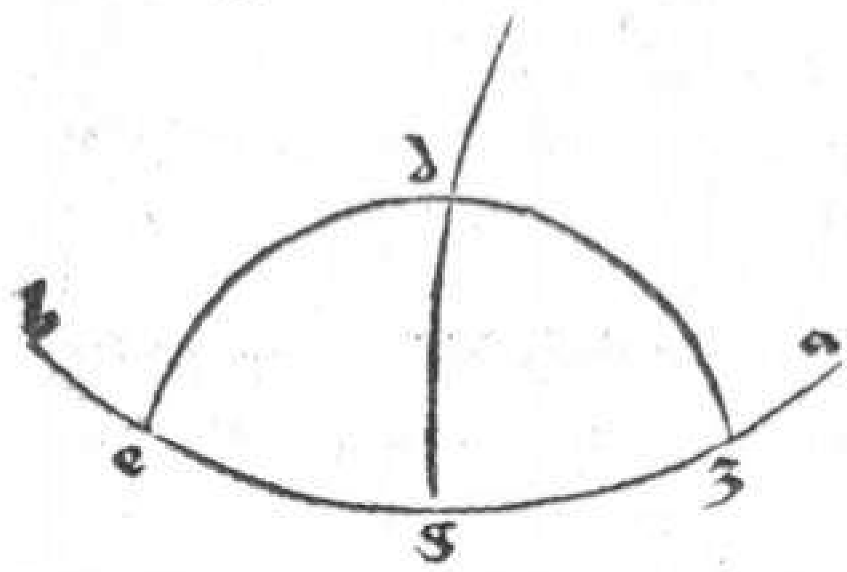
Longiori demū lateri trianguli cuiuslibet maiorē opponi angulum.



Sit triangulus a b g latus a g longius latere suo a b habens. Dico ꝙ angulus a b g maior erit angulo a g b. Nō enim potest esse æqualis ei, sic enim per huius latera a b & a g conuincerentur æqualia, sed neq; minor eo potest haberi. sic enim angulus a g b maior esset angulo a b g, & ideo ex præcedenti latus a b longius latere a g, quorum cum utrunque contrarium sit hypothesi, destructis ipsis, relinquitur ueritas theorematis nostri, quam deducere sperabamus.

XLIIII.

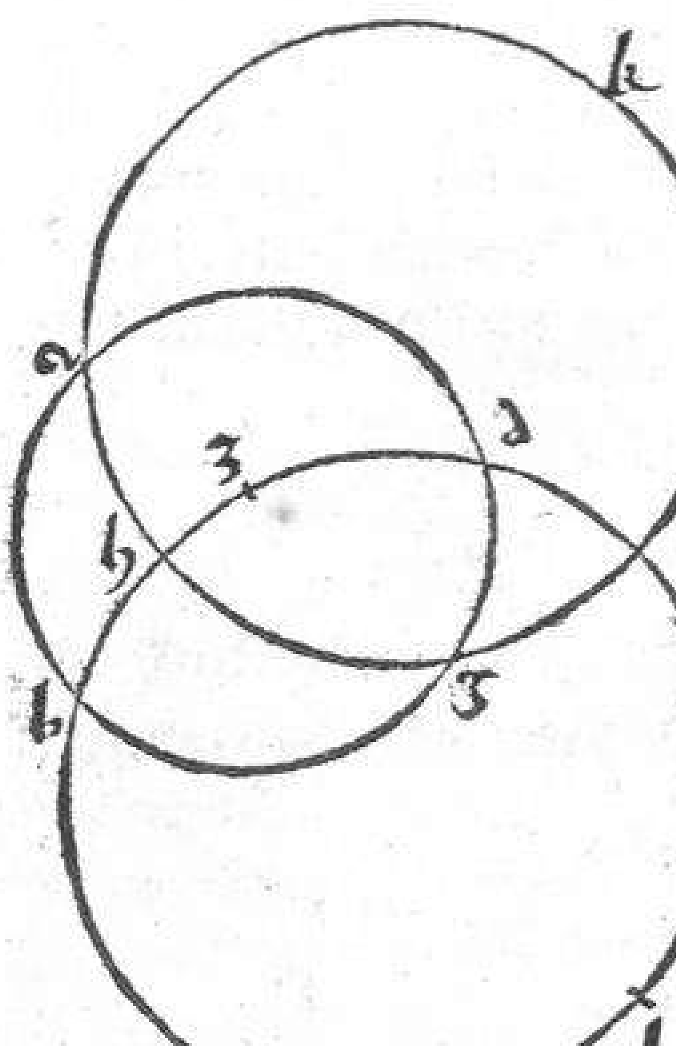
A puncto in arcu circuli magni signato, orthogonalem arcum circuli magni educere.



Sit arcus huiusmodi a b, à cuius puncto g libet educere orthogonalē. Super puncto g tanque polo secundum distantiam quantamlibet minorem tamen diametro sphæræ describatur circulus e d 3, oportet autem arcum e d, e 3 esse semicircumferentiam, circulus enim magnus a b per polos circuli iam descripti e d 3 transit, secetur ergo arcus e d 3 per medium in puncto d, per duoque puncta d & g arcus circuli magni dirigente huius producatur, qui sit d g, hunc dico esse orthogonalem ad arcum b g, erit enim per huius angulus a g d æqualis angulo b g d. per diffinitionem igitur arcus d g orthogonaliter insidebit arcui a b, quod libuit efficere. Qd' si polus circuli a b datus fuerit, facilius operabimur, ipsum nanque puncto g copulabimus per arcum circuli magni, qui orthogonalis erit ad arcum a b, circulo illius per polū alterius trāseunte.

XLV.

Circuli in sphæra nobis propositi polum inuenire.



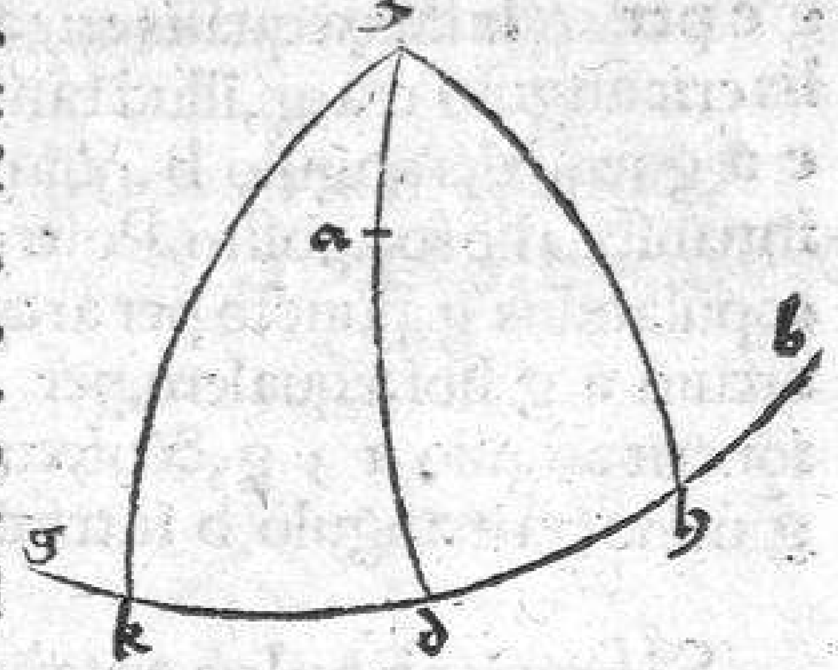
Sit circulus a b g d in sphæra signatus, siue maior siue minor existat, cuius polū reperire libet. Describe circulum, ut libet, secantem circulum a b g d propositum, quod facile uidebit, si super aliquo puncto circunferentiæ a b g d secundum quantitatem minorem diametro circuli a b g d circulum circūduxeris, qui sit a g k, utrunque autem arcuum a b g & a h g per medium scindas, hunc quidē in puncto b, illum uero in puncto h, & per duo puncta b & h circulum magnum b h 3 d producas huius docente, cuius arcum b h d, quem resecat circulus a b g d propositus per medium partiaris in puncto 3, quē oportet esse polum circuli propositi. Nā per partem huius circulus b h 3 d transit p polos circuli a b g d. oportet autem polum æqualiter distare à punctis b & d in circumferentia circuli a b g d signatis, quod profecto nulli puncto arcus b h d conuenit præter ipsum punctum 3, quod facillime ostenditur. punctus igitur 3 est polus circuli a b g d quæsitus. Reliquus autem polus inuenietur, si reliquus arcus circuli b h 3 d per medium diuisus fuerit, nam punctus mediæ diuisionis erit polus ille, cuius demonstrationem ut antehac fabricabimus.

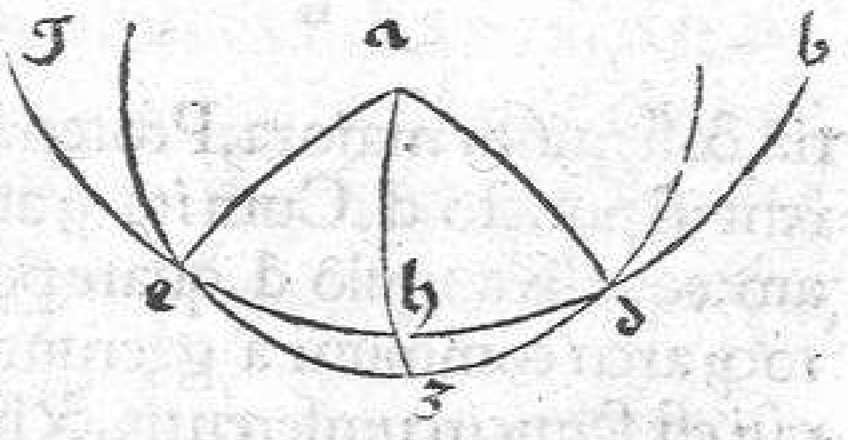
XLVI.

A puncto in superficie sphæræ signato ad arcum circuli magni punctum ipsum non includentis, perpendicularem demittere.

Sit pun

Sit punctus a extra arcũ b g signatus, a quo ad arcum ipsum demittere libet perpendicularem. Per præcedẽtem inueniatur polus circuli, cuius est arcus b g, qui sit z, ducaturq; per duo puncta z & a circulus magnus, quemadmodũ huius docuit, cuius arcus z d occurrat arcui b g si possibile est, aut ipsi quantum oportet prolongato in puncto d. Dico ꝙ arcus z d est perpendicularis ad arcum b g. Circulus enim z a d per polum z circuli b g transiẽs orthogonalis ad eum est ex huius, quod & arcubus ipsorum circulorum accidere necesse est. quicquid enim de inclinatione aut erectione arcuũ ad arcus dicitur, non nisi ex habitudine circulorum suorũ trahitur. Forsitan illud te non satiat, pone igitur arcum h d quantumlibet æqualem arcui d k, duo'q; pũcta h & k puncto z polo scilicet circuli b g connectas per duos arcus circulorũ magnorum qui sint z h & z k, ut docuit huius. duo itaq; trianguli z d h & z d k terna latera habent æqualia, quare per huius angulus z d h æquabitur angulo z d k, & ideo arcus z d propter quod & a d perpendicularis est ad arcum b g, quod uolebas declarandum. Aliter idem efficies. Super puncto a facto polo describe circulum, cuius circumferentia secet arcũ b g, si possibile est, aut eum prolongatum quoad satis est in duobus punctis d & e, diuidatur'q; arcus d e per medium in puncto h, qui continuetur cum puncto a per arcum circuli magni a h, quem oportet esse perpẽdicularem ad arcum b g. producam enim duos arcus circulorum magnorum a d & a e. duo igitur trianguli a h d & a h e trina latera habent æqualia, latere a h communi existente, quare per huius angulus a h d æqualis est angulo a h e, & ideo per diffinitionem arcus a h perpendicularis est ad arcum b g, quod libuit attingere.

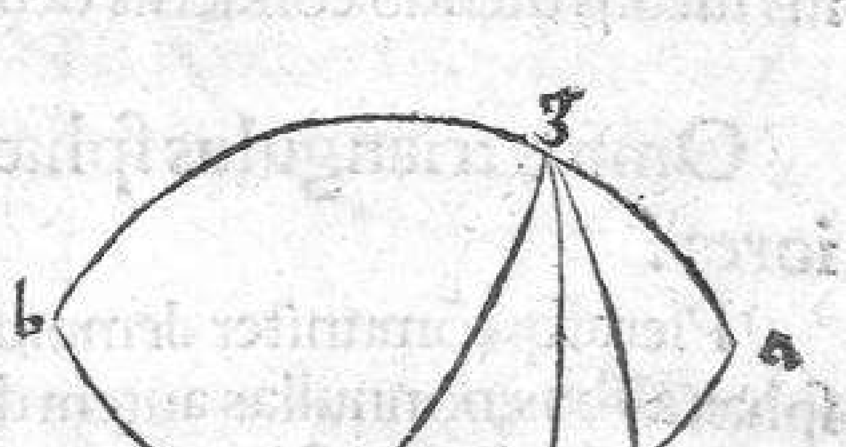




XLVII.

In triangulis sphæralibus educto latere uno, contingit angulum extrinsecum alteri intrinsecorum sibi oppositorum nunc esse æqualem, nunc uero maiorem, interdum etiam minorem eo.

Duorum enim circulorum ad se inclinatorum semicircumferentiæ coincidant in punctis a & b, abscindatur'q; ex una earum arcus a g minor quadrante, a cuius termino g ad arcum a b substratum perpẽdicularis arcus circuli magni descendat g d, erit itaq; trianguli a g d angulus a d g rectus maior angulo acuto d a g, angulo scilicet inclinationis. est autem angulus a æqualis angulo b, quod constabit per huius descripto circulo secundũ distantiam quantamlibet minore diametro sphæræ super polo a, & ideo angulus a d g extrinsecus ad triãgulum b g d maior est intrinseco angulo b sibi opposito. Rursus cũ sit arcus a g minor quadrante, maior autem arcu a d per huius, erit & arcus a d minor quadrante, & ideo

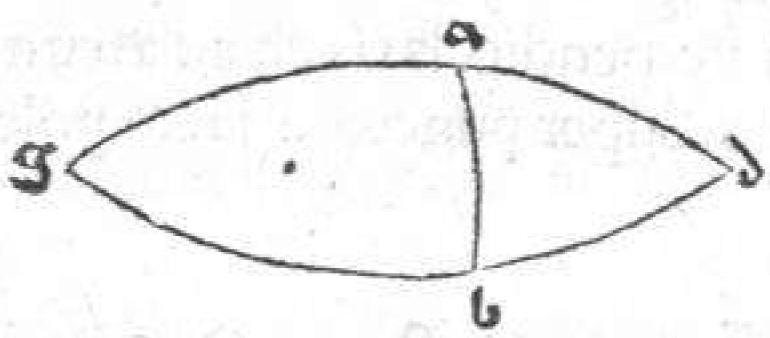


minor

minor arcu d g, ex quo abscindatur ei æqualis arcus d e. productus itaque arcus g e per huius, æqualis erit arcui a g, quare per huius angulus a e g æqualis erit angulo e a g, illud tamen sola huius inferre potuit, est autem angulus e a g æqualis angulo b. quare angulus extrinsecus a e g æquabitur angulo b intrinseco sibi opposito. Postremo signetur punctus quilibet in arcu e b, qui sit 3 copulandus g puncto per arcum 3 g, qui profecto superabit arcum e g, & ideo arcum a g sibi æqualem, per igitur huius angulus 3 a g æqualis angulo b maior erit angulo a 3 g, & uiceuersa angulus a 3 g extrinsecus ad triangulum b 3 g minor erit angulo b intrinseco sibi opposito. quæ proposuimus lucubrare.

XLVIII.

Si fuerit angulus extrinsecus æqualis alteri intrinsecorum ei oppositorum, aggregatum ex lateribus reliquum angulum intrinsecum ei oppositũ ambientibus, æquabit semicircumferentiæ. si uero maior intrinseco sibi opposito, erit aggregatũ huiusmodi minus, & si minor, ipsum maius.

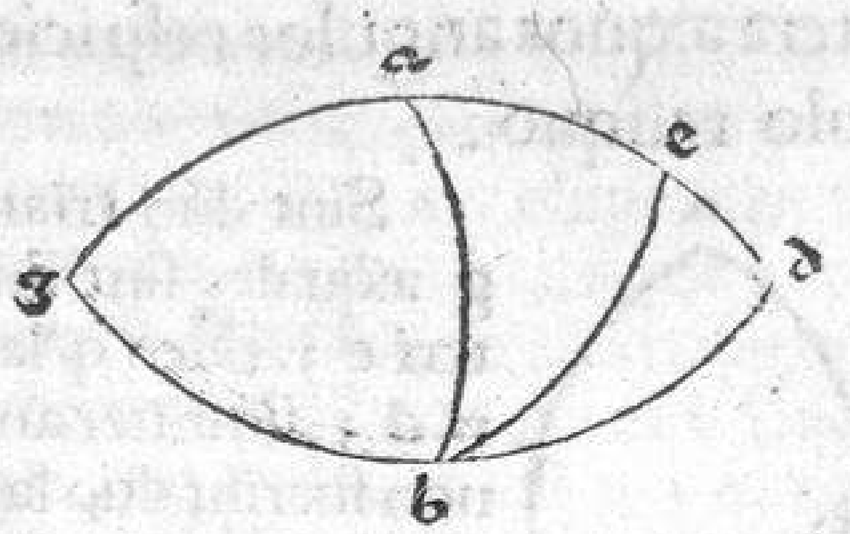


Sit triangulus a b g, cuius latere g b, producto ad partẽ puncti b, fiat angulus extrinsecus æqualis intrinseco sibi opposito angulo a g b. Dico quod duo latera g a & a b collecta æquabunt semicircumferentiã. si uero maior fuerit angulo g, ipsa duo latera minora habebuntur semicircumferentia, & si minor maiora. Protendantur enim duo arcus g a & g b donec concurrent in puncto d. Cum itaque angulus a b d æqualis fuerit angulo g, erit ipse etiam æqualis angulo d. quare per huius arcus a b æqualis erit arcui a d, adhibitoque arcu communi a g, erunt duo arcus b a & a g collecti æquales arcui g d, qui est semicircumferentia. & hoc erat primum. Quòd si angulus a g d maior fuerit angulo g, erit & ipse maior angulo d. quare per huius arcus a d superabit arcum a b. adiectoque cõi a g, erunt duo arcus b a & a g cõiuncti minores arcu g d, quem constat esse semicircũferentiam. aperta igitur est pars secunda. Postremo si angulus a b d minor existat angulo g, minor quoque erit angulo d. arcus ergo a b per allegatam maior inuenietur arcu a d. cõique sociato arcu a g erit aggregatum ex duobus arcubus b a, a g maius arcu g d, qui est circumferentiæ dimidiũ. Verum itaque hoc enunciauimus theoremate. Conuersam autẽ huius medijs utendo conuersis demonstrare haud uidebitur difficile.

XLIX.

Omnis triangulus sphæralis tres habet angulos duobus rectis maiores.

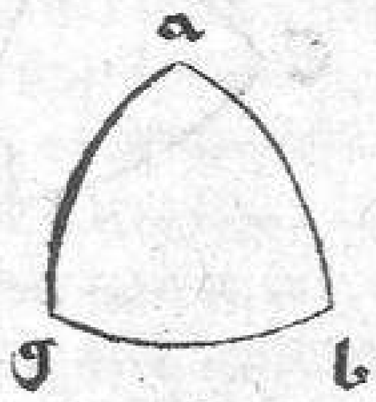
Plerasque cõmuniter demonstrare solemus passiones de triangulis & planis & sphæralibus, nonnullas autem differenter. Sphæralibus enim nõ accidit tres angulos suos duobus rectis æquales habere, quemadmodum planis. quo fit, ut cognitis duobus angulis trianguli sphæralis non pendeat inde tertij anguli cognitio. Ne igitur circa hæc quempiã errare contingat, monimento theorematis huius cautiorem reddere libuit. Sit itaque triangulus a b g sphæralis. Dico quod tres eius anguli a, b, & g, maiores sunt duobus rectis. Prolõgatis enim arcubus g a & g b, donec in puncto d concurrent, erit angulus extrinsecus a b d per huius aut æqualis intrinseco angulo b a g sibi opposito, aut minor eo aut maior. Si æqualis adiecto



cto cõmuni angulo a b g, erunt duo anguli a b g & b a g æquales duobus a b d & a b g, quos liquet æquales esse duobus rectis, quare & duo anguli a b g & g a b æquabuntur duobus rectis. & ideo tres anguli a, b, & g, duos superabunt rectos. Si uero angulus a b d minor fuerit angulo b a g, quoniã ipse cũ angulo a b g duobus rectis æquatur, erunt duo anguli a b g & b a g maiores duobus rectis. Tres igitur anguli trianguli a b g multo maiores erunt duobus rectis. Quòd si angulus a b d maior fuerit angulo b a g, fiat iuxta punctũ b arcus a b, angulus a b e æqualis angulo b a g producto arcu b e semicircũferentiæ d a g, occurrẽte in puncto e. Cum itaq; angulus b a g extrinsecus æqualis sit intrinseco angulo a b e trianguli a b e, erũt duo arcus a e & e b coniuncti per præcedentem æquales semicircũferentiæ g a d, ablatoq; cõi arcu a e, manebit arcus b e æqualis duobus arcubus a g & e d. maior itaq; est arcus b e ipso e d arcu. quare per huius angulus b d e maior angulo e b d habebitur. Est autẽ angulus b d e æqualis angulo a g b, quare & angulus a g b maior est angulo d b e. adiectis igitur æqualibus angulis a b g & b a g, item a b g & a b e, erunt tres anguli trianguli propositi maiores tribus angulis a b g, a b e & e b d, quos constat esse duobus rectis æquales. unde tres anguli dicti maiores erunt duobus rectis, quod oportuit demonstrare.

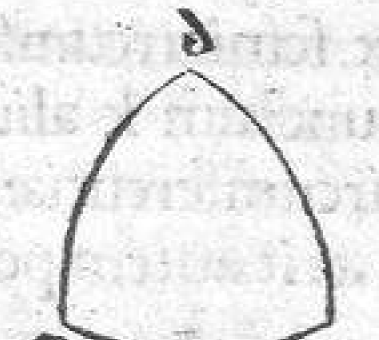
L.

Si fuerint duo latera unius trianguli æqualia duobus lateribus alterius, angulorum autem hisce æqualibus lateribus contentorum alterο altero maior, erit quoq; basis maiorem subtendens angulum unius maior basi alterius.



Duo trianguli a b g & e d z bina latera habent æqualia, a b quidem æquale d e, & a g æquale ipsi d z, angulus autem a maior sit angulo d. Dico q; basis b g longior est basi e z. Similem passionem 24. primi Euclidis de triangulis planis concludit. Modus autem demonstrandi hanc & illam non est uarius.

LI.



Si fuerint duo latera unius triangui æqualia duobus lateribus alterius, basis autem unius maior basi alterius, erit & angulus longiorem basim respiciens maior angulo breuiorem respiciente basim.

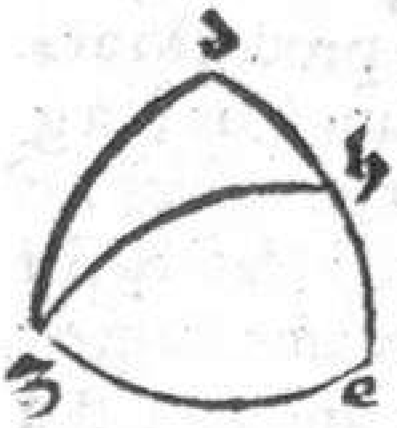
Hæc conuertit præcedentem, & correspondet 25. primi Euclidis. Quemadmodum autem illa ex 4. & 24. primi Euclidis ad impossibile demõstratur, ita hæc ex huius & præcedenti ad inconueniens ducendo aduersarium, ueritatem probatur habere necessariam.

LII.

Omnium duorum triangulorum binos angulos æquales habentium, duoq; latera æqualibus subiecta angulis æqualia, reliqua quoq;

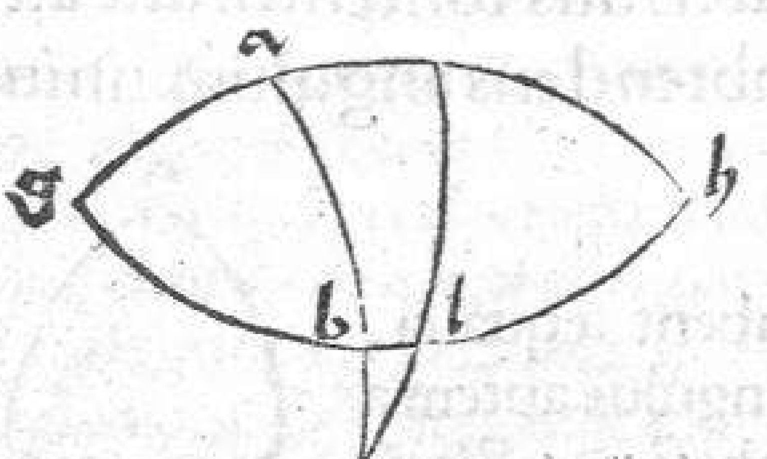
latera æquos angulos respicientia sunt æqualia, & angulus reliquus angulo reliquo.

Sint duo trianguli a b g & d e ȝ, quorum duo anguli b & g æquales sint duobus angulis e & ȝ, latusq; b g æquale lateri e ȝ. Dico ꝙ latus a b æquabitur lateri e d, & latus a g lateri d ȝ, similiter angulus a angulo d æqualis habebitur. Si enim non fuerint duo latera a b & d e æqualia, erit alterum altero maius. ex maiori igitur eorum quod sit, uerbi gratia, d e, abscindatur arcus e h æqualis a b producendo arcum ȝ h. sequitur itaq; per huius angulum e ȝ h æqualem esse angulo a g b, qui ponebatur æqualis angulo d ȝ e. angulus igitur e ȝ h æqualis erit angulo d ȝ e pars toti, quod est impossibile. Non potest igitur alterũ duorum laterum a b & d e altero maius esse, quare & æqualia habebuntur. Similiter probabis duo latera a g & d ȝ esse æqualia, angulum postremo a æqualem angulo d conuincet huius, aut quæ decuit stabilire.



LIII.

Omnium duorum triangulorum binos angulos habentium æquales, duoq; latera æqualibus opposita angulis æqualia, latera uero reliquos æquales respicientia angulos coniuncta non æqualia semicircũferentiæ, bina latera reliqua erunt æqualia, & angulus reliquus angulo reliquo.

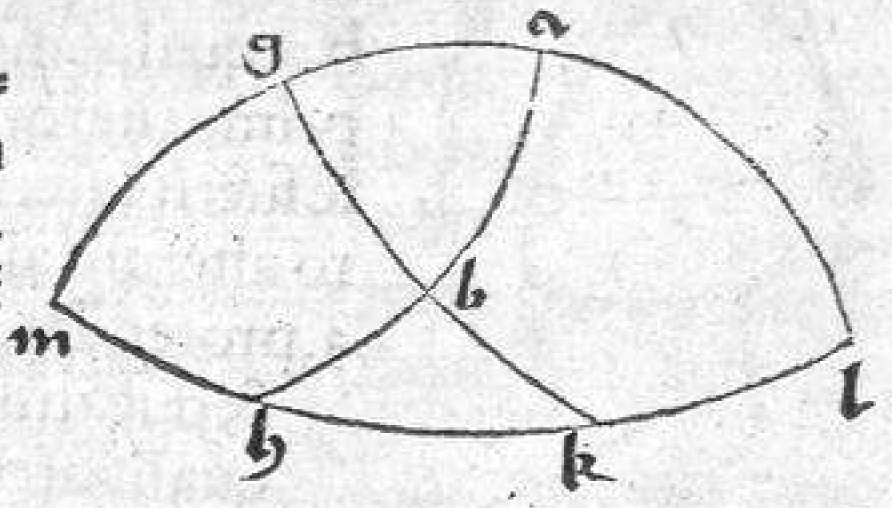


Sint duo anguli b & g trianguli a b g æquales duobus angulis e & ȝ trianguli d e ȝ, latusq; a b æquale lateri d e: duo autem latera a g & d ȝ coniuncta semircircumferentiæ non æqualia. Dico ꝙ latus a g æquale erit lateri d ȝ, latusq; b g æquale lateri e ȝ, & angulus a æqualis angulo d. Producam enim duos arcus g b & g a donec concurrent in puncto h, scindamq; ex semicircumferentia h b g arcum h l æqualem arcui e ȝ. & ex semicircumferentia h a g arcum h k æqualem arcui d ȝ, necesse est autem punctum k aliud esse ꝙ punctum a, ꝙ duo arcus a g & d ȝ non æquentur semicircumferentiæ, continuaboq; duos arcus a b & k l donec concurrent in puncto n, erit autem per huius arcus b l æqualis arcui d e, sed & angulus h l k æqualis angulo d e ȝ, iteq; angulus h k l æqualis angulo e d ȝ. ponebatur autẽ angulus d e ȝ æqualis angulo a b g, quare & angulus h l k æqualis erit angulo a b g, unde & eorũ contraposi͂ti uidelicet n b l & n l b æquales erũt, quare per huius duo arcus b n & n l æquales erũt. cumq; duo arcus a b & k l sint æquales, est enim uterq; eorũ æqualis arcui d e, erit totus arcus a n æqualis toti arcui k n, & ideo per huius angulus n a k æqualis angulo n k a, residuiq; ex duobus rectis anguli scilicet b a g & h k l inuicem æquabuntur. erat autem angulus h k l æqualis angulo e d ȝ, quare & angulus b a g æquabitur angulo e d ȝ. duo itaq; trianguli a b g & d e ȝ duo latera a b & d e habentes æqualia, binosq; angulos hisce lateribus insidentes æquales, per præmissam itaq; quod reliquum est absoluemus.

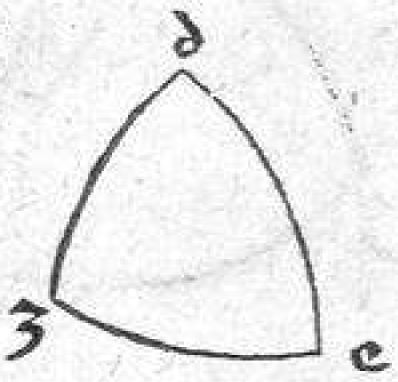
Quicunq;

LIIII.

Quicunque duo trianguli trinos angulos habent æquales, & trina latera habebunt æqualia.



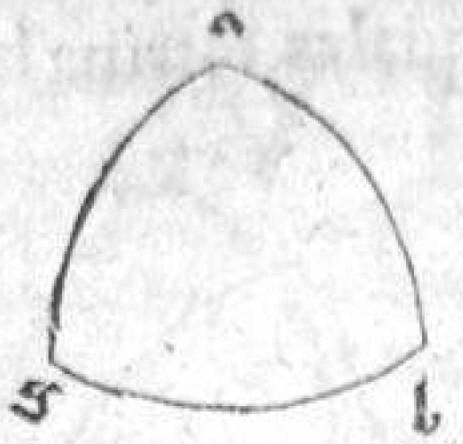
In eadem sphæra aut diuersis æqualibus tamen sint duo trianguli a b g & d e z, quorum unius tres anguli tribus angulis alterius singulatim sint æquales. Dico quod tria latera unius eorum tribus lateribus alterius æqualia habebunt, latera quidem æquos angulos respicientia ad se conferendo. Producam enim duos arcus a b & g b ad partem puncti b, ponamque arcum b h æqualem arcui d e, arcum autem b k æqualem e z, & per duo puncta h k ducam arcum circuli magni, quem continuabo utrinque donec cum arcu a g utrinque protenso concurrat in duobus punctis l & m. Cum itaque duo latera trianguli h b k sint æqualia duobus lateribus trianguli d e z, & anguli hisce contenti lateribus æquales, angulus uidelicet h b k æqualis angulo d e z, erit per huius & basis h k unius basi d z alterius æqualis. angulus quoque b k h æqualis angulo d z e, sed & angulus b h k æqualis angulo e d z. duo autem anguli d & z ponebantur æquales duobus a & g. quare angulus b k h extrinsecus ad triangulum g l k æquabitur angulo a g b intrinseco, & ideo per huius aggregatum ex duobus arcubus g l & l k æquabitur semicircumferentiæ. Similiter angulus g a b extrinsecus ad triangulum a l h, intrinseco angulo b h k siue a h l æqualis: duos arcus a l & l h collectos æquari conuincet semicircumferentiæ, demptis ergo communibus arcubus a l & l k, relinquetur arcus a g æqualis arcui h k. Duo itaque trianguli a b g & b h k duo latera a g & h k habent æqualia, angulosque binos ipsis insidentes lateribus æquales, quare per huius triangulus a b g æquilaterus & æquiangulus erit triangulo h b k, qui pridem æquilaterus & æquiangulus demonstrabatur triangulo d e z, unde & duo trianguli a b g & d e z trina latera habebunt æqualia, quod erat absoluendum. Ne autem suspiceris arcum a g utrinque protensum occurrere arcui h k in punctis h & k: sic enim cassaretur forma argumentationis nostræ, ostendemus id fieri non posse. Nam si ita accideret, fieret arcus h g a k semicircumferentia per huius, quod duæ circumferentiæ circulorum magnorum se secarent in duobus punctis h & k, similiter oportet arcum g a k esse semicircumferentiam. cumque omnes semicircumferentiæ unius circuli sint æquales, fieret pars æqualis toti, quod est impossibile. Idem sequeretur si arcus a g continuatus alteri duntaxat duorum punctorum h & k occurreret, oportet igitur duo puncta l & m esse diuersa a punctis k & h.



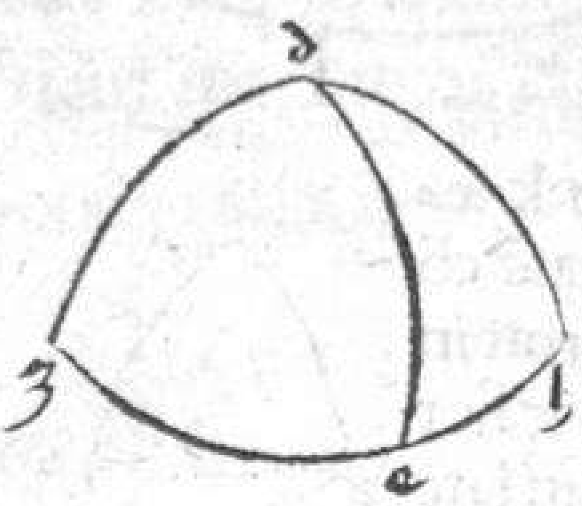
LV.

Omnes duos triangulos, quorum duo latera unius sunt æqualia duobus lateribus alterius, duoque anguli eorum duobus æquis lateribus oppositi æquales, reliqui uero duo anguli eorum reliquis duobus æquis lateribus oppositi, aut ambo acuti, aut ambo obtusi, æquilateros & æquiangulos esse necesse est.

Duo latera a b & a g trianguli a b g æqualia sint duobus lateribus d e & d z trian-

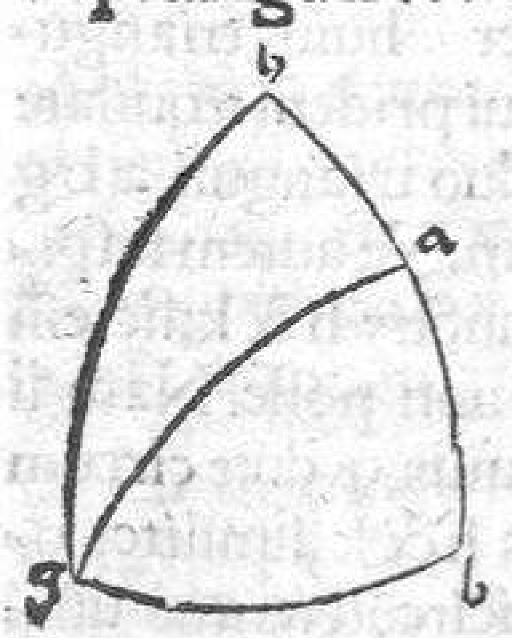


d 3 trianguli d e 3, dextrum uidelicet dextro & sinistrum sinistro, angulusq; g æqualis angulo 3, uterq; autem angulorum reliquorum b scilicet & e, aut acutus, aut uterq; obtusus. Dico ꝙ angulus a æqualis erit angulo d, angulus etiam b æqualis angulo e, & latus a b æquale lateri d e. Sit enim primo uterq; angulorum b & e acutus, si itaq; latus b g æquale fuerit lateri e 3, per huius concludemus intentum. si uero alterum altero maius fuerit, sit uerbi gratia b g longius e 3, protendaturq; arcus 3 e in h, ut 3 h arcus æqualis fiat b g & ducatur arcus d h. erit igitur per huius arcus d h æqualis arcui a b, & angulus d h 3 æqualis angulo a b g. ponebatur autem arcus a b æqualis arcui d e, quare duo arcus d h & d e sibi æquabuntur, & ideo per huius angulus d h e æqualis angulo d e h. cumq; angulus d h e sit acutus propter angulum a b g ei æqualem acutū, erit & angulus d e h acutus, unde angulus d e 3 obtusus habebitur, quod est contrariū posito. Nō aliter procedemus, si aduersarius arcum e 3 maiorem arbitretur arcu b g. Qđ si posuerimus utrūq; angulorū b & e obtusum, concludemus simili argumentatione angulū e esse acutum. Volenti igitur contradicere propositioni nostræ, concluditur eundem angulum esse acutum & obtusum, quod cum esse nequeat, manifesta relinquetur ueritas theorematis.

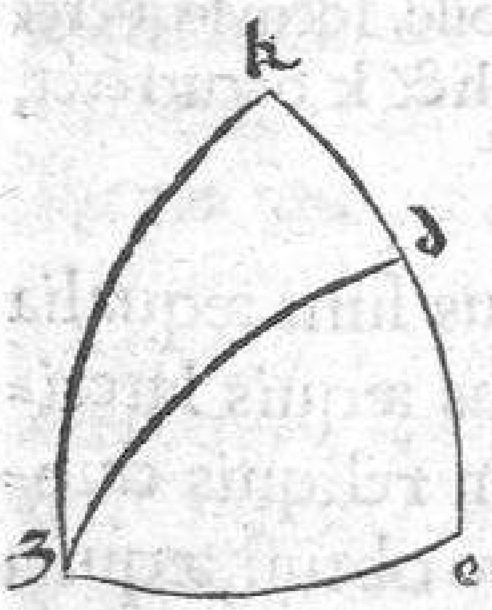


LVI.

Omnes trianguli rectanguli bina latera habentes æqualia, utraq; autem latera rectos angulos ambientia minora quadrante diuisim, æquianguli & æquilateri comprobantur.



Sint duo trianguli a b g & d e 3, quorū angli b & e sunt recti, utrunq; autem laterū a b & b g trianguli a b g minus quadrante, similiter utrunq; d e & e 3 minus quadrante, duoq; latera unius duobus reliqui lateribus quibuscūq; sint æqualia. Dico ꝙ reliquū latus unius æquale erit reliquo lateri alterius, & anguli reliqui unius angulis reliquis alterius: hoc est, ipsi duo trianguli æquilateri erunt & æquianguli. Si enim bina eorū latera æqualia circa rectos fuerint angulos, per huius constabūt omnia. Si aūt latera huiusmodi æqualia angulos ambiant alios, sint uerbi gratia duo latera b a, a g æqualia duobus e d, d 3, dextrū dextro & sinistrum sinistro comparando, producaturq; uterq; arcuum b a & e d, donec fiat quadrans, b a quidem ad h, & e d ad k, erunt itaq; puncta h & k poli circulorum b g & e 3, à quibus demittant̄ duo quadrantes h g & k 3, quos æquales cōstat, cum in una sphæra aut duabus æqualibus eos imaginari soleamus. est autē & arcus a h æqualis arcui d k. hi em̄ duo sunt complementa duorū arcuū a b & d e, q̄s æquales tradidit hypothesis.



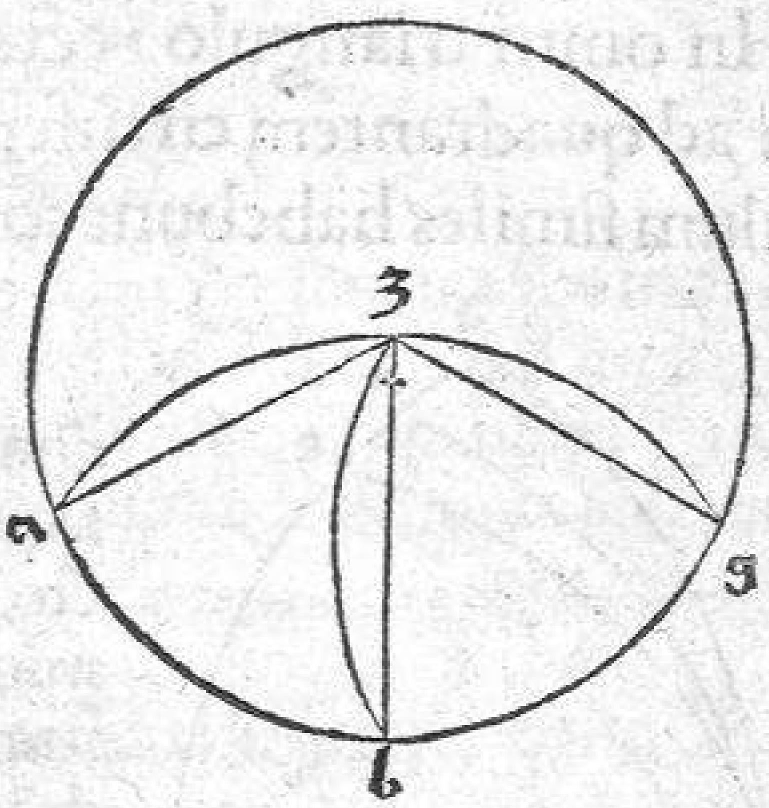
per igit̄ huius duobus arcubus a g & d 3 æqualibus existentibus, erit angulus h a g æqualis angulo k d 3, unde & residui ex duobus rectis anguli scilicet b a g & e d 3 nō erūt inæquales, ponebant̄ aūt & duo arcus b a, a g æquales duobus e d, d 3. quare per huius triangulos propositos æquiangulos conuincet & æquilateros, quæ fuere lucubranda.

Finis tertij triangulorū.

LIBER QVARTVS TRIANGVLORVM.

I.

Si à polo circuli magni in sphæra ad circumferentiam ipsius, aut arcum eius arcum magnum demiseris, arcus ille demissus erit quadrans perpendicularis circumferentiæ, duos angulos supra arcum, cui incidit, rectos secernens.



Sit circulus magnus in sphæra a b g, à cuius polo 3 demittatur arcus circuli magni qui sit 3 b. Dico ꝙ arcus 3 b erit quadrans circumferentiæ magnæ, & uterq; angulorum a b 3 & 3 b g rectus erit. Producam enim lineam polarem circuli a b g, quæ sit 3 b, quam per tertij huius oportet esse latus quadrati inscripti circulo magno. quatuor autem latera quadrati huiusmodi, cũ sint æqualia, quatuor abscindunt æquales arcus per tertij, ex circũferentia circuli, quorũ unus est arcus 3 b, arcus igitur 3 b est quadrans circuli. Præterea circulus, cuius est arcus 3 b, transit per polũ 3 circuli a b g, quare erectus est ad eum per tertij huius, quod non potest esse, nisi uterq; angulorũ a b 3 & 3 b g sit rectus. Sed fortasse infirmam suspicaris hãc argumentationem, describe igitur super polo b secundũ quantitatem b 3 circulũ in sphæra, cuius semicircumferentia sit a 3 g arcus, erit itaq; ex eis, quæ super hoc theoremate præsenti primũ diximus, uterq; arcuũ a 3 & 3 g quadrans circũferentiæ, quare per tertij huius duo anguli a b 3 & 3 b g æquales declarantur, per diffinitionem igitur arcus 3 b est perpendicularis ad circumferentiam circuli a b g, quæ fuerunt explananda.

II.

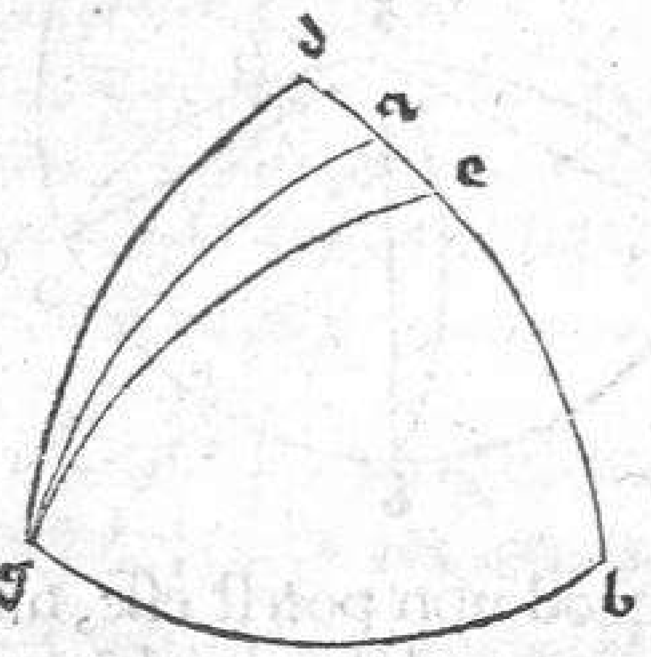
Si ab aliquo puncto arcus circuli magni quadrans magnus orthogonaliter egrediatur, terminus eius erit polus circuli à quo egrediebatur quadrans ipse, cum quo declarabitur punctum concursus duorum arcuum orthogonaliter à tertio arcu exurgentium, esse polum circuli arcum ipsum continentis.

A puncto b arcus a b g circuli magni orthogonaliter egrediatur quadrans circuli magni b 3. Dico ꝙ punctus 3 terminus uidelicet quadrantis egressi erit polus circuli a b g. Subtensa enim quadranti dicto corda sua b 3, quam constat esse costam quadrati magni, secundũ eius quantitatem describat circulus magnus, cuius semicircumferentia sit a 3 g, cunq; duo anguli a b 3 & 3 b g sint æquales hypothesi id exigente, erunt per tertij huius duo arcus a 3 & 3 g similes, unde & æquales, ꝙ de eadem circumferentia existant, est autem arcus a 3 g semicircumferentia

rentia circuli magni,quemadmodũ trahitur ex tertij huius,quare uterq; arcuũ a 3 & 3 g est medietas semicircumferentiæ,& ideo quadrans circũferentiæ totius circuli magni.tres igitur arcus a 3, b 3 & g 3 æquales sunt quadrantes circumfe rentiaꝝ magnarũ æqualium,quare per tertij cordæ eoꝝ æquales declarantur. à puncto itaq; 3 ad circumferentiam circuli a b g tribus æqualibus rectis descendentibus tertij huius punctũ 3 polum circuli a b g declamabit, quod uolebamus aperire. Corollariũ autem sic constabit. In utroq; arcuũ orthogonaliũ, quan tum sat est protensoꝝ,necesse est inueniri polũ circuli huiusmodi,quemadmodum ex præsenti trahitur,aut igitur punctus coincidentiæ duoꝝ arcuũ orthogonaliũ est polus,aut duo erunt poli unius circuli ex eadem parte,sed nullus circulus duos ex eadem parte polos habet per tertij.punctus igitur in quo confluũt dicti arcus orthogonales,polus circuli, à cuius arcu egrediunt̃ ipsi habebitur.

III.

In omni triangulo rectangulo latera rectum angulum continentia ad quadrantem circũferentiæ & anguli eis oppositi ad rectum angulum similes habebunt comparationes.



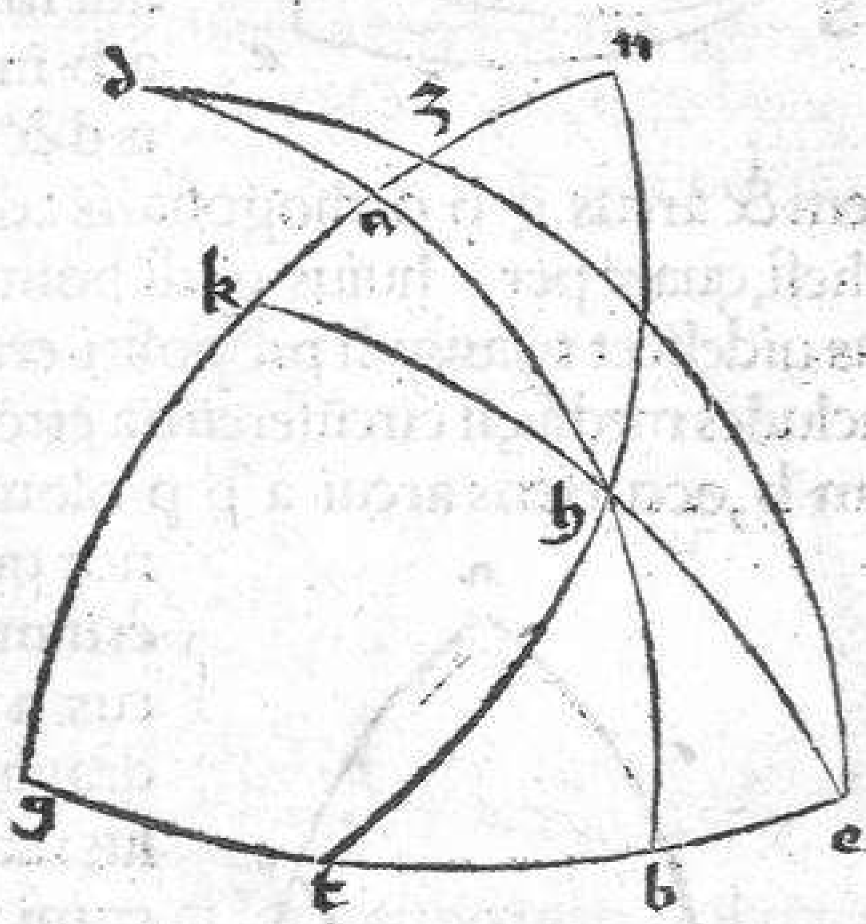
Volo dicere. Si angulus,qui uni ex lateribus rectum angulũ continentibus, opponitur recto, fuerit æqualis,latus ipsum quadranti æquale erit.si maior recto,& ipsum latus quadrante maius. si minor, ipsum minus quarta circũferentiæ. Versa demũ uice. Si alterum ex huiusmodi lateribus rectum ambientibus quadrãs existat,angulus ei oppositus erit rectus.si maius quadrante,maior recto erit angulus.& si minus, minor. Sit igitur exempli causa triangulus sphæralis a b g,ex arcubus circulorũ magnorũ constitutus,angulũ b rectum habens. Dico ꝙ si angulus g rectus fuerit latus, a b erit quadrãs.si uero recto maior,arcus a b quadrantem superabit,& si minor recto extiterit, arcus a b quadrante minor habebitur.Similiter si arcus a b quadranti æqualis occurrat, angulus g rectus erit.si uero quadrante maius,& angulus g rectũ superabit.& si minus quadrante, angulũ g recto minorem enunciabimus,quæ sic habebis.Sit primo angulus g rectus,uterq; igitur circuloꝝ,in quibus sunt duo arcus a g & a b, erectus est ad superficiem circuli,cuius est latus tertium b g,transibitq; per polum circuli b g.cũ autem hij duo arcus in puncto a coincidant,erit a polus circuli b g magni,quare per corollarium tertij huius arcus a b respiciens angulũ g,erit quadrans circumferentiæ.Sit deinde angulus a g b maior recto,& fiat iuxta punctũ g arcus b g angulus rectus b g e,docente tertij huius,ꝑducendo arcũ g e. erit itaq; e polus circuli b g,& ideo arcus e b quarta circuli,quare arcus a b angulũ a g b subtendens quadrantem superabit.Qđ si angulus a g b minor fuerit recto, statuatur angulus d b g rectus,eritq;,quemadmodũ antea conclusum est, d polus circuli b g,& arcus d b quadrans circũferentiæ,quare arcus a b angulũ a g b subtendens minor quadrante. Præterea ponamus arcũ a b quartam circumfe rentiæ,eritq; propter hoc a polus circuli b g,& ideo arcus a g erectus ad arcũ b g,angulus ergo a g b rectus habebitur.Sed intelligatur arcus a b maior quadrante,fiatq; arcus e b quarta circuli,& ideo e polus circuli b g,arcus itaq; e g erectus erit ad arcum b g,& angulus e g b rectus, quare angulus a g b maior

recto

recto. Qđ si statuerimus arcũ a b minorem quadrante, prolongetur ipse in directum usq; ad d, donec b d fiat quarta circuli, ideoq; d polus circuli b g. demisso igitur arcu d g, erit angulus d g b rectus, & angulus a g b minor recto, manifestam itaq; effecimus theorematis nostri ueritatem.

IIII.

In omni triangulo rectangulo, si fuerit alterum ex lateribus rectum ambientibus quarta circuli, latus quoq; rectum subtendens angulum erit quarta circuli. si uero fuerint latera rectum angulum continentia, aut ambo maiora quadrante, aut ambo minora, erit latus rectũ subtendens angulum minus quarta circuli. q̃ si alterum maius quadrante, & alterum minus extiterit, latus rectum angulum respiciens, maius quadrante pronunciabitur.

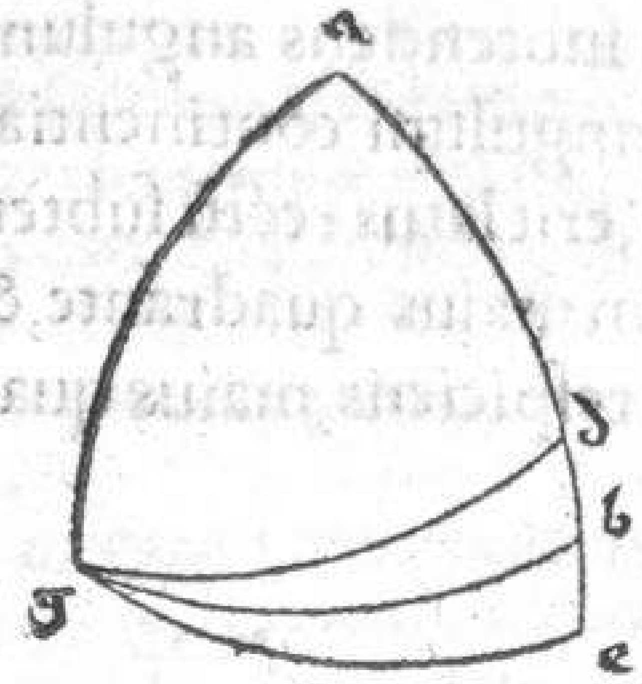


Habeat triangulus a b g angulũ b rectum, & latus a b quadrantem circumferentiæ. Dico q̃ latus a g rectum subtendẽs angulum, erit quarta circuli. Erit enim a polus circuli b g, quare per huius arcus a g erit quarta circuli. Si uero uterq; arcuũ a b & b g minor quarta fuerit, erit arcus a g minor quadrante. fiat enim arcus g e quarta circuli & arcus b d similiter, transeatq; p duo puncta d & e arcus circuli magni d e, arcus autem g a prolongetur, donec occurrẽt arcui d e in puncto z. Quoniã itaq; anguli apud b sunt recti, & arcus b d quarta circuli erit d polus circuli g e, & ideo angulus e rectus, sed & e g est quarta circuli. quare punctus g est polus circuli d e, & ideo arcus g z est quadrans circumferentiæ, arcus igitur partialis a g minor quadrante fiet. Sit deinceps uterq; arcuũ a b, b g maior quadrante. Dico q̃ arcus a g erit minor quarta circumferentiæ. Abscindam enim utrunq; arcuũ g t & b h quadrantem, per duoq; puncta t & h producam arcum circuli magni occurrentem arcui g a continuato in n, quoniam itaq; angulus b est rectus, & arcus b h quarta circuli, erit h polus circuli b g, & angulus apud t rectus. cunq; arcus t g sit quarta, erit g polus circuli t n, quare arcus g n est quarta, & ideo arcus a g minor quadrante. Postremo sit arcus a b maior quarta, & arcus b g minor. Dico q̃ arcus a g maior erit quadrante. Fiat enim uterq; arcuũ g e & b h quarta circuli, prolongando quidem arcum g b usq; ad e, arcũ autem b h resecando ex arcu a b, incedatq; arcus circuli magni per duo puncta h & e, occursurus arcui a g in puncto k. Cum igitur arcus b h est quarta, & angulus b rectus, erit h polus circuli g b e, quare & angulus apud e rectus. est autẽ & arcus e g quadrãs. g igitur est polus circuli e k, quare arcus g k erit quarta circuli, unde & a g arcus quadrantem superare dinoscitur, quæ fuere concludenda.

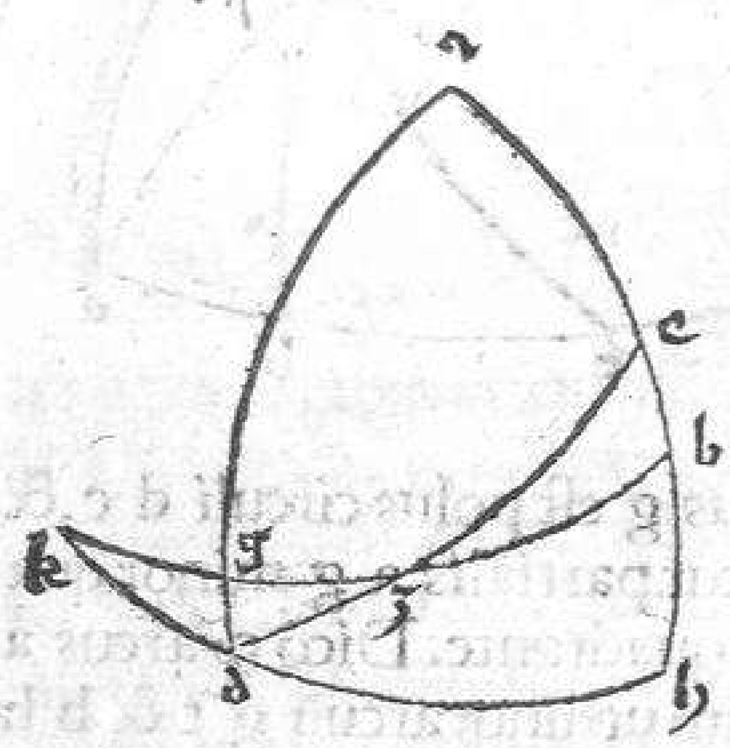
V.

In omni triangulo rectangulo si fuerit latus rectum subtendens angulum quarta circuli, erit alterum ex duobus rectũ ambientibus quarta cir

ta circuli. Si uero fuerit minus quadrante, erit utrunq; reliquorũ aut maius quadrante, aut minus eo. q si ipsum fuerit maius quadrante, erit alterum ex duobus rectum ambientibus quadrante maius, reliquum autem minus eo.



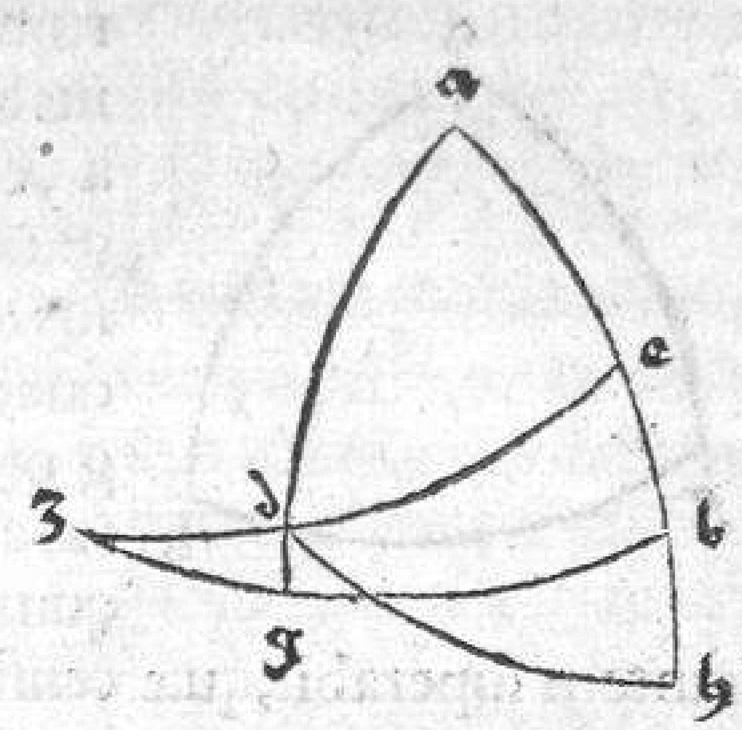
Hæc est conuersa præcedentis. Sit itaq; in triangulo a b g angulum b rectum habente, latus a g quadrans circumferentiæ. Dico q alter duorũ laterum a b, b g erit quarta circuli. Super puncto em̃ a facto polo, secundũ quantitatem a g describat circulus, quem oportebit esse magnũ, q arcus a g sit quarta circumferentiæ magnæ. si igitur circumferentia eius transibit per punctũ b, planum est arcum a b esse quadrantem. si uero prætereat ipsum, aut ibit supra aut infra ipsum. si supra, secabit arcũ a b in puncto qui sit d, per   itaq; huius duo arcus a d & d g orthogonaliter sibi inuicem insistent, est autem & arcus g b orthogonalis ad arcum a b propter angulũ b rectum ex hypothesi, quare per   huius g est polus circuli a b, & ideo per   huius arcus g b, latus uidelicet trianguli propositi erit quarta circumferentiæ. Similem pristinis concludes medijs, si circũferentia circuli super a polo descripti, transibit infra punctum b, occurrens arcui a b prolongato in puncto e. Sit demum arcus a g minor quadrante. Dico q uterq; arcum a b, b g aut erit maior quarta, aut minor ea. Crescat enim arcus a g in directum, donec habeat arcus a d quadrans, secundũ cuius cordam circumducatur circulus magnus, qui nequaq; offendet punctũ b, alias enim per   huius & hypothesim sequeretur rectum angulũ esse minorem recto. Aut igitur secando arcum a b: si opus fuerit: prolongatum transibit supra b punctũ aut infra. Transeat prius supra, secās necessario arcum b g in puncto qui sit 3. erit itaq; per   huius angulus 3 e b rectus. cũq; sit etiam angulus e b 3 rectus ex hypothesi, erit per corollariũ

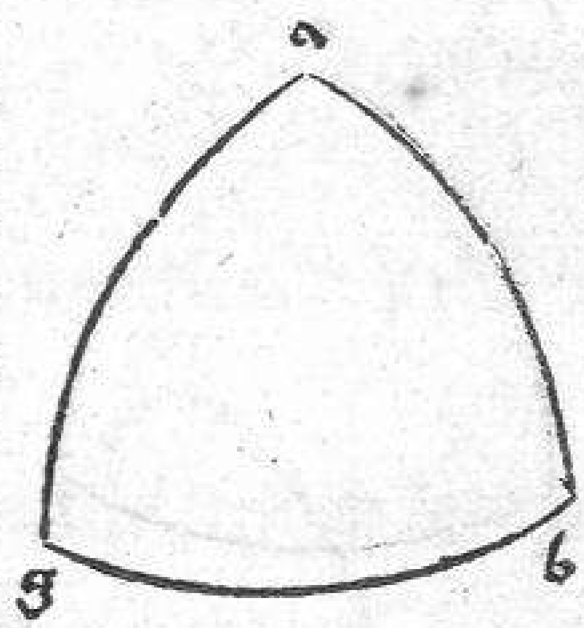


2. huius 3 polus circuli a b, & ideo per primam huius arcus 3 b quarta circumferentiæ. latus igitur b g quadrantem superabit, latus deniq; a b quadrantẽ excedere nemini dubium erit: consideranti saltem arcum a e æqualem arcui a d esse quartam circumferentiæ. Sed transeat circulus dictus infra punctũ b, secando arcum a b protensum oportune in puncto h, arcum autem b g prolongatũ in pũcto k, erit itaq; per media nunc commemorata, ne iusto crebrius primam atq; secundam huius repetam propositiones, angulus apud h rectus, sed & angulus apũ b rectus ex hypothesi, quare punctus k erit polus circuli a b, ideoq; arcus k b quadrans, & latus g b trianguli nostri quadrante minus, latus autem a b quadrante breuius esse nemo dubitabit. Tandem arcus a g rectũ subtendens angulũ quartam superare ponatur. Dico q alter duorũ laterum a b, b g maius erit quadrante, reliquũ uero minus. Resecto enim quadrante a d, cordam ipsius sup a posito circumferentes creabimus circulum magnũ, cuius profecto circumferentia punctum b præteribit, alias enim monstrum nasceretur mathematicũ, imo uerius im

possibile

possibile, rectus scilicet angulus recto maior. Transeat itaque prius supra punctũ b, secando arcum a b in puncto e, arcum uero b g oportune extensum in puncto ȝ, quem constabit esse polum circuli a b angulis apud b & e rectis existentibus, unde & arcus ȝ b circumferentiæ quarta pars habebitur. latus igitur b g trianguli a b g quadrante breuius relinquitur, latus autem reliquũ a b quadrantẽ superabit proculdubio. Qđ si circumferentia dicta descenderit infra punctũ b, secando arcum a b satis porrectũ in puncto h, arcum autem b g (nam ita fieri necesse est) in puncto k, pristino freti syllogismo, declarabimus k esse polum circuli a b, & arcum b k quadrantem circumferentiæ, unde consequitur latus b g trianguli nostri quadrante longius esse, reliquũ uero latus a b quadrantis a h longitudinem haud attingit. Tres igitur theorematis partes confirmauimus, quod libuit efficere. Possumus præterea propositionem nostram stabilire, aduersario oppositũ asserenti concludentes impossibile per huius. Nam ponendo latus a g quadrantem si dixerit neutrũ reliquorum laterum esse quadrantẽ, erit necessario utrunque eorum aut maius uel minus quadrante, aut alterũ maius & reliquũ minus. quocunque autem illorum existente, sequitur per huius arcum a g non esse quadrantem, sic idem arcus quadrans & non quadrãs aduersario proteruienti habebitur, quod est impossibile. Si uero latus a g fuerit minus quadrante, & non fuerit utrunque reliquorum laterum aut maius quadrante, aut minus sententia quidem aduersarij, erit necessario alterum eorum quadrans, aut alterum eorum maius quadrante, & reliquũ minus eo, quo ita existente, sequitur per huius arcum a g esse quadrantem aut maiorem eo, qui pridem ponebatur minor eo. Qđ si latus a g maius supponatur quadrante, & credat aduersarius, alterum duorũ laterum a b & b g esse quadrantem, aut utrunque eorum maius uel minus quadrante, concludemus ei per huius arcum a g aut esse quadrantẽ, aut quadrante breuiorem, quem nuperrime concessit esse maiorẽ quadrante. Destructis igitur impossibilibus, ad quæ duximus aduersarium, theorematis nostri fundabitur ueritas.

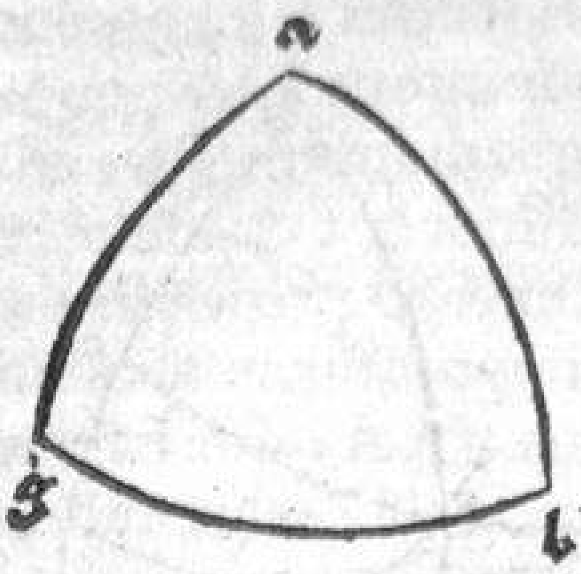




VI.

In omni triangulo rectangulo, si alter duorum angulorum, quos sustinet latus, rectum respiciens angulum, rectus fuerit, erit latus ipsum quarta circuli. si uterque eorum aut obtusus aut acutus extiterit, latus dictum quadrante breuius erit. si uero alter eorum obtusus, reliquus aũt acutus occurrat, latus ipsum quadrante maius conijcietur.

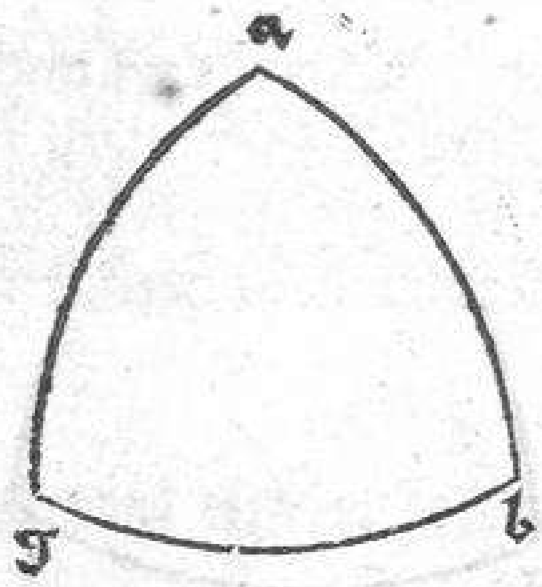
Triangulus a b g angulum g rectum habeat. Dico quod si alter duorũ angulorum a & g rectus fuerit, latus a g erit quarta circumferentiæ. si uero uterque eorum aut obtusus aut acutus extiterit, latus a g quadrante breuius habebit. & si angulus a fuerit obtusus, angulus aũt g acutus uel econtra, arcus a g quadrantem superabit, Si enim alter angulorum a & g rectus fuerit, erit per huius alterum duorum la-



rum laterum a b & b g quarta circuli, quare per huius arcus a g erit quarta circuli. Si uero uterq; angulorum a & g aut obtusum aut acutũ sese præbeat, erit per allegatã huius utrunq; duorum laterum a b & b g aut maius quadrante, aut minus eo, unde per huius latus a g quadrante breuius arguetur. Qđ si alter angulorũ a & g obtusus, reliquus autem acutus extiterit, erit ex huius alter duorum arcuũ a b & b g maior quadrante, reliquus autem minor eo, quare per huius latus a g quadrantem superabit, quæ censuimus explananda.

VII.

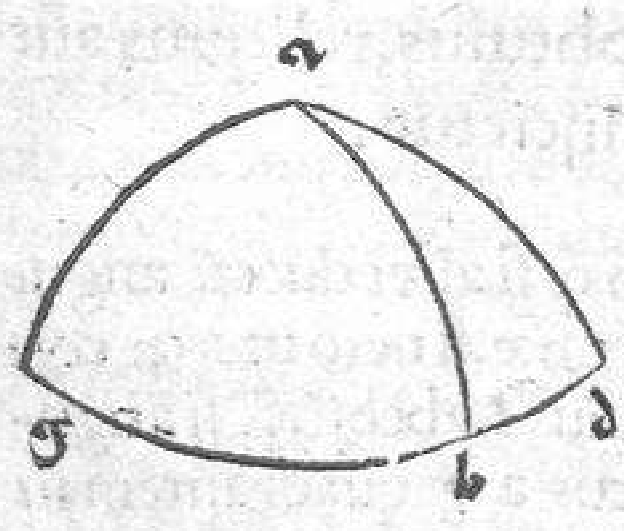
Si latus rectum angulum trianguli sphæralis respiciens quadrans circumferentiæ fuerit, alter angulorum sibi insidentium rectus indicabitur. si uero quadrante minus extiterit, erit uterq; dictorum angulorum aut obtusus aut acutus. & si latus ipsum quadrante longius offeratur, alter dictorũ angulorũ obtusus, reliquus aũt acutus prædicabit.



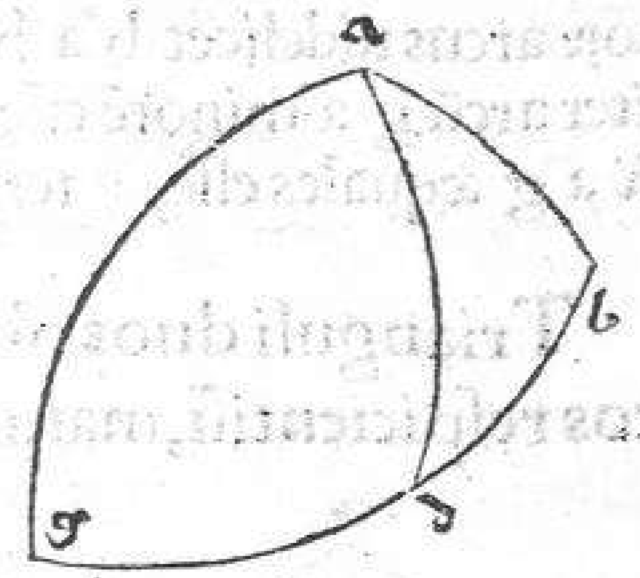
Hæc est cõuersa prioris. Sit triangulus a b g rectangulus, angulũ uidelicet b rectum habens. Dico φ si latus a g fuerit quadrans circumferentiæ, alter angulorũ a & g rectus erit. si uero arcus a g minor fuerit quadrãte, uterq; angulorum a & g aut obtusus erit, aut uterq; acutus. & si arcus a g quadrantem excedat, erit alter angulorum a & g obtusus, reliquus autem acutus. Nam arcu a g quadrante existente, erit alter duorum arcuũ a b & b g quarta circumferentiæ per huius, quare per huius alter angulorum a & g rectus concludetur. Si uero arcus a g quadrante minor extiterit, erit per eandem huius uterq; arcuũ a b & b g aut maior quadrante, aut minor eo, quare per huius uterq; angulorũ a & g aut obtusus erit, aut acutus. Qđ si arcus a g quarta circumferentiæ maior occurrat, erit alter duorũ arcuum a b & b g maior quadrante, & reliquus minor eo, quare per huius alter angulorum a & g obtusus erit, & reliquus acutus, quæ fuere declaranda.

VIII.

Si quis triangulus sphæralis duos acutos habeat angulos, aut duos obtusos, arcus egrediens à uertice tertij anguli, lateri se respicienti perpendiculariter occursurus, intra triangulũ reperiet. si uero alter eorũ acutus, & reliquus obtusus extiterit, extra triangulũ necessario cadet.



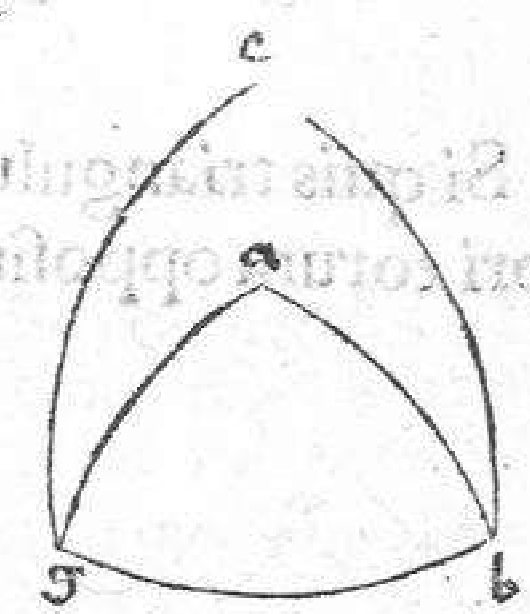
Sit triangulus huiusmodi a b g, duos angulos b & g habens acutos, aut ambos obtusos. Dico φ arcus ab a puncto lateri b g: quantũuis utrinq; indefinito, perpendiculariter occursurus, intra triangulũ a b g consistet. Non enim poterit egredi triangulũ ipsum, quod si possibile arbitreris, sit arcus ille a d coincidens arcui g b, quantũ sat est porrecto dextrorsum in puncto d, erit itaq; arcus a d latus commune duobus triangulis a d b & a d g rectangulis. si igitur duo anguli b & g triãguli a b g fuerint acuti, erit angulus a b d obtusus, quare per huius arcus a d minor erit quadrante propter angulum a g d trianguli a g d acutum, & per eandem maior quadrante propter angulum a b d trianguli a b d obtusum. idem itaq; arcus minor erit quadrãte circumferentiæ eiusdem, & maior eo, quod est impossibile, arcus ergo perpendicularis huiusmodi non cadet extra triangulũ. Prohibet autem hypothesis, ne arcus ille transeat per alterũ punctorum b & g, sic enim angulus acutus aut obtusus haberet rectus, quod est impossibile. Destructis autem incõuenientibus illis relinquitur quod non nisi intra triangulũ permaneat, quod pollicebatur prima pars theorematis. Sit demũ alter prædictorũ angulorum, uerbi gratia, b obtusus, & reliquus g acutus. Dico quod perpendicularis cadet extra triangulũ. Non enim potest coincidere alteri duorũ laterũ a b & a g, sic enim angulus obtusus aut acutus esset rectus, sed neq; intra triangulum consistere poterit. Si enim ita putaueris, sit arcus a e perpendicularis ad arcum b g, cui secundum punctũ e communicat. erit itaq; latus a e commune duobus triangulis a b e & a g e rectangulis, quorum unus angulũ a b e habet obtusum, reliquus autem angulũ a g e acutũ, quare per huius bis assũptã arcus a e maior erit quarta circumferentiæ, & minor ea, quod est inconueniens. Cum igitur arcus perpendicularis huiusmodi non possit coincidere alteri duorum laterũ a b & a g, neq; intra triangulũ cadere, reliquũ est necessario ut extra triangulum reperiatur, quæ cupiebas addiscere.



IX.

Cuiuslibet trianguli tres angulos acutos habentis, trium laterum unumquodq; minus quadrante pronunciabitur.

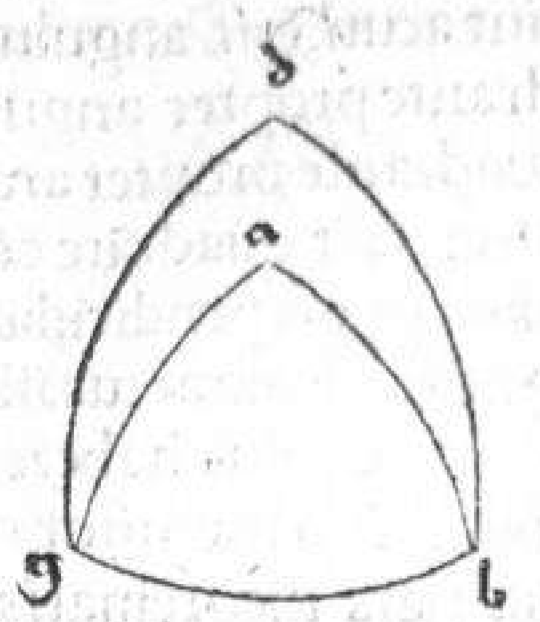
Trianguli a b g tres anguli sint acuti. Dico quod unũquodq; latus eius quadrante minus erit. Fiant enim apud duo puncta b & g duo anguli recti, eductis duobus arcubus circulorum magnorũ b e & g e in puncto e cõcurrentibus, quem per huius oportet esse polum circuli b g. à polo igitur e per punctũ a procedat circulus magnus, qui necessario secabit arcum b g, si enim non secaret, necessario alterũ duorum arcuũ a b & a g, fieret'q; pars quadrantis semicircumferentia, quod est inconueniens, secet igitur in puncto d, erit autem uterq; angulorum apud d rectus per huius, & ideo uterq; triangulorum a b d & a g d rectangulus. cumq; duo anguli a b d & b a d sint acuti, totum enim b a g acutum tradidit hypothesis, erit per huius arcus a b minor quadrante. similiter probabimus arcũ a g minorem quadrante, restat igitur, ut arcum b g quadrante breuiorem ostendamus, quod quidem habebitur, si apud duo puncta a & b duos rectos, quemadmodũ nuperrime apud duo puncta b & g constituerimus. & hoc erat peragendum.



X.

Si quis triangulus duos acutos habeat angulos æquales, utrunq; laterum eos respicientiũ minus quadrante prædicabitur.

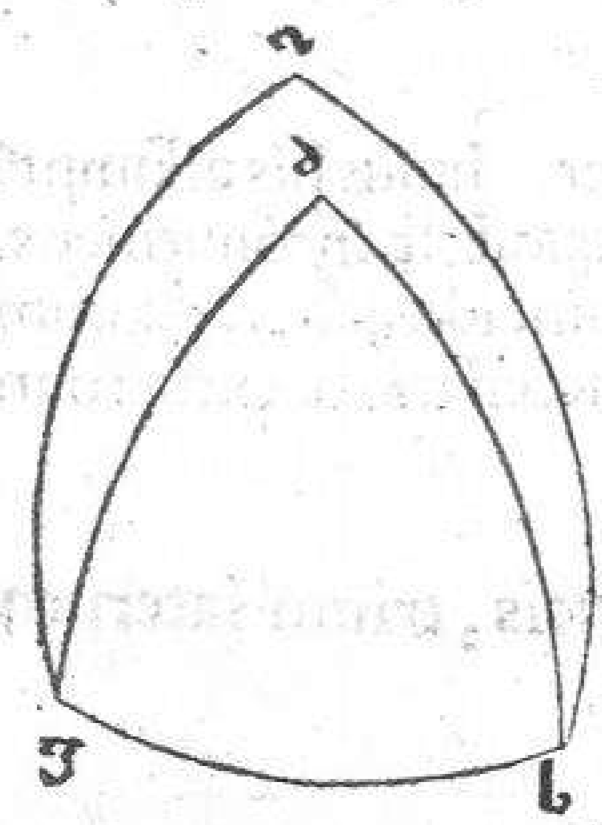
Sit triangulus a b g, duos angulos b & g acutos habens æquales. Dico quod



utrunq; laterũ eius, a b & a g minus erit quarta circuli. Creabimus enim apud duo pũcta b & g duos rectos angulos: arcui b g insessuros eductis duobus arcubus b d & g d in puncto d confluentibus, quem huius non finit esse polum circuli b g, & ideo per huius uterq; arcuum b d & g d quadrans habebitur. Cũ itaq; duo arcus b a & g a, ex punctis terminalibus lateris b g trianguli d b g egressi intra triangulum d b g concurrãt, erunt per tertij huius duo arcus b a & a g coniuncti breuiores duobus arcubus b d & d g. Vnde & medietas hor arcus uidelicet b a breuior erit medietate istor, quadrante scilicet b d. similiter arcũ g a minorẽ esse cõstabit ipso quadrãte g d. oportet em̃ duos arcus b a & a g æquales esse, tertij huius enunciante, quod libuit attingere.

XI.

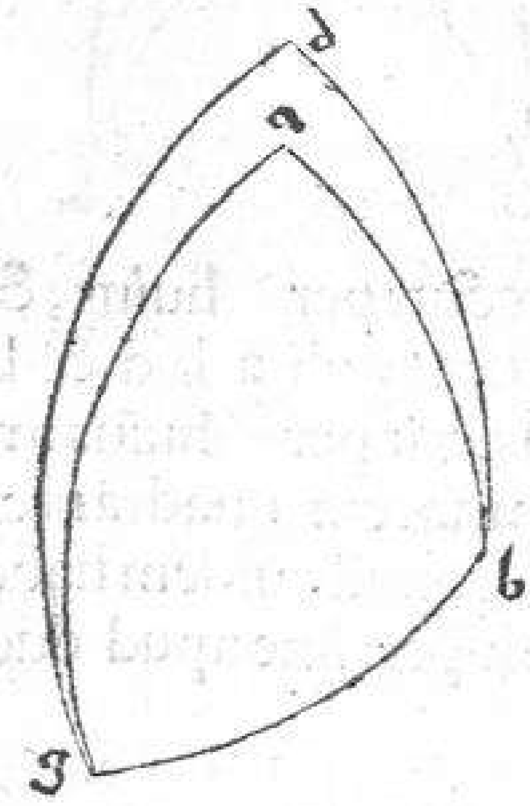
Trianguli duos obtusos habentis angulos æquales utrunq; laterũ eos respicientiũ, maius quadrante reperietur.



Sint duo anguli b & g, trianguli a b g obtusi æquales. Dico q utrunq; laterum a b & a g quadrantem superabit. Factis em̃ duobus rectis angulis apud duo puncta b & g, arcus b g, educendo duos arcus b d & g d, quos constat intra triangulum a b g concurrere, quod fiat in puncto d, erunt queadmodum in præmissã argumẽtabar duo arcus b d & b g, quos oportet esse quadrãtes, minores duobus arcubus b a & a g lateribus trianguli nostri. & ideo sicut duo arcus b a, a g æquales, ꝑpter angulos a b g & a g b æquales, superabũt duos quadrantes b d & d g, ita uterq; arcuum b a & a g quadrante maior intelligẽ, quod uoluimus exponere.

XII.

Si quis triangulus inæquales habeat duos angulos acutos, latus minori eorum oppositum minus erit quadrante.



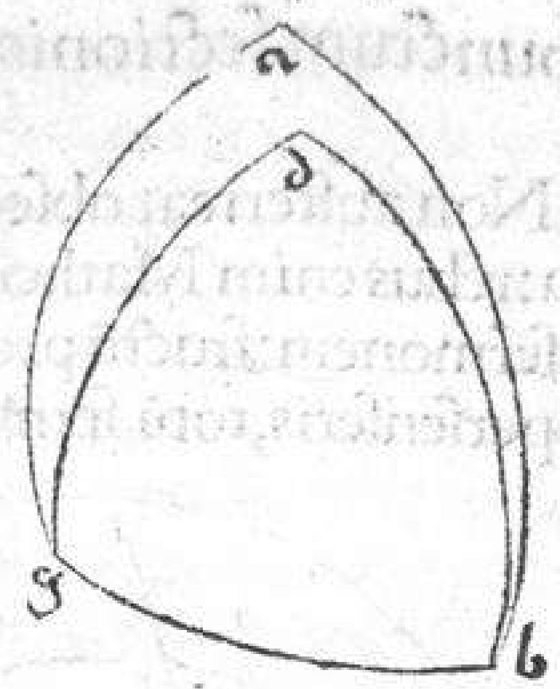
Triãguli a b g duo anguli b & g sint acuti, sitq; angulus g minor angulo b. Dico q latus a b est minus quadrante. Nã constituendo duos rectos apud duo puncta b & g, productis arcubus b d & g d in puncto d concurrentibus, erũt duo arcus b a & a g minores duobus b d & d g, qui semicircũferentiam perficiunt, quoniam uterq; eorum est quadrans circumferentiæ, d polo circuli b g existente. duo igitur arcus b a & a g minores sunt semicircumferentia. cũq; arcus b a minor sit arcu a g per tertij huius, q angulus g minor existat angulo b, erit arcus b a minor quadrante circumferentiæ, quod erat demonstrandum.

XIII.

Trianguli duos obtusos habentis angulos inæquales, latus maiori eorũ oppositũ maius quadrante pronunciabitur.

Habeat

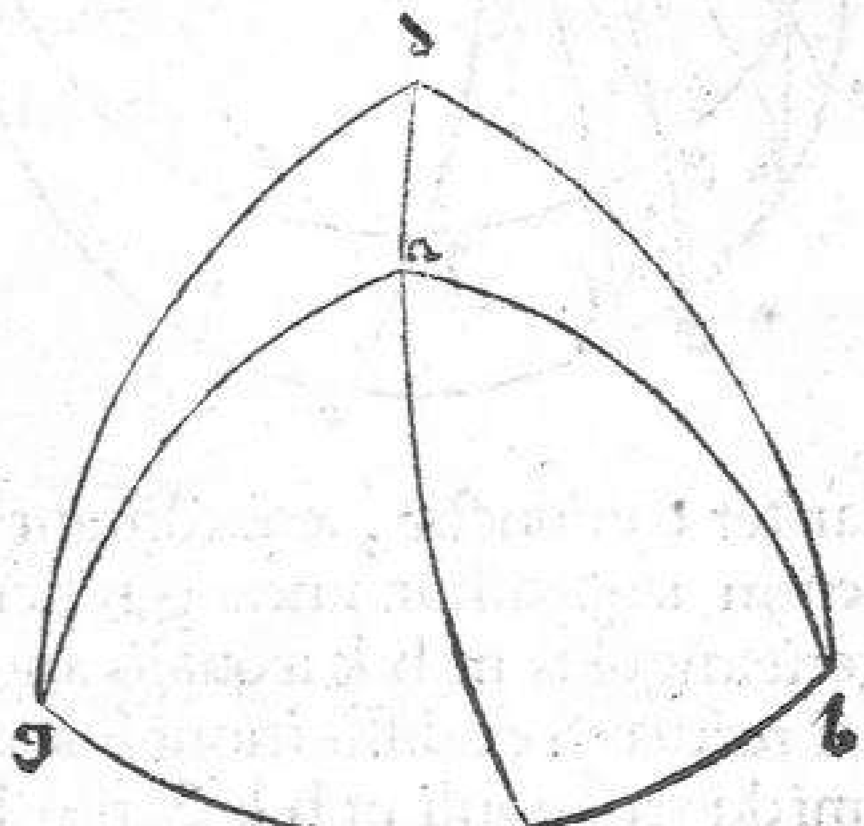
Habeat triangulus a b g duos angulos b & g obtusos inæquales, g scilicet maiorem angulo b. Dico ꝙ latus a b maius est quadrante. A punctis enim b & g arcus erecti orthogonaliter concurrent intra triangulũ a b g, q̃d fit in puncto d polo scilicet circuli b g, eruntq́ duo arcus b a & a g maiores duobus arcubus b d, d g, qui æquantur semicircumferentiæ, quare duo arcus b a, a g semicircumferentiam superabunt, unde & maior eorum scilicet arcus a b quadrante maior habebitur, quod erat absoluendum.



XIIII.

Si quis triangulus duos acutos habuerit angulos, latusq́ uni eorũ oppositum non minus quadrante, erit reliquus eius angulus obtusus, latusq́ ei oppositum maius quadrante.

Sit triangulus a b g duos angulos b & g acutos habens, cuius latus a b alterũ acutorũ respiciens, non sit minus quadrãte. Dico ꝙ angulus eius a erit obtusus, & latus b g maius quadrãte. Fiãt eñ apud duo puncta b & g duo anguli recti, eductis duobus arcubus in puncto d extra triangulũ a b g concurrentibus, quem quidem oportet esse polum circuli b g, demittaturq́ à polo d per punctũ a quadrans d a e, incidens arcui b g in puncto e. Cum igitur arcus a g non sit minor quadrante, erit ipse aut quadrans, aut maior eo. Si quadrans, per huius alterum duorũ laterũ a e, e b trianguli rectanguli a e b erit quarta circumferentiæ. est autem arcus a e minor quadrante, reliquus ergo e b quadrans erit necessario, quare totus arcus b g maior erit quadrãte. Similiter per huius probabimus angulũ b a e esse rectũ, cum angulus a b e sit acutus ex hypothesi, totus igitur angulus b a g maior est recto. Qd' si latus a b maius fuerit quadrante, erit per huius arcus b e maior quadrante, cum reliquus a e sit minor quadrante, arcus ergo b g multo maior erit quadrãte. Similiter per huius oportebit angulũ b a e esse obtusum, cum angulus a b e sit acutus per hypothesim, angulus ergo b a g multo magis erit obtusus, patet igitur propositio.

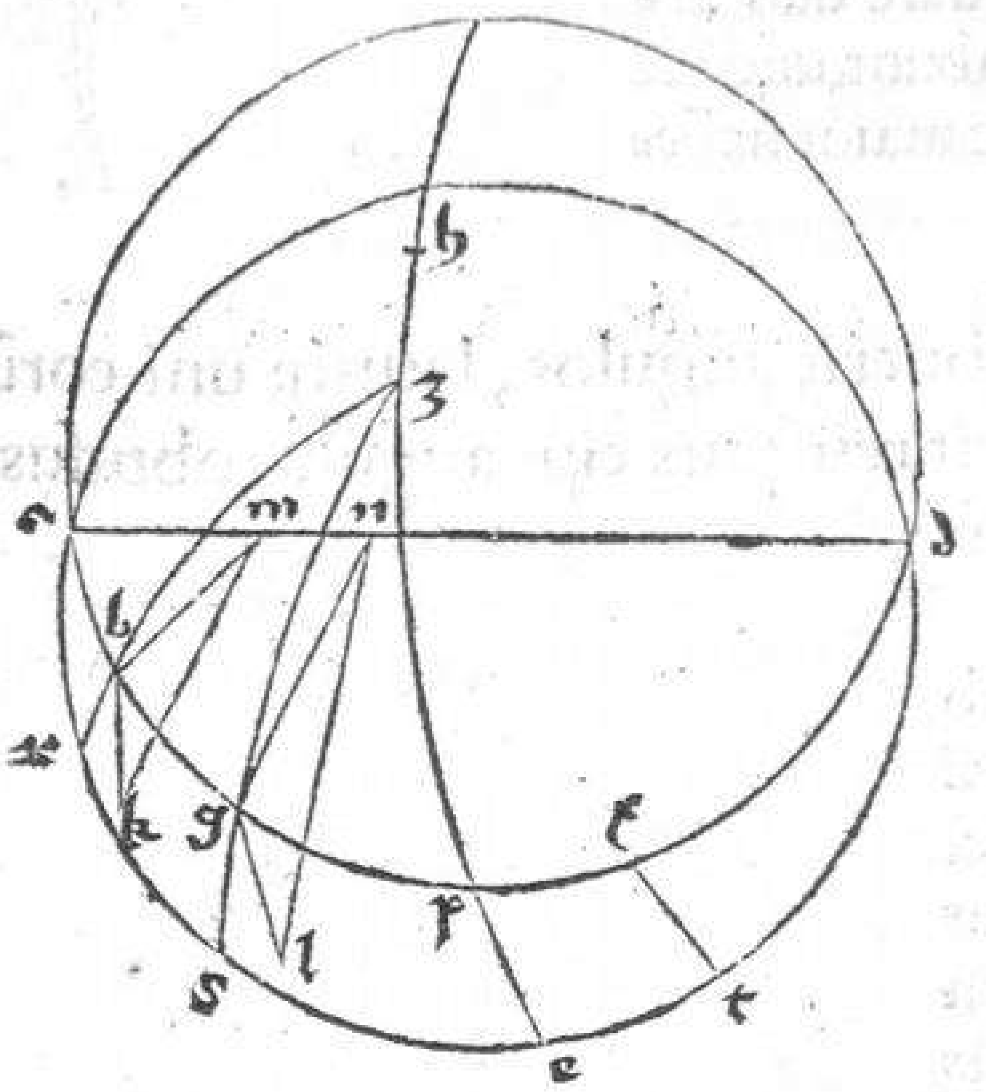


XV.

Si fuerint in sphæra duo circuli magni ad se inclinati, signenturq́ in circumferentia unius eorum duo puncta, aut in utriusq́ circumferentia punctus unus, & producatur ex unoquoq́ punctorum ad circũferentiam circuli alterius perpendicularis arcus, proportio sinus arcus qui est inter unum illorum punctorum, & punctum sectionis circulorum ad sinum arcus perpendicularis ex eo protracti ad circulum alterum est, ut proportio sinus arcus comprehensi inter punctum alium

& punctum sectionis ad sinum arcus producti ex illo puncto.

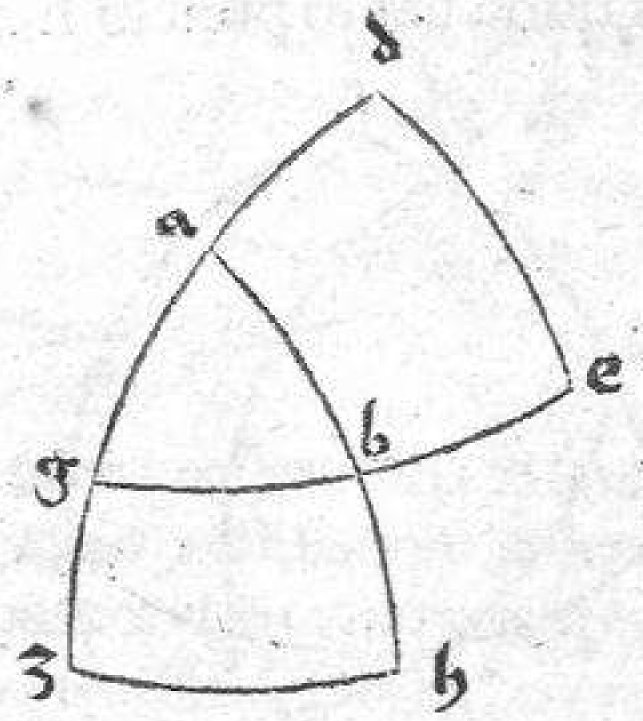
Non absterreat obsecro te uerbosa præsens propositio, & primo aspectu intricata: rebus enim Mathematicis uix satis lucidum, ne dixerim uenustũ, accomodabis sermonem: fructũ profecto dulcissimũ hac arbore quis rigida decerpes, quem ubi persenseris, totũ fermè præsentẽ librum intelliges. Sint igiť duo circuli magni in sphæra ad se inuicem inclinati a b g d & a e d, quorum circumferentiæ secent se in punctis a & d, signentq́ duo puncta b g in circumferentia circuli a b g d, à quibus descendant duo arcus ꝑpendiculares b r, g s ad circumferentiam circuli a e d. Dico ꝙ proportio sinus arcus a b ad sinum arcus b r est ut sinus arcus a g ad sinum arcus g s. A punctis enim b & g binæ perpendiculares rectæ demittãtur, unæ quidem ad sectiõem communem circulorum scilicet lineam a d, quæ sint b m, g n, alteræ uero ad superficiem circuli a e d, quæ sint b k & g l ductis lineis k m & l n



quoniam itaq; duæ lineæ m b, b k angulariter coniunctæ, æquedistant duabus n g, g l angulariter coniunctis, b m enim æquedistat lineæ g n per primi, b k autem ipsi g l per undecimi, erit angulus m b k æqualis angulo n g l, uterq; autem angulorum b k m & g l n rectus est ex diffinitione lineæ perpendicularis ad superficiem, quare per 32 primi duo trianguli m b k & n g l sunt æquianguli, & ideo per 4. sexti permutatim arguendo proportio m b ad b k est, ut proportio n g ad g l. est autem m b sinus rectus arcus a b per tertij & diffinitionem, n g uero sinus arcus a g, item b k sinus arcus b r, g l autem sinus arcus g s. proportio igitur sinus arcus a b ad sinum arcus b r est ut sinus arcus a g ad sinum arcus g s. Habemus ergo partem propositionis ueram, quando duo puncta in una circũferentia signantur. Signemus ea demum in duabus circumferentijs dictorũ circulorum, sitq́ unus b in circumferentia circuli a b g d, reliquus autem t in circumferentia circuli a e d, descendat à puncto t perpendicularis arcus t x ad circumferentiam circuli a b g d. Dico ꝙ proportio sinus arcus a b ad sinum arcus b r est, ut proportio sinus arcus d t ad sinũ arcus t x. Sint enim poli duorũ circulorum h & 3, per quos transeat circulus magnus h 3 p e secans circumferentias dictorũ circulorum in pũctis p & e. In circumferentia itaq; circuli a b g d signata sunt duo puncta b & p, à quibus descendunt duo ꝑpendiculares b r & p e, quare ꝓportio sinus arcus a b ad sinum arcus b r est ut sinus arcus a p ad sinum arcus p e. Rursus cum in circumferentia circuli a e d signata sint duo puncta e & t, à quibus duo perpendiculares oriuntur e p & t x, erit proportio sinus arcus d t ad sinum arcus t x, sicut sinus arcus d e ad sinum arcus e p. est autem proportio sinus arcus d e ad sinum arcus e p, sicut sinus arcus a p ad sinum eiusdem arcus p e, uterq; enim arcuũ a p & d e est quarta circumferentiæ unius. proportio igitur sinus arcus a b ad sinum arcus b r est ut sinus arcus d e ad sinũ arcus t x, quæ fuere peragenda. Sed forsitan adhuc animus pendet, attento ꝙ à quolibet puncto in superficie sphærica prærica præter polum circuli cuiuslibet, extra tamen circumferentiam eius signato, geminos demittere liceat arcus perpendiculares ad circumferentiam ipsius circuli. possibile est enim per punctum signatũ & polum circuli transire circulũ alium magnum tertij huius docente. circuli igitur hoc pacto descripti, duo arcus inter punctũ signatum & circumferentiam circuli iacentis intercepti, perpendiculares erunt ex huius ad circumferentiam circuli iacentis. In figuratione itaq; præsenti à puncto b prodibit perpendicularis, unus ad partem inclinatiõis, reliquus autem ad partem oppositam. Idem quoq; accidet cæteris punctis in utraq; circumferentiarũ signatis, uerum hoc non interturbabit syllogismũ nostrum, nam hij duo perpendiculares cum sint æquales semicircumferentiæ per tertij huius, communis animi conceptio eundem ipsis communem donabit sinum. quicquid igitur de uno arcuũ prædicabit theorema nostrum, & de reliquo demonstratũ habebit.

XVI.

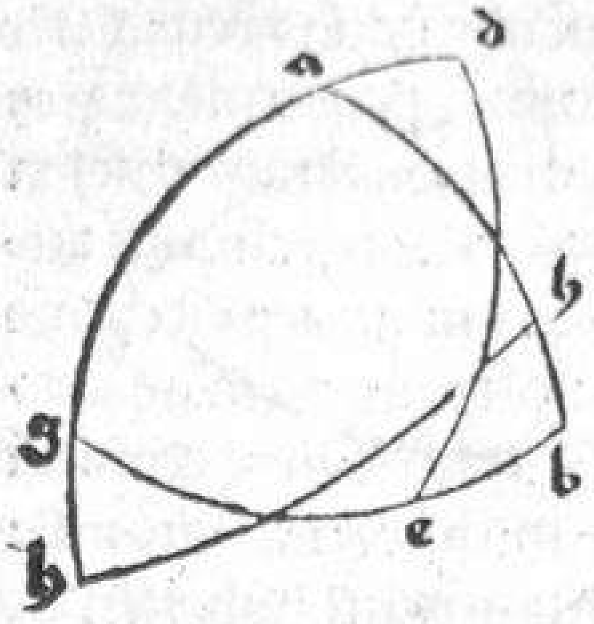
In omni triangulo rectangulo omnium laterum sinus ad sinus angulorum, quos subtendunt, eadem est proportio.



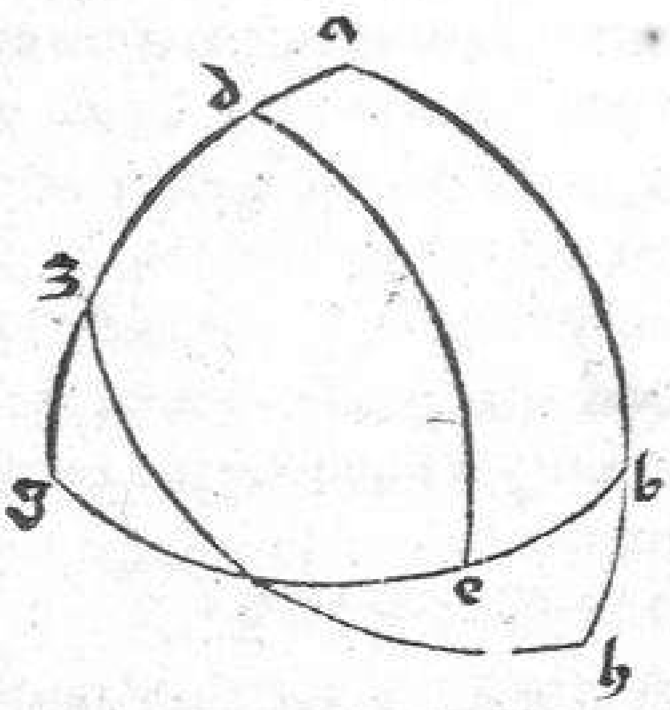
Sit triangulus a b g angulum b rectum habẽs. Dico q̃ ꝓportio sinus lateris a b ad sinum anguli a g b eadem est proportioni sinus lateris b g ad sinũ anguli b a g, & proportioni, quam habet sinus lateris a g ad sinum anguli a b g, quod sic demonstrabimus. Necesse est, aut utrunq; angulorũ a & g esse rectum, aut alterũ eorũ duntaxat, aut nullum. Si uterq; eorum rectus est, erit per hypothesim & huius pũctus a polus circuli b g, b autem polus circuli a g & g polus circuli a b, quare per diffinitionem unusquisq; trium arcuũ dictorũ determinabit quantitatem anguli se respicientis. idem igitur erit sinus cuiuslibet trium laterũ & anguli sibi oppositi, & ideo sinus omniũ laterũ ad sinus angulorũ se respicientiũ, proportionem eandem accipiunt uidelicet æqualitatis. Si autem alter duntaxat angulorũ a & g fuerit rectus, sit ille, uerbi gratia, angulus g. tradidit autem & hypothesis angulũ b rectum, quare per huius a est polus circuli b g, & per huius uterq; arcuũ b a, & a g quadrans circumferentiæ magnæ. per diffinitionem igitur unusquisq; arcuũ a b, b g & g a quantitatem anguli se respicientis determinabit, eritq; idem sinus cuiuslibet lateris & anguli se respicientis conuertendo diffinitionem sinus anguli. unde postremo constabit omnium laterum sinus ad sinus angulorũ se respicientiũ, eandem habere proportionem scilicet æqualitatis. Qđ si neuter angulorũ a & g rectus offeratur, non poterit aliquis trium arcuũ lateralium esse quadrans circumferentiæ, quemadmodũ ex huius trahitur, uerum in triplici uarietate habebũtur. Si enim uterq; angulorũ a & g fuerit acutus, erit per huius uterq; arcuũ a b & b g minor quadrante, unde & per huius arcus a g minor quarta circumferentiæ. Cresscat igitur arcus g a uersus a donec fiet quadrans a d, secundum cuius cordam quæ est costa quadrati magni super puncto g facto polo describatur circulus magnus, secans arcum g b prolongatũ in puncto e. prolongetur demum arcus a g ad partem puncti g, donec quadrans habebitur a z, cuius corda super polo a circumducta pariat circulũ occurrentem arcui a b continuato in puncto h. Pinximus hoc pacto unam figurationem. Si uero uterq; angulorum a & g obtusum se

præbeat

præbeat, per media nuperrime commemorata uterq; arcuũ a b & b g quadrantem superabit, arcus autem a g quadrante minorem confitebimur. prolongato igitur ut antea utrinq; arcu a g, donec & arcus g d quarta nascetur & arcus a 3, super polis g & a duo circuli magni describantur, quorum unius super g scilicet descripti circumferentia necessario secabit arcum g b maiorem quadrante, quod fiat in puncto e, reliqui uero super a descripti, secabunt arcũ a b, quod contingat in puncto h. Sic altera surgit figuratio.



Qd' si alter angulorum a & g obtusus fuerit, reliquus autẽ acutus, sit a obtusus & g acutus, erit itaq; ex pallegatis locis uterq; arcuũ b g & g a quadrante maior, arcus autem a b minor eo. abscindant ergo ex arcu a g duo quadrãtes g d & a 3 in arcu d 3 participantes, descriptoq; circulo ut prius super g polo, circumferentia eius secabit arcum b g maiorẽ quadrante, quod fiat in puncto e, circumferentia autem circuli super a descripti, non secabit arcum a b, cum sit minor quadrante, sed occurret ei quantũ sat est porrecto, quod fiat in puncto h. Neutro igitur angulorum a & g recto existente, tametsi figuratiõe triplici utamur, syllogismus tamẽ erit unicus.



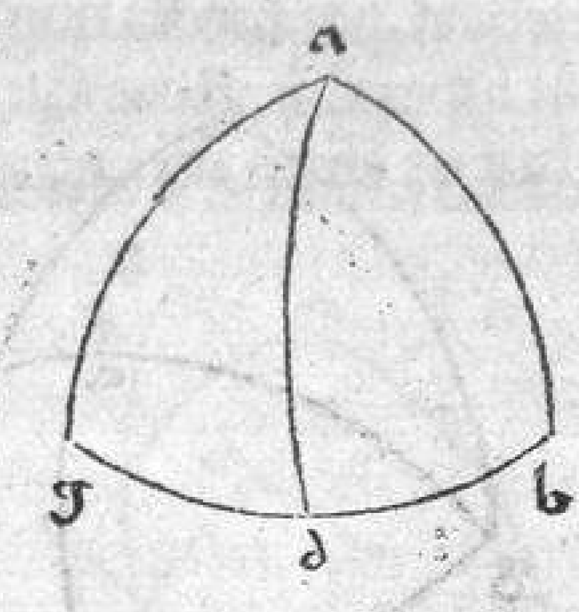
Cum enim duo circuli g d & g e ad se inclinati sint, & in circumferentia circuli g d signent duo pũcta, ex quibus duo perpendiculares a b & d e descendunt, erit per præcedentem proportio sinus arcus g a ad sinũ arcus a b sicut sinus arcus g d ad sinũ arcus d e, & permutatim sinus g a ad sinũ g d, sicut sinus a b ad sinũ d e. Item duo circuli a 3 & a h ad se inclinati sunt, signanturq; duo puncta g & 3 in circũferentia circuli a 3, ex quibus descendunt duo arcus perpendiculares g b & 3 h, quare per præmissam proportio sinus a g ad sinum g b est tanq; sinus a 3 ad sinum 3 h, & permutatim sinus a g ad sinum a 3 sicut sinus g b ad sinum 3 h. est autem sinus a g ad sinum a 3, sicut sinus g a ad sinũ g d, q uterq; arcuũ a 3 & g d quadrans habeatur. Sinus igitur lateris a b ad sinum d e, & sinus lateris b g ad sinum 3 h, eandem habent proportionẽ, quã uidelicet sinus lateris a g ad sinum quadrantis. Sinus autẽ d e est sinus anguli a g b, arcus enim d e derterminat quantitatẽ anguli a g b, puncto g polo existente circuli d e. Similiter sinus 3 h est sinus anguli b a g. sinus autẽ quadrantis est sinus anguli recti. quare sinus lateris a b ad sinum anguli a g b, & sinus lateris b g ad sinum anguli b a g, sinus quoq; lateris a g ad sinum anguli recti a b g unam & eandem suscipiunt proportionem, quod erat declarandum.

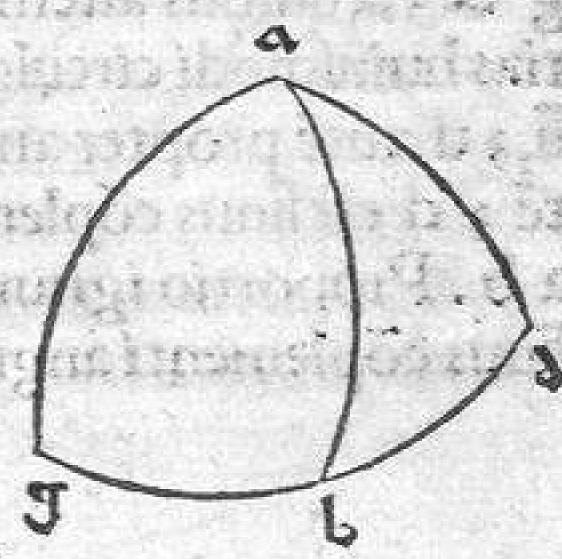
XVII.

In omni triangulo non rectangulo sinus laterum ad sinus angulorum eis oppositorũ eandẽ habent proportionem.

Quam præcedens de triangulis rectangulis prædicabat passionem, præsens quoq; de triangulis non rectangulis enunciat. Sit igitur triangulus a b g, nullũ habens rectum angulũ. Dico q sinus lateris a b ad sinum anguli g, sinusq; lateris a b ad sinum anguli b, & sinus lateris b g ad sinum anguli unã & eandẽ proportionem accipiunt, Demittam enĩ ex puncto a perpendicularem a d incidentem

tem arcui b g si intra triangulũ manserit, aut occurrentem arcui b g oportune prolongato si extra triangulum ceciderit, quæ neutri arcuum a b & a g sibi conterminalium coincidere poterit. sic eñ alter angulorꝫ b & g rectus haberetur, quẽ hypothesis nostra non rectum tradidit. Cadat itaqꝫ prius intra triangulũ, distinguens duos triangulos a b d & a g d rectangulos. erit ergo per præcedentẽ terminis permutatis proportio sinus a b ad sinum a d, sicut sinus anguli a d b recti ad sinum anguli a b d. sed & per eandem præmissam proportio sinus a d ad sinum a g tanꝗ sinus anguli a g d ad sinum anguli a d g recti. cũqꝫ sit idem sinus anguli a d g & anguli a d b, ꝙ uterqꝫ eorꝫ rectus est. erit per æquã proportionalitatẽ indirectã sinus a b ad sinum a g ueluti sinus anguli a g b ad sinum anguli a b g, & permutatim sinus lateris a b ad sinum anguli a g b tanꝗ sinus lateris a g ad sinũ anguli a b g. Eandem deniqꝫ concludes proportionẽ sinus lateris b g ad sinum anguli b a g, si prius ab altero punctorꝫ angularium b & g ad latus sibi oppositum demiseris arcum perpendicularẽ. Quod si perpendicularis a d extra triangulum ceciderit mutata parumper figuratione pristinum repetemus syllogismũ. Erit eñ ex præmissa permutatim arguendo sinus a b ad sinum a d tanꝗ sinus anguli a d b ad sinum anguli a b d recti. itemqꝫ sinus a d ad sinum a g, sicut sinus anguli a g b ad sinum anguli a d g recti. quare per æquam indirectam erit sinus lateris a b ad sinum lateris a g, sicut sinus anguli a g b ad sinum anguli a b d. sinus autem anguli a b d est etiam sinus anguli a b g per communem scientiam. sinus igitur a b ad sinum a g est ut sinus anguli a g b ad sinum anguli a g b, & ideo permutatis terminis, erit sinus lateris a b ad finum anguli a g b, tanꝗ sinus lateris a g ad sinũ anguli a b g. Hanc demũ conuincemus esse proportionem sinus lateris b g ad sinum anguli b a g, quemadmodũ hactenus processimus. Passionem igitur quæ de triangulis rectangulis & non rectangulis singulatim in hisce demonstrabatur theorematibus, communiter tandem de omnibus triangulis qualescunqꝫ fuerint concludere licebit, quæ res quantos & ꝙ iucundos allatura sit fructus pedetentim intuebimur.

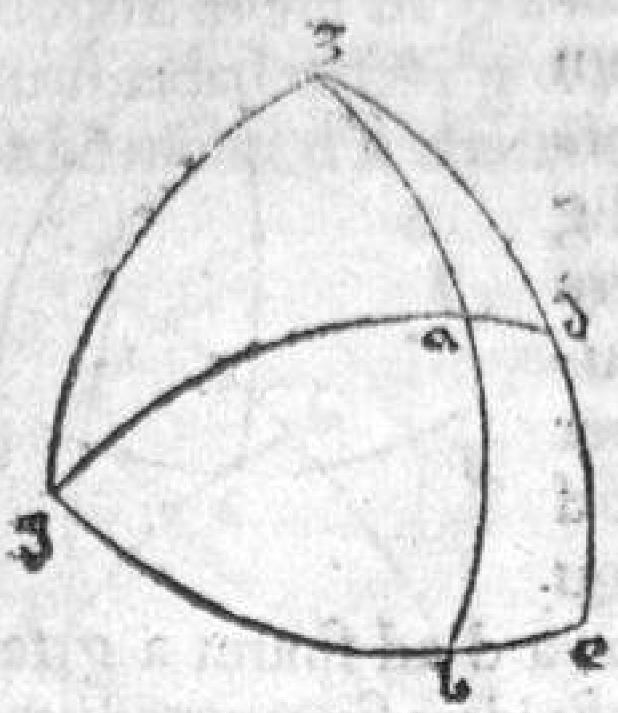




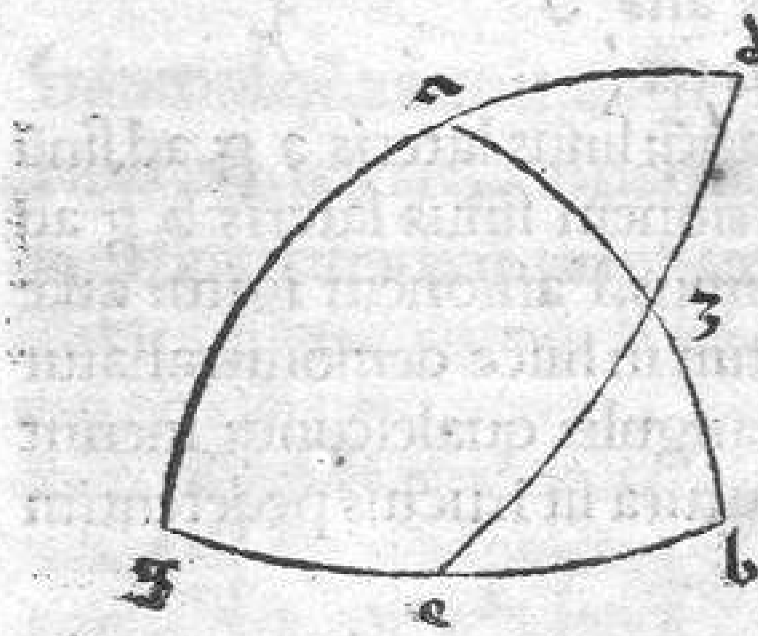
XVIII.

In omni triangulo unicum habente rectum angulum, proportio sinus anguli nõ recti ad sinum anguli recti est, ut sinus complementi anguli reliqui ad sinum complementi lateris eum subtendentis.

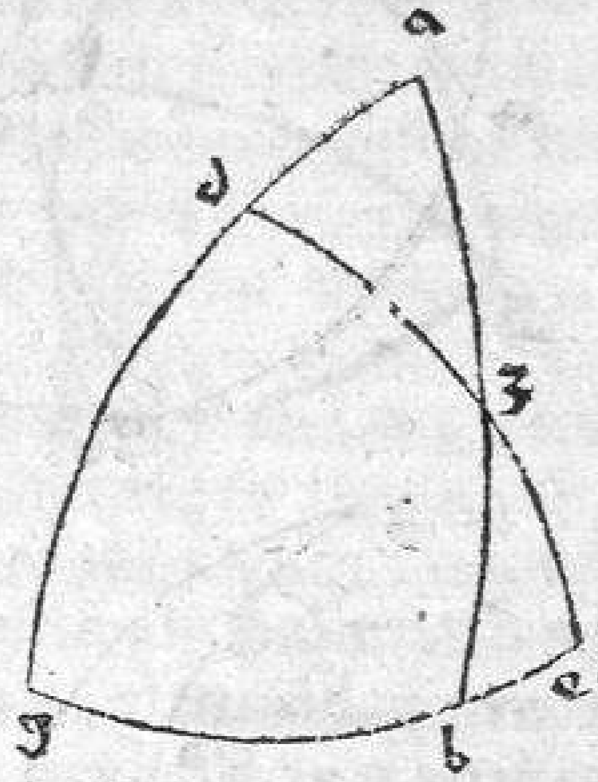
Sit triangulus a b g, cuius angulus b quidem sit rectus, neuter autem duorꝫ a & g rectus habeatur. Dico ꝙ proportio sinus anguli b a g ad sinum anguli b recti est, ut sinus complementi anguli a g b ad sinum complementi lateris a b, similiter sinus anguli a g b ad sinum anguli b recti se habet, tanꝗ sinus complementi anguli b a g ad sinum complementi arcus b g, quod sic demõstrabimus. Quoniam neuter angulorum a & g est rectus, erit aut uterqꝫ eorum acutus uel obtusus, aut alter acutus, & reliquus obtusus. Sit primo uterqꝫ acutus, quamobrẽ per huius utrunqꝫ laterũ a b & b g minus erit quadrante, ideoqꝫ per huius



& arcus a g minor existet quadrante, protendatur ergo g a ad partem puncti a, donec fiet quadrans g d, secundum cuius cordã super g facto polo circumducatur circulus secans arcum g b satis prolongatum in puncto e. arcus denique b a ad partẽ puncti a porrectus coincidat circumferentiæ circuli super g polo circumducti in pũcto z, quẽ ex huius constabit esse polum circuli g b e. per autem huius uterque arcuũ z b & z e quadrans habebitur, & angulus z e g rectus. quare per diffinitionem arcus a z erit complementum lateris a b, arcus autem d z cõplementum arcus d e. cũque arcus d e determinet quantitatem anguli a g b, puncto g polo existẽte circuli z d e, determinabit arcus z d quantitatem cõplementi anguli a g b, quod facilius ducto arcu g z cõfiteberis. Est autem proportio sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti per huius conuersim arguendo, sicut proportio sinus b g ad sinũ g a. sinus demum b g ad sinum g a, sicut sinus d z ad sinum z a per huius. quoniam in circumferentijs duorũ circulorũ g a d & z a b signata sunt duo pũcta g & z, à quibus alternatim descendũt duo arcus perpendiculares ad circumferentias huiusmodi circulorũ, g b quidẽ propter angulum a b g rectum ex hypothesi, z d autẽ propter angulum z d g rectum, g polo circuli z d existente. Sinus autẽ z d est sinus cõplementi anguli a g b, & arcus a z est complementum lateris a b. Proportio igitur sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti, est tanquam sinus cõplementi anguli a g b ad sinum complementi lateris eum subtendentis.

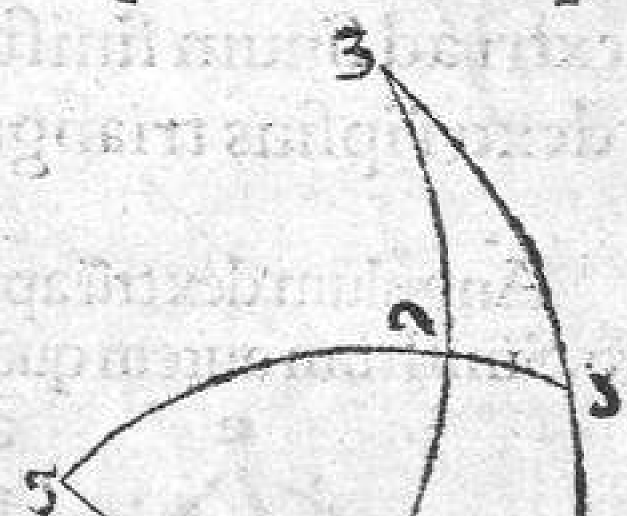


Quòd si fuerit uterque angulorũ a & g obtusus per huius utrũque laterũ a b & b g quadrantẽ superabit, unde & latus a g minus quarta enunciabitur. Crescat igitur arcus g a, donec arcus g d per a punctũ incedens fiet quadrans, secundũ cuius cordã describatur circulus magnus, secans necessario arcũ g b, quod fiat in puncto e, secabit aũt circulus ille necessario arcum a b in puncto qui sit z. per itaque huius duo arcus g e & e z perpendiculariter sibi inuicem insistent, cũque per hypothesim arcus a b perpendicularis sit ad arcum b g angulo b recto existente, erit per huius z polus circuli b g, & per corollarium eiusdẽ uterque arcuum z b & z e quadrans circumferentiæ. quare per diffinitionem arcus a z erit complementum arcus a b, arcus etiam z d determinabit complementum anguli a g b, quod apertum uidebitur si arcũ g z produxerimus. erit enim angulus h g z rectus, arcu z b quadrante existente, sinus ergo arcus z d erit sinus complementi anguli a g b. Cum itaque in circumferentijs duorum circulorũ a g & a b ad se inclinatorum signauerimus duo puncta g & z, à quibus descendunt duo perpendiculares, g b quidem ad arcum a b propter angulum b rectũ ex hypothesi, z d autem ad arcum g d propter g polũ circuli d z, erit per huius conuersis terminis proportio sinus arcus b g ad sinum arcus g a, tanquam sinus d z ad sinum arcus z a, uidelicet tanquam sinus complementi anguli a g b ad sinum complementi lateris a b, sinus autem arcus b g ad sinum arcus g a se habet per huius permutato terminorum situ, tanq; sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti, & ideo sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti se habet, sicut sinus complementi anguli a g b ad sinum complementi lateris a b ipsum subtendentis. Postremo si alter angulorum a & g sit obtusus, uerbi gratia, angulus a, & reliquus g acutus, erit itaq; per media supradicta arcus a b minor quadrante, uterq; uero arcuum a g & g b quadrantem superabit. resecabo igitur ex arcu a g quadrantem g d, descriptoq; circulo secundum quantitatem g d super g polo, circumferentia eius necessario concurrens cũ arcu g b quadrantẽ superante secabit arcum a b, quod fiat in puncto 3, quẽ oportet esse polũ circuli b g, per huius propter binos angulos apud b & e rectos, unde & ex corollario eiusdẽ uterq; arcuum 3 b & 3 e quadrans conuincetur. Cũq; arcus d e quantitatẽ anguli a g e determinet, arcu 3 e quadrante existente, arcus d 3 quantitatẽ cõplemẽti anguli a g b determinabit, quod haud incertum affirmabis, ubi arcũ g 3 produxeris. similiter a 3 erit cõplementũ lateris a g. In circũferentijs autẽ duorum circulorum a g & a b ad se inclinatorum (eisdem enim characteribus nunc arcus nunc circulos suos more nostro repræsentamus) signata sunt duo puncta g & 3, à quibus alterni egrediuntur perpendiculares g b & 3 d, quod nõ nisi ex locis cõmemoratis ostendemus, & tandem syllogismo freti pristino concludemus sinum anguli b a g se habere ad sinum anguli a b g recti tanq; sinũ cõplementi anguli a g b ad sinum cõplementi arcus eum subtendentis, quod iuuat attigisse. Non aliter procedemus angulũ a g b uice anguli b a g assumentes, cæteris ut res ipsa postulat commutatis.

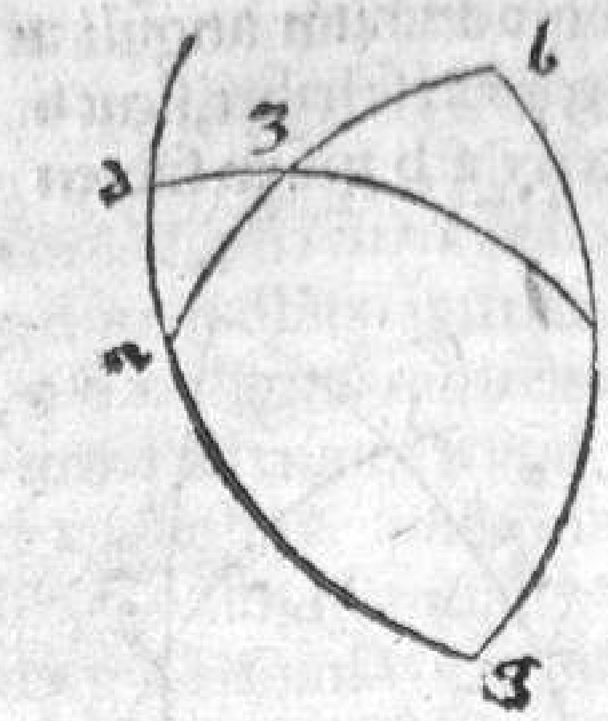


XIX.

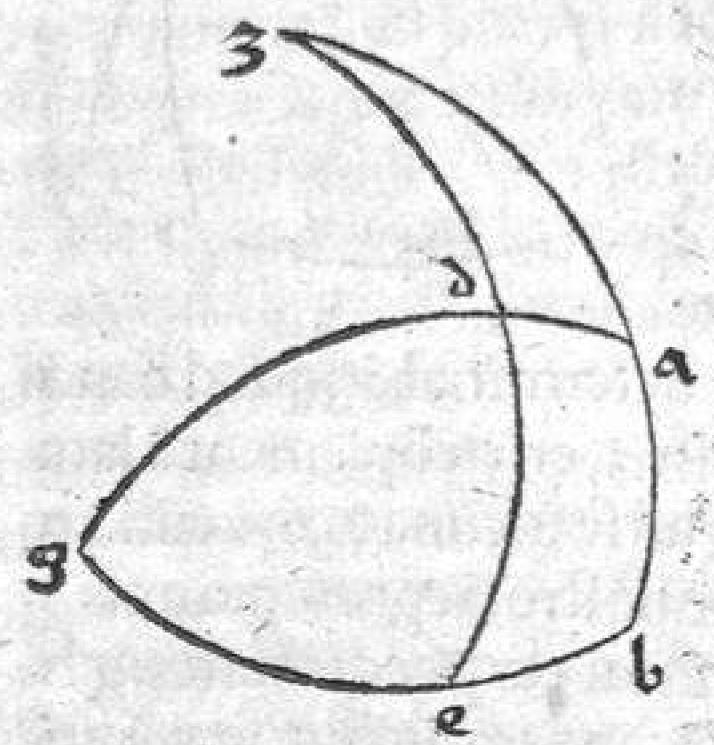
In omni triangulo, cui unicus est rectus angulus, sinus cõplementi lateris rectũ subtendentis angulũ ad sinũ cõplementi alterius rectum ambientiũ, eam habet proportionem, quã sinus complementi reliqui lateris ad sinum quadrantis.



Sit triangulus sphæralis a b g angulũ b rectũ habens, & utrumq; reliquorũ non rectum. Dico q; proportio sinus complementi lateris a g ad sinum complementi lateris a b, est ut sinus complementi lateris b g ad totum scilicet sinum quadrantis. itemq; sinus complementi eiusdem lateris a g ad sinum cõplementi lateris b g tanq; sinus cõplementi lateris a b ad sinum quadrãtis. Huius demonstrationem afferemus simplicẽ, tametsi triuaria soleat esse figuratio. Si enim uterq; angulorum a & g acutus fuerit, erit p media in præmissis sæpenumero adducta, unũquodq; laterũ trianguli nostri minus quadrante. Prolongetur ergo latus g a ad partem puncti a, donec fiet arcus g d quarta circũferentiæ, secundum cuius cordã super g polo circulus descriptus secabit arcum g b satis continuatum, quod fiat in puncto e. secabit autem & arcũ b a prolongatũ, quod fiat in puncto 3. Si deniq; uterq; angulorum a & g obtusum se præbeat, erit uterq; arcuũ a b & b g maior quadrante, arcus autem a g quadrante minor, quo crescente donec fiet quadrans a d, secundum cordã ipsius de-



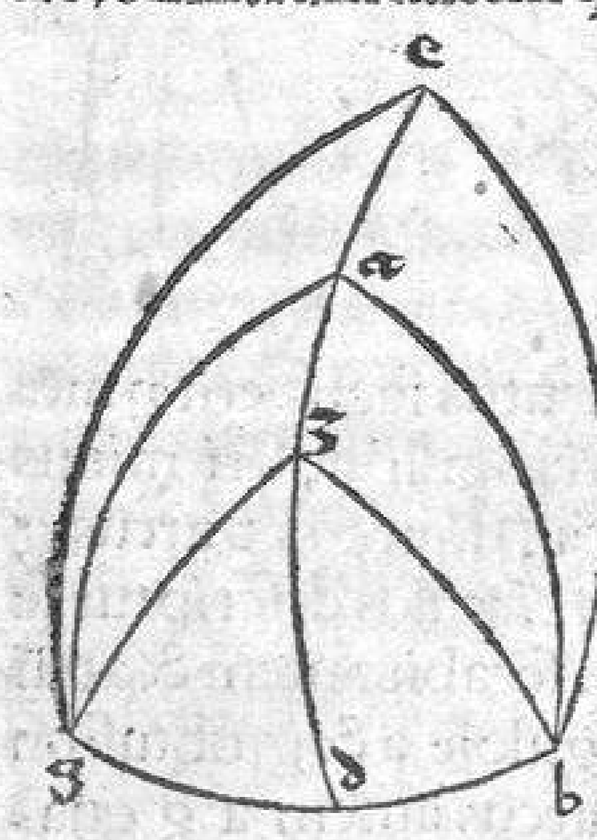
scribatur circulus magnus secans necessario arcum g b quadrante maiorē in puncto qui sit e, arcū autē a g in puncto quem uocabimus z. Et si postremo alter angulorum a & g obtusus fuerit, uerbi gratia angulus a, reliquus autem acutus, erit uterq; arcuum a g & g b quadrante maior ex allegatis locis, arcus autem a b minor quadrante. Abscindam igitur ex arcu g a quadrātem g d, secandū cuius cordā super polo g circulū magnū describo, qui secet arcū b g in puncto e, & arcū b a cōtinuatum in puncto z. Quibus ita ordinatis constabit ꝑ huius z esse polum circuli b g propter binos angulos apud b & e rectos, & per corollarium eiusdē utrūq; arcuum z b & z e esse quadrantem, quare per diffinitionem arcus a z est complementū lateris a b, arcus aūt a d complementū lateris a g. & arcus b e cōplementū lateris b g. Cumq; duo circuli z b & z e ad se inclinati sint, in quorum unius scilicet z b circumferētia signantur duo puncta a & b, ex quibus perpendiculares arcus ad circumferentiam alterius descendunt, qui sunt a d & b e, propter binos angulos apud d & e rectos g polo circuli z e existente, erit per huius proportio sinus z a ad sinum a d, sicut sinus z b quadrantis ad sinum b e. & permutatim sinus z a complementi, scilicet arcus a b ad sinum quadrantis z b tanq; sinus a d complementi lateris a g rectum subtendentis angulū ad sinū b e complemēti scilicet lateris b g rectū ambiētis, quod ꝓponebat̄ cōfirmandū.



XX.

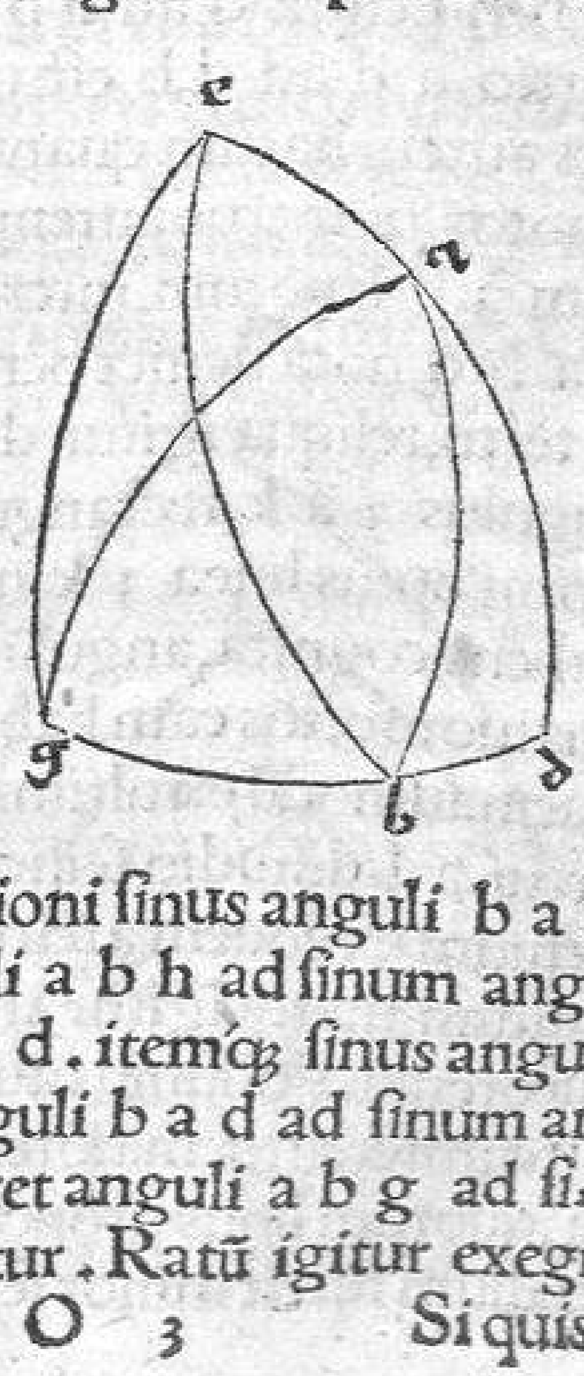
In omni triangulo non rectangulo perpendicularis à uertice anguli cuiuslibet ad latus sibi oppositū demissus cū duobus lateribus sibi conterminalibus duos complectetur angulos, eritq; proportio sinus dextri ad sinum sinistri eorum angulorū tanq; sinus cōplementi anguli dextri ipsius trianguli ad sinū cōplementi anguli sinistri.

Angulum dextrū appello, quem facit perpendicularis cū latere trianguli dextro, Sinistrum autem quē cum sinistro. Sit triangulus a b g, nullū habens rectū angulū, à cuius anguli uertice descendat arcus a d perpendicularis ad arcum b g, cōplectens cum duobus lateribus trianguli sibi cōterminalibus duos angulos, cum latere quidē a b dextro angulū b a d, cum latere autem sinistro a g angulū a g d. Dico q; proportio sinus anguli b a d ad sinū anguli g a d, est sicut ꝓportio sinus cōplementi anguli a b g ad sinum cōplementi anguli a g b. Perpendicularis em̄ arcus aut cadit intra triangulū, aut extra, cum neutri arcuum sibi conterminaliū coincidere possit. sic nāq; alter angulorum b & g rectus fieret quē hypothesis non rectum tradidit. unde etiam palam q; perpendicularis cum duobus lateribus duos continebit angulos, Cadat primum intra, & sit minor quadrante, quod quidē accidit dū uterq;



angu-

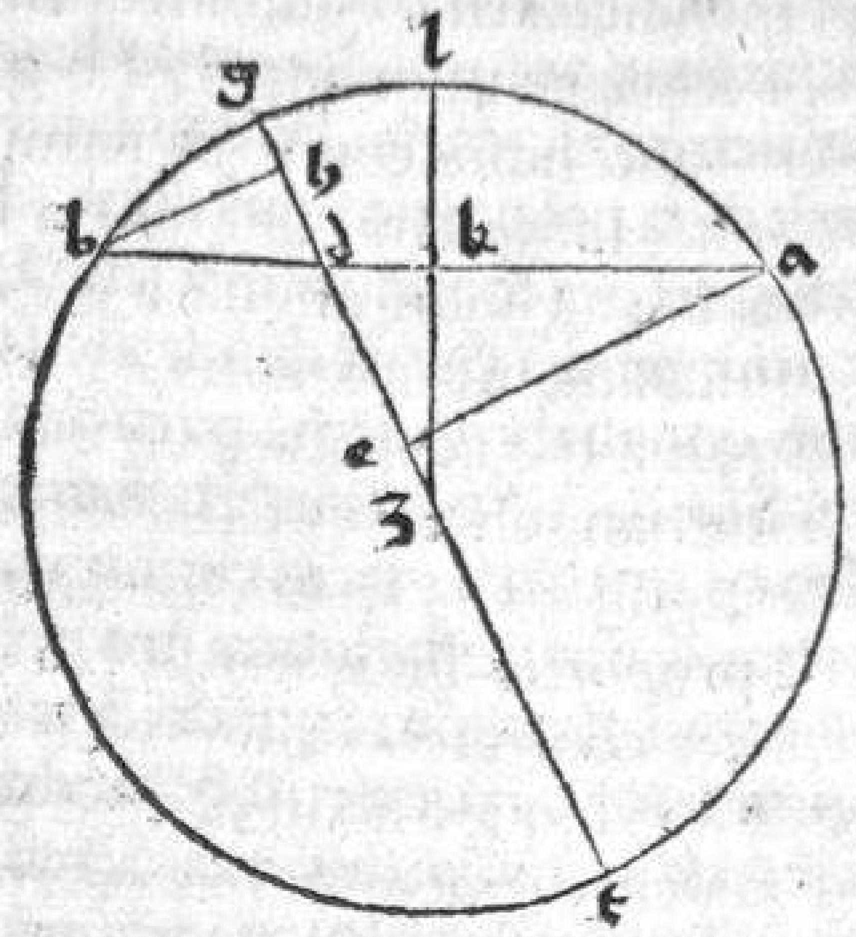
angulorum b & g acutus fuerit, quemadmodum ex huius trahitur, non potest autem esse quadrans angulo a b g non existente recto. Extendatur ergo d a usq; ad e donec arcus d e quadrans habeatur, eritq; per huius e polus circuli b g, â quo duobus punctis b & g occurrant duo arcus circulorum magnorum e b & e g, quos oportet esse quadrantes perpendiculariter quidē arcui b g insistentes, eritq; per diffinitionem angulus a b e cōplementum anguli a b g, & angulus a g e complementū anguli a g b. Per autē huius conuersis terminis est proportio sinus anguli a b e ad sinum arcus a e tanq; sinus anguli e a b ad sinum quadrantis e b. & per eandem sinus arcus a e ad sinum anguli a g e, sicut sinus quadrantis e g ad sinum anguli e a g. Sinus autem quadrantis e g est etiam sinus quadrantis e b, per æquā igit̄ sinus anguli a b e ad sinū anguli a g e proportionem habet, quā sinus anguli e a b ad sinum anguli e a g. Cumq; sinus anguli e a b sit etiā anguli b a d, q; similiter sinus anguli e a g sinus habeat anguli d a g, q; bini binis rectis æquipolleant, erit proportio sinus anguli b a d ad sinū anguli g a d, tanq; sinus anguli a b e, scilicet cōplementi anguli a b g ad sinum anguli a g e, scilicet complementi anguli a g b, quod libuit efficere. Si autem arcus a d quadrante maior extiterit, quod quidem euenit utroq; angulorū b & g obtuso existente, abscindatur ex eo quadrans 3 d, & â puncto 3 quē huius polū circuli b g demōstrat, duo arcus procedāt duobus punctis b & g occursuri, quos liquet esse quadrantes per huius orthogonaliter insidentes arcui b g, angulus igitur a b 3 est complementum anguli a b g per diffinitionem. itemq; angulus a g 3 complementum anguli a g b diffinietur. Est autem per huius conuersim arguendo proportio sinus anguli b a 3 siue b a d ad sinum quadrantis 3 b, ueluti sinus anguli a b 3 ad sinum arcus a 3. & per eandem sinus quadrātis 3 g ad sinum anguli g a 3 siue g a d, tāq; sinus arcus a 3 ad sinum anguli a g 3. per æquam igitur sinus anguli b a d ad sinum anguli g a d erit ut sinus anguli a b 3, scilicet complementi anguli a b g ad sinum anguli a g 3, scilicet cōplementi anguli a g b. Cadat demum perpendicularis extra triangulum, altero angulorum b & g obtuso existente, & reliquo acuto, quemadmodum ex huius trahitur. Obuiabit autem perpendicularis arcui g b prolongato ad partem anguli obtusi, qui uerbi gratia sit b, eritq; minor quadrante q; angulus a b d acutus habeatur. extēdamus igitur eū donec quadrans fiet ad punctum quidem h terminatus, quē oportet esse polum circuli b g huius arguente. ab eo itaq; polo duo arcus egrediantur h b & h g, qui erunt quadrantes orthogonaliter arcui b g incidentes p huius, quo fit ut angulus a b h complementū anguli a b g habeatur, angulusq; a g h cōplementum anguli a g b. est autē per huius conuersis terminis proportio sinus anguli b a h ad sinum quadrantis h b, tanq; sinus anguli a b h ad sinum arcus a h. & per eandem sinus quadrantis h g ad sinum anguli h a g. ueluti sinus arcus a h ad sinum anguli a g h. per æquā igitur proportioni sinus anguli b a h ad sinum anguli h a g, æqualis est proportio sinus anguli a b h ad sinum anguli a g h. sinus autem anguli b a h est et sinus anguli b a d. itemq; sinus anguli g a h est sinus anguli g a d. quare proportio sinus anguli b a d ad sinum anguli g a d, tanq; sinus anguli a b h complementi uidelicet anguli a b g ad sinū anguli a g h cōplementi scilicet anguli a g b habebitur. Ratū igitur exegimus quod proponebatur.



O 3 Si quis

XXI.

Si quis arcus notus minor semicircumferentia in duos diuidatur, quorum sinus proportionem habeant datam, uterq; eorũ notus erit.



Sit arcus a g b datus minor semicircũferentia diuisus in duos arcus a g & g b, sitq; proportio sinus arcus a g ad sinum arcus g b data. Dico ꝙ uterq; arcuũ partialium a g & g b datus habebitur. Subtendatur enim arcui a g b corda sua a b, ducaturq; per punctum g & centrum circuli 3 diameter circuli secans cordam a b in puncto d. ex punctis autem a & b arcum a b terminantibus duæ rectæ descendant perpendiculares ad diametrum, quæ sint a e & b h, quarum utranq; constat esse sinũ rectum arcus sibi cõterminalis, a e quidem arcus a g, & b h arcus b g. educatur etiam semidiameter 3 l orthogonaliter secans cordam a b in puncto k. Si igitur proportio sinuũ data fuerit proportio æqualitatis, erunt duo arcus a g & g b æquales per communẽ scientiam sinibus suis æqualibus existentibus. cumq; totus arcus a g b sit notus, erit & uterq; arcuũ a g & g b notus ex   primi huius. Si uero proportio dictorũ sinuũ nõ fuerit proportio æqualitatis, erit alter eorũ altero maior. sit itaq; a e maior sinu b h, unde & arcus a g maior erit arcu g b. cum autem proportio a e ad b h sit nota, oportet eam in terminis notis reperiri per diffinitionem proportiõis datæ, & ideo per quintã primi huius in numeris notis, qui sint r & s, r quidẽ maior, & s minor, ita ut sit proportio sinus a e ad sinum b h sicut r ad s. cum autẽ duo trianguli a e d & b h d rectanguli duos angulos apud contrapositos habeant æquales, erunt ipsi per 32. primi æquianguli, & ideo per 4. sexti proportio a e ad b h sicut a d ad d b, ꝓportio autem a e ad b h erat tanq; r ad s, quare & ꝓportio a d ad d b est ueluti r ad s, & coniunctim a b ad b d sicut r s ad s, tres autem harum quantitatũ notæ sunt, r s quidem propter duos numeros r & s notos, numerus autem s ex eis quæ supradicta sunt, corda deniq; a b ꝓpter arcum a g b notum, intercedente tabula sinuũ aut cordarũ, quarta igitur scilicet linea b d nota ueniet per   primi huius, est autem b k nota medietas cordæ a b ꝑ   tertij, reliqua igitur d k nota erit. educta insuper semidiametro 3 a, erit triangulus 3 a k rectangulus, cuius duo latera 3 a & a k nota sunt, unde & per   primi huius linea 3 k nota prodibit. triangulus itaq; 3 d k duo latera 3 k & k d habens cognita, angulũ d 3 k cognitum afferet per   primi huius, qui quidem ad quatuor rectos eam habet proportionem, quã arcus g l ad totam circumferentiã, quemadmodũ ex ultima sexti trahitur, arcus igitur g l notus habebitur, quem si arcui a l dimidio scilicet arcus a g b addideris, resultabit arcus a g notus, ipse demum ex eodem arcu dimidio, siue ex arcu b l ablatus relinquet arcum g b cognitum, uterq; igitur arcuũ partialium notus habebitur, quod pollicebatur nostrũ theorema. Possumus autem & ea quæ demonstrauimus applicare ad arcum semicircumferentia maiorem, ut si arcus a t b notus diuidatur in duos arcus a t & t b, quorum sinus proportionem habeant notam, dum tamen uterq; arcuum partialium fuerit minor semicircumferentia, sic enim necesse est diametrũ circuli per

punctum

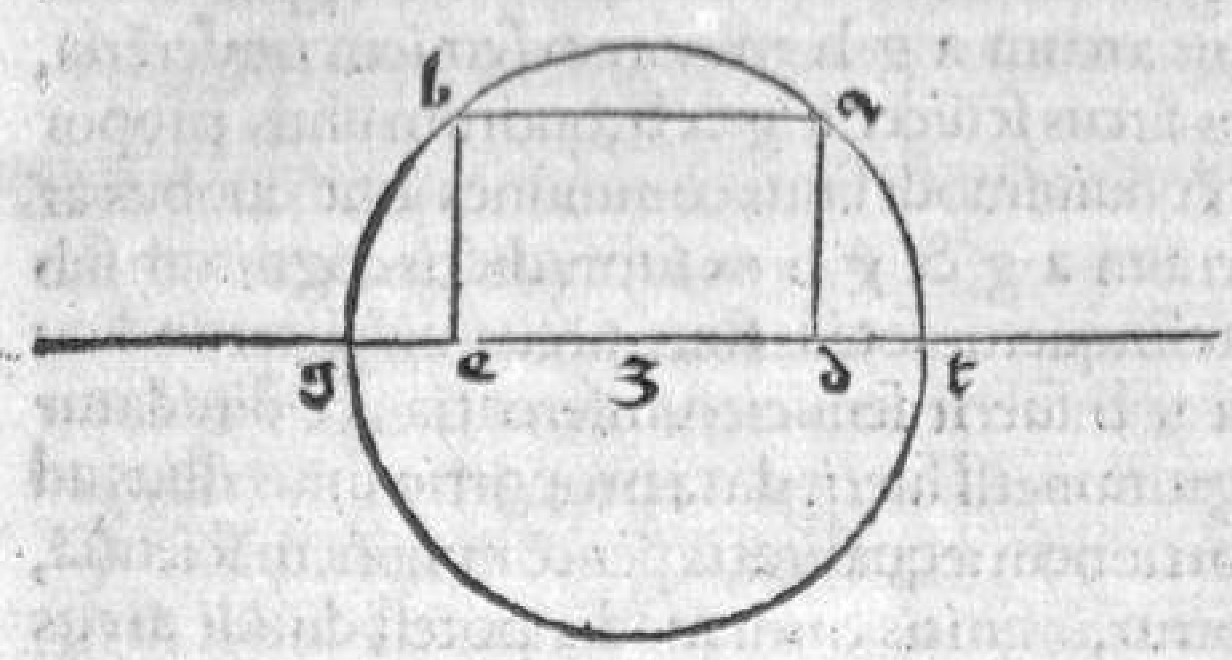
punctum t transeuntem, quæ sit t g secare cordam a b arcus a t b, quæ & arcui a g b communis, unde & secabit arcum a g b minorem semicircumferētia, & distinguet ex eo duos particulares arcus scilicet a g & b, quorum sinus proportionem habebunt datam, quoniam & huiusmodi sinus communes sunt duobus arcubus a t & t b, utrunq; igitur arcuum a g & g b ex supradictis cognitum subtrahemus à semicircumferentia, & relinquetur socius suus, arcus uidelicet in sinu secum participans. Quòd si arcus a g b fuerit semicircumferentia, & diuidatur in duos arcus a g & g b ut cōtingit, tametsi fuerit data proportio sinus illius ad sinum istius, quā oportet esse proportionem æqualitatis per communem scientiā, non tamen alter eorum necessario dabitur, infinitis enim modis potest diuidi arcus ille, qui est semicircumferentia proportione sinuum, quos habent arcus particulares, nō mutata. ¶ Operationē hoc pacto perficies. Si proportio sinuum data fuerit æqualitatis, arcum datū dimidiabis, & habebis duos particulares arcus cognitos. Si uero fuerit inæqualitatis, duos terminos eius congregabis, collectumq; pro primo statuas numero, minorem autem terminū proportionis datæ pro secundo, & numerum cordæ arcus dati pro tertio. multiplica igitur secundū per tertiū, & productum diuide per primum, quodq; exibit à dimidia corda arcus dati auferas, & residuum custodias, deinde semidiametro circuli in se multiplicata, aufer quadratum dimidiæ cordæ arcus dati, quod autem relinquetur quadrato eius, quod custodiri præcepimus, coniunge, & collecti radicem elice quadratam, custoditū deniq; per sinū totum extende, & productū in radicem elicitam distribuas, exibit enim sinus differentiæ, quæ est inter dimidiū arcum datum, & utrunq; arcuū quæsitorū quā ex tabula sinus inuentā minue ex dimidio arcu dato, & relinquetur arcus minor quæsitus, aut eidem adde, ut resultet arcus maior. In exemplo. Ponatur arcus 40. graduum, & proportio sinus arcus a g maioris ad sinum arcus g b minoris, sicut 7. ad 4. colligo 7. & 4. fiunt 11. pro primo numero: 4 autem accipiam pro secundo, & 41042. scilicet cordam arcus dati pro tertio. multiplico 41042. per 4. producuntur 164168. quæ diuido per 11. exeunt 14924. linea uidelicet d b, quā subtrahe à medietate cordæ manenti 5597. custodienda pro linea d k. Item semidiameter siue sinus totus 60000. quæ duco in se, producuntur 3600000000. à quo aufero quartū dimidiæ cordæ, quod est 421111441, manebunt 3178888559. hoc addo quadrato lineæ d k scilicet 31326409. resultāt 3210214968. huius radix quadrata ferè est 56659. quam seruo, deinde multiplico numerum lineæ d k per sinum totum, producuntur 335820000. quæ diuido per radicem seruatam, exeunt 5927. huius arcus 5. 40. ferè, quem deme ex dimidio arcu dato scilicet 20. manēt 14. 20. arcus scilicet g b. item eidem ipsum addo, ueniunt 25. 40. & totus ferè habebitur arcus a g.

XXII.

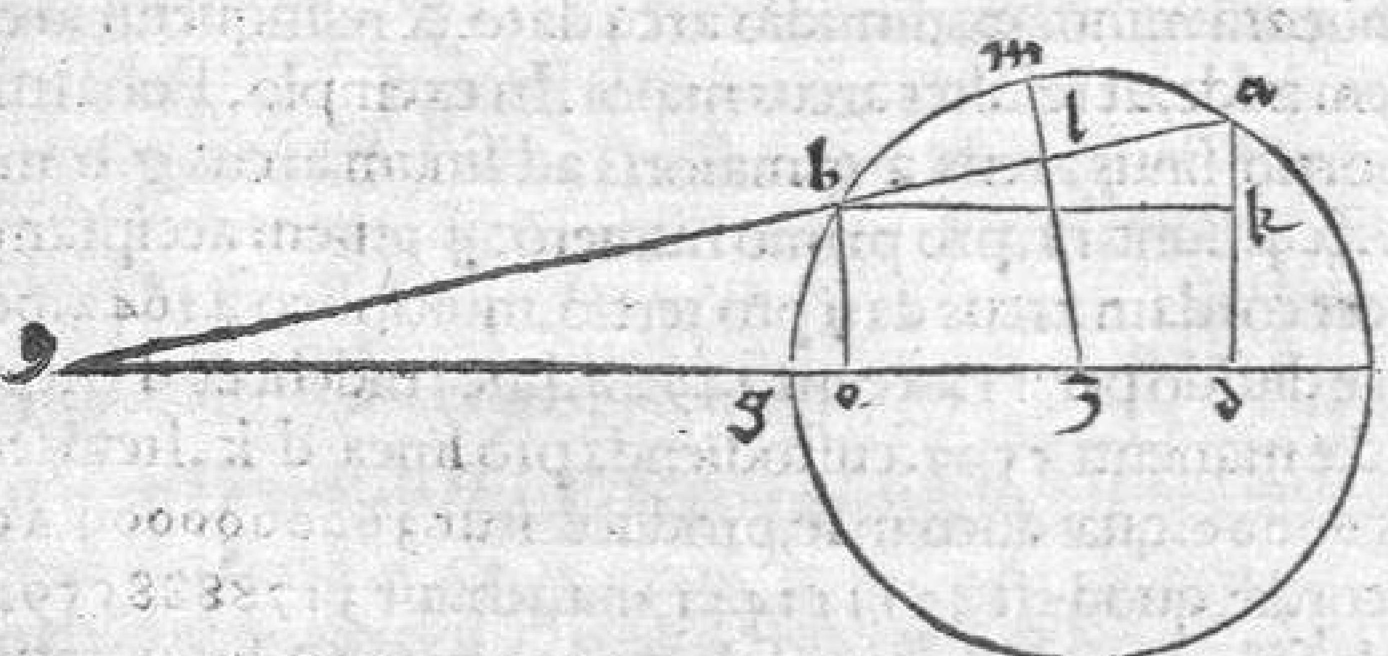
Si data fuerit differentia duorum arcuum cum proportione sinuū suorum, uterq; eorum cognitus habebitur.

Duos arcus a g & g b cōterminales intelligantur, minorq; qui est g b pars maioris a g, quorum differentia sit data arcus uidelicet a b, eorumq; sinus habeant datā proportionem. Dico quod uterq; eorum notus reddetur. Incedat enim per g terminum communem arcuū dictorum & centrum circuli z linea recta utrinq; indefinita, diametrum tamen circuli g t complectens, educaturq; semidiameter z m secans cordam a b orthogonaliter in puncto l, à punctis autem a & b cordā a

b termi



b terminantibus duæ perpendicu lares a d & b e ad diametrum descendant, quas constat esse duos sinus arcuũ a g & g b. Si itaq; ipsi fuerint æquales, hoc est, proportio sinuũ data fuerit proportio æqualitatis, erit per communem scientiã arcus g b æqualis arcui a t. dempto igitur a b noto per hypothesim ex semicircumferentia nota, residui medietas, arcus scilicet b g minor cognitus erit, cui si arcum a b notum adieceris, prodibit arcus a g maior cognitus. Si uero alter sinuum maior reliquo extiterit, sit uerbi gratia arcus maioris a g sinus, maior sinu arcus minoris b g, abscindatur'q; ex sinu a d linea recta k d æqualis ipsi b e, ducta linea b k, quæ per primi æquedistabit lineæ e d, unde & per primi angulus e b k rectus habebitur angulo e d k recto existẽte & ideo angulus a b e rectum superabit. Producta autem linea ab a per b indefinita ex parte puncti b, erit reliquus angulus apud b acutus. cumq; sit angulus g b e g rectus, linea dicta a b satis porrecta concurret cũ linea t g oportune prolongata, quod fiat in puncto h. Quoniam igitur proportio a d ad b e data est. in numeris eã reperiemus per corollariũ quitæ primi huius, qui sint r & s, r quidẽ maior numero s. q̃rũ differentia sit x. Est autẽ per primi & quartam sexti proportio a d ad b e, & ideo r ad s tanq; a h ad h b, quare disiunctim a b ad b h sicut differentia numero℞ r & s, uidelicet x ad ipsum



numer℞ s. cumq; tres harum quantitatum proportionalium sint datæ, a b quidẽ cordam arcus suus notificat per tabulã sinuum aut cordarum, erit & linea b h nota, & ideo tota a h cognita ueniet. item b l medietas lineæ a b notæ non erit incognita, unde & linea h l data comparabitur. Quod igitur sub a h & h b continetur per primi huius notum erit, ipsum autem æquatur ei quod sub t h & h g per tertij, quamobrem quod sub t h & h g continetur notum erit, cui si quadratum semidiametri 3 g notæ adiecerimus, resultabit per sextã 2. quadratũ lineæ h 3 notum. unde & ipsa h 3 linea cognoscetur. Trianguli ergo 3 h l rectanguli duo latera 3 h & h l nota sunt, quare per primi huius, angulus eius h 3 l notus erit, cuius deniq; numerus arcum g m notum faciet, ad quem si arcũ m a, medietatem scilicet arcus a b dati adiunxeris, arcum a g notum habebis, itẽq; si ex eodem arcu g m dimidium arcum datum reieceris, arcus b g notus relinquetur, quod hactenus expectauimus. Quod si maior duorum sinuum minoris fuerit arcus, ut si quis offerat proportionem sinus arcus b t ab sinum arcus a t, cũ arcu a b noto, non aliter q̃ nuperrime peragendũ erit, donec elicietur arcus b g cognitus

cognitus, quo dempto ex semicircumferentia, relinquetur arcus b t notus, cui si arcum a b ex hypothesi notum subtraxeris, arcum minorem a t notũ relinques. ¶ Operatio. Si data proportio sinuũ fuerit æqualitatis, subtrahe arcũ datum ex semicircumferentia, & residui dimidium erit arcus minor quæsitus, cui si arcũ datum adieceris, resultabit arcus maior. Si uero fuerit proportio inæqualitatis, & sinus maioris arcus maior sinu arcus minoris, differentiã terminorum proportiõis datæ constitue primum numerum, terminum autem minorẽ pro secundo, & cordam arcus dati, qui est differentia arcuum quæsitoris, pro tertio. Multiplica igitur secundum per tertium, & productum diuide per primũ, & quod exibit addas cordæ dimidiæ arcus dati, collectumq́ꝫ serua. Idem quoqꝫ adde toti cordæ arcus dati, & collectum multiplica per id quod cordæ toti & eius medietati addidisti, eiq́ꝫ q̃d producitur, quadratum semidiametri, scilicet sinus totius adijcias, huius demum aggregati radicem elice quadratã. Deinde quod supra seruatum iri iussimus, per sinum totum multiplica, & productum diuide in radicem iam elicitam, ab exeuntisq́ꝫ arcu dimidium arcũ datum minue, & relinquetur arcus minor quæsitus, quẽ & eidem si addideris, maiorem arcum quæsitum numerabis. In exemplo. Ponat̃ proportio sinus arcus a g, ad sinum arcus b g, sicut 20. ad 13. sitq́ꝫ differentia arcuum 40. huius corda est 41042. differentia 20. 4. 13. est 7. Multiplico igit̃ 41042. per 13. producuntur 533546. quæ diuido per 7. exeunt 76221. linea scilicet b h. huic addo medietatem cordæ a b, scilicet 20521. resultant 96742. linea scilicet l h. item colligo 76221. & 41042. ueniunt 117263. quæ multiplico per 76221. procreantur 8937903123. quibus addo quartum sinus totius, quod est 3600000000. colligunt̃ 12537903123. huius radix quadrata est 111973. quã seruo, deinde multiplico 96742. p̃ 60000. p̃ducunt̃ 5804520000. q̃ diuido p̃ 111973. exeũt 51839 sinus scilicet arcus m g, qui erit 59 45. â quo aufero 20. manebit arcus b g 39. 46 item adde 20. ueniunt 79. 46. & tantus computabitur arcus a g.

XXIII.

Si angulum notum in duos particulares secueris angulos, quorum sinus proportionem habeant datam, uterqꝫ eorum notus erit.

Hæc ad angulos superficiales & planos rectilineos & sphærales accõmodabit̃. Sit angulus huiusmodi notus a 3 g diuisus in duos a 3 b & b 3 g, sitq́ꝫ proportio sinus anguli a 3 b ad sinum anguli b 3 g data. Dico ꝙ utrumqꝫ eorum cognoscet Geometra. Super uertice enim anguli, scilicet puncto 3 facto cẽtro, si planus & rectilineus fuerit, secundũ quantãlibet distantiam describatur circulus a b g, aut super puncto 3 facto polo secundum cordã quadrantis magni circulus a b g circumducatur, prolongenturq́ꝫ tria latera angulos particulares complectentia, donec obuiabunt circumferentiæ descripti circuli in punctis a, b, & g. Vnusquisqꝫ igitur trium arcuum, a g quidem totalis, & duorum partialiũ a b & b g quantitatem anguli se respicientis determinat, unde & sinus illorum arcuum tãq̃ sinus angulorum suorũ censebimus. Oportet autem arcum a g esse notum per 19 primi huius, sed & sinus duorum arcuum a b & b g, qui sunt etiam angulorum suorum, proportionem habebunt notam. quare per huius uterqꝫ illorum arcuum notus erit, & ideo per corollarium primi huius uterqꝫ angulorum a 3 b & b 3 g notus habebitur, quod erat deducendum. Operatio huius ab opere huius in nullo discrepat, nisi ꝙ uice angulorum arcus se determinantes accipias.

XXIIII.

Data differentia duorum angulorum, & proportione sinuum suorum

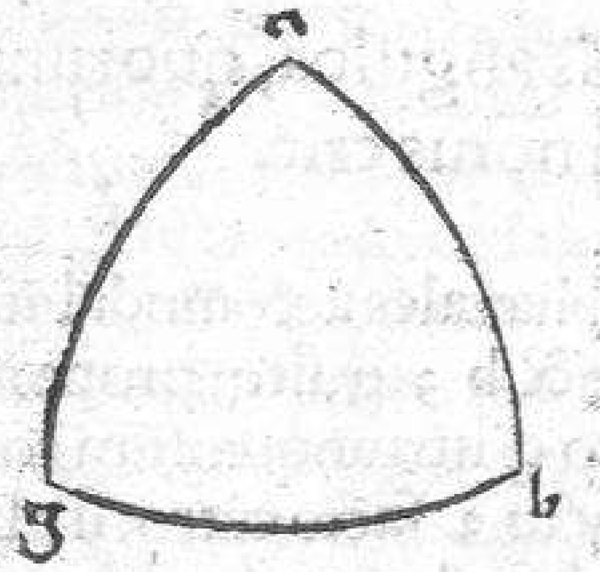
rum, utriusq; eorum quantitatem addiscemus.

Hanc ex huius non aliter q̄ praemissam ex emanare constat. nihil enim noui admiscetur, quod non colligantia angulorum & arcuum se determinantium administret. Quae hactenus lucubrauimus, fuere praeambula artis triangulorū sphaeralium, nunc rem ipsam ingrediamur. Habet autem triangulus sphaeralis tria latera & tres angulos, quorum tribus quibuscūq; cognitis, reliqua tria cognoscenda uia parata est. Demonstrabimus enim q in omni triangulo sphaerali ex arcubus circulorum magnorum constante, cui non sunt duo recti anguli, siue duo latera cū uno angulo, siue duos angulos cum uno latere, aut tria latera, aut tres angulos notos habuerimus, reliqua tria non latebunt. Cūq; non possint esse plures cōbinationes huiusmodi, omnem hoc pacto triangulorum sphaeralium artē absoluemus, & quidem planissime, quae res q̄ utilis quamq; iucunda ueniat Astronomo, non satis dici potest. Vt autem res ipsa cognita facilior existat, libuit intermiscere numeros exemplares, saepe etenim obscuritatem propositionis, numerorū soluit accōmodatio. Huius operationem facile comparabis, si pro angulis uniuersis arcus se determinantes acceperis, quemadmodum in praecedenti.

XXV.

Omnis triangulus unicum habens rectum angulum, cum duobus lateribus cognitis, reliquum latus reliquosq; angulos latere non sinet.

Trianguli a b g angulum b rectum habentis, duo latera quaecūq; sint cognita. Dico q reliquum eius latus notum erit cū reliquis duobus angulis. Erit enim proportio sinus complementi arcus a g, ad sinum complemēti a b, sicut sinus cōplementi b g ad sinum quadrantis. Ex quatuor itaq; quantitatibus proportionalibus tres notae sunt propter duo latera nota per hypothesim cum quadrante notos. Vnde & per 19. primi huius quarta nota erit, uidelicet sinus complementi a g tertij lateris, quare ipsum complementum quod nunq; quadrāte maius existit cognitum habebitur, quod quidem demptum ex quadrāte, relinquet latus tertium notū, si ipsum quadrante minor extiterit, aut complementum illud additum quadranti, latus illud notum efficiet, si quadrantē superauerit. Vtrum autem minus quadrante aut maius fuerit, docebunt quantitates laterum datorum, huius dirigente. Tria igitur trianguli latera sunt cognita, cūq; sinus singulorū ad sinus angulorum sibi oppositorum proportionē habeant notam, eam uidelicet quā habet sinus a g ad sinum anguli a b g recti, quemadmodū enunciauit huius, erunt & sinus reliquorū angulorū noti, anguli aūt ipsi quales sint, uolo dicere, maiores recto an minores duorū laterū se respicientiū quātitates edocebūt, huius intercedēte, quare & oēs anguli noti erūt.



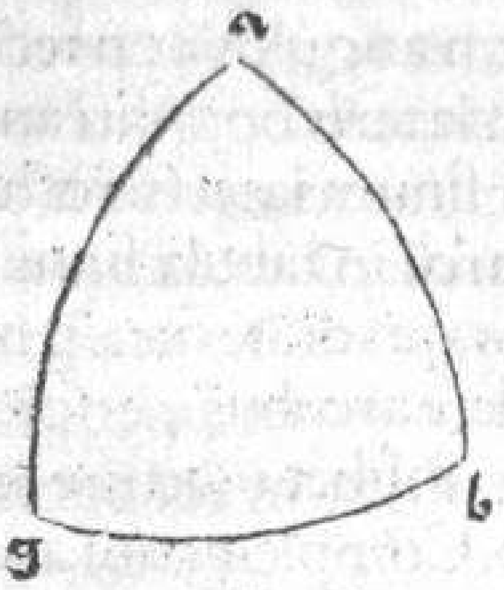
Opatio. Si duo latera rectū ambientia fuerint data, multiplica sinū cōplementi alterius eorū per sinum complementi lateris reliqui, quodq; producetur in sinum totū, scilicet quadrantis partiare. exibit enim sinus complementi lateris rectum subtendentis, cuius arcū, scilicet ipsum complementum demes ex quadrante, si utrūq; datorum laterum aut maius quadrante fuerit aut minus eo, & relinquetur quātitas lateris rectū respicientis angulum. si uero alterū ex datis lateribus quadrante maius, reliquū uero minus extiterit, complementum ipsum quadranti adijcias, & resultabit latus quaesitū. Quod si alterū datorum laterū recto opponatur, multiplicabis sinū complementi

menti lateris rectum subtendentis per sinũ quadrantis, producto enim diuiso per sinum reliqui lateris dati exibit sinus complementi lateris quæsiti, cuius arcũ, scilicet complementum ipsum ex quadrante minuas, si utrumq; datorum laterũ quadrante aut maius aut minus extiterit, si uero alterum eorum maius, & reliquũ minus quadrante occurrat, complementum ipsum quadranti adiectum, latus tertiũ manifestabit. Hæc pro latere tertio reperiendo. Duos autem angulos non rectos (rectus enim quilibet notus est) hoc pacto metieris. Sinum lateris oppositi angulo quæsito per sinum quadrantis extende, productum'q; per sinum lateris rectum subtendẽtis partiaris, exibit em̃ sinus anguli quæsiti, cuius arcũ in tabula sinus accipias: maiorẽ quidem si arcus ipsum respiciẽs angulũ maior quadrãte fuerit, minorem uero si minor. omnem quippe sinum duobus respõdere arcubus perspicuũ est. In exemplo. Offeratur arcus a b 20. graduum, & b g 36. libet inuenire arcũ a g. Complemẽtum arcus a b est 70. cuius sinus est 56382. Complementũ arcus b g est 54. cuius sinus est 48541, dũ sinus totus, scilicet quadrantis est 60000. quẽadmodũ in tabula nostra constituimus. Multiplico igitur 56382. per 48543. producuntur 2736838662. quæ diuido per sinum totum 60000. exeunt 45614. sinus scilicet complementi arcus a g, huius arcus est 49. 29. complementum scilicet arcus a g, quod minuo ex 90. relinquuntur 40. 31. & tantus erit arcus a g. Sed ponatur latus a b 160. & latus b g 144. sinus complementorũ sunt, quibus nunc usi sumus, ueniet'q; latus a g quantum antehac elicitum est, oportet enim arcum a g minorem esse quadrante. Quòd si latus a b fuerit 20. & b g 144. licet sinus priores redeant & complementum arcus a g idem quod prius, ipsum tamen nunc addendum est quadranti, ut habeatur arcus a g, ꝙ alter arcuum a b & b g minor quadrante sit re, & reliquus maior eo. Sit demum latus a b 20. graduũ, a g autẽ 50. complementũ a b est 70. cuius sinus 56382. complementũ a g 40. cuius sinus 38567. multiplico 38567. per 60000. producuntur 2314020000. quæ diuido per 56382. exeunt 41042. (quod enim propinquũ est uero, ueritatis utimur uice) hic est sinus cõplemẽti arcus b g, cuius arcus 43. 10. ferè, quẽ demo ex 90. relinquunt 46. 50. pro arcu b g. tantus deniq; haberetur arcus b g, si arcus a b fuisset 160. & arcus a g 130. quoniã utrobiq; arcũ b g minorem quadrãte oporteret esse. Si uero arcus a b fuerit 20. & arcus a g 130. erit arcus b g maior quadrante, repetito'q; opere pristino, quoniam eidem erunt numeri, ueniet complementũ arcus b g iterum 43. 10. addendum quidem quadranti, quo facto congregabuntur 133. 10. tantus'q; numerabitur arcus a g quæsitus. Hæc de lateribus. Postremo libeat inuenire angulum a g b arcu a b existente 20. & b g 50. Sinus 20. graduum est 20521. Sinus 50. est 45963. Multiplico 20521. per sinum totum, producuntur 1231260000. quæ diuido per 45963. exeunt 26788. sinus uidelicet anguli a g b, cuius arcus minor est 26. 31. determinans quantitatem anguli a g b, quoniã arcus a b minor est quadrãte. & tantus censebitur etiã angulus a g b. Si aũt arcus a b superaret, angulus a g b recto maior haberetur. Vnde accipiendus esset arcus maior respondens sinui prædicto, qui est 153. 29. & tantum pronunciaremus angulum a g b. Non aliter ad notitiam anguli b a g perducemur.

XXVI.

Tribus angulis trianguli rectanguli cognitis, omnia eius latera patefient.

Sit triangulus a b g cuius tres anguli noti habeantur. Dico ꝙ omnia eius latera fient cognita. Aut enim duo eorum sunt recti, aut unus tantũ. Si duo, sint ipsi uerbi gratia, b & g, erit igitur per huius pũctus a polus circuli b g, & per huius uterq; arcuum a b & a g quadrans cognitus, sed & arcus b g determinat quantitatem anguli b a g noti, unde & ipse notus habetur. Tria itaq; trianguli latera nota reddidimus. Si uero unus duntaxat angulus, uerbi gratia, b sit rectus, huius consulemus. erit enim proportio sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti, tanq; sinus complemẽti anguli a g b ad sinum complementi lateris a b, tres autem horum sinuũ notos faciũt anguli per hypothesim dati, quare & sinus complementi arcus a b cognitus ueniet, cuius arcus, uidelicet ipsum complementũ ex quarta circumferentiæ demptus relinquet arcum a b notum si arcus a b minor quadrante extiterit, aut additus quadranti ipsum arcũ a b notum cõstituet, si arcus a b quadrantẽ supauerit. Arcus autẽ a b qualis fuerit respectu quadrantis, angulus a g b huius dirigente indicabit. Similiter per omnia notũ reddemus latus b g, & tandẽ per præcedentẽ latus tertiũ a g innotescet. Verũ inuento arcu a b hãc uiã ingredi licebit. Proportio sinus anguli a g b per huius ad sinum arcus a b est ut sinus anguli b a g ad sinum lateris b g. Tres autem huiusmodi sinus noti sunt, quare & quartus, & ideo arcus b g cognitus habebitur. similiter reperiemus arcũ a g mediante angulo a b g recto. Cautum profecto te uelim esse in accipiendis arcubus per sinus datos, ne centies idem repetendo membrana cõtaminetur. unumquẽq; eñ sinũ minorẽ sinu toto duobus respondere arcubus sæpenumero dictũ est, quoꝝ alter quadrante maior, alter eo minor existit. Volenti ergo sinui dato arcũ suum reddere, cõsiderandum est, sit ne arcus suus maior qnadrante aut minor eo, quod nimirũ superiores conclusiones satis apertũ tradidere. Idem præterea de cõplementis arcuum & anguloꝝ obseruandũ est, quẽadmodum enim unumquodq; cõplementũ arcuale duobus seruit arcubus, quoꝝ alter quadrante maior, alter autem eo minor est, ita & omne cõplementum angulare duos respicit angulos, hunc quidẽ maiorẽ, illũ autẽ recto minorem. Si igitur cõplemento arcuali reddere conaris arcũ suũ, prius exploratũ habeas, sit ne arcus ille maior quadrante aut minor eo. si maior, cõplementum suum additũ quadranti arcum constituet quæsitũ. si uero minor, cõplementũ ex quadrante reiectum arcus quæsiti relinquet quantitatem. Non aliter circa angulos procedemus, nisi q; ubi pridem arcus erat, nunc angulum intelligamus. ¶ Operatio huius. Si triangulus habuerit duos rectos, iam conclamatũ est, utrunq; eñ laterũ eos subtendentium erit quadrans notus. tertiũ autem latus eũ, quẽ angulus se respiciens sortitur numerum. Si uero unus duntaxat rectus fuerit, multiplica sinum complemẽti anguli non recti, quem subtendit latus quæsitum per sinum totum, & productum diuide per sinum reliqui anguli non recti, exibit enim sinus complementi arcus quæsiti, cum quo, ut supra monuimus, operabere. Ad reliqua demum cognoscenda latera, multiplicabis sinũ arcus iam inuenti per sinũ anguli respicientis aliud latus quæsitum, siue rectus siue non rectus extiterit, & productum partieris per sinum anguli quẽ subtendit latus nnper inuentũ, exibit enim sinus lateris quæsiti, cũ quo ut antea præcepimus, latus ipsum elicies. In exemplo. Sit uterq; angulorũ b & g, 90. graduũ, & angulus a 40, erit uterq; arcuum a b & b g 90 graduũ, & arcus b g 40. Sed ponatur angulus b rectus, angulus uero a 50 gr. & angulus g 70. uolo inuenire arcum b g, sinus 50 gr. est 45963. Sinus complementi 70. gr. est 20521. quem duco in sinum totum, producuntur 1231260000. hæc diuido

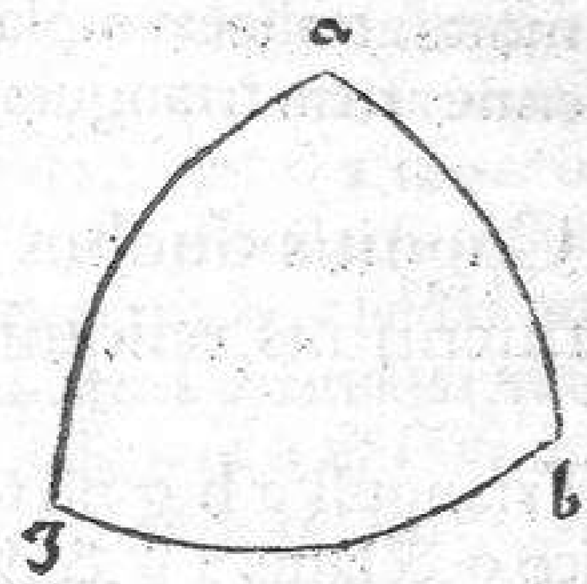


per

per 45963. exeunt 26788, sinus scilicet complementi arcus a b, cuius arcus scilicet ipsum complementum est 26.31. quem demo ex quadrante, ꝙ arcum a b minorem esse quadrante oporteat angulo g acuto existente, & relinquuntur 63.29. tantusq́ computabitur arcus b g. Rursus pro latere b g metiendo, sinus anguli g, qui ponebatur 70 est 56382. sinus lateris b g, quod iam nunc reperimus 63.29. est 53688. quem multiplico per sinũ anguli a, qui erat 45963, producuntur 2467661544. quæ diuido per 56382. exeunt 43767. sinus scilicet lateris b g, cuius arcus minor est 46.50. & tantus est arcus b g, quoniam angulus b a g ponebatur acutus. Similiter reperiemus arcum a g, nihil prorsus uariando, nisi ꝙ loco anguli b a g angulum a b g rectum constituamus.

XXVII.

Vno latere trianguli rectanguli cum altero duorum non rectorum cognito, & angulum reliquũ cum lateribus reliquis inuenire.



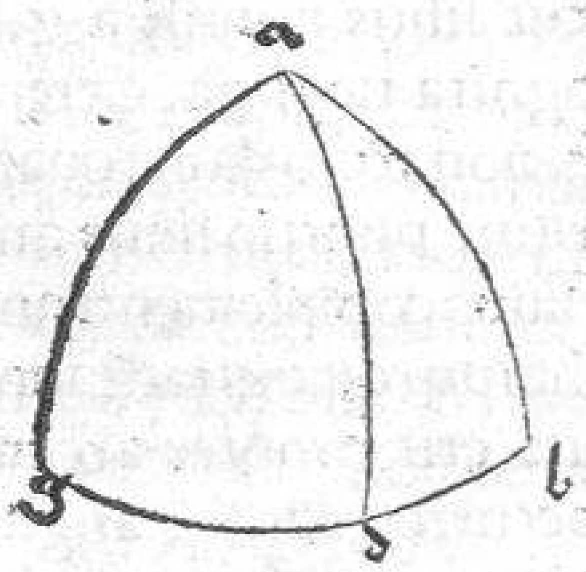
Sit triangulus a b g, angulum b rectum habẽs, duosq́ a & g non rectos, quorum alter, uerbi gratia, g sit datus cum uno latere quocunq́. Dico ꝙ angulus a cognitus erit, & reliqua duo latera. Si enim latus datum angulo dato opponatur, ut in figura est latus a b   huius consulemus, erit enim conuersis terminis proportio sinus anguli a g b ad sinum lateris a b tanq́ sinus anguli a b g recti ad sinum lateris a g, tribus autem primis quantitatibus cognitis, quarta dabitur nota, & ideo arcus a g cognitus. ex duobus demũ lateribus a b & a g iam cognitis   huius intercedente, & latus b g & angulus b a g numerabuntur. Non aliter argumentabimur latere dato rectum angulũ subtendente, erit ex præallegato theoremate proportio sinus anguli a b g recti ad sinũ lateris a g dati, sicut sinus anguli a g b dati ad sinum lateris a b, sic iterũ duo latera a g & a b cognita uenient, cætera ut prius. Qđ si latus datũ recto angulo subiaceat, anguloq́ non recto dato, quale est in figura latus b g ad   huius refugiendũ est, per eam enim ꝓportio sinus anguli a g b ad sinum anguli a b g recti est, ut proportio sinus complementi anguli b a g ad sinum complementi arcus b g. tres autem harum quantitatũ sunt notæ, de prima & secunda nemo hesitat, quarta uero cognita erit, propter arcum b g datum, hinc sinus complementi anguli b a g notus occurret, ideoq́ angulus ipse non latebit. Habebimus igitur tres trianguli cognitos angulos, quamobrem auxilio præcedentis reliqua duo latera innotescent. ¶ Operatio. Si latus datum angulo non recto dato oppositum fuerit, multiplica sinũ ipsius lateris per sinum quadrantis, quodq́ procreabitur, per sinum dati anguli partiaris, exibit ẽm sinus lateris rectũ subtendentis, cognito autem ipso latere per sinum suũ, ad opus huius confugiendũ est. Si uero latus datum recto opponatur angulo, sinũ eius per sinum anguli dati extendas, & productũ diuidas per sinũ totum, existentis enim arcus est ipsum latus quæsitũ, deinde operationem   huius repetito. Quòd si angulus rectus & reliquus angulus datus lateri dato insideant, sinũ ~~lateris~~ anguli dati per sinũ complementi ~~anguli~~ lateris dati multiplices, & productũ per sinũ totum partiaris, exibit enim sinus cõplementi anguli b a g, quo intercedente angulus ipse notus habebitur, deinceps uero opus præmissæ repetemus. In numeris exemplaribus sic habeto. Ponat̃ angulus g 36. gr. & latus a b 20. gr. est sinus 36. gr. est 35267. sinus 20.

20521. quem multiplico per sinum totum, producuntur 1231260000. hunc diuido per 35267. exeunt 34912. sinus scilicet lateris a g. inuenio igitur ex tabula latus a g 35.35. deinde pro latere & angulo reliquis ad numeros huius refugio. Sed maneat angulus g quantus erat, & sit latus a g 20. gr. multiplico sinum 36. gr. qui est 35267. per sinum 20. gr. scilicet 20521. procreantur 723714107. quae diuido per sinum totũ, exeunt 12062. sinus scilicet arcus a b, quare ipse arcus a b erit 11.36. reliqua per huius numerabimus. Ponatur demum angulus a g b, ut prius 36. & arcus b g 20. Sinus 36 est 35267. Sinus complementi 20. est 56382. quem duco in 35267. producuntur 1988423994. hoc diuido per sinum totũ, exeunt 33140. scilicet sinus complementi anguli b a g, cuius arcus est 33.32. hic dem ptus ex 90. relinquet 56.28. & tantus habebit angulus b a g. ipsum enim minorẽ esse quarta circumferentiae, arguit arcus b g datus minor quadrãte. Reliqua tandem per operationẽ praecedentis absoluemus. Non egreferas, si solito prolixiores in his tribus propositionibus uideamur, id enim postulat tenor operationis, nõ nihil morae attulit exemplaris numerorum manuductio, in qua si te satis exercueris, totã fermè artem triangulorum sphaeralium facilem arbitraberis.

XXVIII.

Cognitis duobus lateribus trianguli nõ rectanguli datũ angulum cõtinentibus, reliquũ latus reliquosque angulos cognitum iri.

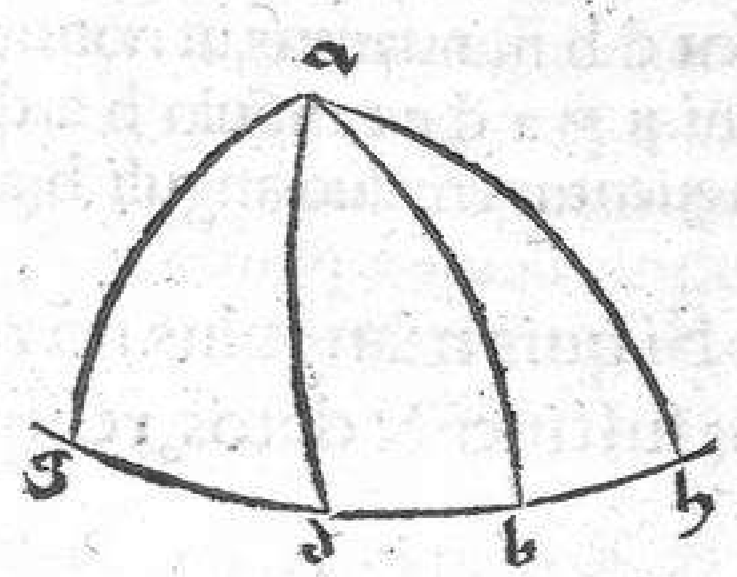
Trianguli a b g nõ rectanguli duo latera a b & b g sint data cũ angulo b. Dico quod & latus a g, & duo anguli a & g innotescent. Descendat enim ex termino alterius datorum laterũ ad reliquum, perpendicularis, quae necessario intra triangulum consistet aut extra eum cadet, neutri enim laterũ sibi conterminaliũ poterit coincidere, sic enim idem angulus & rectus haberetur & non rectus. Vtrum autẽ horum fiat nondũ sciendi allata est facultas, id enim non immediate pendet ex hypothesi, sed paulo post exploratum dabimus. Cum autem à quolibet puncto sublimi extra circũferentiam circuli signato possimus demittere duas perpendiculares, hoc in proposito eam duntaxat eligemus, quae subtendit angulũ datum. Sit itaque haec perpendicularis a d, habebit ergo triangulus a b d angulũ b non rectum notum cum latere a b, quare per praemissam uterque arcuũ a d & d b cognitus ueniet. si itaque arcus b d nunc inuentus minor fuerit arcu b g dato, constabit perpendicularem cecidisse intra triangulũ a b g, si uero maior extra, oportet autem differentiam duorum arcuũ b g & b d notam esse, triangulus igitur a g d rectangulus duo latera a d & d g habens nota per huius latus suũ a g, quod & triangulo a b g commune est, duosque angulos d a g & d g a notificabit. triãgulus itaque propositus a b g tria latera nota sunt, cũ duobus angulis a b g quidẽ per hypothesim, a g b autẽ per argumentationem, erat autem & uterque angulorum b a d & d a g notus, quibus collectis, si perpendicularis intra triangulũ ceciderit, aut minori eorum à maiori subtracto, angulũ b a g addiscemus, quae fuere declaranda. Diceres forsitan, proportio sinus arcus a g per argumentationem cogniti, ad sinũ anguli a b g, quem dedit hypothesis, sit ut sinus arcus b g noti per hypothesim ad sinũ anguli b a g huius demonstrante. cumque tres harum quantitatũ sint notae, & ideo oporteat sinum anguli b a g fieri notum, nonne facilius hoc pacto per unicam operationem inueniemus angulũ b a g, quam ingeminando opus duobus angulis b a d & d a g diuisim



uisim cognitis, ipsum angulum b a g eliciemus. Respondeo tibi sinum quidem anguli b a g hac uia reperiri q̃ latissime, quæ tñ duobus respondente angulis incertum est uter eorum eligendus sit, id autem minime turbabit uiam nostram, quoniam uterq; angulorum b a d & d a g qualis sit respectu anguli recti certum tradidimus.

XXIX.

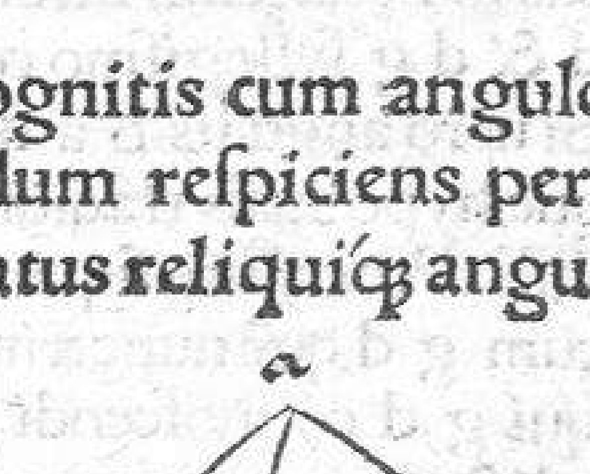
Cognitionem duorum laterum trianguli non rectanguli, & anguli uni eorum oppositi, inuentioni reliqui lateris & reliquorum angulorum minime sufficere.



Similem passionem de triangulis planis rectilineis demonstrauimus in primo huius angulo dato existente acuto, quam nunc de sphæralibus prædicabimus, siue angulus datus fuerit acutus, siue obtusus. Sit enim angulus sphæralis b a g, duobus arcubus æqualibus b a & a g contentus, quorũ uterq; minor sit quadrante, copulenturq; duo puncta b & g per arcum circuli magni b g, qui secetur per mediũ in puncto d descendente arcu a d, in arcu autem g b prolongato, signetur punctus h ubilibet, sic tamẽ, q̃ arcus g h sit semicircũferentia ducto arcu a h. Cum igitur duo trianguli a b d & a g d sint æquilateri, erunt & æquianguli per tertij huius, & ideo duo anguli apud d sunt recti, & angulus b a d est acutus, erit per huius arcus b d minor quarta circumferentiæ, est autem & a b minor quarta, quare per huius & arcus a d minor quadrante declarabitur, unde & per huius angulus a h g acutus erit. Offerenti ergo nobis duo latera g a & a h cognita, aut duo b a & a h ipsis æqualia, cum angulo a h g, neq; tertium latus, neq; reliquos angulos reddere poterimus, nam duo trianguli g a h g & b a h, etsi in omnibus quantitatibus datis participent, latera tamẽ tertia sortiuntur uaria, quemadmodũ in figura claret. Idem declarabitur angulo h obtuso existente. Repetitæ enim pristinæ figurationi iterum dabimus locũ hoc uno uariato, q̃ uterq; arcuũ a b & a g æqualiũ quadrantẽ excedat, erit enim ut nuper angulus b a d acutus, & ideo per huius arcus b d minor quarta, cumq; sit arcus a b maior quadrante, erit & arcus a d quadrante maior, & ideo per huius angulus a h g obtusus, cætera ut antehac prosequemur.

XXX.

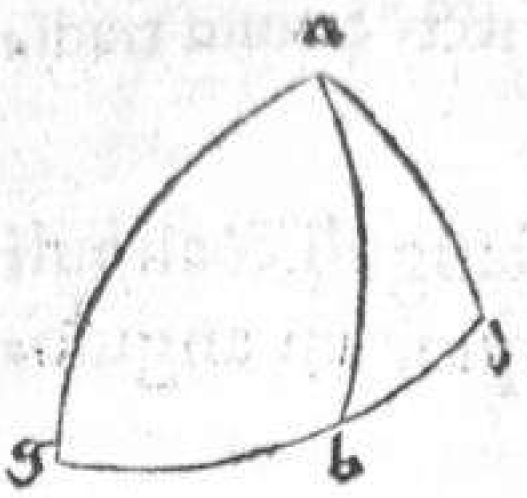
Duobus lateribus trianguli non rectanguli cognitis cum angulo alteri eorum opposito, si qua lege datum angulum respiciens perpendicularis cadat exploratum fuerit, reliquum latus reliquiq; anguli non latebunt.



Sit triangulus a b g non rectangulus, duo latera a b & a g nota habẽs, cũ angulo b uni scilicet eorum opposito, sitq; certũ quonam pacto cadat perpendicularis à cõmuni termino datorum laterũ ad basim, uidelicet an intra an extra triangulũ, quæ sit a d. Dico q̃ & latus b & duo anguli a & g noti ueniet. Certi enim principio simus perpen-

dicula-

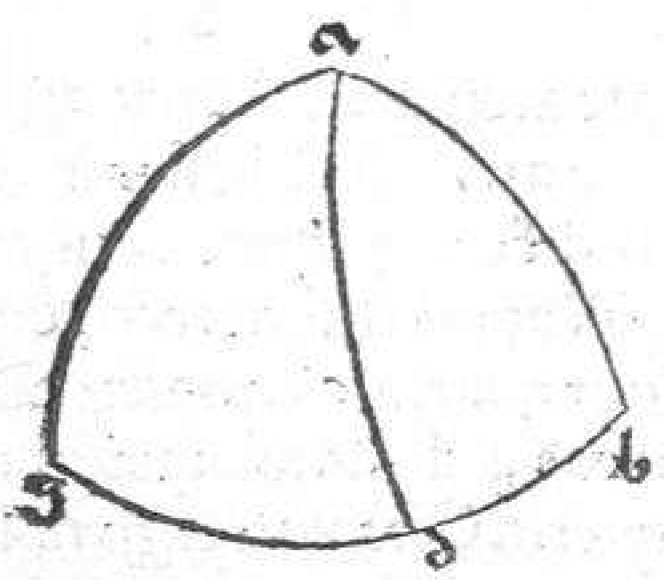
dicularem a d cadere intra triangulum. habebit itaq; triangulus a d rectangulus latus a b cognitum cum angulo a b d, quare per huius duo eius latera a d & d b nota uenient cum angulo b a d. Triangulus demũ a g d duo latera a g



quidem per hypothesim, a d autem per argumentationẽ habebit cognita, & ideo per huius & latus eius g d & utercq; duorũ angulorũ a g d & g a d innotescet. Quemadmodũ autem ex duobus arcubus b d & d g seorsum notis arcus b g notus resultat, ita & duo anguli b a d & d a g collecti angulũ totũ b a g reddent cognitum. Quod si perpendicularis extra triangulum ceciderit, syllogismũ repetemus, nihil prorsus immutando, nisi q arcũ d g ex arcu d b minuamus, ut notum relinquatur latus b g trianguli propositi. angulũ deniq; g a d ex angulo b a d, & angulum a g d ex duobus rectis demamus, relinquentur eñ duo anguli b a g & a g b noti, quod uolebamus attingere.

XXXI.

Si quis triangulus nõ rectangulus duos habuerit angulos cũ latere eos sustinente datos, reliquũ angulũ & reliqua latera cognitũ iri.

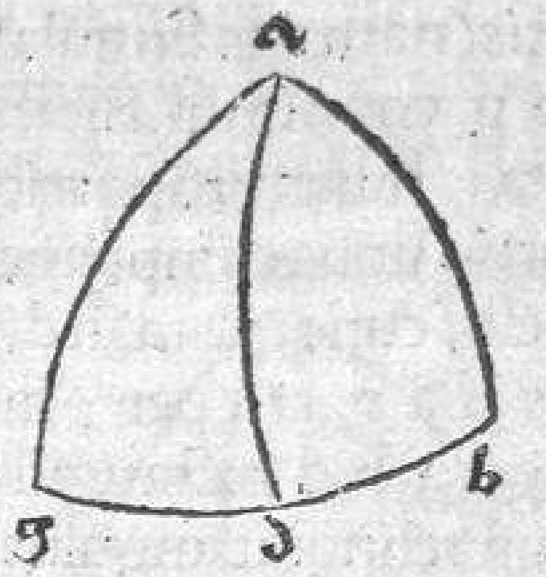


Habeat triangulus a b g nõ rectangulus notos duos angulos a & b, latusq; ipsis subiacens a b cognitum. Dico q & angulus a g b, & duo latera a g & g b innotescent. Descendat eñ à uertice alterius datorũ angulorũ perpendicularis uersus latus nõ datum, subtendens reliquum angulum cognitũ, & sit uerbi gratia a d, quæ cadat ne intra an extra triangulum nondum sciendi est potestas. id eñ nõ statim nostrã cõsequitur hypothesim. Verum paulo longius pfecti hoc explorabimus. Ex angulo igitur a b d cognito, & latere a b trianguli rectanguli a b d per huius & angulus b a d & utrunq; laterum a d & d b cognitionẽ sortientur. Si itaq; angulus b a d syllogismo cognitus minorem se offerat angulo b a g per hypothesim dato, certum est perpendicularẽ intra triangulum cecidisse. angulusq; b a d ex angulo b a g sublatus relinquet angulũ g a d notum. Triangulus ergo g a d rectangulus, cui & arcum a d & angulum g a d notos declarauimus, ductu huius, angulum a g d, qui & triangulo a b g terminis habetur, cum utroq; laterũ a g & g d in lucẽ depromet. Duo autem arcus b d & d g syllogismo cogniti si coadunentur totum arcũ b g datum accipiemus. Si uero angulus b a d ex argumentatione repertus maior occurrat angulo b a g quẽ hypothesis tradidit, perspicuum erit perpendicularẽ a d extra triangulũ cecidisse. Processuq; superiori cupitã attingemus metam, nihil immutando nisi q arcum g d, quẽ nuperrime arcui d b adiecimus, nunc ex eo reijciamus, arcus reliqui g d cognoscendi gratia. Sed & angulum a g d duobus rectis subtrahendo relictum metiemur arcum b g, quæ censebã explananda. Nõ poterat autem perpendicularis a d alteri duorũ sibi conterminalium laterum coincidere, hypothesi id prohibenti. sic enim alter duorum angulorum b g & g rectus euenisset, quem tamen hypothesis non rectum administrabat.

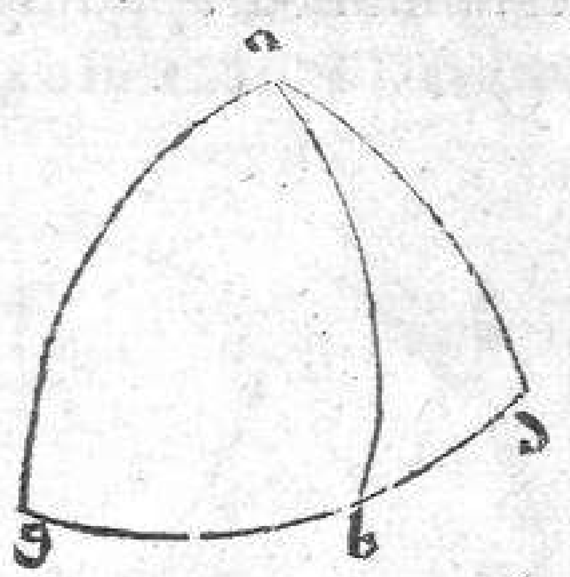
XXXII.

Duobus angulis trianguli nõ rectanguli cognitis cum latere alterũ eorũ subtendẽte, reliquũ angulũ reliquaq; latera inuestigare.

Dati

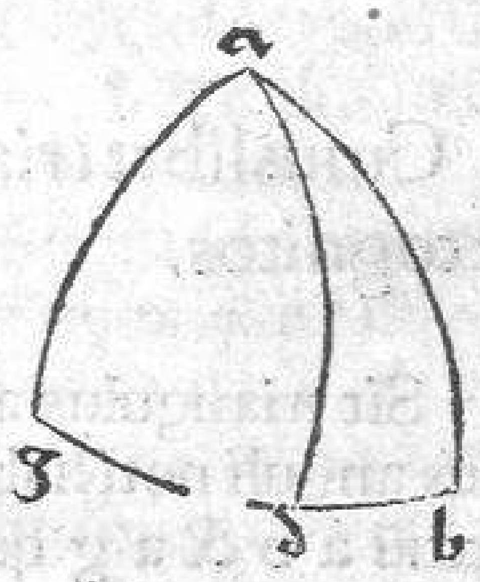


Sint duo anguli a b g & a g b trianguli a b g non rectanguli cum latere, uerbi gratia, a b, alterum eoꝝ sci‐licet angulũ g subtendente. Dico ꝙ & anguli a & utri‐usqꝫ lateꝝ a g & g b noticiam consequemur. Descendat eñ ex uertice anguli a non dati, perpendicularis a d uer sus latus, quod duos sustentat datos angulos, quæ cadat ne intra an extra triangulũ a b g duo anguli b & g co‐gniti huius manuducente declarabunt. Cadat prius in‐tra. Triangulus ergo a b d rectangulus, cum & latus a b datum habeat, & angulũ a b d non rectum, per huius & anguli sui b a d & duoꝝ arcuũ a d & d b noticiam afferet, per eandem deniqꝫ huius latere a d & angulo a g d notis existentibus, & angulus g a d, & duo latera a g & g d in‐notescent. est autem & a g commune triangulo proposito, latus demũ b g ex du obus arcubus b d & d g singulatim notis, quemadmodũ angulus b a g ex duo bus angulis b a d & d a g inuentis conflabitur. Quòd si perpendicularis extra triangulũ ceciderit, non aliter ratiocinabimur, uerũ an gulum d a g, quem prius addidimus angulo b a d, nunc ex eo minuemus, ut relinquatur angulus b a g co gnitus. similiter arcus g d ex arcu d b demptus, relin‐quet latus b g trianguli nostri cognitum, anguloqꝫ tandem a g d ex duobus rectis sublato, manebit angu li propositi cognitio, planum ergo reddidimus quic‐quid præsens pollicebatur theorema.

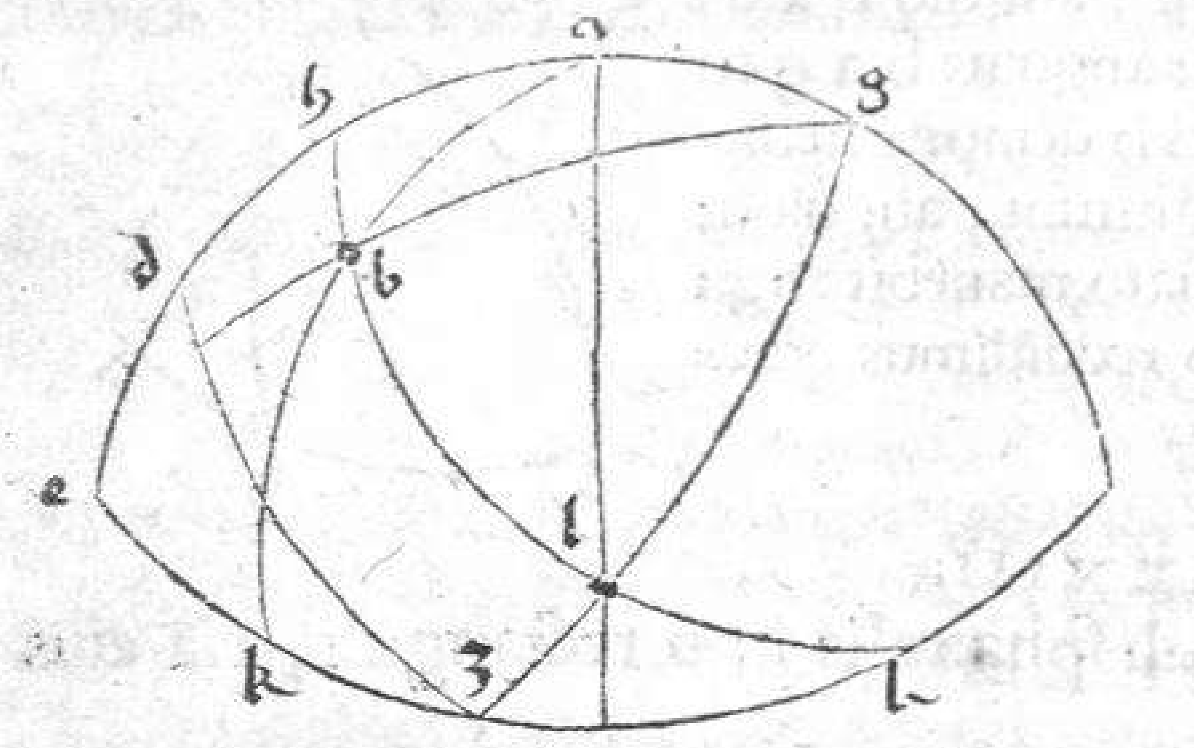


XXXIII.

Datis tribus angulis trianguli sphæralis non rectanguli, tria eius latera mensurare.



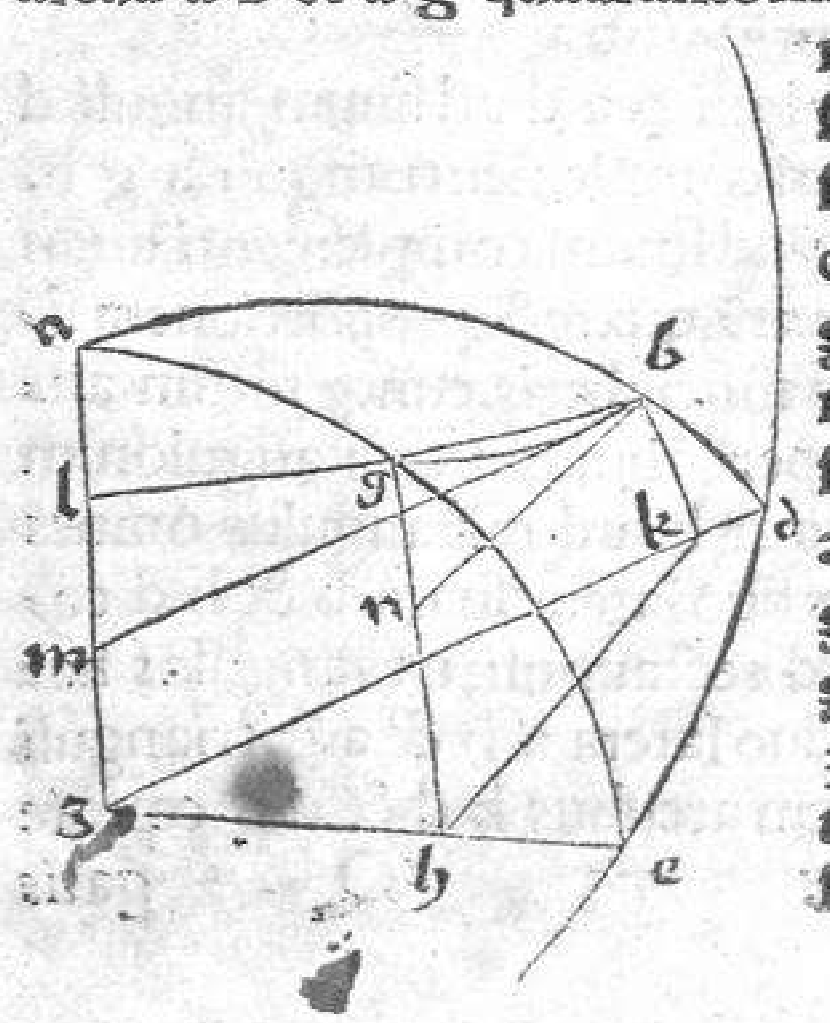
Sit triangulus huiusmodi a b g tres notos habens angu los non rectos. Dico ꝙ tria eius latera fient cognita. Ex uer‐tice enim anguli cuiusuis uerbi gratia a uersus arcũ sibi op‐positum procedat perpendicularis a d, quæ cadat ne intra an extra triangulũ huius manuducente callebimus, utroqꝫ anguloꝝ b & g noto per hypothesim existente, neutri enim duoꝝ lateꝝ a b & a g coincidet, sic eñ alter anguloꝝ b & g re ctus esset, quod interdixit hypothesis. Cadat ergo prius intra triangulũ, erit itaqꝫ per huius proportio sinus anguli b a d ad sinum anguli d a g, sicut sinus complementi anguli a b g ad sinum complementi anguli a g b. proportio antem sinus complementi anguli a b g ad sinum complementi angu li a g b nota est, ꝑpter utrũqꝫ anguloꝝ b & g cognitũ, quare & proportionem si‐nus anguli b a d ad sinũ anguli d a g datam non inficiaberis. cunqꝫ totum an‐gulum b a g notum tradiderit hypothesis, erit & per huius uterqꝫ angulorum apud a particulariũ non ignotus. Triangulus igitur b a d rectangulus omnes angulos suos habens cognitos, argumento huius duo latera sua a b & b d co‐gnitioni nostræ subijciet, non aliter trianguli a g d rectanguli, tres angulos ha‐bentis datos, duo latera a g & g d metiemur. sic duo latera a b & a g trianguli propositi gemino didicimus processu, duobus autem arcubus b d & d g congre gatis (nam eos singulatim dimensi sumus) resultabit tertium latus b g trianguli a b g cognitum. Si uero perpendicularis trianguli egressa fuerit, erit ex præallegata huius proportio sinus anguli b a d ad sinũ anguli g a d nota, quoniã proportio sinus complementi anguli a b g ad sinum complementi anguli a g b data est. cumq; nota sit differentia duorum angulorũ b a d & g a d, uidelicet angulus b a g, erit per huius uterq; angulorũ b a d & g a d cognitus. Triangulus ergo a b d rectangulus omnes angulos suos habet notos, angulũ enim a b d notum relinquit angulus a b g, quem dedit hypothesis, posteaq; ex duobus rectis auferetur, quare per huius latus suũ a b, quod & triangulo a b g commune est notum habebitur cum arcu b d. Non aliter ad noticiam duorũ laterũ a g & g d trianguli a g d rectanguli tres cognitos habentis angulos perueniemus. duo itaq; trianguli propositi latera a b & a g nota reddidimus, dempto autem arcu b d ex arcu d g quos geminus elicuit syllogismus tertij lateris b g noticiam consequemur, quæ decreuimus promulgare. His autem postremis theorematibus tenorem operationis numerosq; exemplares subiungere non erat consilium, satis enim æres huiusmodi apud superiores conclusiones lucubrauimus, quas si memoria tua perdiderit censeo repetendas. Trianguli a b g tria latera sint data, fiant a & g poli circulorũ e k & d 3, intelligaturq; paralellus h k super polo g descriptus secundũ quantitatem arcus g b, quo facto erit opus omnino simile ei, ubi ex altitudine solis data quærit distantia eius â meridie. sic habebis quatuor modos demonstrandi problema de tribus datis lateribus trianguli sphæralis.



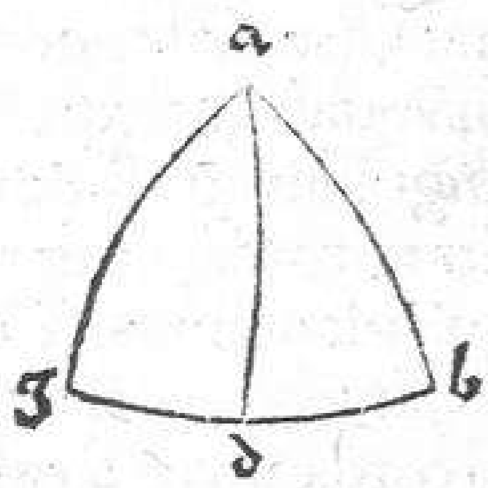
XXXIIII.

Cuiuslibet trianguli tria latera nota habentis, tres angulos reddere cognitos.

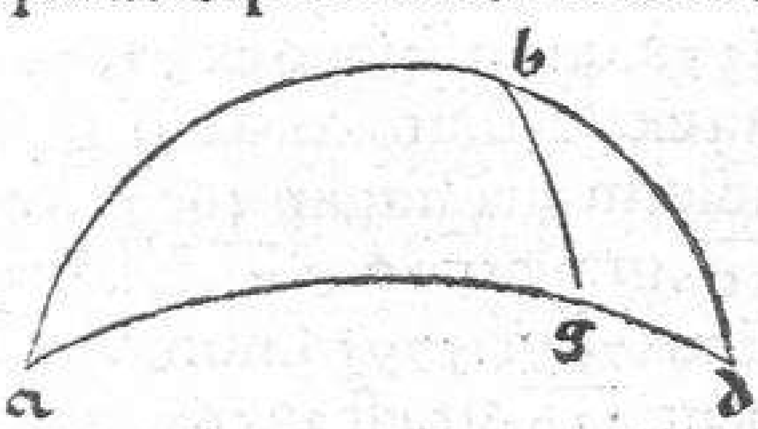
Sit triangulus a b g, cuius tria latera nota sint a b, a g & b g. Dico q; tres eius anguli noti habebũtur. Libeat primo inuenire angulũ b a g. Si igit uterq; arcuũ a b & a g quadrante minor extiterit, protendatur uterq; ad partem lateris b g, donec fiant duo quadrantes a d & a e, & super polum a secundũ cordam quadrãtis a d describatur circulus, quem constat transire per punctum e, qui sit d e, arcus itaq; d e quantitatem anguli b a g quem quærimus determinabit, qui ut notus emergat, procedant â centro sphæræ 3 tres semidiametri ad tria puncta a, d, & e, quæ sint 3 a, 3 d & 3 e. â punctis autem b & d cordam b g terminantibus, binæ ducantur perpendiculares g h quidem & b k ad duas semidiametros 3 e & 3 d, duæ uero reliquæ g l & b m ad semidiametrũ 3 a, quas quidem perpendiculares constat esse sinus arcuũ, â quorũ terminis egrediũtur, duoq; tandem pun



dem puncta h & k copulētur per lineam h k. Si igitur duo arcus a b & a g æquales fuerint, erunt duæ lineæ g l & b m æquales & conterminales, itemq́ꝫ linea g h lineæ b k æqualis quidem propter arcus b d & g e æquales, æquedistans autem per diffinitionem superficiei ad superficiem erectæ & quartā undecimi, unde & per primi duæ lineæ rectæ b g & k h æquales habentur. est autem g b nota scilicet corda arcus g b dati, quare & linea h k nota fiet. Item duæ superficies l h & m k sunt æquedistantiū laterū, quare per primi g l nota æqualis erit h 3 & b m cognita ipsi k 3. triangulus itaqꝫ h 3 k planus rectilineus tria latera habens cognita per primi huius angulū h 3 k manifestabit, cuius quantitatem determinat arcus d e, & ideo arcus d e diffiniens quantitatem anguli b a g notus concluditur. habet igitur triangulus sphæralis a b g duo latera b a & a g cognita cum angulo b a g, unde & per huius reliqui sui anguli non latebunt. Aliter tamen & facilius procedere poterimus, si duo arcus a b & a g æquales fuerint, hoc pacto, ex a puncto descendet perpendicularis arcus a d, qui necessario satis continuatus secabit latus b g ipsius trianguli, quod fiat in puncto d. eritq́ꝫ b d æqualis g d per , quare cū totus arcus b g sit notus, erit b d datus, per autē huius sinus cōplementi b a ad sinum cōplementi a d se habet, sicut sinus cōplementi b d ad sinū totū. unde a d notus erit.

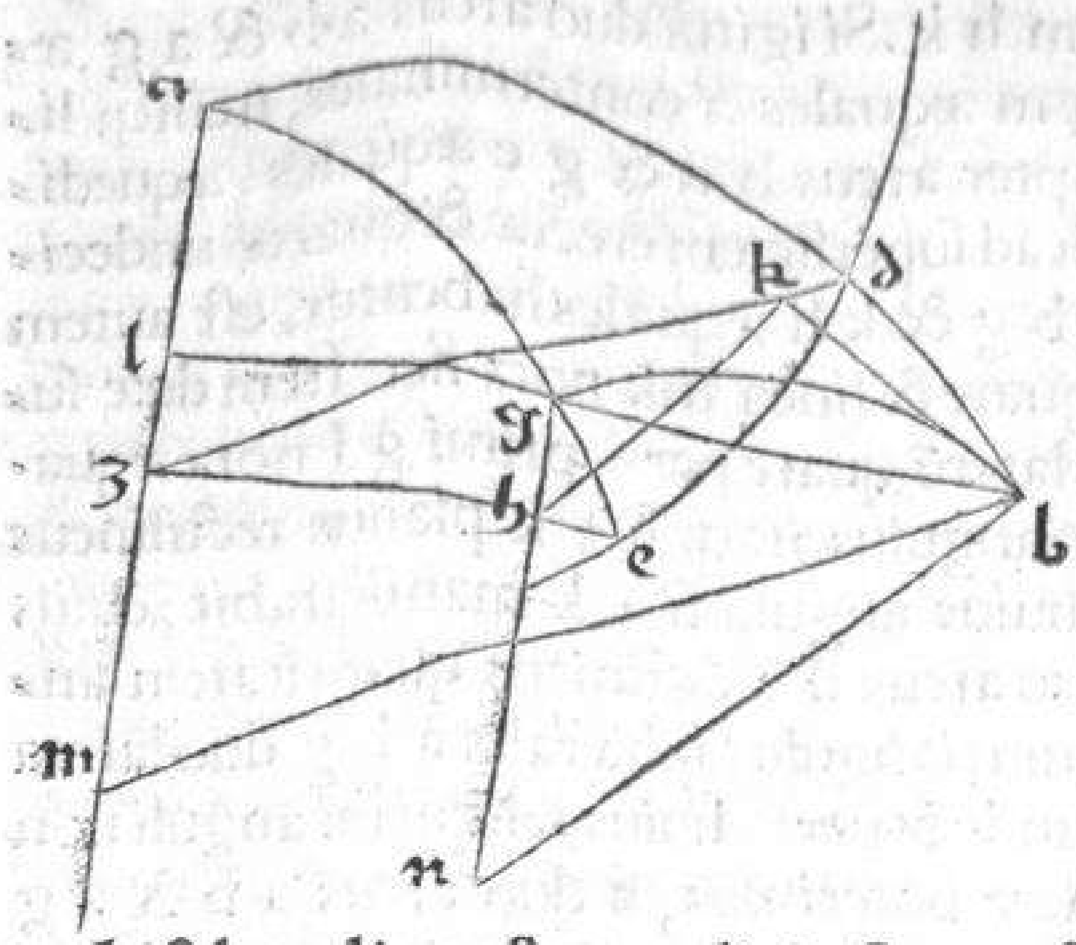


Hinc quoqꝫ angulus a b d, & ei æqualis a g b. item tandē angulus b a g &c. Si autē alter duoꝝ arcuū b a & a g reliquo maiorem se offerat, uterqꝫ tñ minor quadrante. sit uerbi gratia arcus a b maior arcu a g, quāobrem alternatim erit arcus g e maior arcu b d, repetitaq́ꝫ figuratione pristina erit linea g h longior linea b k, abscindatur ergo ex ea portio h n æqualis lineæ b k, ducta linea b n, quā ut supra oportet esse æqualē lineæ h k, similiter tam g l lineæ h 3 æqualis erit, qꝫ b m ipsi k 3. erit autē angulus b n g rectus, cumqꝫ duo latera b g & g n trianguli g b n rectanguli sint cognita. est eñ b g corda arcus b g per hypothesim noti. g n autē differentia duoꝝ sinuum b k & g h notoꝝ, erit & latus eius b n per primi huius notum. et ideo h k nota declarabitur. Duas autē lineas h 3 & 3 k quēadmodum ante hac notas declarabimus. tria igitur latera trianguli h 3 k nota sunt. unde angulū h 3 k & reliqua ut nuperrime dimetiemur.



Quòd si uterqꝫ arcuum a b & a g quadrante maior extiterit, protendantur ipsi donec in puncto s coincidēt, quo fit ut duo arcus b s & s g noti redduntur. Est enim per primi huius uterqꝫ arcuum a b s & a g s semicircumferentia nota. Triangulus ergo b s g trium notoꝝ laterum ex iā dictis angulum b s g æqualē angulo b a g sortietur cognitum. Ad uiā itaqꝫ pristinā perducti, ex duobus lateribus a b & a g cū angulo b a g cognitis, reliquos duos angulos huius dirigente inuestigabimus. Postremo sit alter duoꝝ arcuum a b & a g maior quarta circumferentiæ, reliquus uero minor. & sit uerbi gratia a b quadrante maior, a g autē minor eo, resumptaq́ꝫ figuratione nihil in ea uariabimus, nisi qꝫ lineam g h continuemus ad partē puncti h, donec h n fiet æqualis sinui b k arcus b d. similiter a 3 semidiameter prolongetur, ita ut b m ipsi perpendiculariter insidere possit. quibus ita dispositis argumētabimur hoc pacto Corda b g nota est propter arcum suum notū. linea g cōplectitur sinum arcus g e noti, & lineā h n æqualē b k sinui arcus b d noti, tota ergo g n nota est, an

 gulus



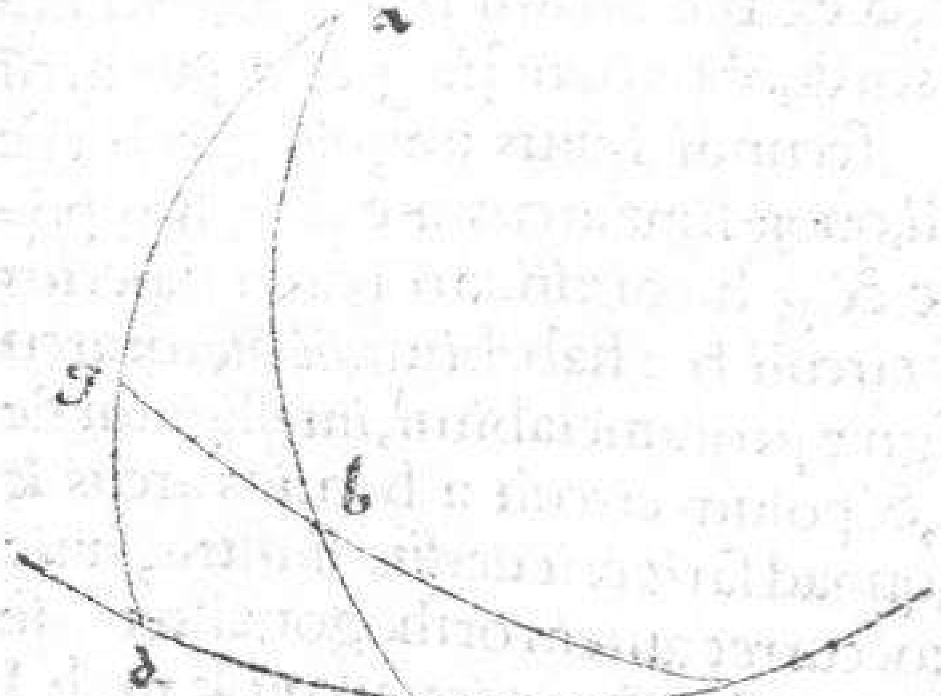
gulus autem b n g rectus eſt, nã ſuperficies h n b k æquediſtantibus continetur lineis, & angulus eius apud k rectus quare per primi huius latus n b trianguli b n g rectanguli notũ erit, cui æqualis eſt linea h k. trianguli itaq; plani h 3 k tribus lateribus cognitis angulum h 3 k & reliqua quẽadmodum antehac menſurabimus. ¶ Operationi autem paꝝ loci dabimus, nihil eñ docebimus niſi quo pacto reperiantur tria latera triãguli plani, cuius unus angulus in centro ſphæræ quieſcẽs reſpondet angulo ſphærali quæſito, qualis in figura eſt triangulus h 3 k. reliqua enim in locis ſuis ſuperioribus ſatis explanaſſe uidemur. Siue igitur duo arcus a b & a g æquales fuerint, ſiue non, ſinus eoꝝ accipiemus pro duobus lateribus continentibus angulum trianguli plani in centro ſphæræ quieſcentem, qui reſpondet angulo ſphærali quæſito. pro tertio autem latere trianguli plani cordam arcus tertij conſtituemus, ſi æquales occurrant duo arcus angulũ quæſitum continentes, qui ſi fuerint inæquales, uterq; tñ aut minor quarta, aut maior ea ſinus cõplemẽtoꝝ arcuũ, qui angulum quæſitũ ambiũt, eliciere, & differentiam eoꝝ in ſe multiplicatã ex quadrato cordæ arcus tertij minuas, relictiq; radicem quadratã pro latere tertio trianguli plani ponas. Qđ ſi alter eoꝝ maior quadrante, reliquus autem minor eo fuerit, ſinus complementoꝝ huiuſmodi collige, & ſummã eorũ in ſe ductã, ex quadrato cordæ arcus tertij ſubtrahas, relicti enim radix quadrata lateri tertio trianguli plani adnumerabitur. In exemplo. Sit uterq; arcuũ a b & a g 20. gr. & arcus b g 36. ſinus 20. graduũ eſt 20521. tantumq; numerabo utrunq; lateꝝ k 3 & 3 h. Sinus 36. gr. eſt 35267. tantũ eſt latus h k, ſimiliter faciam, ſi uterq; arcuũ a b & a g occurrat 160. gr. & arcus b g 36. redibunt enim priſtini numeri. Sed dabit mihi quiſpiam latus a b 35. gr. latus a g 16. & latus b g 46. ſinus 25. gr. eſt 25357. quem dabo lateri k 3. ſinus 16. eſt 16538. lateri 3 h adnumerandus corda b g 46888. Sinus complementi 16. graduũ eſt 57676. Sinus complementi 25. gra. eſt 54378. quem minuo ex 57676. manẽt 3298. hæc in ſe faciunt 10876804. quæ ſublata ex quadrato cordæ b g, ſcilicet 2198484544. manẽt 2187607740. quorum radicem quadratam 46772. conſtituo pro linea h k. Tandem ponatur latus a b 130. gra. latus a g 75. & latus b g 65. Sinus 130. gra. eſt 45963. pro latere k 3. Sinus 75. gr. 57956. numerus lateris h 3, & corda 65. gr. eſt 64476. ſinus complementi 130. gr. eſt 38567. ſinus complementi arcus a g eſt 15529. quem addo ad 38567. colliguntur 54096. hæc in ſe faciunt 2926377216. quæ ſubtraho ex quadrato cordæ b g, quod eſt 4157154576. manẽt 1230777360. huius radicem quadratã 35082. lateri h k deputabo. Perducti igitur ad hypotheſim primi huius, quæ nobis angulũ h 3 k cognitũ faciet, unde & angulus d e numerabitur, quod non erit ambiguũ, ſi ea quæ in proceſſu primi huius cõmemorauimus, memoriæ mandaſti. arcus autem d e quantitatem anguli b a g determinat, unde & b a g & reliqui anguli nõ erunt ignoti. Poterimus aũt alio tramite idem attingere. Nam ꝑpoſitus triangulus a b g habeat duo latera a b & a g inæqualia, utrũq; tamen minus quadrante, & libeat inuenire quantitatem anguli b a g, ſuper puncto a facto polo deſcribatur circulus magnus in ſphæra d h, cuius circumferen-

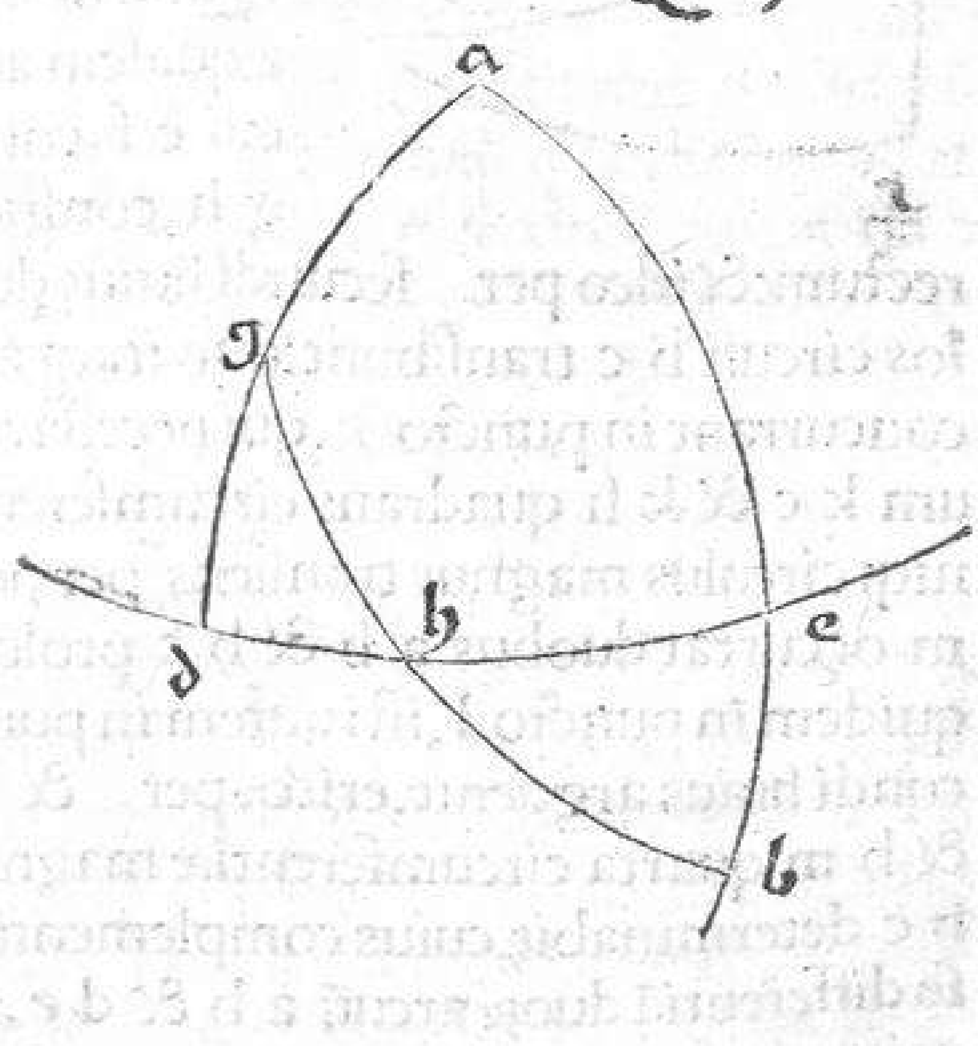
tiæ oc

tiæ occurrat arcus g b prolongatus in puncto h. duo etiam arcus a b & a g extendantur ad puncta e & d, erit utercꝫ arcuũ a e & a d quadrans orthogonaliter erectus ad arcũ d h. per autem huius proportio ſinus arcus g d ad ſinũ arcus b e eſt tanꝙ ſinus g h ad ſinũ arcus b h. eſt autem utercꝫ duoꝝ arcuũ g d & b e notus, propter ſua complementa a g & a b per hypotheſim nota. proportio igitur ſinus g h ad ſinũ b h nota habebitur, cũcꝫ differentia duoꝝ arcuũ g h & b h ſit nota, ſcilicet arcus g b, erit per huius utercꝫ eoꝝ arcuũ nota. hinc ex arcu b h & b e cognitis per huius, ꝑpter angulũ e rectum, complementũ arcus e h & ideo ipſe arcus e h innoteſcet. Similiter ex duobus arcubus g d & g h, arcus d h cognoſcetur, quare differentia duoꝝ arcuũ d h & e h ſcilicet arcus d e non ignorabitur, ipſe autem determinat quãtitatem anguli b a g, quare angulus ille notus erit, hinc & reliqui ut antehac noti fient anguli. Si uero alter quidem duoꝝ arcuũ a b & a g maior quadrante fuerit, alter aũt minor eo, ſit a b maior quadrãte, deſcriptoꝗꝫ ut prius circulo magno ſuper a polo, circumferentia eius ſecabit arcum g b, quod fiat in puncto, ſecabit etiã arcũ b g in puncto, qui ſit h, arcus aũt a g continuatus, occurrat ei in puncto d, erit autem utercꝫ duoꝝ arcuum e b & g d notus: ſunt enim cõplementa arcuũ datoꝝ, eſt autẽ ꝑportio ſinus b e ad ſinum g d nota, ſicut proportio ſinus b h ad ſinũ h d per huius. ſic proportio ſinus b h ad ſinũ h g nota habebitur: cuncꝫ totus arcus b g datus ſit per hypotheſim, erit per huius utercꝫ arcuũ b h & h g cognitus. ex duobus aũt arcubus b h & b e cognitis, & propter angulũ e rectum per huius innoteſcet arcus e h. ſimiliter duo arcus h g & g d propter angulũ d rectum notificabunt arcũ d h, ſic totus arcus d e determinans quantitatem anguli b a g non latebit, unde angulus b a g cum reliquis trianguli propoſiti angulus notus proclamabit. Si uero utercꝫ arcuum a b & a g quadrantem ſuperauerit, producantur ipſi donec concurrant, eritꝗꝫ angulus apud concurſum eorum æqualis ipſi angulo a, fietꝗꝫ nouus triangulus ſuper baſi b g, cuius duo latera minora quadrante nota erunt, unde reliqua ut ſuperius abſoluentur. Operationis autem tenorem prætereo, nam ab operationibus huius atcꝫ pendere dinoſcitur.

Quarti libri Triangulorum Finis.

Q 3

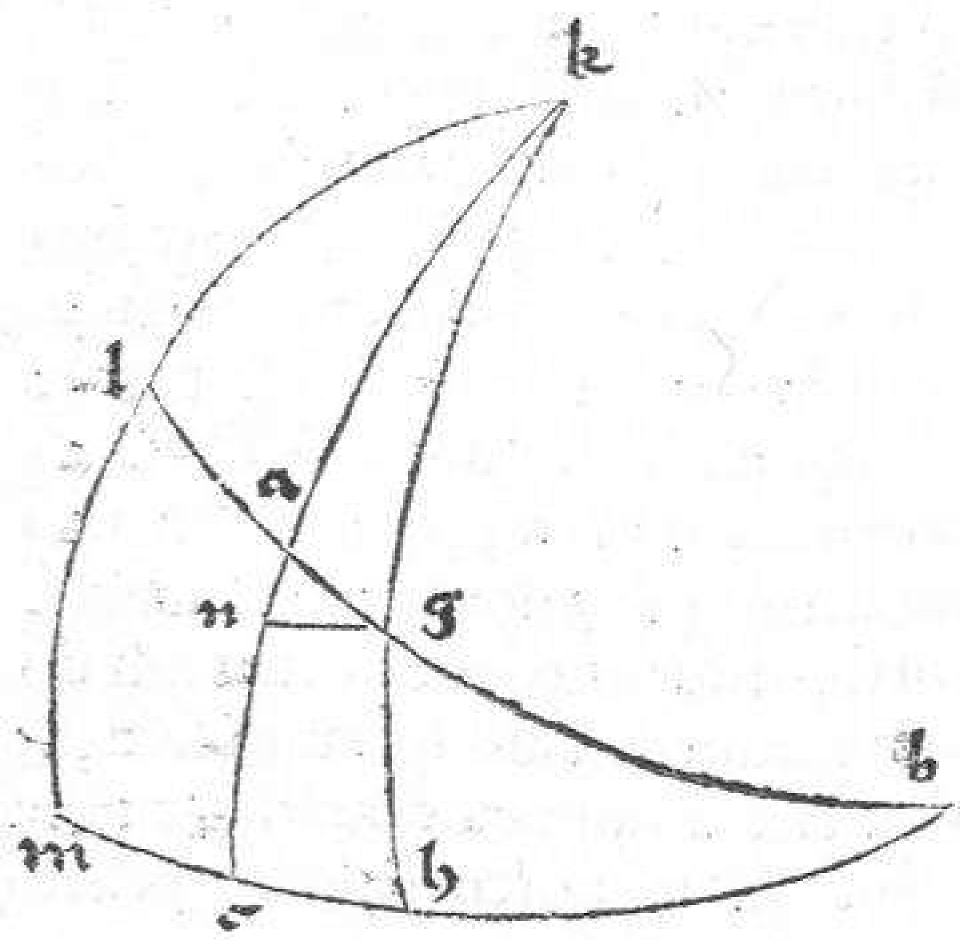




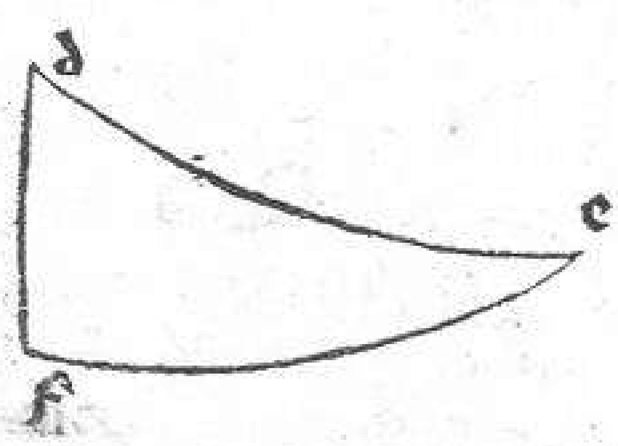
LIBER QVINTVS TRIANGVLORVM.

I.

Si fuerint duo trianguli rectanguli, qui duos angulos acutos & æquales habeant, latera autem rectos subtendentia angulos inæqualia, erit proportio sinus differentiæ eorum laterum ad sinum differentiæ duorum laterum rectis atq; acutis æqualibus substratorum, tanq; proportio eius, quod sub sinibus complementorum acutis angulis subtensorum laterum continetur, ad id, quod sub sinu toto & sinu cõplementi anguli acuti.



Triangulos huiusmodi ex arcubus circulorum magnoꝝ unius sphæræ, aut duarum æqualium concludi subauditur, de reliquis enim in præsentiarum nihil differimus. Sint tales duo trianguli a b c & d e f, duos quidem angulos a g b & d f e rectos; duos autem a b c & d e f acutos æquales habẽtes: sitq; latus a b trianguli a b c longius latere d e trianguli d e f, quæ res arguet etiam latus b c unius trianguli longius esse latere e f alterius, si tertium huius satis tenes. Dico itaq;, q̃ sinus rectus differentiæ duorũ laterum a b & d e ad sinum differentiæ duorum laterũ b c & e f proportionem habet, quam id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a b c, siue d e f ad id, quod sub sinubus complementorũ duoꝝ arcuum a c & d f continetur.



Quod ut facilius demonstretur, scindo ex a b arcũ g b æqualem arcui d e, & ex b c arcum b h æqualem arcui e f, continuatisq; duobus punctis g & h per arcũ g h, constabit per secundi huius angulũ g h b esse rectum: & ideo per secundi huius duo circuli, quoꝝ sunt arcus a c & g h polos circuli b c transibunt; duo itaq; arcus a c & g h continuati paulo superius concurrant in puncto k, qui necessario polus circuli b c habebitur, & uterq; arcuum k c & k h quadrans circumferentiæ magnæ pronunciabitur, intelligatur denique circulus magnus transiens per polum k, & polum circuli a b, cuius arcus k m occurrat duobus a b & b c prolongatis, quoad satis erit uersus sinistrã, huic quidem in puncto l, isti autem in puncto m: occurret autem orthogonaliter secundi huius arguente, eritq; per & eiusdem unusquisq; trium arcuũ k m, b l & b m quarta circumferentiæ magnæ; unde & arcus l m quantitatem anguli a b c determinabit, cuius complementũ est k l: nemo autem ignorat arcum a g esse differentiã duoꝝ arcuũ a b & d e. item c h excessum arcus c b super f e, demittatur itaq; ex puncto g perpendicularis arcus g n ad quadrantem k c, proportio igitur sinus a g ad sinum c h componitur ex duabus, proportione scilicet

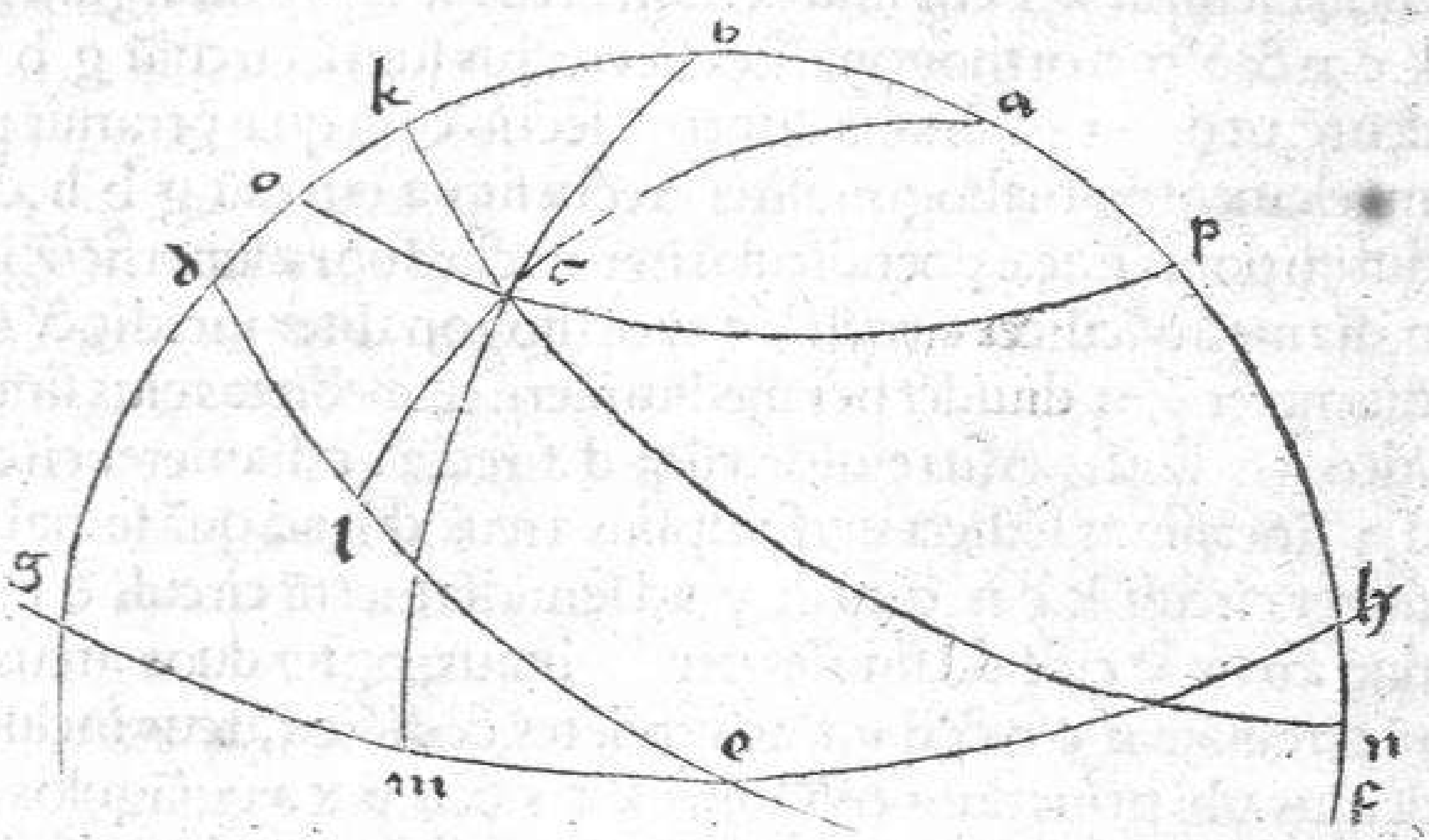
sinus

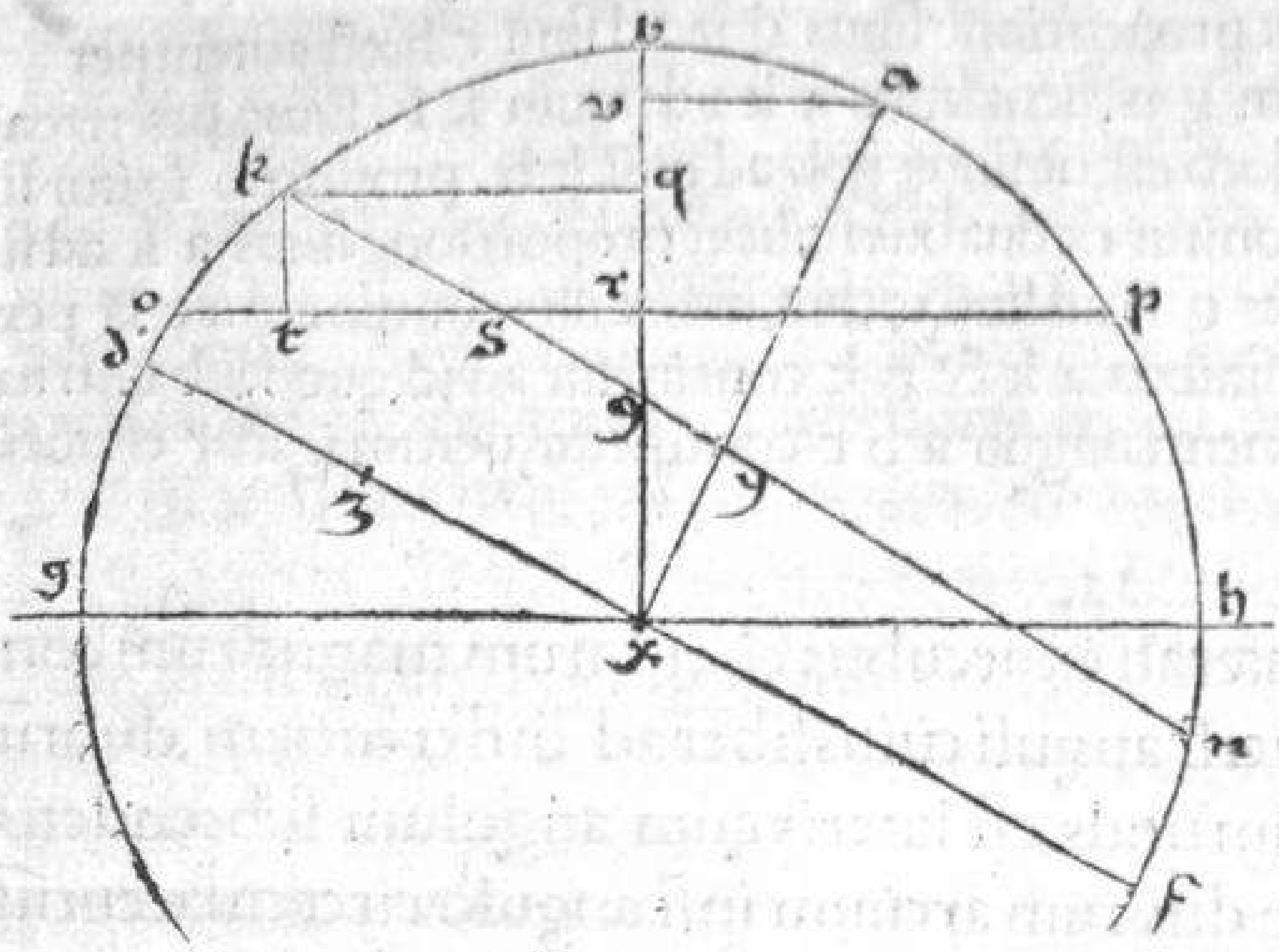
sinus a g ad sinum g n, & ex proportione sinus g n ad sinũ c h. est autem per tertij huius sinus a g ad sinum g n, sicut sinus a k ad sinum k l. sinus præterea g n ad sinum c h ex eodem loco est, ut sinus g k ad sinũ k h. proportio igitur sinus a g ad sinum c h componitur ex duabus scilicet proportione sinus a k ad sinum k l, & proportione sinus g k ad sinũ totum, sed ex illis componitur etiã per sexti elementorum, quod sub sinibus a k & g k continetur ad id, quod sub sinu toto & sinu k l scilicet complementi anguli a b c continetur, uerum igitur enunciabat theorema præsens.

II.

In omni triangulo sphærali ex arcubus circulorum magnorum constante, proportio sinus uersi anguli cuiuslibet ad differentiam duorũ sinuum uersorum, quorum unus est lateris eum angulum subtendentis, alius uero differentiæ duorum arcuum ipsi angulo circumiacentiũ est tanquam proportio quadrati sinus recti totius ad id, quod sub sinibus arcuũ dicto angulo circũpositorum continetur rectangulum.

Sit huiusmodi triangulus a b g, duo latera habens inæqualia a c maius a b, & utrunque eorum minus quadrante, super punctis a & b factis polis describant duo circuli magni, quorum circumferentiæ se secent in pũcto e: prolongetur que arcus a b utrinque donec occurret circulo sup a descripto in pũctis d & f, circulo aũt sup b lineato in pũctis g & h, cõstat arcũ g d æqualẽ esse arcui a b: utrũque aũt arcuũ e d & e g esse quadrantẽ circũferentiæ magnæ. cõtinuent denique duo arcus a c & b c, donec uterque eorum quarta circũferentiæ fiat: hic quidem occurrens arcui d e in l puncto, ille aũt arcui g e in pũcto m: factis que iterum punctis a & b polis, super a quidẽ secundũ quantitatem cordæ a c describat circulus minor in sphera k n: super b aũt secundũ distantiã b circulus minor o p, erit itaque arcus b k differentia duorum arcuũ a b & a c, & arcus b o æqualis arcui b c, arcus aũt d l quantitatẽ anguli b a c determinabit. Dico igit, quod proportio sinus uersi d l ad differentiã duorum sinuũ uersorũ, quos habet arcus b k & b c est ut quadrati sinus recti totius ad id, quod continet sub duobus sinubus rectis arcuũ a b & a c. Quod ut apertius demonstret, altera figuratio assumenda est, in qua sit circulus g b h, quemadmodũ in prima sup centro x, quod & centrũ sphæræ habebit, sit que cõis sectio circulorum g b h & g e h diameter g h, quã in prima figura lineare nõ decuit confusionis uitandæ gratia, sed & cõis sectio circulorum g b h & d e f sit linea d f. item duo circuli g b h & k c n secent se in linea k n, duo demũ circuli g b h & o c p in linea recta o p cõuincẽt, deinde educant duæ semidiametri sphæræ x a quidẽ secans lineã k n in puncto y, x b aũt secãs o p in puncto r, constat aũt per . huius k n esse diametrũ circuli k c n, & o p lineã esse diametrũ circuli o c p, quod circulus magnus g b h per polos utriusque eorum in





rũ incedat, punctusq; y erit centrũ circuli k c n, & punctus r centrũ circuli o c p, rursus ex puncto k duæ ꝑ ueniãt ꝑpendiculares, una quidẽ k t ad lineã o p, alia aũt k 9 ad lineã b x. punctus item a sit caput ꝑpendicularis a u supra lineã b x descendentis. erit itaq; linea a u sinus rectus arcus a b: b q aũt sinus uersus arcus b k, & b r sinus uersus arcus b o siue b c, horũ sinuum uersorũ differentia est linea q r æqualis lineæ k t. signato iterũ puncto s, in quo cõicant duæ diametri circulorũ k c n & o c p scilicet lineæ k n & o p, sciendũ est lineã k s esse sinũ uersum arcus k c primæ figuræ, cũ eñ uterq; circulorũ k c n & o p c orthogonaliter sit erectus supra circulũ g b h, per polos eorũ incedentẽ, ut docet huius, erit eorũ sectio cõis, quæ ꝑtransit punctũ s ex undecimi elementorũ orthogonaliter erecta supra circulũ g b h, & ideo per conuersionẽ diffinitionis lineæ ꝑpendiculariter erectæ supra superficiẽ, hæc cõis sectio lineæ k n, diametro scilicet circuli k c n orthogonaliter incidit, & ideo hãc sectionẽ cõem diameter k n diuidet per medium, eritq; medietas eius sinus rectus arcus k c, & ideo k s sinus uersus eiusdẽ. cũq; d f recta sit diameter circuli d e f. sumat̃ ex ea d 3 linea sinus scilicet uersus ipsius arcus d l, ad quã se habebit k s sicut semidiameter circuli k c n, q̃ est k y ad semidiametrũ circuli d e f scilicet d x: sunt eñ duo arcus k c & d l similes per huius, ꝑpter duos arcus a d & a l â polo duorũ circulorũ k c n & d e f descendẽtes, & dictos arcus includẽtes. Iã ad portũ accedemus, ubi prius duos triãgulos k t s & a u x æquiãgulos ostẽdemus hoc pacto: duo anguli t k s & r 9 s, ideoq; x 9 y sunt æquales ꝑpter æquedistantiã linearũ k t & r 9, quare cũ uterq; angulorũ k t 3 & x y 9 sit rectus, erit reliquus angulus k s t æqualis reliquo y x 9 siue a x u. angulus aũt a u x rectus disponebatur, sunt itaq; duo trianguli k t s & a u x æquianguli, & ideo per quartã sexti & ꝑmutatim ꝑportio x a ad a u sicut s k ad k t. proportio aũt d 3 scilicet sinus uersi anguli b a c ad lineã k t scilicet differentiã duorũ sinuũ uersorũ supra memoratorum componit̃ ex duabus scilicet ꝑportione sinus d 3 ad k s, & ex proportione k s ad k t: erat aũt d 3 ad k s sicut d x scilicet sinus totus ad lineã k y, quæ est sinus rectus arcus a k siue a c, & ꝑportio k s ad k t sicut a x sinus recti totius ad lineã a u, quæ est sinus rectus arcus a b. ꝑportio igit̃ sinus uersi arcus d l siue anguli b a c, ad differentiã sinuũ uersorũ supradictorũ cõponit̃ ex duabus, ex proportione scilicet sinus recti totius ad sinum rectum arcus a c, & ex ꝑportione sinus recti totius ad sinũ rectum arcus a b. ex eisdẽ autẽ duabus proportiõibus cõponit̃ etiã ꝑportio quadrati sinus recti totius ad id, quod cõtinetur sub sinibus rectis duorũ arcuũ a b & a c. proportio igit̃ sinus uersi anguli b a c ad differentiã duorũ sinuũ uersorum, quos habent duo arcus b o & b k est, ut ꝑportio quadrati sinus recti totius ad id, quod continet̃ sub duobus sinibus rectis duorũ arcuũ a b & a c, quod erat demonstrandũ. Hoc tñ non ignorare uideris, q duo sinus uersi duorum arcuũ b k & b o eam habent differentiã, quã duo sinus recti cõplementorũ

suor

suorum;unde si in quopiā negocio tuo opus fuerit hoc theoremate,poteris supradictā differentiam inuenire,subtrahendo sinum rectū cōplemēti alterius duorum arcuū b k & b o ex sinu recto cōplementi reliqui eorum. Assumpsimus autē duos arcus angulū,de quo sermo habitus est,minores quadrante, quo demonstratio nostra planior putaret;nam si fuerit uterque eorum maior quadrāte,intelligant prolongari,donec concurrant angulum alium æqualem priori comprehendendo: fiet itaque nouus triangulus supra arcum tertium,cuius duo latera quadrante minora habebuntur. Quod si alter eorum minor quadrante, alter uero maior eo præbeatur,tametsi figurationem parumper mutari oporteat,una tamen eadem syllogismi forma ueritatem theorematis concludet;hoc uno attento, quod arcus quilibet cū eo,qui sibi ex semicirculo deficit,eundem sinum rectum accipit. Satis ergo certitudinem propositionis nostræ ostendisse uidemur.

III.

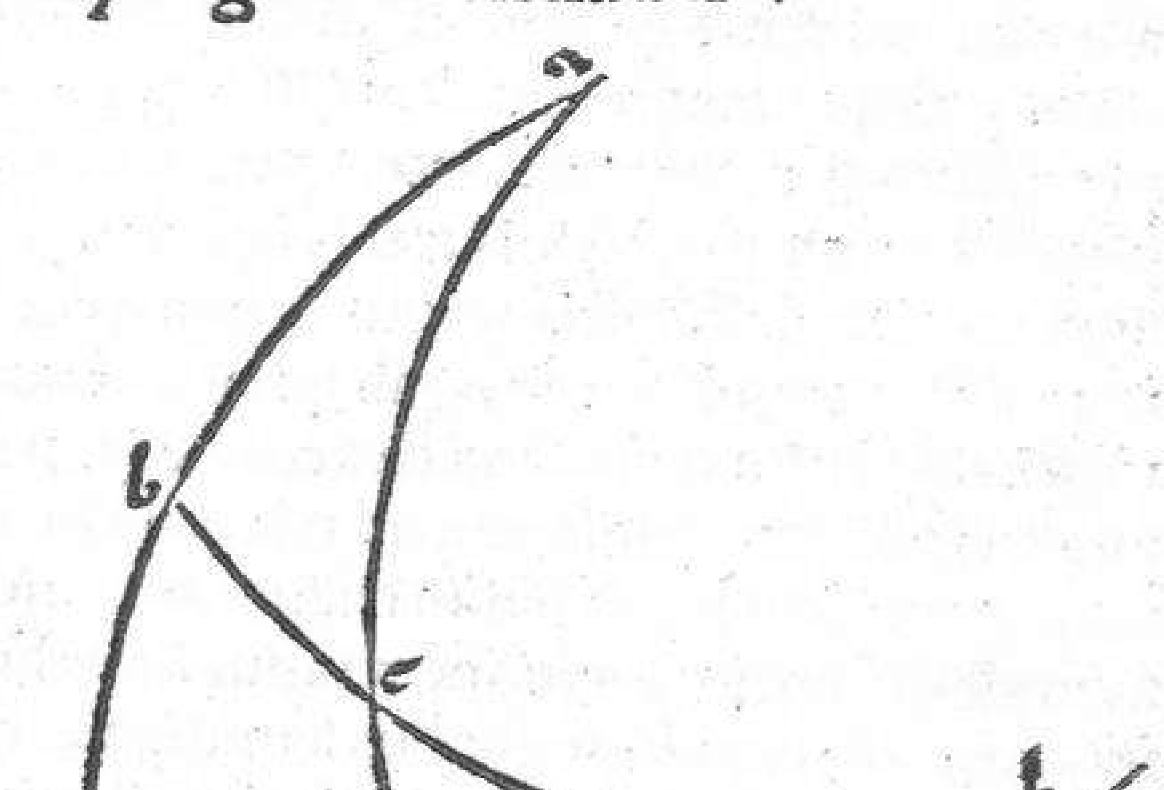
Datis tribus lateribus trianguli sphæralis ex arcubus circulorum magnorum constantis,omnes angulos eius dimetiri.

Etsi propositum illud exequi liceat per huius,tamen quo iucundior esset ueritatis contemplatio,dum per plures ac diuersas uias ad eandem metam peruenitur,libuit præcedens theorema proposito nostro suppeditare. Talis ergo sit triangulus a b g,ex arcubus circulorum magnorum constans,propositum est inuenire angulum eius b a c,aut alium quemlibet,subijciamus tria latera eius inæqualia,nam si duo eius quæcunque latera fuerint æqualia,procedendum erit iuxta monita huius. Cum itaque ex præcedenti sit proportio quadrati sinus recti totius ad id,quod sub sinibus rectis duorum arcuum a b & a c continetur, tanquam proportio sinus uersi anguli b a c quæsiti differentiam duorum sinuum uersorū, quorum unus est ipsius arcus b c,alter uero differentiæ duorum arcuum a b & a c, & tres harum quantitatum sunt notæ propter hypothesim,erit & quarta cognita scilicet sinus uersus anguli b a c,hinc arcus suus,qui determinat quantitatem anguli b a c,& ideo angulus ipse mensuratus offeretur. pro reliquis autem duobus angulis cognoscendis nihil noui præcipimus,quoniam ex angulo b a c iam cognito cum latere b c eum respiciente, reliquisque lateribus notis argumento huius,quod reliquum est enitemur.

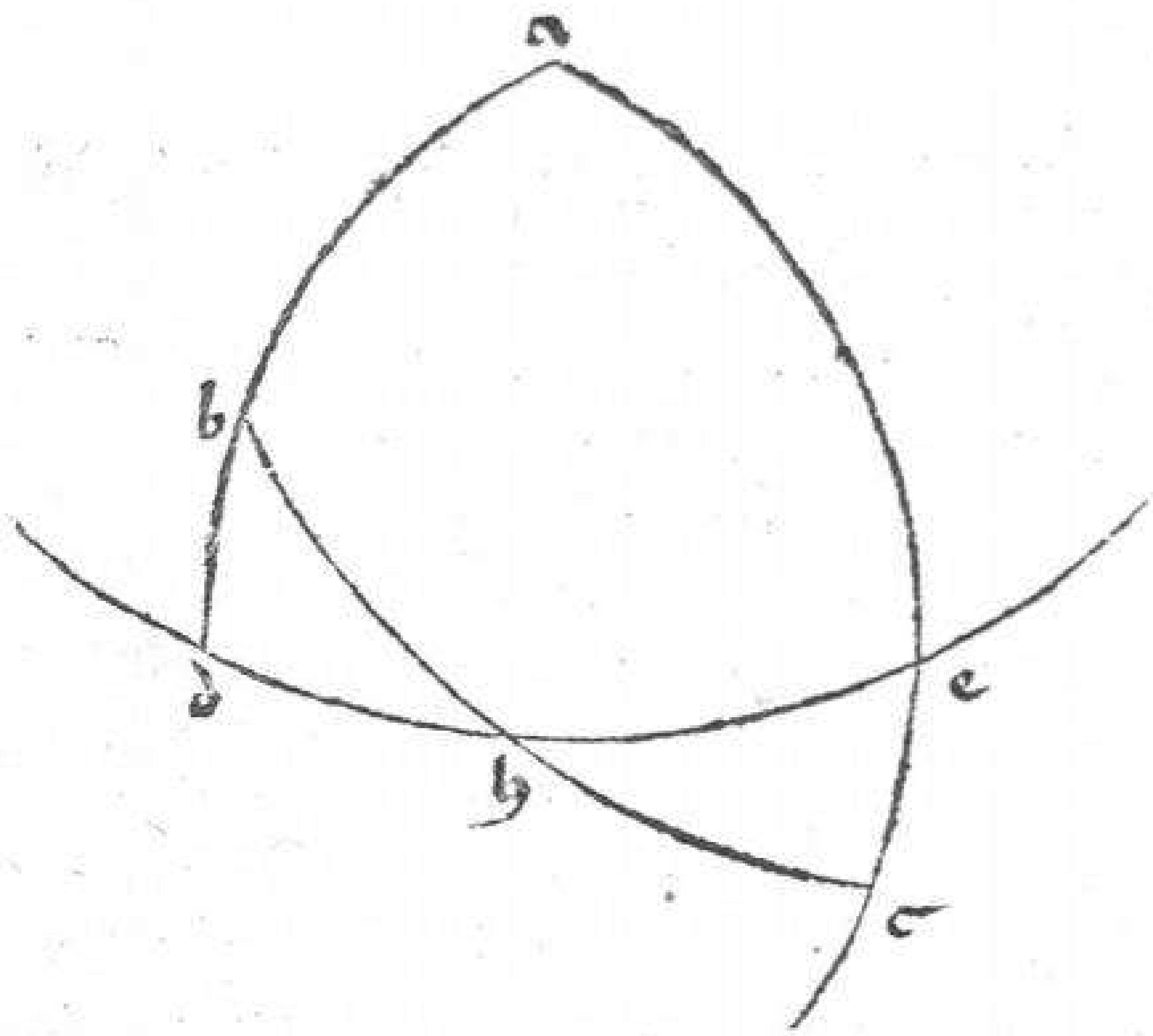
IIII.

Quod præcedens tradidit alio syllogismo concludere.

Habeat enim propositus triangulus a b c,duo latera a b & a c inæqualia, quadrante diuisim minora,libeatque inuenire quantitatem anguli b a c,super puncto a facto polo,describatur circulus magnus in sphæra d h,cuius circumferentiæ occurrat arcus b c prolōgatus in puncto h;duo insuper arcus a b & a c extendātur usque ad arcum d h,cui incidant in pūctis e & d, erit itaque uterque arcuum a e & a d quadrans orthogonaliter erectus supra arcū d h,duo au



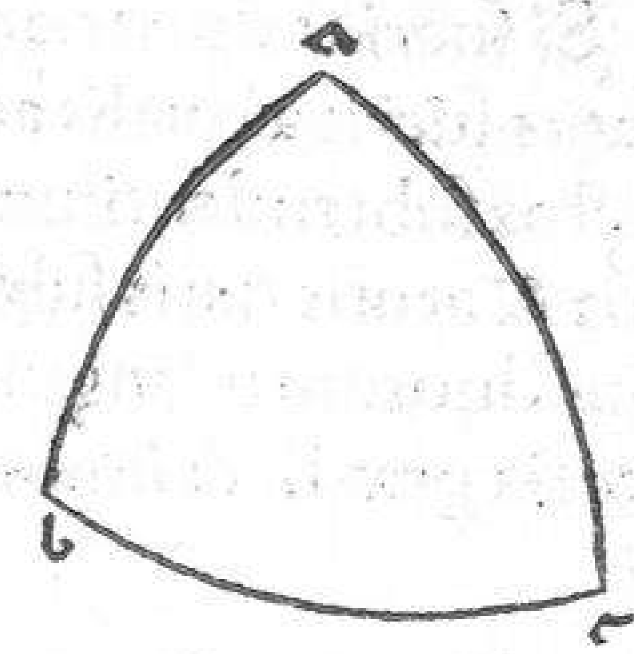
tem arcus b d & c e noti erunt, sunt etem complementa duorum arcuum a h & a c per hypothesim notorũ, sed proportio sinus recti b d ad sinum rectum c e est per huius, ut sinus recti arcus b h ad sinum rectum h c. proportio igitur sinus recti b h ad sinum rectum h c nota est, cumq; differentia duorum arcuum b h & h c nota sit, scilicet arcus b c, erit per huius uterq; eorum cognitus, deinde ex duobus arcubus h c & c e notis, & angulo e recto per huius cognoscetur arcus h e, similiter duo arcus h b & b d noti cum angulo d recto notificabunt arcum h d; arcus igitur h e demptus ex arcu h d, relinquet arcum d e cognitum, qui determinat angulum a b c, unde & ille notus habebitur; reliquos autem duos angulos latera sibi opposita per huius notos elicient. Si uero alter duorum arcuum a b & c maior quadrante fuerit, reliquus uero minor eo, sit a c maior, descriptoq; ut prius circulo magno super a polo, circumferentia eius secabit duos arcus a c & b c; hunc ergo secet in e, illum uero in puncto h, prolongeturq; arcus a b, donec occurret dictæ circumferentiæ in puncto d, erit iterum uterq; arcuum b d & c e notus, quoniã sunt complementa duorum arcuum a b & a c datorum, est autem per huius proportio sinus recti b d ad sinum rectum c e, sicut sinus



recti b h ad sinum rectum h c propter duos angulos d & e rectos, sic ergo proportio sinus recti b h ad sinum rectum h c nota habebitur. cumq; totus arcus b c sit notus per hypothesim, erit per huius uterq; arcuum b h & h c cognitus: ex duobus autem autem arcubus h b & b d cognitis cum angulo d recto cognoscetur arcus d h per huius: similiter duo arcus h c & c e cum angulo e recto, arcum h e notum suscitabunt: duo tandem arcus d h & h e collecti, totũ arcum d e notificabunt, qui determinat quantitatem anguli b a c, unde & ipse notus concludetur, cætera ut antehac perficientur. Quòd si uterq; arcuum a b & a c quadrantem superauerit, intelligantur prolongati donec concurrent, facientes angulum nouum æqualem ipsi angulo a quæsito, fiet itaq; alius triangulus supra arcum b c, cuius duo latera minora quadrante nota erunt. per modum ergo prædictum angulus duobus illis lateribus contentus innotescet, qui est æqualis angulo a, unde & ipse angulus a notus enunciabitur. Est præterea alius modus inueniendi angulum trianguli sphæralis quemcunq; uoles ex tribus lateribus datis, intelligantur enim duci tres cordæ ipsorum arcuum datorũ, tres quoq; semidiametri sphæræ egrediantur ad tria puncta angularia ipsius trianguli: habebis igitur pyramidem supra basim trilateram, cuius sex lineæ notæ sunt, poteris igitur aliunde discere inclinationem unius superficiei lateralis supra aliam, superficiem inquam quæ clauditur duabus semidiametris sphæræ, & una trium cordarum dictarum: quantitas enim huius inclinationis angulum duorum arcuum, quorum cordæ assumptæ sunt manifestabit. in hac autem inquisitione sinus recti arcuum datorum, ac sinus recti complementorum suorum maxime utiles erunt, ne tamen prolixus nimium uidear, post tres uias bonas iam absolutas, hanc quartam prætereundam terendam arbitratus sum, præsertim cum ex alijs scriptis meis plane colligi possit.

V.

Datis duobus angulis trianguli sphæralis cum aggregato duorum laterum eis oppositorum, utrunque eorum secernere.



Triangulus a b c, duos angulos a b c & a c b notos habeat, congeriemque duorum laterum a b & a c cognitam. Quærimus utrunque eorum seorsum, quoniam per huius proportio sinus recti arcus a b ad sinum rectum a c est, ut sinus recti anguli a c b ad sinum rectum anguli a b c: illa autem nota est propter angulos datos, sinus ergo rectus a b ad sinum rectum a c proportionem habebit datam, cumque aggregatum ex istis arcubus sit datum, erit per huius uterque eorũ separatim cognitus, quod erat inueniendum, pro reliquo autem latere, reliquoque angulo cognoscendis huius repetendam censeo.

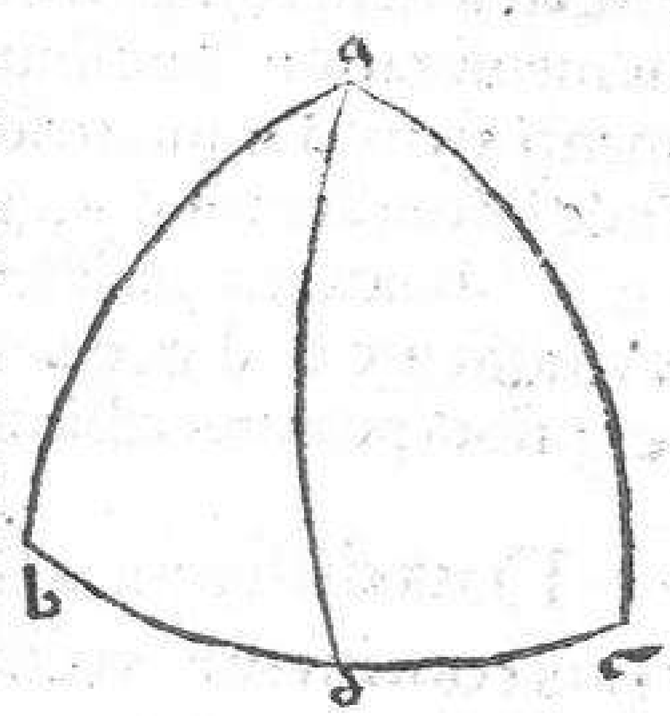
VI.

Datis duobus angulis trianguli sphæralis ex arcubus circulorum magnorum constantis, cum differentia laterum eis oppositorum, utrunque eorum secernere.

Hæc ex quemadmodum præcedens ex huius pendere dinoscitur: erit enim proportio sinus recti unius quæsitorum arcuum ad sinum rectum alterius cognita, propter angulos datos ratiocinante huius: cumque differentiam eorũ præbuerit notam hypothesis, uterque eorum proculdubio cognitus emerget.

VII.

Si ab angulo quolibet trianguli sphæralis ad latus sibi oppositum descendat, arcus circuli magni angulum à quo ducitur diuidẽs per medium, sinus recti duorum arcuum angulo diuiso circumpositorum, & sinus recti portionum lateris diuisi eandem proportionem accepta bunt.

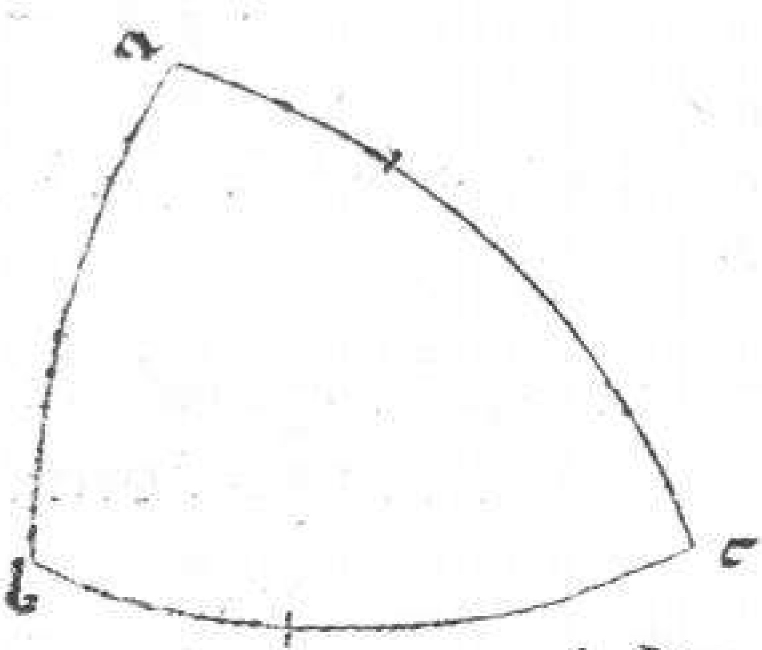


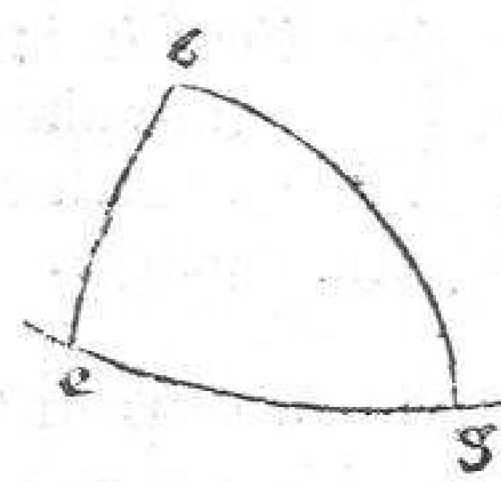
In triangulo tali a b c ducatur arcus a d ex puncto a diuidens angulum quidem b a c per æqualia, arcum autem b c in duas portiones b d & d c. Dico quod proportio sinus recti a b ad sinum rectum a c est, ut sinus recti b d ad sinum rectum d c. Erit enim per huius sinus rectus a b ad sinum rectum b d sicut sinus rectus anguli a d b ad sinum rectum anguli b a d, item proportio sinus recti a c ad sinum rectum c d sicut sinus recti anguli a d c ad sinum rectum anguli c a d: sinus autem anguli b a d æqualis est sinui recto anguli c a d, sinus denique anguli a d b æqualis, imò idem est sinui recto anguli a d c: hi enim duo anguli duobus rectis æquantur, quemadmodum enim duo arcus semicircumferentiæ cõiunctim æquales unum & eundem suscipiunt sinum rectum, ita & duo anguli duo

 bus rebus rectis coniunctim æquales in sinu recto communicare oportet. unam igitur habent proportionem sinus rectus a b ad sinum rectum b d, & sinus rectus a c ad sinum rectum c d: permutatis itaq; terminis uerum enunciasse propositionem confiteberis.

VIII.

Si fuerint duo trianguli rectanguli, quorum angulus acutus unius datus fuerit æqualis angulo acuto alterius, differentia quoq; laterum rectos subtendentium æqualis differentiæ duorum arcuum, qui rectis & acutis datis substernuntur, fueritq; latus unum quodcunq; alterius duorum triangulorum cognitum, reliqua omnia cum ipsa differentia prædicta innotescent.



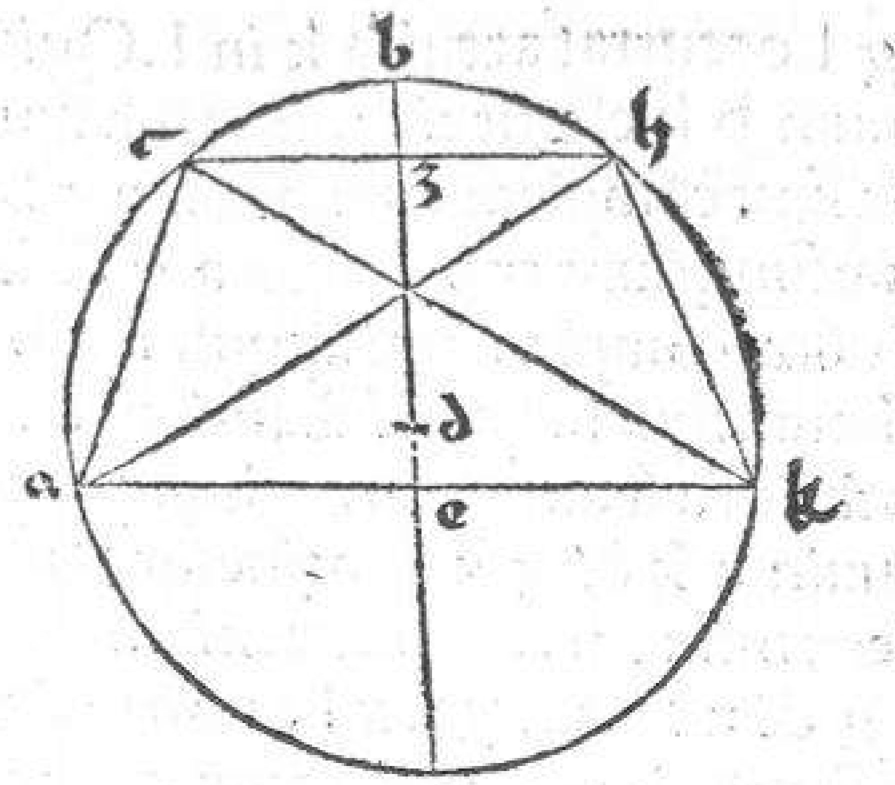


Sint duo trianguli tales a b c & d e g, duos rectos habentes a b c & d e g, duosq; acutos datos a c b & d g e, sitq; latus a c unius longius latere d g alterius. differentia autem duorum arcuum a c & d g æqualis differentiæ duorum arcuum b c & e g, quis non sit nota: sit demum unus sex arcuum ex duobus triangulis datus. Dico ꝙ omnes reliqui arcus innotescent. Sit arcus b c uerbi gratia datus, ex quo & duobus angulis b & c notis   arguente, reliqui duo arcus eiusdem trianguli notificabuntur. est autem per   huius proportio sinus differentiæ duorum arcuum a c & d g ad sinum differentiæ duorum arcuum b c & e g, quæ est proportio æqualitatis, sicut eius, quod sub sinibus complementorum arcuum a b & d e continetur ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b siue d g e continetur: hæc igitur duo sub prædictis sinibus contenta sunt æqualia: quod autem sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur, est cognitum, propter sinum totum & sinum complementi anguli a c b notos: quamobrem quod sub sinibus complementorum arcuum a b & d e continetur notū erit, est autem complementum arcus a b notum propter ipsum arcum a b prius mensuratum: hinc sinus huius complementi, & ideo per   huius sinus cōplementi arcus d e innotescent, quo demū cognoscemus cōplementū arcus d e, & inde ipsum arcum d e, qui tandem cum duobus angulis d e g & d g e intercedēte   huius reliqua latera trianguli sui manifestabit. hinc etiā differentia duorū arcuum a c & d g, quæ ponebatur æqualis differentiæ duorum arcuum b c & e g nota pronunciabitur, quæ fuerunt demonstranda.

IX.

Data differentia duorum arcuum, si quod sub duobus eorum sinibus continetur, rectangulum fuerit datum, utriusq; arcus attingere noticiam.

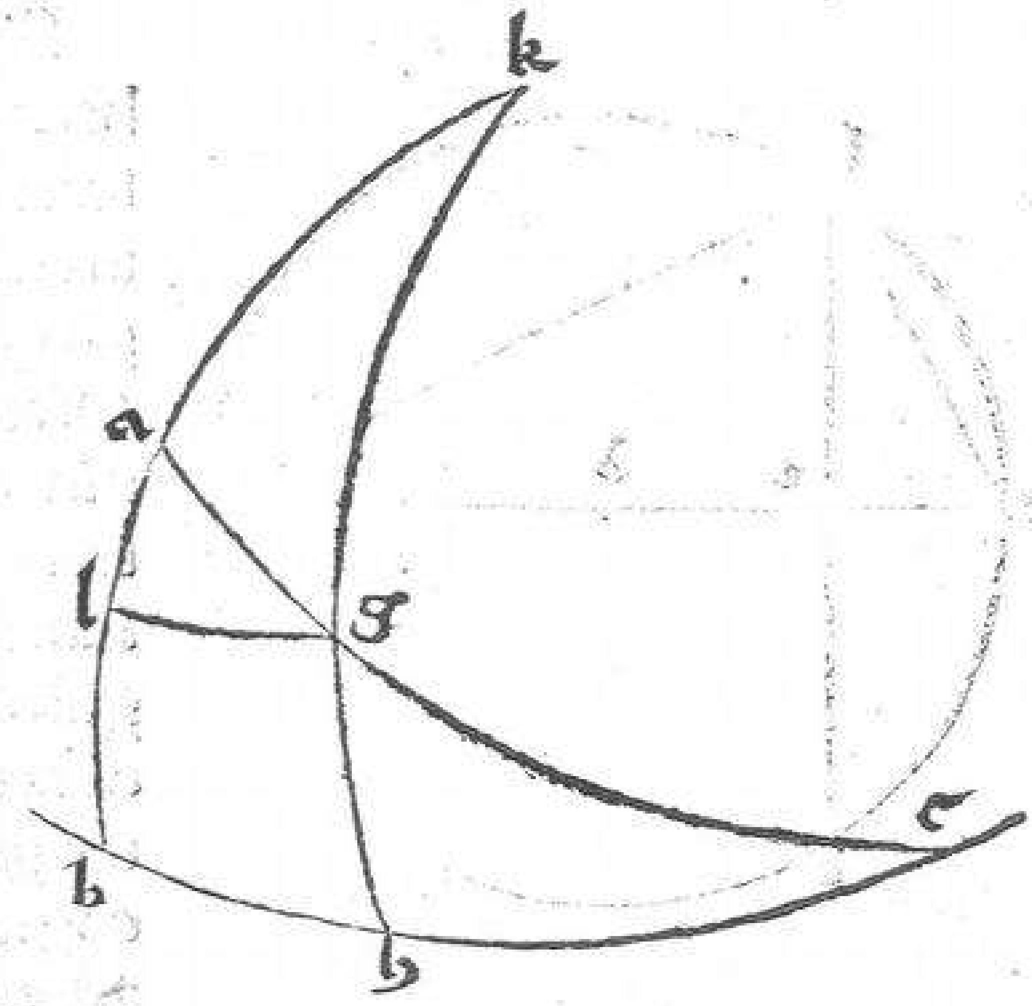
Duorum arcuum a b & b c differentia a c sit data, quodq; sub sinu arcus a b qui sit a e, & sinu arcus b c, quem uides c z continetur, sit datum. Quærimus utrunq;



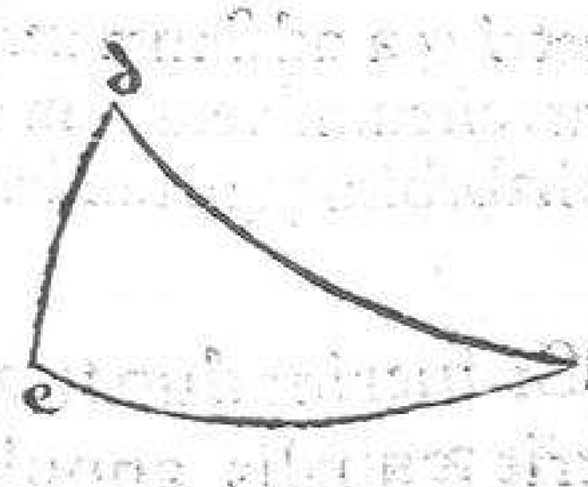
utrunq; arcuum a b & b c. Intelligo autem rectangulum prædictum esse datum respectu quadrati semidiametri circuli: continuatis itaq; duobus sinibus a e & c 3, donec in duobus punctis h & k circumferentiæ desinant, ducantur cordæ a c, a h, k c & k h. cum igitur quod sub a e & c 3 continetur datum sit, erit quod sub duplis earum continetur datum, hoc etenim ad illud quadruplum conuincitur ex sexti elementorũ, cui si addiderimus quadratum cordæ a c, id est, quod sub a c & h k æqualibus quidem propter æquedistantiam cordarum a k & c h: notis autem propter arcum a c ex hypothesi notum, colligetur quadratum cordæ a h cognitum: est nanq; a h diameter quadranguli a c h k circulo inscripti æqualis c k diametro eiusdem: quod autem sub duabus diametris huiusmodi quadranguli continetur, æquum est ei, quod sub binis lateribus eius oppositis concluditur: hinc corda a h & arcus eius a h innotescent, ex quo si dempseris arcum a c notum, relinquetur arcus c h cognitus cum eius dimidio c b, cui si addideris arcum a c notum, resultabit totus arcus a b cognitus, cuius obtentu hactenus cursum est.

X.

Si fuerint duo trianguli rectanguli, quorum angulus acutus unius æqualis angulo acuto alterius, duo autem latera rectos angulos subtendentia habuerint differentiam notam, itemq; duo latera rectis & acutis datis subiacentia differentiam cognitam habuerint, omnia eorum latera innotescent.



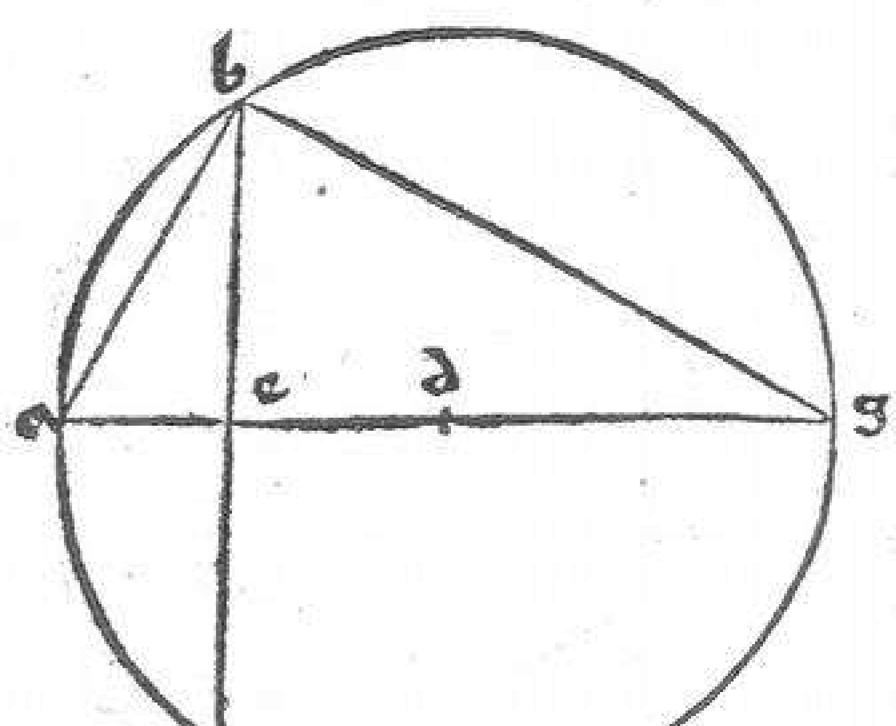
Sint duo trianguli a b c & d e f, duos angulos rectos a b c & d e f habentes, duosq; a c b & d f e acutos æquales & datos: latus autem a c unius uerbi gratia sit longius latere d f alterius, quorum differentia sit data, differentia quoq; duorum laterum b c & e f sit cognita. Dico q; omnia latera horum triangulorum nota uenient. Si enim duæ datæ differentiæ fuerint æquales, per huius propositum comparabimus. si uero inæquales offerantur, scindam ex a c arcum g c æqualem arcui d f, itemq; ex b c arcũ h c æqualem arcui e f, ductoq; arcu g h, constabit angulum g h c esse rectum, oportebit enim per huius duos triangulos d e f & g h c esse æquilateros & æquiangulos: continuētur deinde duo arcus b a & h g, donec concurrent in puncto k, qui per huius erit polus circuli b c, super quo secundum quantitatem k g describatur circulus minor in sphæra, cuius arcus



g l occurrat arcui b k in l. Quia autem per huius proportio sinus a g ad sinum b h est, ut eius quod sub sinibus arcum a k & g k ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur, tres autem harum quantitatum notæ sunt, duos enim arcus a g & b h dedit hypothesis, quod autem sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur notum est, propter angulum a c b datum: quare quod sub sinibus duorum arcuum a k & g k continetur, notũ habebitur. est autem per huius quadratum sinus totius ad id, quod sub sinibus arcuum a k & g k continetur, tanꝗ sinus uersi anguli a k g, siue arcus b h eum determinantis ad differentiam duorum sinuum uersorum, quos habent duo arcus a g & a l: cumꝗ tres harum quantitatum sint notæ, ut patuit, erit & differentia dictorum sinuum uersorum cognita. cumꝗ arcus a g per huius sit maior arcu a l, & ipse notus est p hypothesim, erit eius sinus uersus cognitus, à quo si dempseris prædictam differentiam duorum sinuum uersorum, manebit sinus uersus arcus a l inuentus: hinc arcus a l non poterit latere, qui est differentia duorum arcuum a k & g k: quod autem sub sinibus a k & g k continetur, notum pridẽ concludebatur, & iam differentiam eorum arcuum notam reddidimus, quare ex præmissa uterꝗ eorum cognitus offeretur, hinc sua complementa, arcus uidelicet a b & g h innotescent: ex arcu deniꝗ g h duobusꝗ angulis g h c & g c h datis huius ratiocinante, uterꝗ arcuum g c & h c, qui sunt æquales duobus d e & d f cognoscetur, quibus si adiecerimus duos arcus a g & b h, ex hypothesi notos resultabunt duo arcus a b & a c cogniti: trina igitur latera propositorum triangulorum nota fecimus, quod erat proclamandum.

XI.

Sinu uerso alicuius arcus ad sinum rectum eiusdem proportionem habente notam, arcum ipsum innotescere.

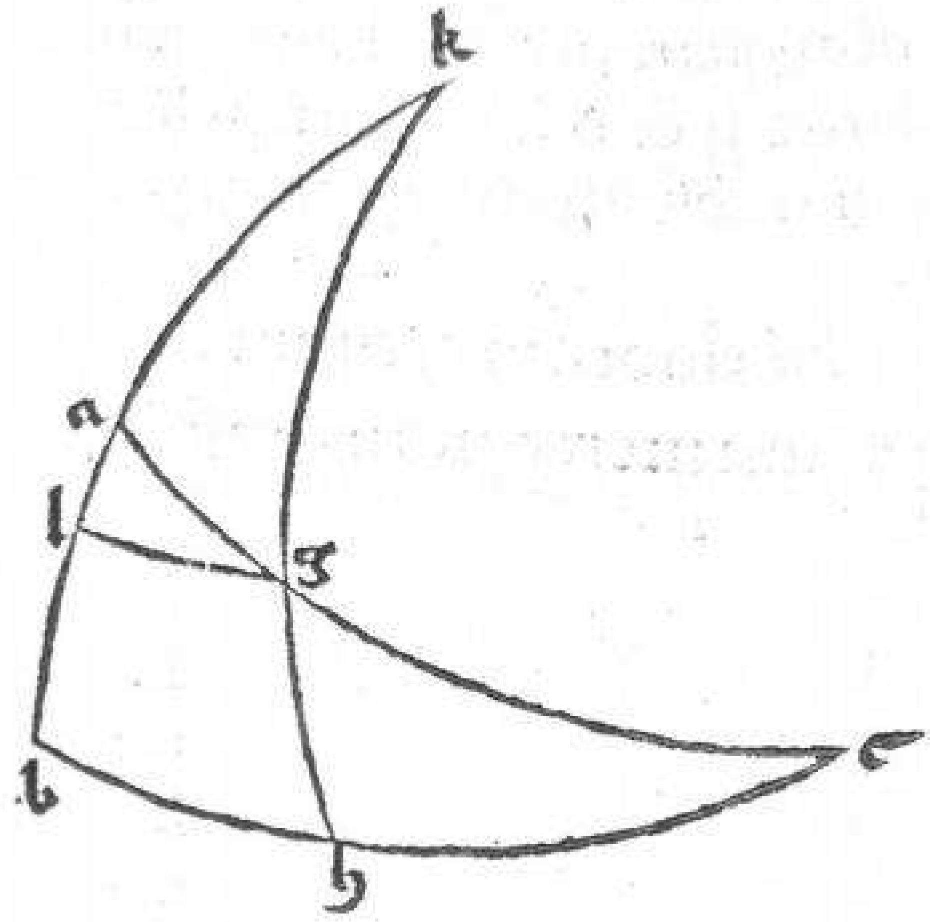


Sit in circulo a b g c diametrum a g habente, corda b c, quam diameter per medium secet in e, cõstabit itaꝗ a e esse sinum uersum arcus a b & b e sinum rectum eiusdem: det ergo quispiam nobis proportionem a e ad b e. Dico ꝙ arcus a b cognitus reddet. Ductis enim duabus cordis a b & b g, erunt per 30. tertij & 8. sexti elementorum duo trianguli partiales a b e & e b g sibi inuicem & toti triangulo a b g similes, & per corollarium eiusdem octauæ linea b e medio loco proportionalis inter g e & e a, cumꝗ proportio b e ad e a sit cognita, erat enim a e ad e b data, erit & g e ad e a data proportio, & coniunctim totius diametri g a ad sinum uersum a e proportio fiet, diametrum autem circuli ꝓpter arcus circumferentiæ metiendos notam supponimus, quare & sinus uersus a e notus habebitur, qui tandem arcum suum a b non sinet ignotum.

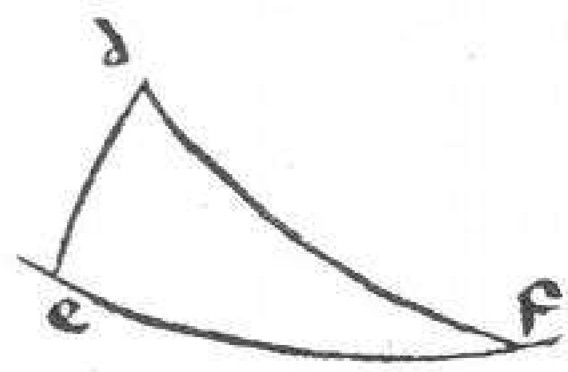
XII.

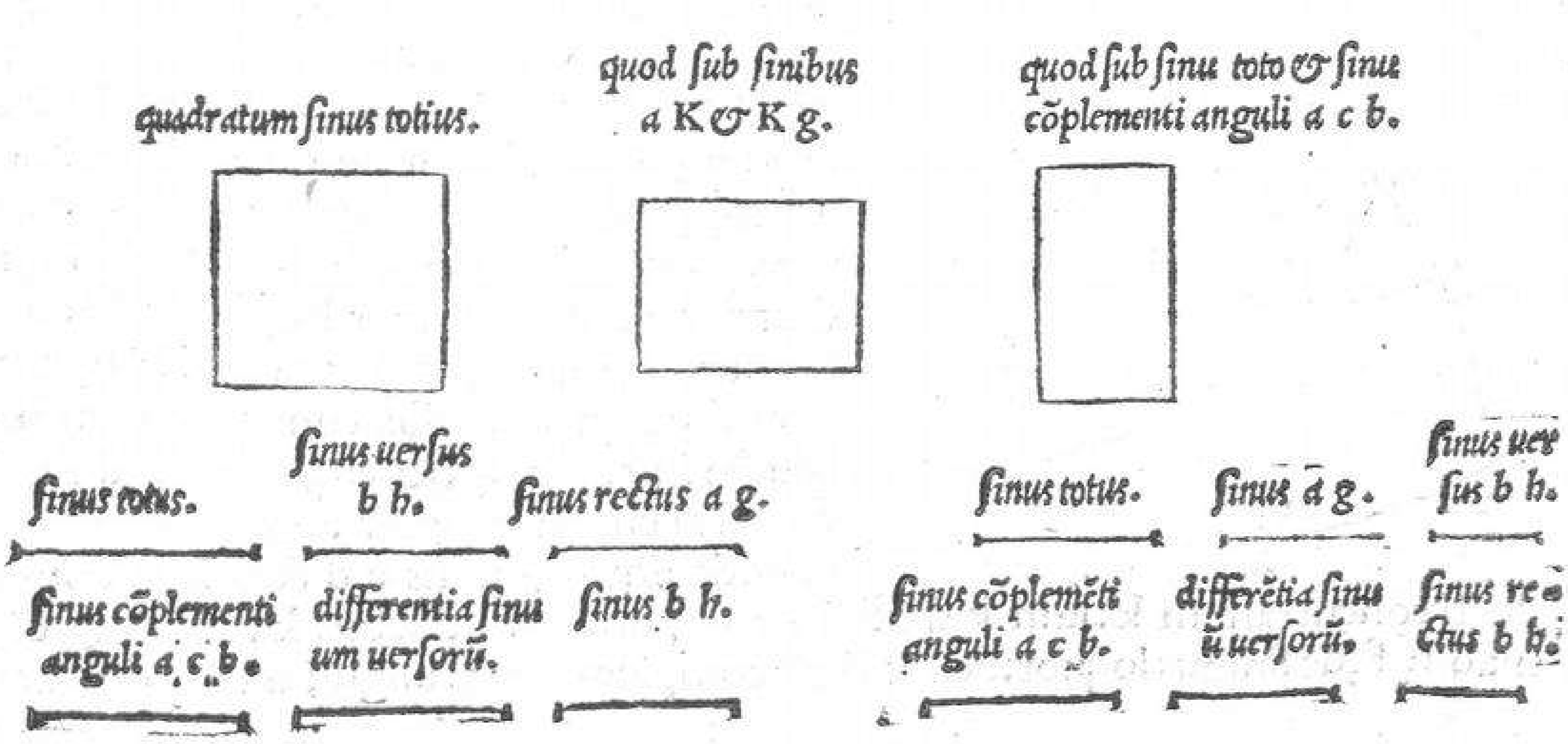
Si fuerint duo trianguli rectanguli, quorum angulus acutus unius fuerit æqualis angulo acuto alterius dato, differentia etiam laterum rectis an

ctis angulis oppositorum fuerit data, cum differentia laterum acutis angulis subtensorum, omnia latera triangulorum cognita reddere.



Resumpta figuratione huius datos, supponamus duos arcus a g & a l differentias uidelicet arcuum angulos datos subtendentium. Quærimus omnia latera duorum triangulorum hoc pacto: Proportio quadrati sinus totius ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur, per primam sexti est ut proportio sinus totius ad sinum complementi anguli a c b, sumpto sinu toto tanq̃ altitudine communi ambobus rectangulis: hæc autem componitur ex duabus proportionibus, scilicet proportiõe quadrati sinus totius ad id, quod sub sinibus a k & g k continetur, & proportione eius, quod sub sinibus a k & g k ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur: prima harum componentium per huius est, ut sinus uersi arcus b h ad differentiam duorum sinuum uersorum, quoꝝ unus est ipsius arcus a g, alter uero arcus a l: secunda uero cõponens est, ut sinus recti a g ad sinum rectum b h: quare proportio sinus totius ad sinum complementi anguli a c b componitur ex duabus, proportione scilicet sinus uersi b h ad differentiam duorum sinuum uersorũ, quos diximus, & ex proportione sinus recti a g ad sinum rectum b h, & ideo etiam proportio sinus totius ad sinum complementi anguli a c b componitur ex proportionibus duabus, scilicet proportione sinus recti a g ad differentiam duorum sinuum uersorum prædictorũ, & proportione sinus uersi b h ad sinum rectũ eiusdem arcus b h. hæc autem proportio composita est cognita propter sinum totum, & sinum complementi anguli a c b dati, cognitos, prima deniq; componẽs est nota: est enim arcus a g datus, & ideo sinus eius rectus cognitus: itẽ arcus a l est datus, ipse enim est differentia duorum arcuum a k & g k, siue duorũ a b & g h, qua-

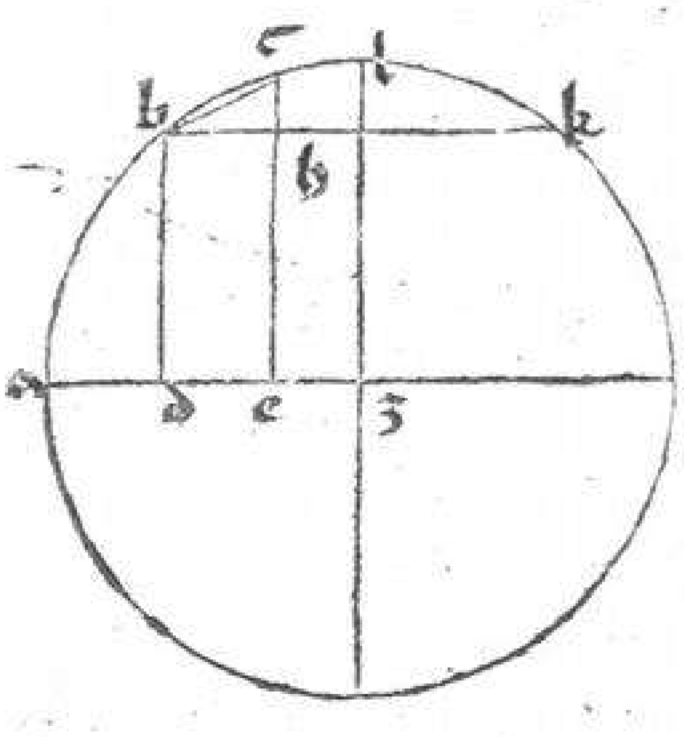




g h, quare uterque arcuum a g & a l sinum uersum accipiet notum, quorũ sinuũ uersorum differentia non latebit: sic igitur prima proportio componens notos habet terminos, eã autẽ proportiõe subtracta ex ipsa proportione, relinquet secunda componens proportio cognita, quæ erat sinus uersi b h ad sinum rectum eiusdem, quare per huius arcus ipse b h non ignorabitur. ex duobus autem arcubus a g & b h cognitis, reliqua quæ proponebantur quærenda, argumẽto huius absoluentur, quorum gratia contemplati sumus.

XIII.

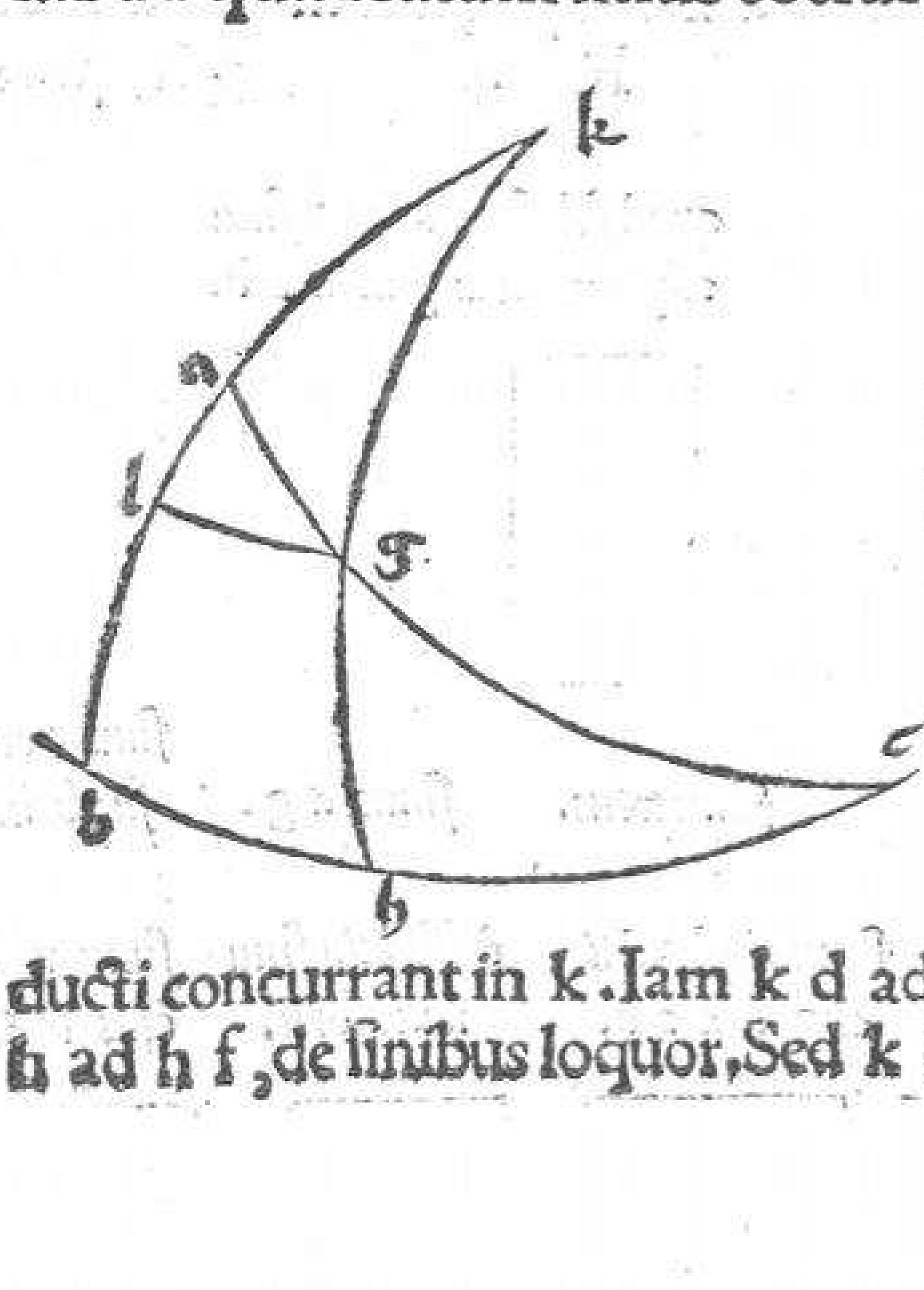
Si duorum arcuum differentia data fuerit, cum differentia sinuum eorum uterque notus resultabit.



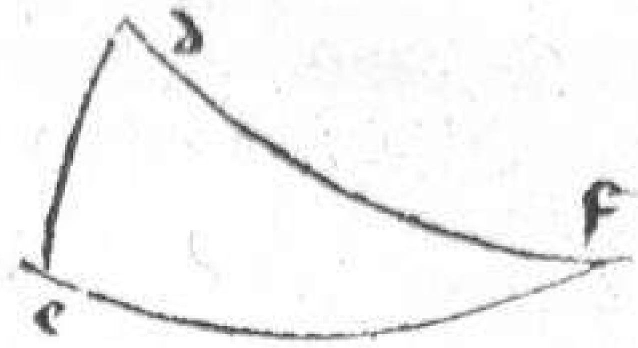
Sint duo arcus a b & a c, quorum differentia b c sit data, duo autem sinus eorum b d & c e differentiam habeãt cognitam. Dico quod uterque eorum innotescet. Duco enim cordam b k orthogonaliter incidentem sinui recto c e in puncto h, eritque c h differentia duorum sinuum, subtendatur etiam arcui b c corda sua b c, quã oportet esse notã propter arcũ ipsum datum: sic ex duabus lineis b c & c h notis angulo apud h recto existente, per primi huius angulum c b h metiemur, ac si in centro alicuius circuli quiesceret: nunc autem, quoniam in circumferentia supra arcũ cõsistit, erit & arcus eũ subtẽdens, scilicet arcus c k notus, cui si adiunxerimus arcum b c ex hypothesi notum, totus arcus b k notus redundabit, & ideo dimidius arcus b l, inde quoque complementum suum a b innotescent: ex arcu autem a b & b c notis conflabitur totus arcus a c notus, sic utrunque memoratorum arcuum notum effecimus, quod erat absoluendum.

XIIII.

In omni triangulo rectangulo duos habente acutos angulos, sicut sinus complemẽti anguli cuiusuis acuti ad sinum totum, sic, quod sub sinu complementi lateris sibi oppositi, & sub sinu reliqui acuti continetur ad quadratum sinus totius.



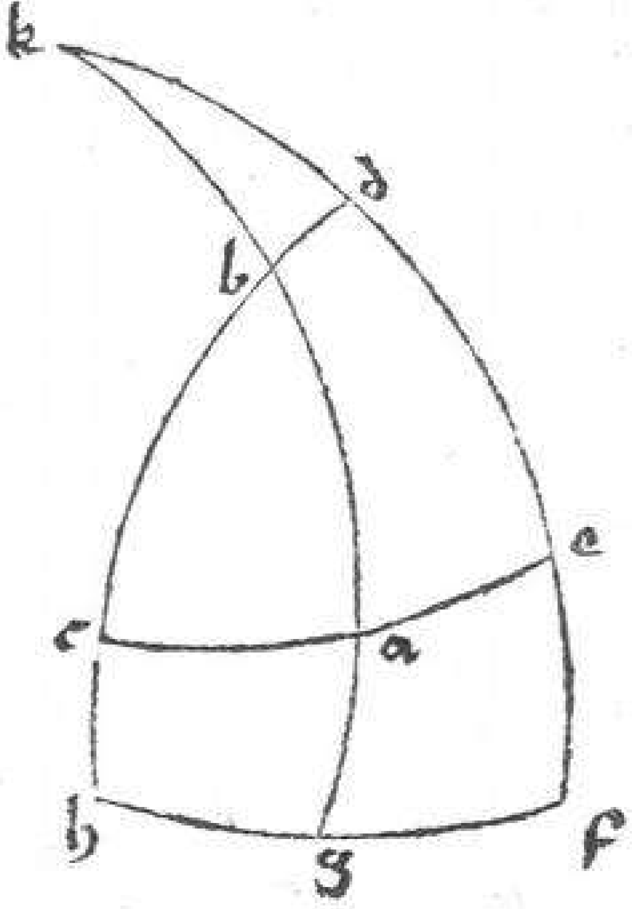
Triangulus a b c habeat angulum a rectum, & reliquos duos acutos. Dico sinum complementi anguli c acuti esse ad sinum totum sicut quod sub sinu complementi a b & sinu anguli continetur ad quadratum sinus totius, quod sic demonstratur. Producatur uterque arcuum c a & c b, ut fiant duo quadrãtes c e & c d, similiter b g & b h fiãt quadrantes, continuenturque puncta d & e per arcum d e, qui extensus concurrat cum h g educto in f, erit ergo uterque arcuum d f & h f quarta circuli propter angulos d & h rectos. denique duo arcus e d & a b inferius educti concurrant in k. Iam k d ad d f componitur ex duabus k b ad b g, & g h ad h f, de sinibus loquor, Sed k d est complementum anguli a c b, quoniam k est po-



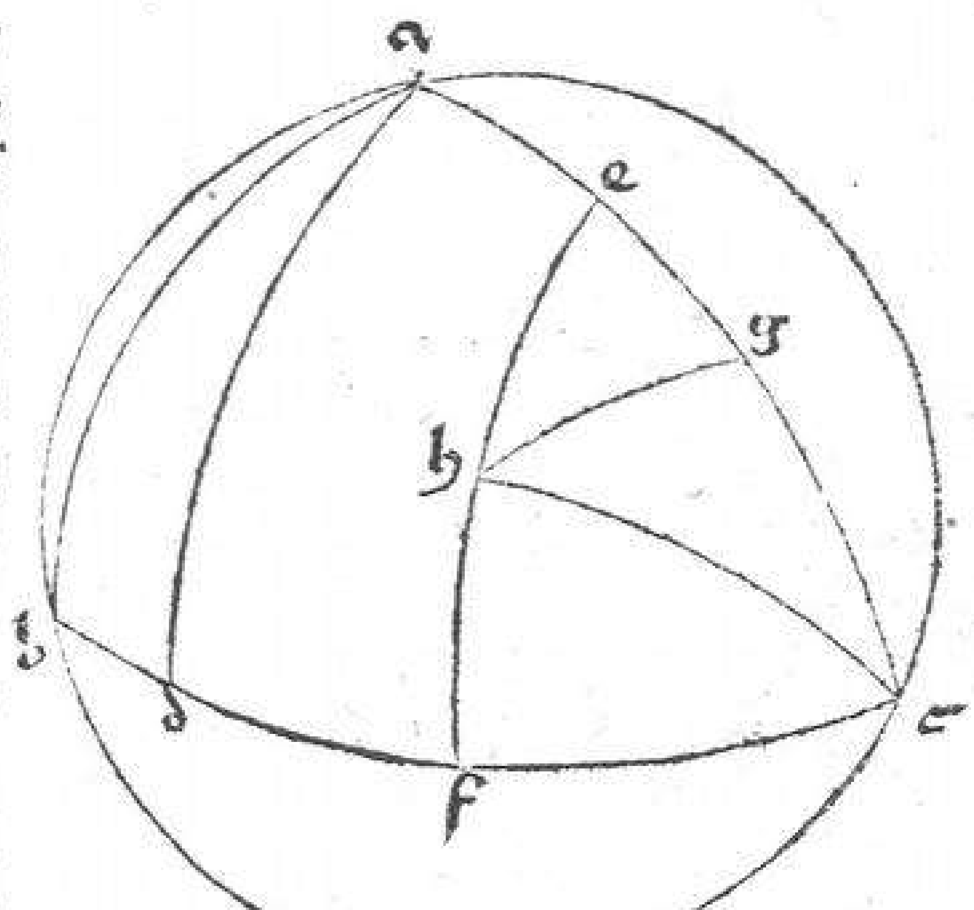
k est polus circuli c e ꝑpter angulos a & e rectos. k b autem est complementum lateris a b oppositi angulo a c b, & g h est quantitas anguli a b c, unusquisq; autem arcuum d f, b g & h f est quadrans circuli. Cum itaq; proportio eius, quod sub antecedentibus componentium continetur rectangulum ad id, quod sub consequentibus eorum continetur, id est ad quadratum sinus totius ex eisdem proportionibus componentibus componitur, patet propositio.

XV.

Dato triangulo sphærali circulum circumscribere.



Modus circumscribendi & inscribendi circulos est, ut in rectilineis triangulis, diuidendo scilicet latera per æqualia, aut angulos etc. uerum diametrum circuli circumscripti aut inscripti inuestigare, alia requirit media. Dupliciter nanq; potest inueniri diameter circuli circumscripti, aut scilicet per tres cordas notas, aut per arcus ipsos & scientiam triangulorum sphæralium, de inscriptione non sic, nam quicunq; circulus circumscribit sphæricum triangulum, is etiam rectilineum circumscribit, ex tribus cordis trium arcuum constantẽ, quod inscripto circulo non accidit. Triangulo a b c sphæralo circumscriptus esto a b c circulus, cuius semidiametrum quærimus per rationem arcuum. Sit a d arcus perpendicularis ad b c, b c per medium diuidatur in f puncto, unde exeat perpendicularis f e, in quo necesse est esse polum circuli circumscripti. diuidatur item a c per medium in g, eductusq; perpendicularis occurrat arcui f e in h, qui erit polus circuli circumscripti. ex tribus autem datis lateribus angulum c habebis, & deinde propter f c notum perpendicularis quoq; f e cum angulo f e c innotescet, & cum arcu e c, hinc e g notificabitur. & deinde propter angulum e notum arcus g h patefiet. cumq; & g c notus sit, erit etiam h c notus, qui inter polum & cuspidem anguli c, id est circumferentiam circuli circumscripti comprehenditur.



Quinti & ultimi libri Triangulorũ finis.

NORIMBERGAE APVD IO. PETREIVM, ANNO CHRISTI M. D. XXXIII.

IOANNIS DE REGIO MONTE GERMANI, NATIONIS FRANcicæ, Mathematicarum disciplinarum principis, De quadratura circuli, dialogus, & rationes diuersæ separatim aliquot libellis exquisitæ: Ad ea de re Cardinalis Cusani tradita & inuenta: quibus autor hæc præscripsit uerba Græca, quæ, ne quid illius subtraheremus studiosis, subijci curauimus.

ἐπιχειρήματα ποικίλα πρὸς τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμοὺς Νικόλεω τοῦ κουσαίου ἐκδεδομένους.

εἰς τοὺς ἐξοχωτάτους μαθηματικοὺς. Ἰωάννην ῥηγιομοντέα καὶ διδάσκαλον αὐτοῦ γεώργιον πουρβάχιον. Ἰωαχίμου.

καὶ ποτ' ἀρηϊφίλοις ἐν ἀθήναις εἶδ' ἀλεμανοῖς
οὐρανίης ἱεροὺς ἐκδιδάξαντα νόμους.
τὸν βασιλέως ἀπ' ὄρους φραγκῶν γένος ἄνδρ' ἰωάννην
τόν τε καθηγητὴν τοῦδε πουρβάχιον.
καὶ τότε δὴ θαύμασε καὶ αὐτὴν ὧδε προσεῖπεν
οὐδ' οἵην ζήτησεν καὶ τις ἔπετμεν ὅμως.
ἀλλὰ καὶ ἄλλα πόνῳ τε χρόνῳ τ' ἐπεδίσατο μακρῷ
πάντ' ἄρ' ἀπελπίστως οὐδέ τις εὗρεν ὅλως.

IOANNES SCHONER CAROLOSTADIVS GEORGIO TANSTETERO REGIO MEDICO S. D.

CVM aliquando, ut sæpe facio, uersanti mihi relictos ex
opulentiss. bibliotheca Ioan. de Regiomonte libros,
nec numero nec argumento cum amissis cōparandos,
sed qui tamē omnes essent optimi, uenisset in manus
meas libellus de quadratura circuli comparatus à Re-
giomontano aduersus inuenta hac de re Card. Cusa-
ni: statim dignus mihi libellus uisus fuit, qui studiosis Mathematica
rum disciplinarum communicaretur: sed per ocium introspicienti hoc
multo magis, quo melior utiliorq; apparuit. Cum autem placeret mi-
hi commendari hunc libellum præter autoris opinionem etiam alicu-
ius horum temporū excellentis uiri nomine, tu mihi in primis occur-
rebas, qui quamuis egregium librum accessione famæ tuæ ornare au-
gereq; posses, Georgi Tanstetere, propter eximiam & perfectā cogni-
tionem rerum Mathematicarum, quarum doctrina eā laudem & glo-
riam es adeptus, ut cum ueteribus facile parem te præstantia tua faci-
at, tum quem conferre tecum ex omnib. nationib. iure possimus inue-
niatur nemo. Mihi igitur, & admiranti te & colenti, quod tibi ignotū
esse nequit, diu iā curæ fuit declarandæ uoluntatis, iudicijq; de te mei
omnibus si possem mortalibus. Qua in cupiditate quæ aptior occasiō
potuisset sese offerre mihi, quàm dedicandi tibi hunc libellum, doctis
simi uiri, utriq; nostrum natione, mihi etiam patria coniuncti. Cuius
ut magnitudinē doctrinæ Italicos etiam & Græcanicos cōstaret admi
ratos, ita relinqueretur intelligendum omnibus, quanti te faceremus,
cuius nomen ornamento clariss. autoris singulari scripto futurum es-
se iudicassemus. Neq; te inuitum testimoniū iudicij nostri admissu-
rum confido, quum & te honorifice de me sentire, & nos diligentia &
laboribus innotuisse studiosis, illorumq; nonnullam esse existimati-
onem de meis studijs sciam. Quod si quis rem ipsam, & illud, quo de
agitur, expendere uolet, inuenietur profecto celebritate tua dignissi-
ma materia. Nam tanto ab hinc annorum interuallo tentatum opus,
neq; postea de manibus doctorum depositum, ad nostramq; ætatem
usq; retentū, certe debet nequaquam contemnendū uideri. Inuenio au
tem Anaxagoræ tribui in circuli quadratura exquirenda, singularem
laudem, cumq; in carcere, in quem esset coniectus ab Atheniensibus,

tanq; impietatis damnatus, illam rationem conscripsisse. Graeci uocãt τετραγωνισμὸν κύκλου, unde non, ut opinor, ineptiss. quadraturam latine fecerunt. Sed hanc rem multis seculis post Archimedes putatur diligentia summa exquisiuisse. Siquidem Anaxagoram constat Periclis temporibus uixisse, qui & auditor fuerit illius. Ita inter Archimedem & Anaxagoram ferè intercident anni ducenti octoginta octo. Possent alij nominari, ut Antipho, Briso, Hippocrates, Apollonius, qui & ipsi hoc spaciũ decurrissent, mensurationis curuae lineae ad regulã. Sed proxime Cardinalis Cusanus hanc quasi prouinciam gnauissime administrauit, rei difficilis, & ut ignoratae, ita opinor effugientis captũ humanũ, quãuis cognitione comprehendi posse Aristoteles scripserit, inuenisse rationem professus. Cuius breui libello summã, eandẽq; breuiori dialogo exposuit. Quae Ioanni nostrati acutiss. ingenij homini cum non probarentur, instituit in illa quasi inquisitionẽ quandã ad Paulum Florentinũ illis temporibus in omni genere scientiarũ peritum. Cum autẽ neq; gloriae neq; emolumenti spe, multoq; adeo minus inuidia incitatus, hoc opus suscepisset, ne nominauit quidem ferè Cusanum, tantum abest, ut illius aliquem famae labem aspergere conatus fuerit. Reliquimus autem omnia in Regiomontani scripto, sicut in archetypo ab ipso informata quoq; alicubi tantũ offendimus, iucundam futurã rati studiosis non cognitionẽ modo eorum, quae ille acutiss. exquisiuisset, sed exquisitionis etiam quasi uiam & rationẽ, atq; adeo non solum quid autor effecisset libenter uisuros, sed quos etiam habuisset inter opus cogitationes & animi motus. Accipies igitur à nobis doctiss. uir & hunc libellum exiguum munusculum, & admittes testimonium de te nostrum grato libentiq; animo. Et nos, ut fecisse te comperimus, ita perges tua beneuolentia complecti. E Norico pridie idus Iulij, anno M. D. XXXIII.

QVADRATVRA CIRCVLI D. NICOLAI DE CVſa, Cardinalis, Legati, Epiſcopi Brixinenſis.

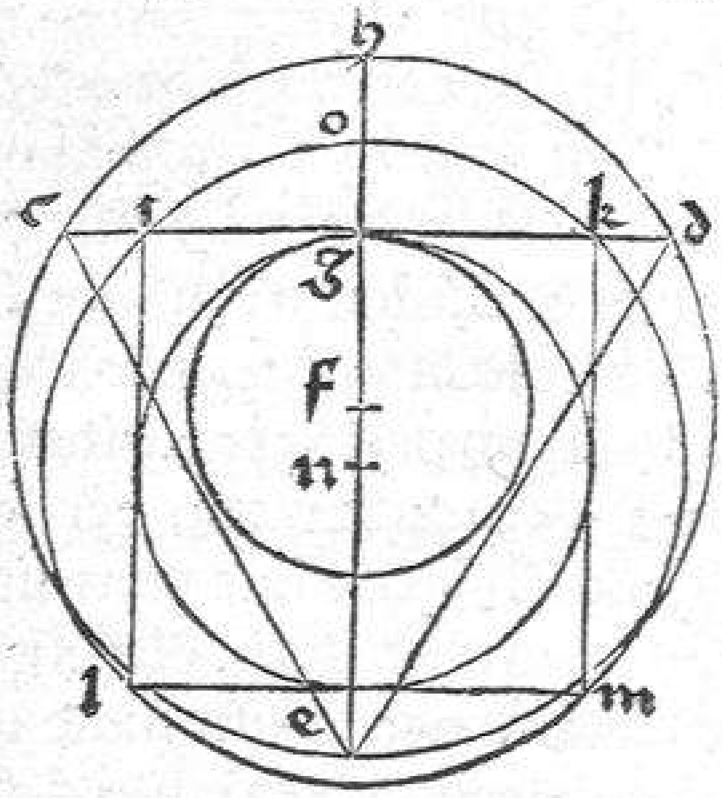
QVAMVIS iam dudum à ſtudio Geometrico nos altior ſpeculatio ac publica retraxerit utilitas: tamē inter innumeras ſerioſas curas, quas habet apoſtolica legatio, ſe inter colloquia ſtudioſorum delectabiliter immiſcuit, De quadratura circuli ſcibili & non ſcita, aſſertio: Quam dum nuper equitando reuolueremus, quod attigimus conſcripſimus.

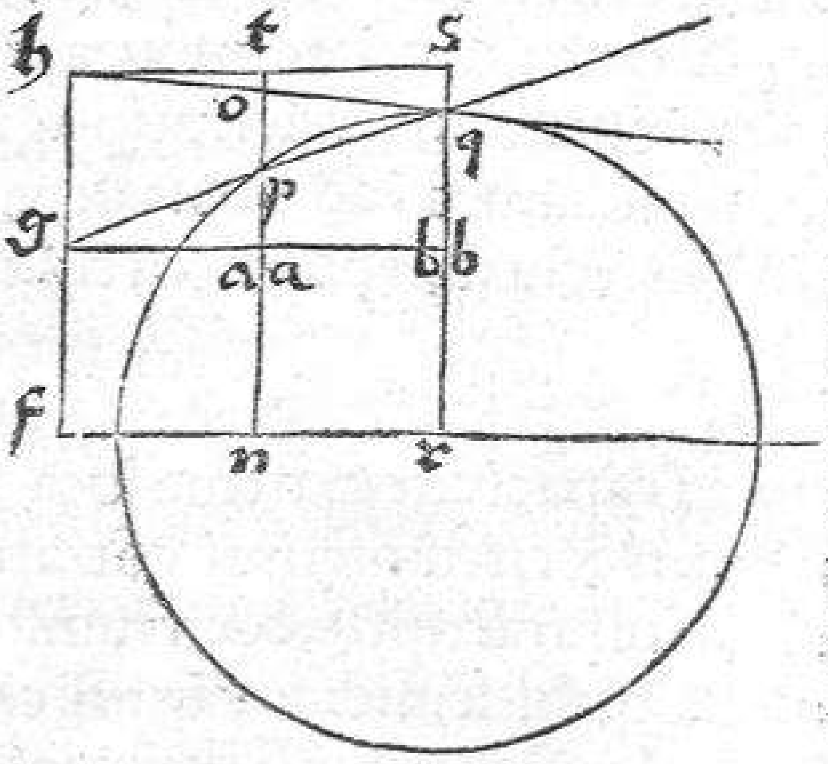
Non legimus quenquam propinquius acceſſiſſe ad huius noticiam, quàm Archimedem, qui primo quadrangulū circulo æquari oſtendit: in quo ſemidiameter circuli ducta eſt in mediam periferiam. hoc quidem ſic eſſe neceſſe eſt, ſi hoc cenſendum eſt eſſe æquale, quod nec maius nec minus eſſe conuincitur. In omnibus enim poligonijs, iſſopleuris & iſſoperimetris, de quibus ſolū in hoc ſcripto loquimur, ſemidiameter circuli inſcripti ſi ducitur in medietatem periferiæ, oritur quadrangulum æquale. Poſſe autem inter ſemidiametrum & medietatem periferiæ medium proportionale facile conſtitui, Euclides oſtendit. Quare tale cum ſit latus quadrati æquiualentis, conſcito quæ linea recta æquetur periferiæ circuli, ſcitur & eius quadratura, & hæc eſt certior oſtenſio. Sed dum per elicam hanc ultimam partem ſe reperiſſe crederet Archimedes, à uero defecit. Elica enim deſcribi nequit, niſi ſignum à centro per ſemidiametrum in tanto tempore moueatur, in quanto ſemidiameter pro circuli deſcriptione circumuoluitur. Deſcriptio igitꝰ elicæ hos motus ſupponit, quorum habitudo eſt ut ſemidiametri ad circumferentiam. Præſupponit igitur id, quod quærit. Citius enim recta dari poteſt circulari lineæ æqualis, quàm elica uera figurari.

Nos autem conſiderantes trigonum & circulum in capacitate extrema loca tenere: in trigono ſemidiametros circulorum, & inſcripti & circumſcripti cōtrario modo ſe habere, cum ſemidiametro circuli, in quo circuli inſcriptus & circumſcriptus coincidunt, qui differunt in trigono maxime: eſſeq; ibi ſemidiametrum circumſcripti maximam, & inſcripti minimam, & ſimul iunctas breuiſſimas: contrario modo in circulo ubi ſimul iunctæ ſunt diameter circuli maxima. Ob hoc ſcimus, omnes medias poligonias iſſoperimetras & iſſopleuras ſecundum capacitatem in illis ad æqualitatem ſemidiametri circuli accedere. Si igitur ſignata fuerit quantitas exceſſus ſemidiametri circuli, ſuper diametrū inſcripti trigono: & quantitas quo ipſa ſemidiameter circuli fuerit minor ſemidiametro circūſcripti trigono: tunc omnis poligonia media ſecundum ſuam capacitatem in exceſſu ſemidiametri ſibi inſcripti ſuper ſemidiametrum inſcripti trigono: & diminutione ſemidiametri ſibi circumſcripti, à ſemidiametro circumſcripti trigono proportionaliter ſe habebit. Nam cum illa ex diuerſa capacitate uarientur, non poteſt diuerſa eſſe habitudo illorum ab habitudine capacitatum. Sic ſemper neceſſe eſt, quòd ſicut ſe hahet exceſſus ad exceſſum, etiam ſic ſe habeat diminutio ad diminutionē: cum capacitas ita ſequatur unam diuerſitatem ſicut aliam, & non plus nec minus unam quàm aliam. Erunt igitur in omnibus poligonijs exceſſus & diminutio tales

les se ad inuicem habentes in proportione una; quare data una habitudine, per illorum scientiam in nota aliqua poligonia, tunc scitur & in circulo. Et quia excessus & diminutio in circulo simul iuncti æquantur semidiametro inscripti trigono ut de se patet. Igitur si reperta habitudine diuidentur secundum eam semidiameter inscripti trigono, & maior portio adderetur ad ipsam semidiametrum circuli inscripti trigono haberet semidiameter circuli issoperimetri, & ita oẽ quæsitum.

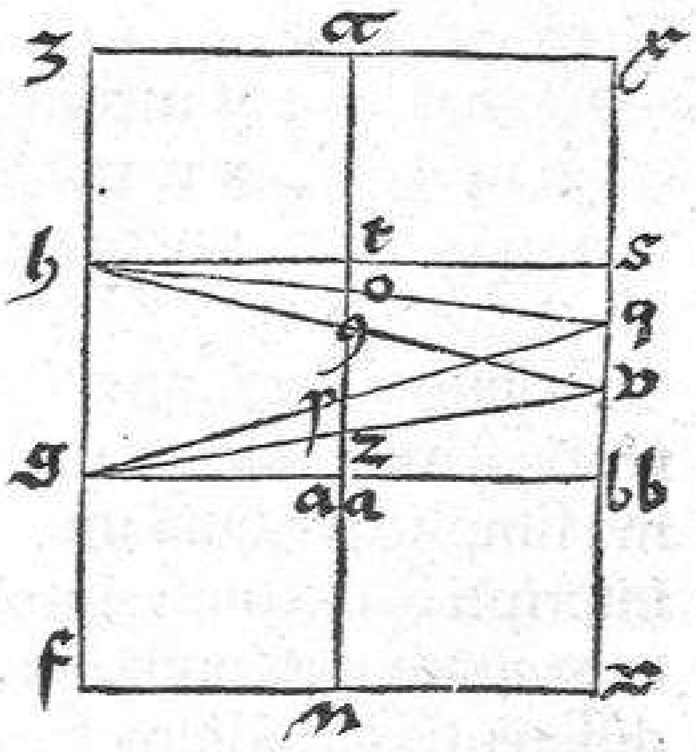
Faciemus autẽ hanc partem tibi hoc modo clariorem. Ex a b linea in tres partes diuisa, c d e triãgulus designetur, & in eius latere c d signetur pars quarta a b, quæ sit i k, quæ quadretur, & sit i k l m. Describantur inscripti & circumscripti circuli, & sit inscripti trigono semidiameter f g, & circũscripti f h, & inscripti tetragono n g, circũscripti n o, Signetur deinde linea f h, & in eius medio g, lineis de f g h tractis quantumlibet, trahatur ad f h æque distans t n, cuius medium sit aa, & signetur semidiameter inscripti alicuius poligoniæ issoperimetræ, puta tetragone, quæ sit n p, & semidiameter circũscripti, quæ sit n o, & trahe de g per p in infinitum, & similiter de h per o lineam in infinitum, & ubi ille concurrunt signa q, trahe p q æquedistantem ad f h, quæ sit s r, in cuius medio signa bb. Dicimus r q esse semidiametrũ circuli quæsiti, & eius circumferentiam æqualẽ a b lineæ rectæ.



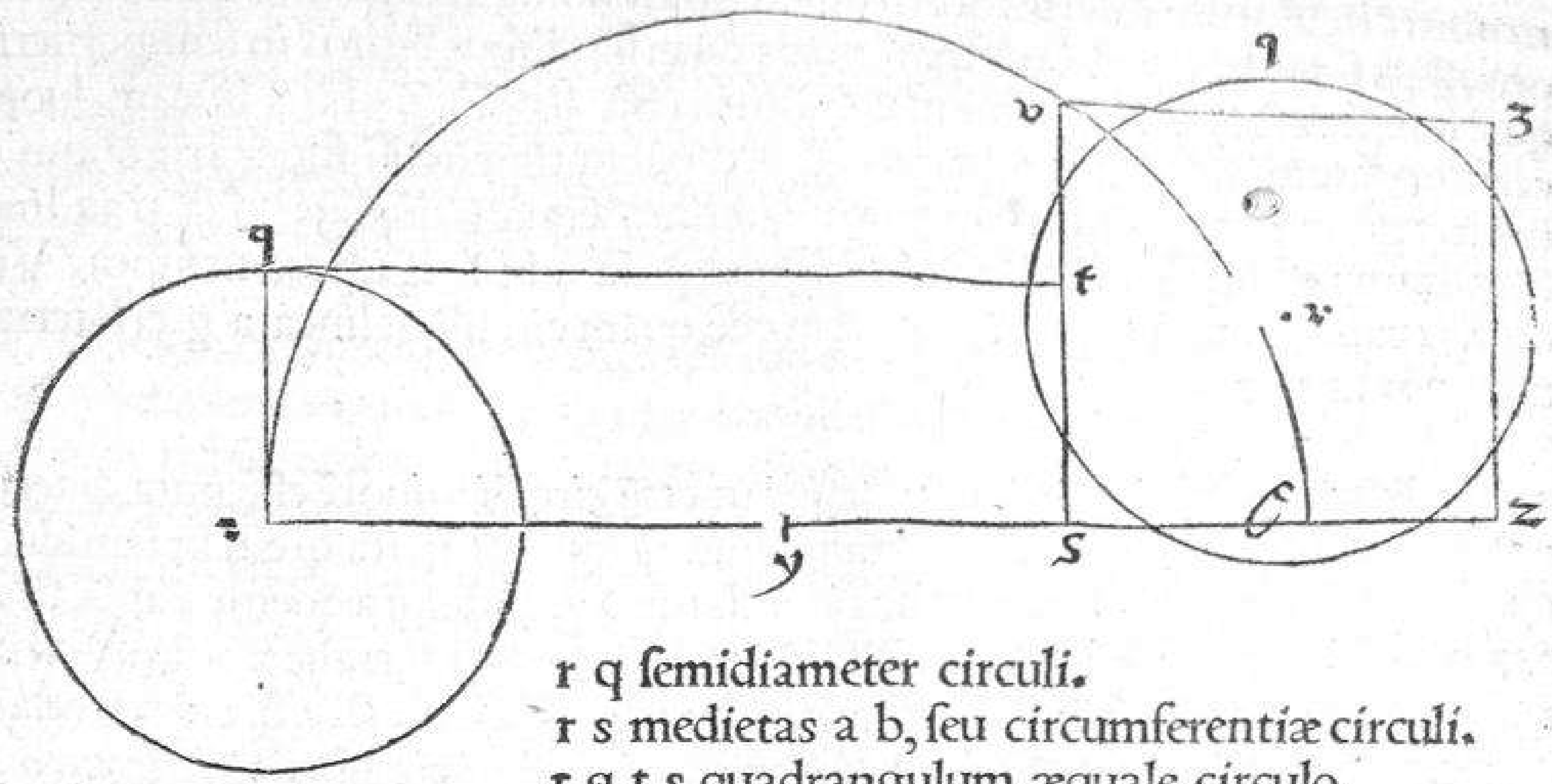


Multipliciter probatur & faciliter. Seruata igitur priori figura, ponatur g bb lineã esse differentiam capacitatum trigoni & circuli issoperimetri, & quod linea de r s moueatur uersus f h æquedistanter. Manifestum est, lineas h q & g q de illa abscindere omnes differentias semidiametrorũ circulorum inscriptorum & circũscriptorum omnium figurarũ poligoniarum de trigono usq; ad circulum ubi coincidunt. Est etiã manifestum, q simul linea illa mota abscinderet de linea bb g omnes differentias capacitatum inter trigonum & circulum. Nam quanto differentia semidiametrorum differentiarum est minor, tanto figura capacior. Ideo circulus capacissima figurarum, quia ibi coincidunt, & trigonus minimæ capacitatis, quia ibi maxime differunt. Sit igitur linea mota t n, quæ abscindat lineam g bb, in aa puncto, & sit p o differentia semidiametrorum in tetragono, quare si g bb est ut differentia capacitatum trigoni & circuli issoperimetri, erit g aa ut differentia capacitatum trigoni & tetragoni. Et quia n p est ex præsupposito semidiameter inscripti tetragono, & aa p excessus eius super f g semidiametrum inscripti trigono. Ideo bb q erit excessus semidiametri circuli issoperimetri super semidiametrum inscripti trigono. Nam quæ proportio bb g ad aa g, illa bb q ad aa p, ut notum est. Correspondent autem differentiæ semidiametrorum inscriptorũ in poligonijs issoperimetris cum differentijs capacitatum. Non enim euenit aliunde capacitatum differentia in issopleuris & issoperimetris, nisi ex semidiametrorũ trorum circulorum inſcriptorum differentia: quoniam capacitas ex multiplicatione illius ſemidiametri, quæ uariatur in diuerſis talibus figuris in ſemiperiferiam quæ ſemper eſt eadẽ, exoritur ut eſt notum. Sic ſi poſueris bb s lineam duorum exceſſuum ſemidiametrorum, ut exceſſum capacitatis circuli ſuper trigonum erit in tetragono exceſſus talis capacitatis, ut linea æqualis duabus t o & p aa lineis, & quia una eſt habitudo illius ad s bb, quæ p aa ad bb q, igitur ut ſupra. Vel ſi dixeris capacitatem trigoni minorem eſſe, quàm circuli, ut linea a g erit tetragoni minor ut p o.

Si adhuc negaueris, & dixeris ſemidiametrũ circuli minorẽ eſſe, puta quod terminetur in puncto medio inter s & terminũ lineæ g, quæ ſit u, ita quod e u ſit ſemidiameter circuli iſſoperimetri, tunc ſi ſic extendatur u s, quouſque æquetur r u, & ſit r x, & ſimiliter extendatur f h ad æqualitatẽ r x, & ſit f z ut r x, trahe z x lineã, deinde trahe de u lineas ad g & h, & ubi ſecauerint t n lineã ſigna 2 & 9, & t n extendatur uſque ad z x, & ſit cc n ut r x. Dico, quod ſi diameter inſcripti circulo iſſoperimetro addit ſuper ſemidiametrum inſcripti trigono quantũ eſt bb u, tũc ſemidiameter inſcripti tetragono addit quantũ eſt aa 2, igitur ſi ſemidiameter inſcripti tetragono addit quantum eſt aa p, tunc ſemidiameter circuli iſſoperimetri addit quantum eſt bb q. Hoc de ſe patet, ſi habitudo additionum eſt ut bb u ad aa 2, & nota eſt additio in tetragono, quæ eſt ut aa p, igitur erit in circulo ut bb q, cum una ſit habitudo aa p ad bb q, quæ aa 2 ad bb u. Quod autem illa ſit habitudo probatur. Nã ſi r u ponatur ſemidiameter inſcripti circulo, erit u x ſemidiameter circumſcripti, quæ coincidunt in circulo iſſoperimetro, & manifeſtum eſt, quòd r x eſt linea ex

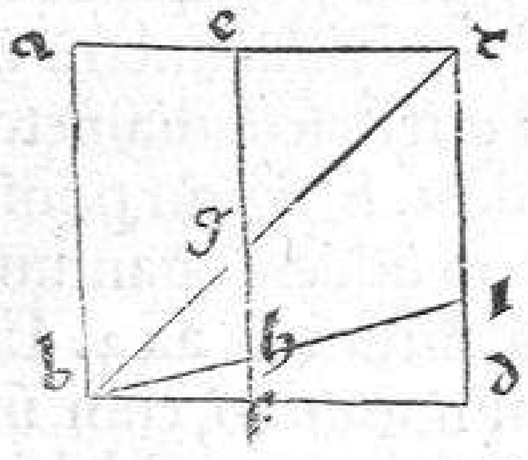


duabus illis ſemidiametris, & ſimiliter f z eſt linea illi æqualis, & eſt ex ſemidiametro inſcripti trigono & ſemidiametro circumſcripti eidem. Omniũ igitur poligoniarum inter trigonum & circulum duæ ſemidiametri tales non erunt minores f z, nec maiores r x, & ita ſemper æqualis, erit igitur n cc æqualis duabus illis ſemidiametris in tetragono, & quia 2 9 æquatur neceſſario p o, cum g h q triangulus æquetur g h u, ob æquediſtãtiam q u & g h, & ſimiliter o 2 ſit æquediſtans ad g h, hinc 9 2 erit ut p o, ut ex Euclide ſcilicet 37. primi, & 4. ſexti notum tibi exiſtit. ſed p o eſt exceſſus ſemidiametri circũſcripti trigono ſuper ſemidiametrũ inſcripti eidem, igitur & 2 9, & cum n 2 æquetur cc 9, igitur n 2 erit ut ſemidiameter inſcripti tetragono, & 2 cc ut ſemidiameter circumſcripti eidem. Si igitur ponitur ſemidiametrum circuli ſuper ſemidiametrum inſcripti trigono addere quantum eſt bb u, addet neceſſario ſemidiameter inſcripti tetragono quantum eſt aa 2. Et hæ additiones poſſent capacitates ſuper capacitatem trigoni nominari, cum in iſſopleuris & iſſoperimetris capacitatum exceſſus ex his ſolum proueniat. Habitudo igitur additionum erit, ut aa 2 ad bb u, quod erat probandum. Et ita in omnibus poligonijs pariformiter procedi poterit, ſicut in tetragono. Ex hoc conſtat propoſitum.



r q ſemidiameter circuli.
r s medietas a b, ſeu circumferentiæ circuli.
r q t s quadrangulum æquale circulo.
s x æquale r q.
y medium inter r & x, & centrum circuli r y x.
s u medium proportionale inter r s & s x. Ex nona ſexti.
s u z 2 quadratum æquale circulo, cuius ſemidiameter r q.

Adhuc aliter. Capacitas circuli ſuper capacitatem trigoni eſt maxima, & differentia ſemidiametrorum circulorum inſcripti & circumſcripti eſt nulla ſeu minima ſimpliciter, quia minor eſſe nequit, ſed differentia ſemidiametrorum circulorum inſcripti & circumſcripti trigono eſt maxima, capacitas uero eius ſuper ſuiipſius capacitatem eſt nulla uel minima ſimpliciter. Eſto igitur quòd aliqua linea ſit ut differentia ſemidiametrorum in trigono, & etiam ſit ut capacitas circuli ſuper trigonum, quæ ſit a b linea, quadretur igitur illa, & ſit quadratum a b c d, & ſit a b ut differentia ſemidiametrorum cum illa minima capacitate trigoni ſuper ſui ipſius capacitatem, & c d capacitas circuli ſuper trigonum cum illa minima differentia ſemidiametrorum talium, & trahatur linea diametralis b c. Dico in omnibus poligonijs medijs inter trigonum & circulum lineas capacitatis ſuper capacitatē trigoni cū differentia ſemidiametrorū non poſſe eſſe maiores nec minores a b aut c d, ut de ſe patet. Eſto igitur, quòd trahatur e f linea æqualis & æque



diſtans ad a b & c d, & illa ſecetur per b c in puncto g, & ſit g e ut differentia ſemidiametrorum talium in tetragono. manifeſtum eſt, quòd g f erit ut capacitas tetragoni ſuper trigonum. Erit igitur habitudo capacitatis tetragoni ſuper capacitatem trigoni ad capacitatem circuli ſuper capacitatē trigoni, ut g f ad c d. Signatur igitur in f g additio ſemidiametri inſcripti tetragono ſuper ſemidiametrū īſcripti trigono, & ſit f h, & trahatur de b per h ad c d linea, & cōtactus ſit i. Dico quòd d i eſt additio ſemidiametri circuli iſoperimetri ſup ſemidiametrū inſcripti trigono. Quæ enim eſt habitudo f g ad d c, illa f h ad d i, ſed diuerſitas capacitatis in iſopleuris & iſoperimetris ſup capacitatē trigoni nō euenit niſi ex diuerſa additione ſemidiametrorum circulorum inſcriptorum ſup ſemidiametrum inſcripti trigono. Quæ igitur eſt habitudo capacitatū ſup trigonū, illa eſt additionū ſemidiametrorum inſcriptorum ſup ſemidiametrū circuli inſcripti trigono. Per hoc patet quæſitum.

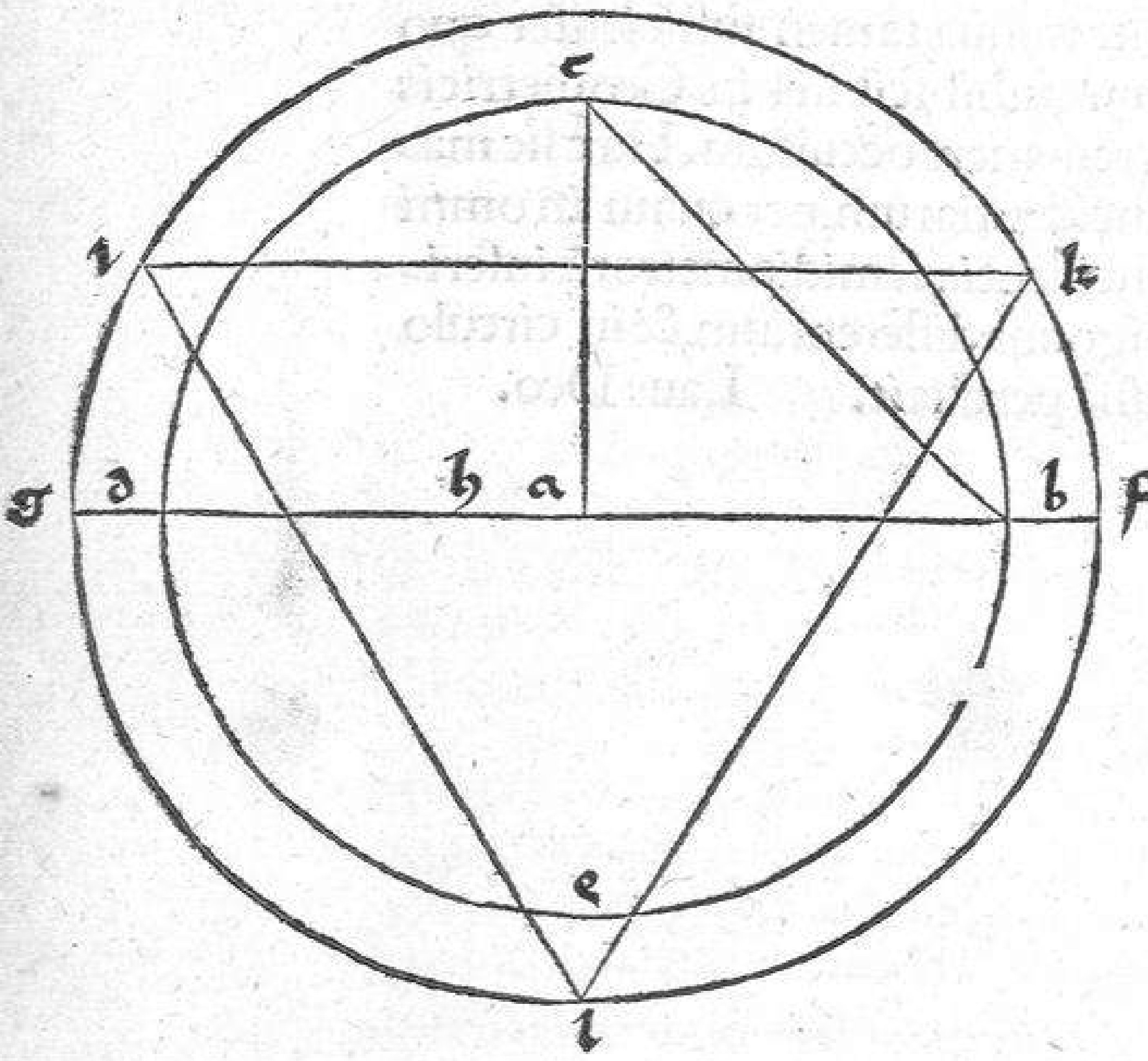
Eiuſdē

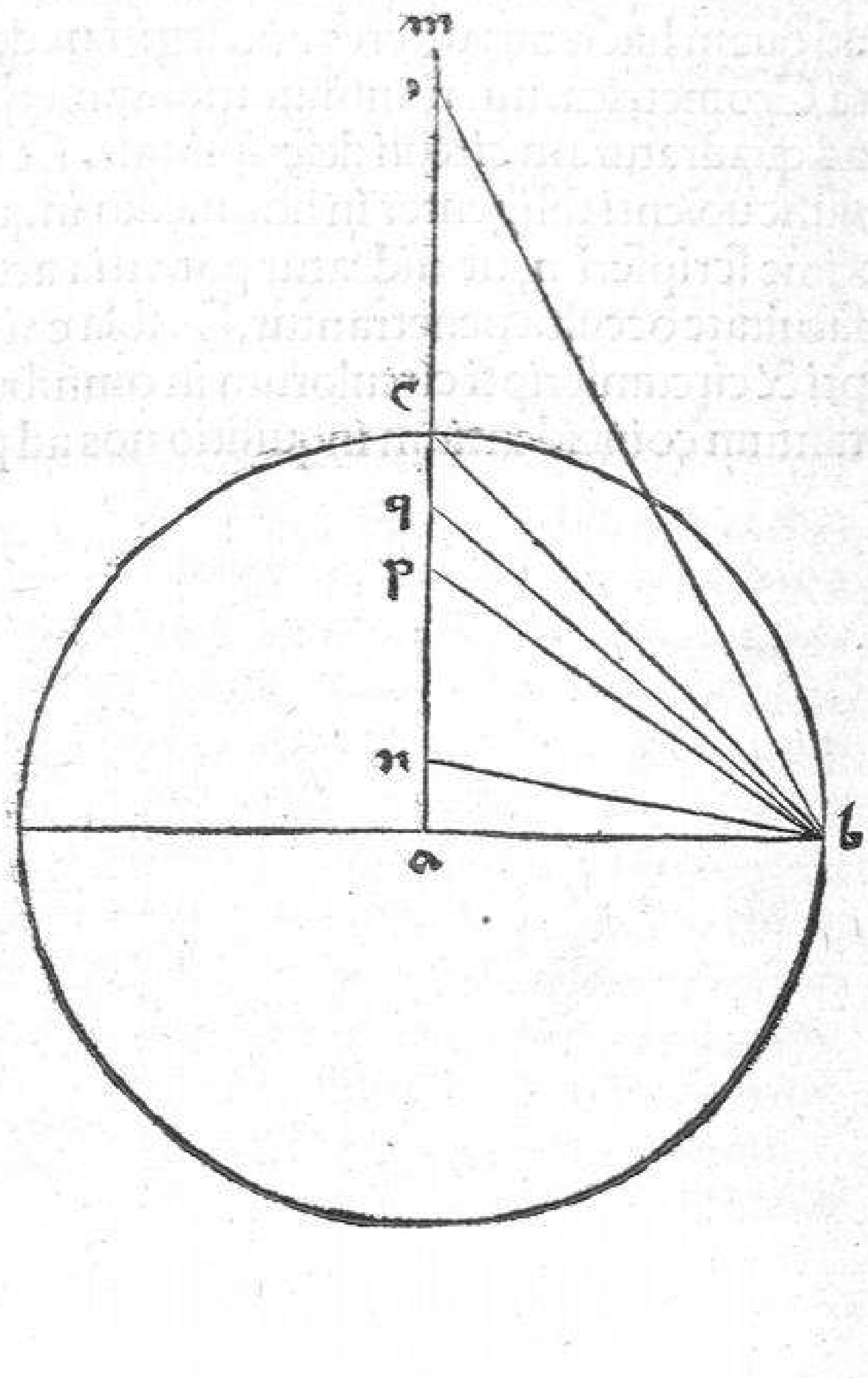
EX his nunc circa cordas & arcus ſcientia perfecta elici poterit. Nam ſi una eſt habitudo eius quod addit ſemidiameter inſcripti poligoniæ iſſopleuræ & iſſoperimetræ poſt trigonum ſuper ſemidiametrum inſcripti trigono ad id, quod addit ſemidiameter circũſcripti trigono ſuper ſemidiametrum circumſcripti illi poligoniæ: & ſi illæ additiones unà cum differentia ſeu ſagitta ſimul iunctæ æquiualent ſagittæ lateris trigoni, ut ex præmiſſis clare conſtat, tunc ſcita habitudine talium additionum, quæ tamen numero nõ attingitur, ſicut nec medietas duplæ, ars eſt reperta ad omne ſcibile in cordis & arcubus. Quæ autem ſit habitudo additionum ſic in propinquis numeris inueſtigatur. Eſto ꝙ ſemidiameter circuli trigono circumſcripti ſit 14. erit ſemidiameter inſcripti 7. cuius quadratũ 49. & quadratum ſemilateris trigoni ter tantum, ſcilicet 147. & quadratũ ſemidiametri circumſcripti quater tantũ, ſcilicet 196. erit igitur ſemilatus tetragoni radix $\frac{9}{16}$. & quadrati ſemilateris trigoni ſcilicet radix de 82 cum $\frac{11}{16}$. & talis erit ſemidiameter inſcripti. Erit autem ſemidiameter circumſcripti radix dupli numeri ſcilicet 165 cum $\frac{6}{16}$. Subtracta igitur radice de 49. à radice de 82 & $\frac{11}{16}$. differẽtia eſt additio ſemidiametri inſcripti tetragono ſup ſemidiametrũ inſcripti trigono, quæ erit aliquid plus ꝙ̃ duo, & ſubtracta radice de 165 cum $\frac{6}{16}$ à radice de 196. quæ erit parum plus quàm unũ. Habes additiones, & earũ habitudo eſt illa, per quam omnia inueſtigantur. Nam ſi has additiones ſubtraxeris à ſagitta lateris trigoni, ſcilicet 7. remanet ſagitta tetragoni. Si igitur diuiſeris 7 ſecundum præfatam additionum habitudinem, & maiorem addideris ſuper ſemidiametrum inſcripti trigono, habes ſemidiametrum circuli iſſoperimetri. Poteris etiam ex quadrato lateris trigoni aut quadrati ſcire ſic quadratum lateris cuiuslibet poligoniæ dabilis: & ex eius ſcientia & habitudine additionum deuenitur ad ſagittã & ſemidiametrum inſcripti, & ſic ſcitur corda. Et hæc eſt perfectio ultima Geometricæ artis, ad quam hactenus ueteres non legimus deueniſſe. Eſt etiam nunc ars completa Geometricarum tranſmutationum, quam ante minus, tamen ſufficienter quo ad quadraturam circuli deſcripſimus. Et putamus, nihil ſcibilis in Geometricis nunc uolenti diligenter in hoc medio inquirere, remanere occultum. Hæc ſic maxime ſcripſerim, ut uideatur potentia artis coincidentiarum, per quam in omni facultate occulta penetrantur. Ex ſola enim coincidentia ſemidiametrorũ inſcripti & circumſcripti circulorum in omnibus poligoniȷs differentium, & in circulo tantum coincidentium inquiſitio nos ad præmiſſa perduxit. Laus Deo.

Dialogus inter Cardinalem sancti Petri, episcopū Brixinensem, & Paulum physicū Florentinum, de circuli quadratura.

PAVLVS.

PAter optime, quia me nosti à puero ueritatem quæsi[illegible]isse, quæ in Mathematicis clarius uidetur relucere, atq; quantum cupiam hactenus ignotam circuli quadraturã. Si igitur post mihi missos tuos de Mathematicis complementis, utiq; mihi obscuros atq; incertos libellos alius certior modus incidit, rogo communices. NICOLAVS CARD. Imò facilis, & ut puto certus. PAV. Dicito quæso. NI. Omnia tibi nota scio, quæ ad rem pertinent, solum hoc unico dempto, scilicet ut datæ circumferentiæ circuli scias rectam lineã ei æqualem assignare. PAV. Ita est, nam mihi ex Archimede notum est, si semidiametrum circuli duxero in lineam æqualem semicircumferentiæ, oriri quadrangulum circulo æqualem. NI. Vt igitur tibi pandam conceptũ circa id quod restat accipe propositionem. Si corda quadrantis dati circuli fuerit addita semidiametro, eiusdem oritur diameter circuli circũscripti trigono issoperimetro circũferentiæ dati circuli. Puta sit datus circulus super a descriptus b c d e, & b c quadrans tracta corda b c, & lineis a b & a c, & sit alius circulus super eodem a centro descriptus, cuius diameter f g sit ut a b & b c, scilicet g h ut b a, & h f ut b c, & inscribatur trigonus i k l. dico illum trigonum rectilineum æquari circumferentiæ curuæ b c d e. PAV. Facilis est hæc praxis atq; carissima, si hoc uerum ostenderis. NI. Conabor seruata descriptione dati circuli, lineam a c continuabo in infinitum, quæ sit m a, dico non dubium de b ad a m lineam, aliquam posse lineam duci, quæ sic se habet, q; si ei additur alia linea, quæ se habeat ad ipsam sicut costa ad diametrũ quadrati, exsurget linea æqualis diametro circuli circũscripti trigono issoperimetro dati





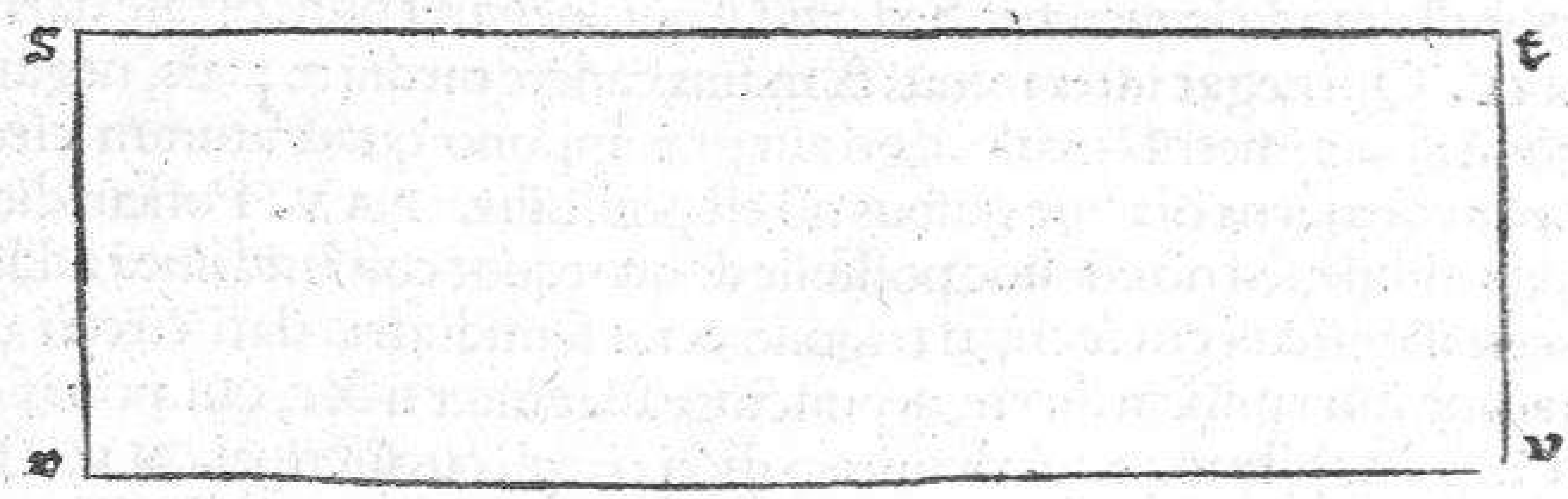
dati circuli. PAV. Admitto,nam potest dari linea sic de b ad a m tracta, cui si additur alia habens se ad ipsam ut costa ad diametrum,oritur linea minor diametro circuli circũscripti trigono isoperimetro dati circuli,ut si trahitur ad punctũ prope a,quæ ponatur esse n.& sic potest dari alia,quæ ad punctum prope m puncto o trahatur,quæ cũ costa sit maior:igitur inter n & o erit punctus, ad quem si trahitur linea de b.illa cum costa erit æqualis,nec maior scilicet,nec minor diametro circuli circũscripti trigono isoperimetro dati circuli. NIC. Bene dico igitur,ꝙ sicut si acceperis b n cũ quotquot uolueris costis suis, linea quæ oritur erit minor diametro circuli circũscripti trigono,& tot semidiametris dati circuli, q̊t costas addideris una costa dempta,& si acceperis b o, cũ tot costis suis sicut uolueris,exurget linea maior semidiametro circuli circũscripti trigono,& tot semidiametris dati circuli,quot costas addideris una dempta.Igitur etiam erit punctus inter n & o. ad quem si de b lineam traxeris,sic se habebit,ꝙ ipsa erit æqualis diametro circuli circũscripti trigono,& tot semidiametris dati circuli,quot costas addideris,una dempta:hoc aũt nõ est possibile nisi in puncto c.cuius costa est ut semidiameter dati circuli,scilicet ut b a, aliàs si costa foret maior aut minor ꝙ̃ b a, nõ erit hoc possibile. PAV. Fateor primũ,scilicet ꝙ b n cũ tot costis,sicut placuerit,sumptis,maneat minor diametro circuli circũscripti trigono isoperimetro,& tot semidiametris dati circuli una dempta,intelligo una dempta : quia unã costã iungis lineæ b n pro diametro circuli circũscripti,patet,nã cũ b n costa sit minor ꝙ̃ illa diametri,& costa sit minor ꝙ̃ a b, patet totũ.Sic contrario modo se habet linea b o,& etiã patet:est etiã certũ,si sic debet fieri,quo ad æqualitatem in aliquo medio puncto,ꝙ ille sit c,ob rationẽ quã dixisti.Si em̃ costa foret minor aut maior a b linea,nullo modo sequeretur.Sed quid si quis negaret punctũ talẽ dari inter n & o? NIC. Qui negat inter minus & maius cadere mediũ æquale, negat dari posse trigonũ isoperimetrũ circulo.Ego aũt præsuppono quadraturam circuli possibilẽ,& per cõsequens oĩa sine quibus nõ est possibilis. PAV. Possem dicere nihilominus possibilẽ,sed nõ esse hoc possibile de quotquot costis ad lineã addendis,ut diameter ille circuli circũscripti trigono & tot semidiatris dati circuli una dempta oriantur,quia possem dicere,ꝙ punctus cadat inter n & c, qui ponat̃ esse p.& ꝙ linea b p cũ costa æquetur diametro dicti circuli circũscripti. NIC. Tũc nõ negas,quin si b p caperetur cũ duabus costis,ꝙ tunc foret æqualis diametro dicto,sed c[illegible]c minor semidiametro dati circuli,quia costa minor ꝙ̃ a b. PAV. Quomodo negarem hoc? NIC. Esto igit̃ ꝙ recipiam punctũ super p, qui sit q, ubi b q cũ costa sit tantũ maior diametro dicto,quantum una costa minor linea a b,hoc quidẽ tũc est possibile.Nonne hoc dato b q cum duabus costis ualeret dictũ diametrũ,& cũ hoc semidiametrũ dati? PAV. Quis dubitat? NIC. Quid si quærerem lineã ,quæ cũ costa excederet diametrũ dictũ,quantũ duæ costæ sunt duobus semidiametris dati circuli minores? PAV. Oportet punctũ esse adhuc propinquiorẽ puncto c. NIC. Quid si adhuc pluribus costis additis uelles lineã pluribus semidiametris æquari. PAV. Necesse foret cõtinue punctũ accedere ad c. NIC. Recte dicis,si igit̃ in infinitũ sic processeris,necessario ultimo ad c punctũ deuenires,cũ ante c punctum costa semper sit minor a b. PAV. Optime dicis. NIC.Constat igit̃ ꝙ hoc nõ est impossibile,scilicet ꝙ inter n & o cadat punctus, ad quẽ linea ducta,sic se habeat,ꝙ quotquot costas ei addideris, ipsa erit æqualis diametro circuli circumscripti trigono isoperimetro,& tot semidiametris dati circuli,quot addideris costas una dempta,sed ille erit c punctus,& si dixeris punctũ ultra c uersus o esse, idem inconueniens sequitur, cõtrario modo arguendo,quia

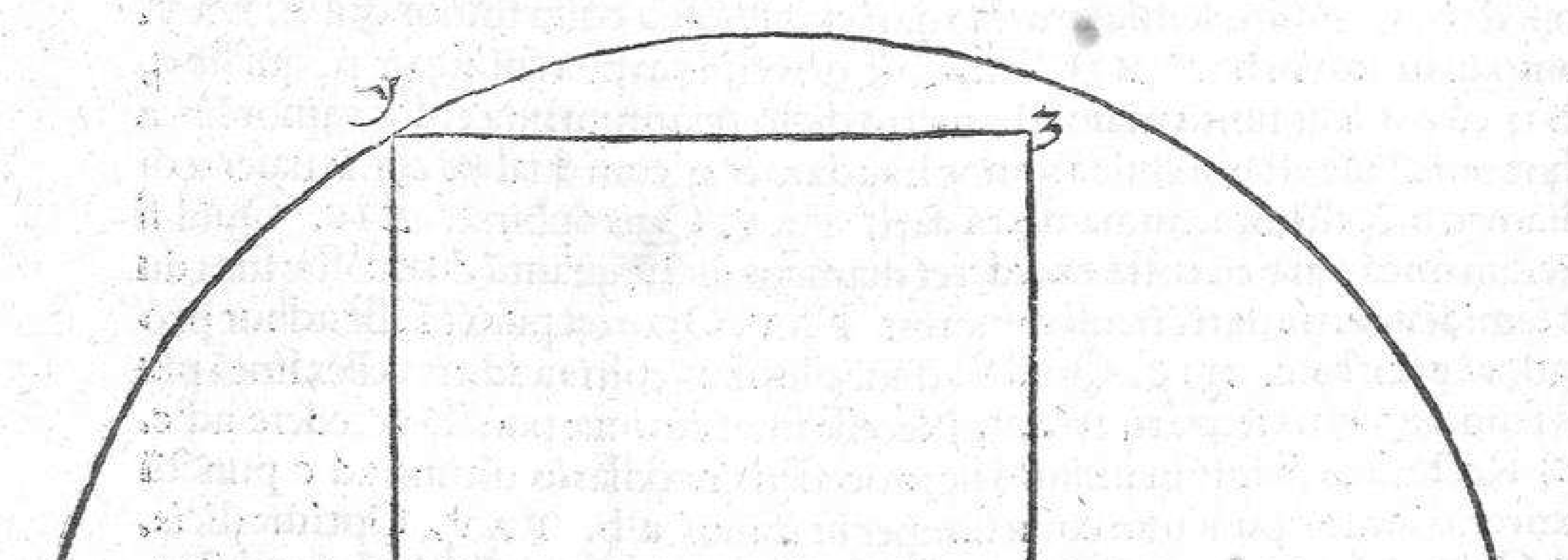
deueniet̃

deuenietur necessario iterũ ad c punctum. PAV. Non possum negare quin ita sit, ut clare ostendisti, manifeste enĩ constat, ꝙ qui punctũ citra uel ultra c dixerit esse, ille errat, & error conuincit̃ ex ipsius positione, quoniã oĩs linea maior b c cũ costa sua est maior diametro circuli circũscripti trigono isoperimetro, & minor cũ costa est minor diametro. NIC. Posset adhuc alia uia idipsum ostendi, & plures modi sunt diametros circulorũ inscriptorũ & circumscriptorũ polygonijs isoperimetris datis circulis faciliter reperiẽdi ex sciẽtia, ꝙ capacissima polygonia infinitorꝫ laterũ coincidit cũ circulo, sed sufficit iste modus, reliquũ ad te remitto. PA. Satis est scire modũ curuã circumferentiã in rectam lineã transmutandi, & econuerso rectã in curuã, ex quo oĩa, quæ hactenus in mathematicis ignorabãtur, possunt elici, prout in mathematicis tuis tetigisti cõplementis. Qui igitur reduxerit curuã in rectã, ducat semidiametrum dati circuli in semirectã æqualẽ circũferentiæ, puta sit r s ut a b, & s t ut medietas trium lineaꝝ i k l, concludendo quadrangulũ r s t u, qui erit ut area circuli b c d e, reperiat mediũ ꝓportionale inter r s & s t per nonam sexti Euclidis, & sit x y medium proportionale scilicet costa quadrati, & erit x y z & quadratũ æquale circulo. Ista nota sunt, & ideo tibi Nicolao patri optimo gratias ago, quòd tot tuis curis nõ obstantibus dignatus es tuũ ingeniũ ad hãc rem ab oĩbus doctis in Mathematicis desideratã, & nõ repertã applicare, & post multos labores & uarios modos facilimã atqꝫ clarissimam inuentionẽ tuã propalare, & inquisitores â fatiga magna releuare.

Finis. Brixinæ. 1457.

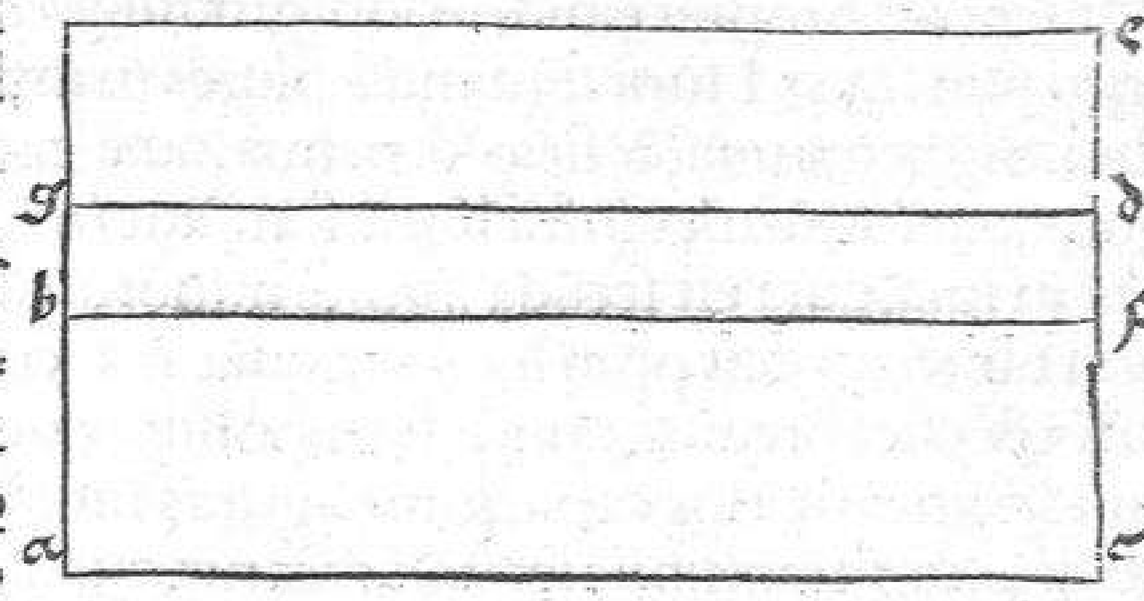
Capacitates





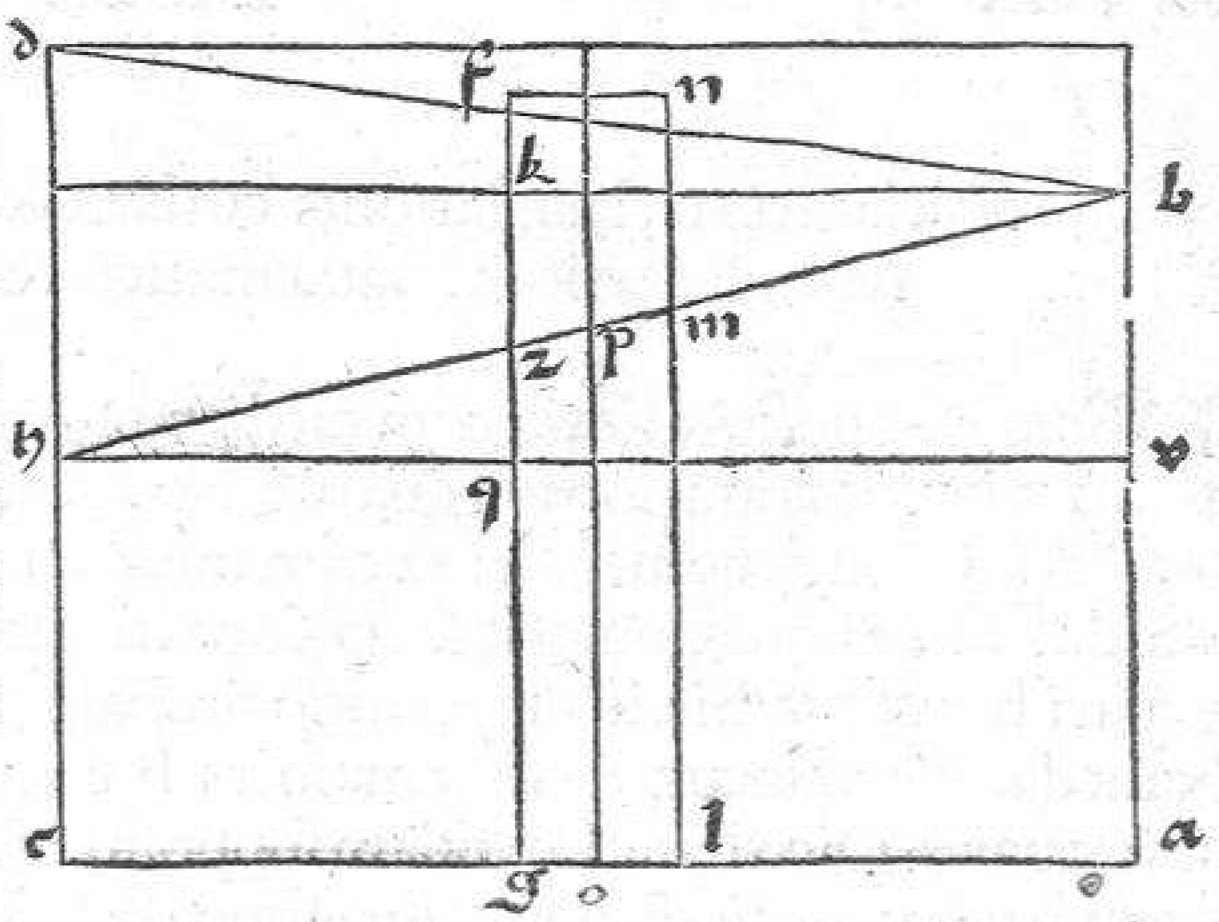
CApacitates omnium poligoniarum iſſoperimetrarum adinuicem & ad circulum iſſoperimetrum eandem proportionẽ habent, quam primæ lineæ unius ad primas lineas alterius, & ad ſemidiametrum iſſoperimetrum. Similiter exceſſus capacitatis aliarũ à triangulo ſupra triangulum in eandem proportionem ſe habent ad capacitatem trianguli, quam habent exceſſus primarum linearũ aliarum figurarum à triangulo ad primam trianguli lineam. Verbi gratia.

Sit prima trianguli a b prima alterius figuræ mediæ, ut quadrati c d prima circuli ſiue ſemidiametri c e, ſit a c ſemicircumferentia oĩm iſtarum ſuperficierum, quoniam ſunt iſſoperimetræ, erit ſuperficies a e capacitas circuli, ſuperficies a d capacitas figuræ mediæ ut quadrati, ſuperficies a f capacitas trianguli. Dico



primo, ꝙ qualis eſt proportio ſuperficiei a e ad a d ſuperficiem, talis eſt c e lineæ ad e d lineam, & qualis proportio eſt a d ſuperficiei ad a f ſuperficiẽ, talis eſt c d lineæ ad c f lineam. per primã enim ſexti Euclidis dictæ ſuperficies ſunt eiuſdem altitudinis, ergo ſuis baſibus ſunt proportionales. Eodem modo probatur de exceſſibus capacitatũ, quia eædem ſunt proportiones de ſuperficiebus g e, & b d ad lineas e d & d f, uel de ſuperficiebus b e & b d, qui ſunt exceſſus capacitatum circuli & quadrati ſupra triangulum ad lineas f e & f d, qui ſunt exceſſus primarum linearum circuli & quadrati ſupra primam trianguli. hæc clara ſunt ex eadem prima Sexti Euclidis. Quicquid ergo de capacitatibus corporum dicitur, & capacitatibus exceſſuum de ipſis primis lineis, dici poteſt & de eorum exceſſibus.

Si a ſecunda extremitate primæ circuli ad ſecundam trianguli linea recta ducatur æquediſtanter baſi in ea proportione, qua diuidet exceſſum ſecundæ ſupra primam ipſius trianguli, in eadem proportione diuidet exceſſus ſecundarũ à primis omnium aliarum figurarum mediarũ. Sit ſupra extremitatem lineæ a c erecta linea a b, quæ ſit prima circuli, & ſuper alia extremitate dictæ lineæ a c, ſit erecta linea c d, quæ ſit ſecunda trianguli, quia linea a b eſt minor linea c d, ſi à puncto b trahatur linea b e æquediſtans baſi a c, perueniet in linea c d, & diuidet exceſſum ſecundæ à prima, qui eſt h d in quadam proportione d e ad e h. Dico ꝙ ſi prima & ſecunda alicuius figuræ mediæ deſcribatur, ut g i prima, & g f ſecunda, ꝙ exceſſus ſecundæ à prima, qui eſt f i diuident ab ipſa b e linea in puncto k, in eadẽ proportione quæ erit f k ad k i ductis lineis d b h b. ita ꝙ erit eadem proportio f k ad k i, quæ d e ad e h, totus enim triangulus d h b diuiſus eſt per æquediſtantem baſi f i, erit ergo proportio e b ad k b, ſicut d h ad f i, & eadem proportio erit d e ad k f, & e h



b ad k.

a d k i propter similitudinem triangulorum, sicut e b ad k b: Sicut ergo d e ad f k, ita e h ad k i, permutatim ergo sicut d e ad e h, ita f k ad k i, ergo illi excessus proportionabiliter sunt diuisi, quod fuit probandũ. Forte dicitur, quod si g f est secunda unius figuræ mediæ, quòd g i non erit prima. Erit ergo prima eiusdem figuræ aut maior g i aut minor. sit primo maior, & sit l m, quã extendo sursum usque ad n, ita quod l n sit æqualis g f, & traho lineam f n æquedistanter basi propter eandem longitudinem duarum linearũ g f, & l n. Inter duo ergo puncta g l sunt signandæ plures primæ & secundæ lineæ figurarum mediarum. Signetur una, & sit o p prima, quæ extendatur usque ad secundam eiusdẽ figuræ, aut proueniet infra lineã f n, aut in ipsa linea, aut supra. Non infra ipsam, nec in ipsa, quia est secũda figuræ minoris capacitatis, ergo deberet esse longior, non tamen potest poni longior, quia g f est posita inter figuras minoris capacitatis, & esset breuior, quod est impossibile, quia non diminuendo procederent secundæ lineæ uersus capaciores figuras incedendo, quod est impossibile. Eodẽ modo dicetur impossibile sequi, si dicatur, quòd prima eius erit minor g i. Cum ergo nec maior nec minor dici potest, ipsa g i erit prima, quia omnes excessus secundarum à primis in eadem proportione diuidentur, quod fuit probandum.

Hæc uidetur declaratio undecimæ conclusionis uestræ, in qua pendet tota demonstratio quadraturæ. Nam qualis est proportio h q ad q i, talis est h r ad r b. Istarum autem quatuor linearum proportionaliũ tres primæ sunt notæ, h q prima, quia subtractio sagittæ quadrati uel alterius mediæ à sagitta trigoni q i. Secunda est etiã nota, quia excessus primæ tetragoni à prima trigoni. Tertia etiã est nota, h r, quia sagitta trigoni. Si ergo multiplices h r in q i, & diuidas per h q, habetur r b nota, quæ adiuncta primæ trigoni r a erit a b nota prima circuli siue semidiameter, quod intenditur. Sed non uideo cur duæ lineæ h b & b d concludentes omnes illos excessus primarum & secundarum, non possent esse curuæ omni genere curuitatis, & tunc non procederet demonstratio: erit enim illud quod in decima tua conclusione dixisti, quod primæ capaciorum erũt semper maiores, & secundæ minores: hæc uolo mihi in præsenti sufficiãt. Multa habeo, quæ me mouent, quòd istæ coincidentiæ siue intensiones & remissiones formarum nõ per lineas rectas signari debeant, ut moderni ponunt, sed in aliud tempus reseruo. Vale. Detur uenerabili nostro fideli dilecto magistro Georgio Peurbachio Astronomo.

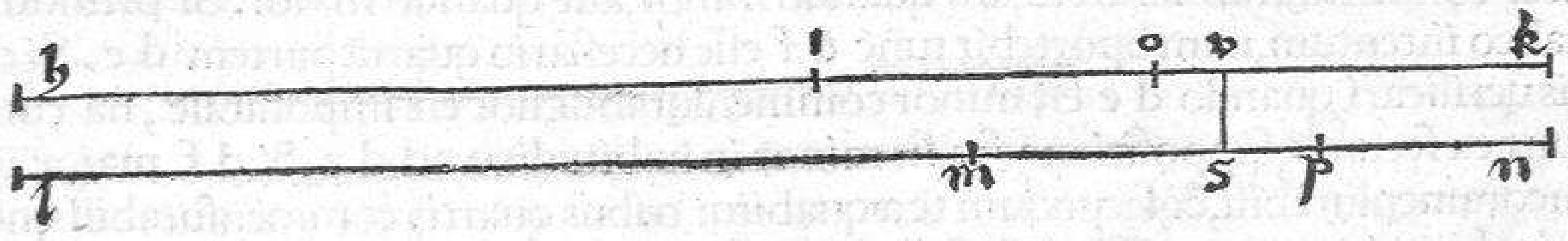
Declaratio rectilineationis curuæ, quæ ponitur in primo modo secundi libelli de Mathematicis complementis.

PRima suppositio. Sexta cum medietate portionis quintæ, quæ cadit inter curuam & quadratã potest æquari b e curuæ. Hæc suppositio certa est ut in litera. Secunda suppositio. Sexta cnm medietate portionis, & quinta cum medietate differẽtiæ cordæ, quæ est sexta, & partis quintæ, quæ etiam est corda, possunt æquari b e curuæ bis. Illa suppositio probatur uti præmissa in textu probantur. Nam dabilis est locus, ubi sunt maiores b e curua bis, & ubi minores, & ideo & ubi æquales. Dico hanc secundam suppositionem non habere locum, nisi ubi differentia est ut portio, & hoc prima suppositio. Nam si dixeris in secunda suppositione, differentiam maiore portione, erit igitur quinta minor sexta, quæ est sextæ æqualis, quãdo differentia cordarũ sicut portio quintæ, & minor si differentia maior, & maior si differentia minor, ut de se patet. Esto igitur, quod ad sextam addatur

tota

tota portio, & ad quintam tota differentia, tunc erunt æquales, & quælibet maioris b e curua. Si igitur subtrahitur æquale, ut quælibet sit sicut b e curua, tunc necesse est ꝙ de sexta cum portione subtrahat̃, plusquã medietas portionis, cum portio ponatur minor differentia, & oportet ꝙ de differentia subtrahat̃ minus ꝙ̃ medietas, & tantum minus eius medietate quantum prius plus medietate portionis, ut simul maneat medietas portionis & medietas differentiæ, quæ additæ sextæ & quintæ, efficiant b e curuam bis, ut de se patet. Sexta igitur cum medietate portionis erit tunc maior b e curua, non erit igitur sexta cum medietate portionis æqualis b e curuæ differentia portionẽ excedente. Puta tu dicis, ꝙ b g quinta cum medietate differentiæ f e sextæ, & b g cordæ quintæ, & e f sexta cum medietate f g portionis simul æquentur b e curuæ bis, & dicis differentiam f e & f b maiorẽ f g portione. Sit igit̃ linea h i ut quinta b g, cui addatur differẽtia quæ sit ut i k. Sit alia linea sub dicta descripta l m ut sexta f e, cui addatur portio f g & sit m n ut f g, linea h k est ut linea l n, signetur medietas differentiæ quæ sit i o, & medietas portionis quæ sit m p, cadat orthogonaliter inter p & o, quæ sit r s. Quanto igitur m s est minus medietate portiõis quæ est m p, tanto i r maior medietate differentiæ quæ est i o, erit igitur l s æqualis b e curuæ, sic sexta l m cum medietate portiõis est maior b e curua, ubi ergo sexta cũ medietate portionis debet esse æqualis b e curuæ, medietas differentiæ non erit maior medietate portionis. Sic si dixeris differentiã minorẽ portione, sequit̃ sextã cũ medietate portionis minorem b e curua, oportet igitur, si sexta cum medietate portiõis debet esse æqualis b e curuæ, quòd differentia sextæ & cordæ quintæ nõ sit maior ac minor portione, quo casu probat primum præsuppositũ secundum, scilicet quintã cum medietate differentiæ, & sextam cũ medietate portionis, tunc æquari b e curuæ bis, quando differentia fuerit ut portio, & hoc est, quando quinta est ut sexta, & hoc est intentum. Ecce mirabilem modum ostensionis, quoniam siue dixeris differentiam æquari portioni in secũda suppositione, siue non æquari, sequitur in prima suppositione differentiam æquari portioni, & per consequens & in secunda suppositione, & est quædam coincidentia oppositorum, quoniam per hoc ꝙ dicis differentiã non æquari portioni, sequitur, ꝙ æquetur, & falsum interimit seipsum.

b 2



DE VNA RECTI CVRVIQVE MENSVRA.

Nicolaus Cardinalis S.Petri.

QVia uidi practicum magisterium commensurationis curui & recti deesse Geometricis, ideo ipsos imperfectos, & plura quæ possibilia fieri uident, ad actum deducere non posse, conatum igitur non paruum adhibui, ut ipsam artem assequerer, quam si reperi, tu qui hæc leges, iudicabis.

Commensurari autem curuum & rectum dico, quando una mensura mensurantur, puta quando recta linea tot pedes habet rectos, quot arcus curuos.

Propositio prima.

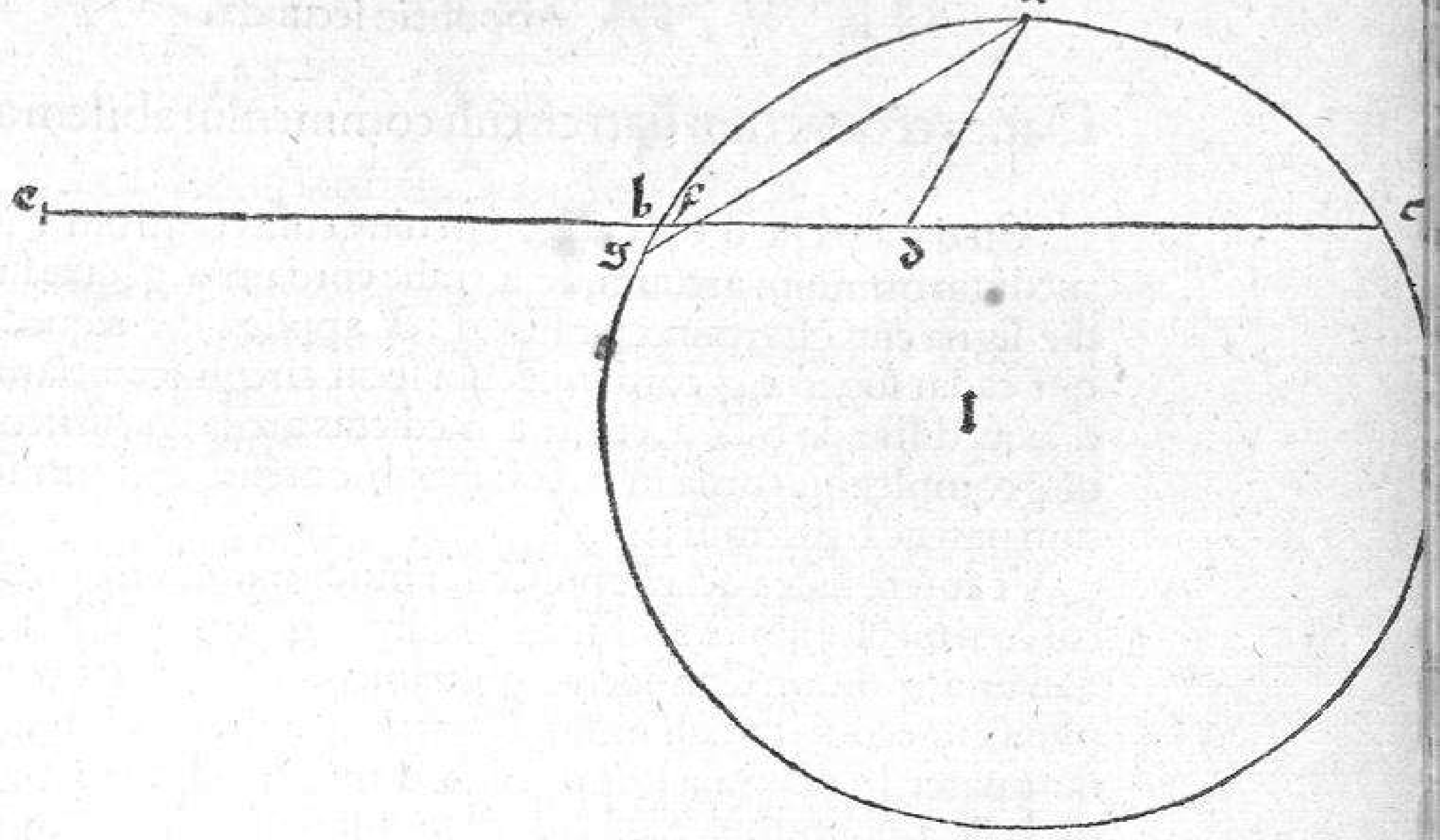
Dato arcu, rectam ei commensurabilem assignare.

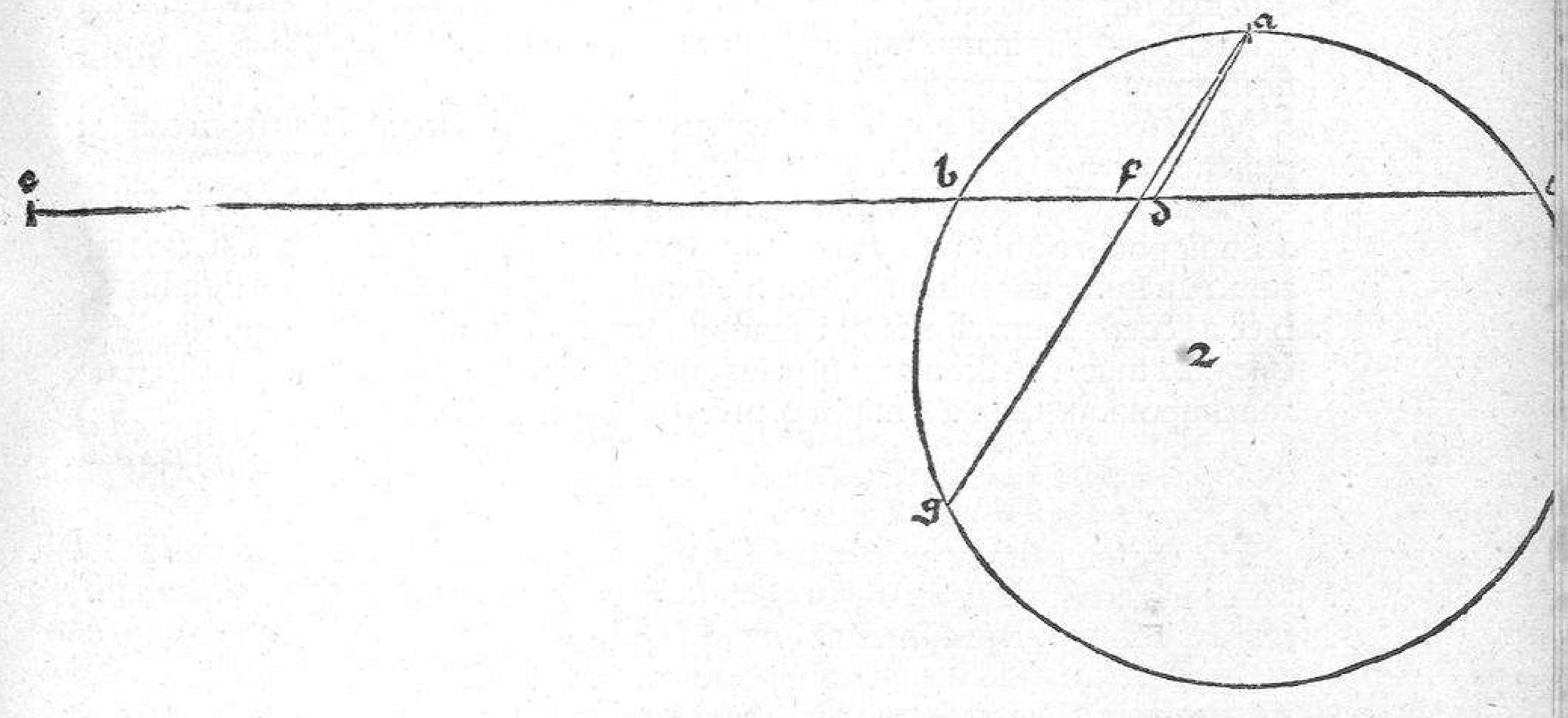
Sit b c datus arcus, cuius a medium, & trahatur corda b c, & in illa punctus æquedistans de a & b qui sit d, & hic est punctus huius magisterij, de illo igitur per b continua rectam, quæ sit d e taliter, ꝙ si de a cordam a g, quæ sit ut medietas d e per d e traxeris, illa corda uadat per f punctum lineæ d e. Sit autem d f quarta pars d e, tunc d e linea recta est commensurabilis b c arcui.

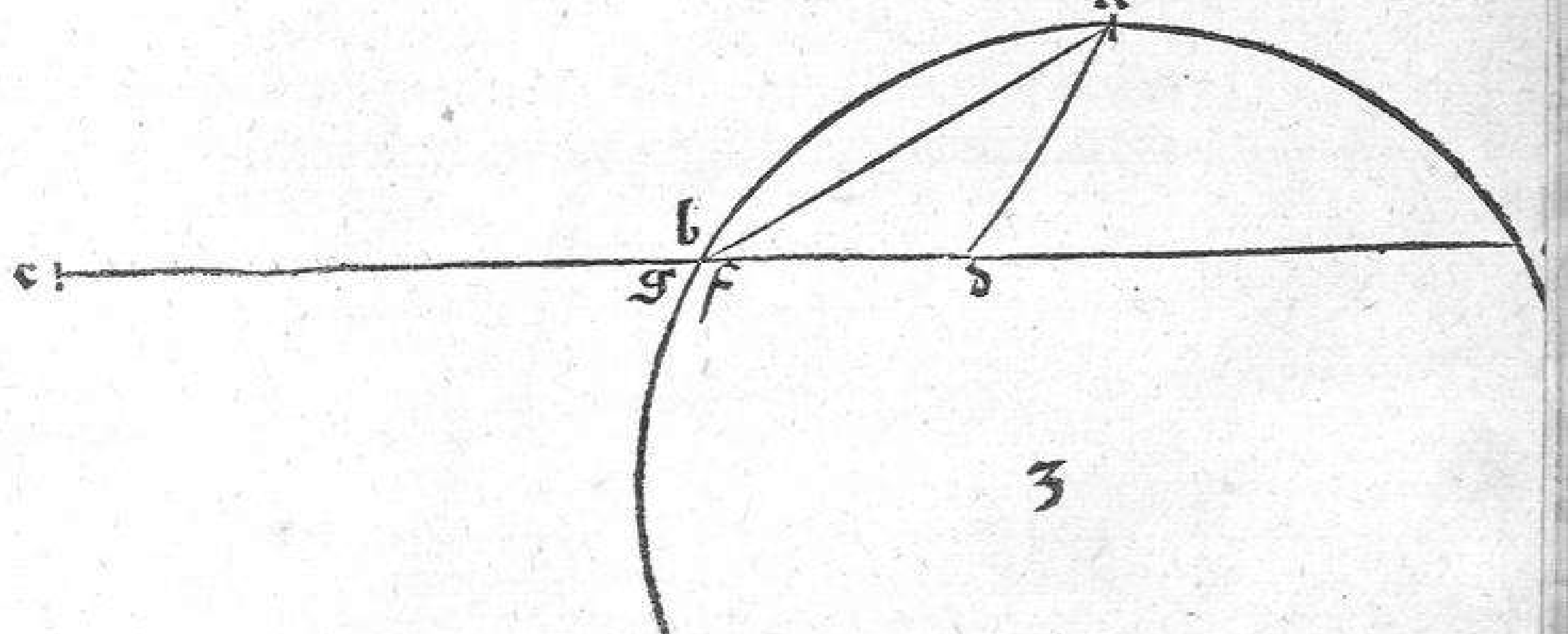
Ad hoc probandum præsuppono duo. Primo, ꝙ d e sic signari potest, ꝙ inter f punctum, per quam uadit corda, ut præfertur, & e finem lineæ d e portio æquetur tribus quartis commensurabilis recte, patet de se, nam certum est, ꝙ taliter signari potest, ꝙ f e est plus, ut in secũda figura, & etiam taliter ꝙ est minus, ut in tertia, igitur & taliter, ꝙ nec plus nec minus.

Secundo præsuppono, ꝙ quanto d e est minor, tanto f e in habitudine ad d e est minor, & d f maior, & quanto maior huius contrarium: hoc etiam per se patet ad oculum in secunda & tertia figuris.

Dico igitur primum præsuppositum uerificari, aut quando d e est quæsita scilicet commensurabilis arcui, aut quando minor, aut quando maior. Si primum, habeo intentum, nam oportebit tunc d f esse necessario quartã partem d e. Si dicis uerificari, quando d e est minor commensurabili, hoc est impossibile, nã cum tunc ex secunda suppositione f e sit minor in habitudine ad d e, & d f maior ꝙ̃ incommensurabili, & secundum te æquabitur tribus quartis commensurabilis, nõ erit d e minor commẽsurabili sed maior: sic si dicis uerificari, quando d e est maior commensurabili, similiter implicat contradictionem.


a
e
b
f
g
d
c
1


a
e
b
f
d
c
g
2


a
e
b
g
f
d
3

Propositio secunda.

Datæ rectæ arcum dati circuli commensurabilem assignare.

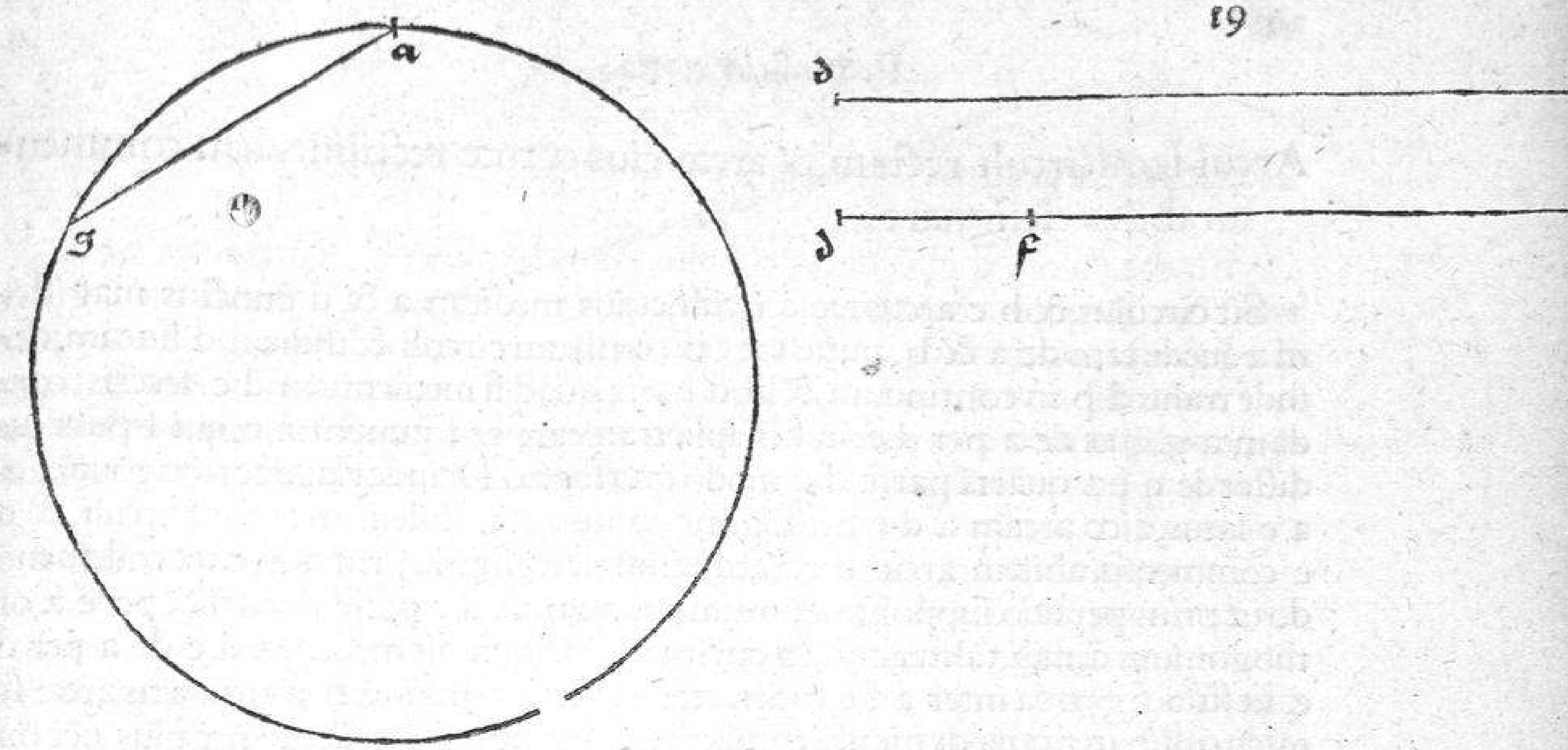
Sit data recta d e, & datus circulus, cuius centrum t, & diameter s t u, & a medium omnium arcuum, de a trahe cordam a g, quæ sit ut medietas d e, & in d e signa eius quartam, quæ sit d f, & applica d e æquedistanter ad t u, taliter ꝙ f cadat super a g cordam, & ubi secat circumferentiam circuli pone b, si tunc d æquedistat de b & a, erit b a medietas arcus quæsiti: continua igitur b d quo usq; compleatur corda in c, & habes b c arcum commensurabilem d e rectæ. totum patet ex præmissa.

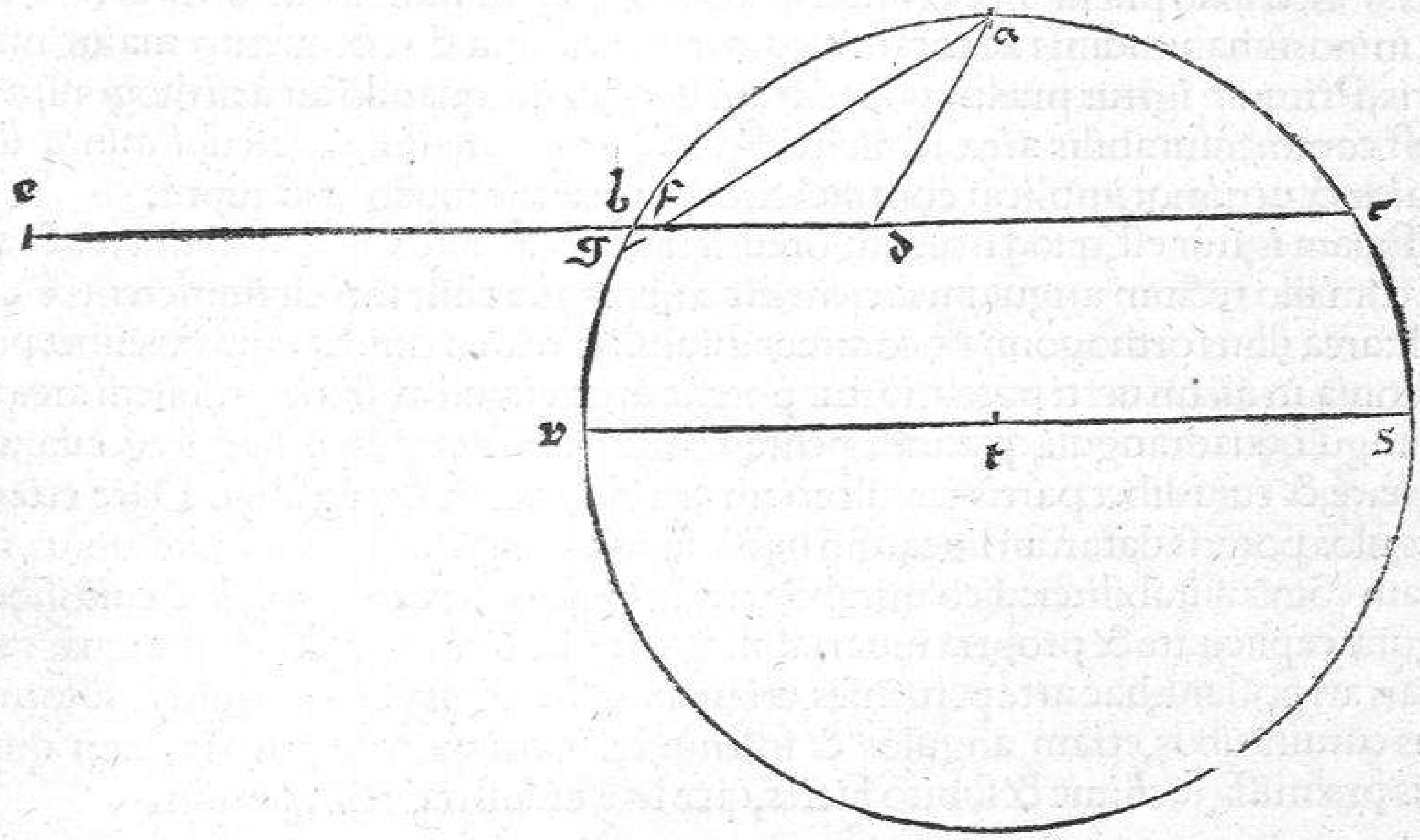
Vt autem uideas d esse punctum huius magisterij, qui si a g corda est b a arcui commensurabilis, ab f sectione, ubi a g secat b c d, ipse punctus per medietatem a g distat. Considera, ꝙ quanto b c corda est maior, tanto d de b & a plus & de centro circuli minus distat; & quanto minor huius contrarium, & hoc de se patet. In maxima igitur corda d minime distat à centro circuli, & maxime de b & a in minima corda maxime distat de centro, & minime de b & a, unde d in maxima corda est in centro circuli, & in minima in circumferentia eius, sed certũ est, ꝙ d siue in maxima corda siue in minima æquedistat de b & a, igitur sic in omnibus intermedijs.

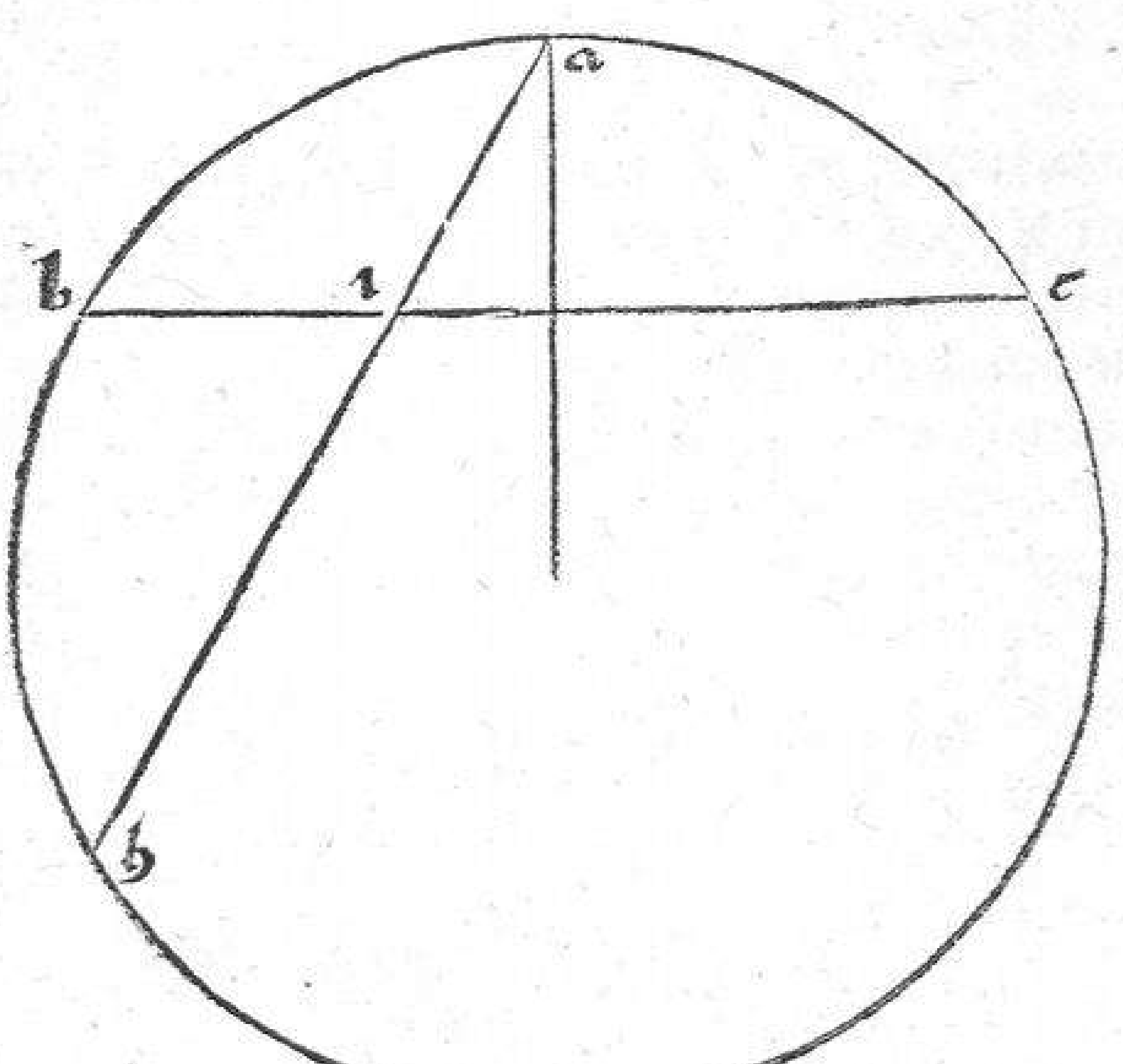
Vnde sequitur, ꝙ si b c est corda arcus tertiæ partis circumferentiæ circuli, d punctus à centro & de b & a æquedistabit.

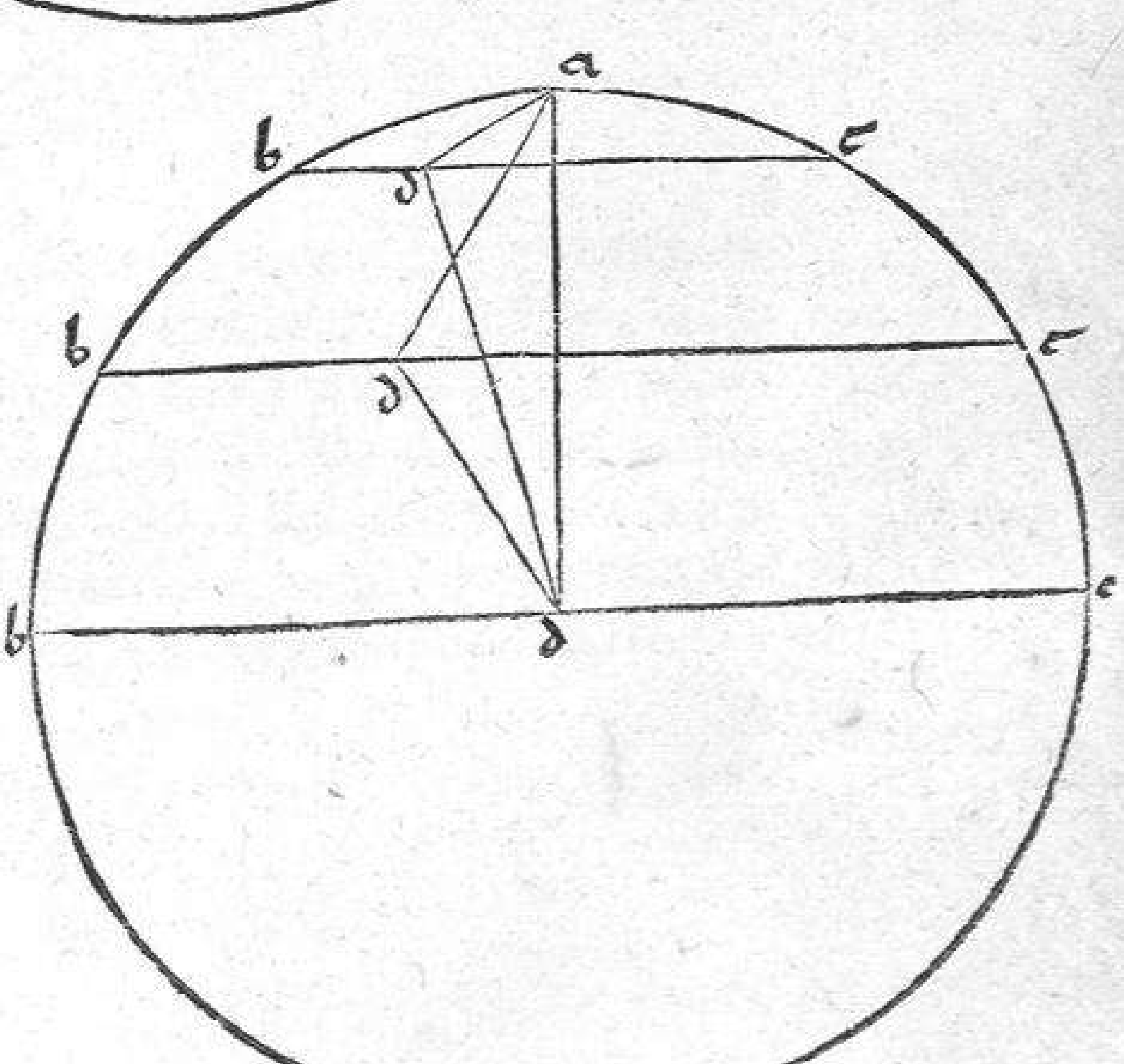
Adhuc sic de a potest trahi a h corda per b c, quam in i puncto secet. Dico a i h sic potest trahi, ꝙ a i erit distantia puncti d de a in illa corda a h, hoc certum. Aut igitur hoc erit, quando a h est ut b c, & tunc i sectio æquedistabit de b & a, & erit d utriusq;, & est intentum. Aut a h est minor, & hoc non est possibile, quia tunc a i esset maior ꝙ̃ prius quando æqualis, aut quãdo maior, & est iterum impossibile, quia a i minor ꝙ̃ prius quando æqualis.

Propositio ter-


a
g
d
d
f


a
e
b
f
c
g
d
v
t
s


a
b
i
c
h

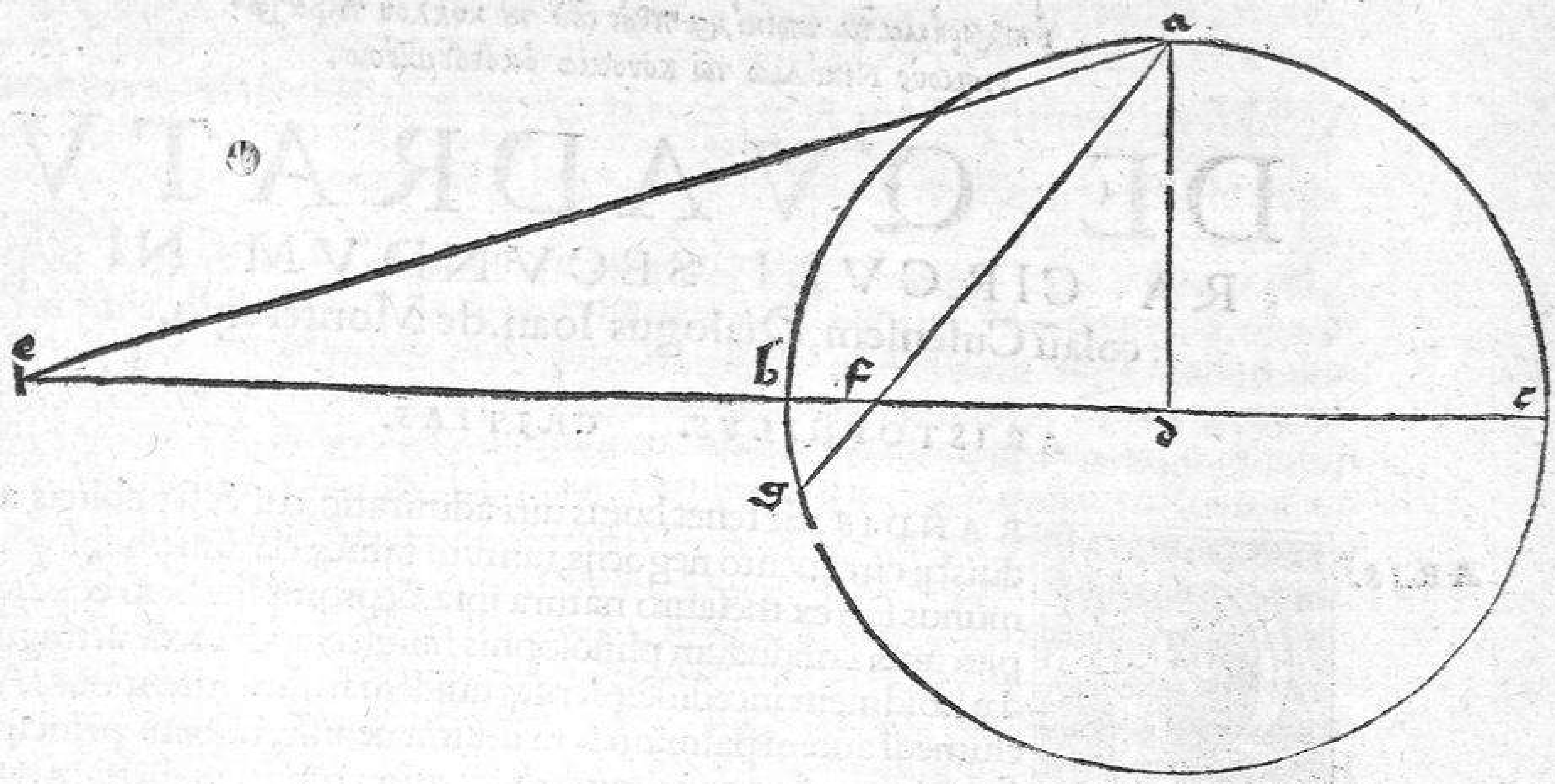

a
b
c
d
b
c
d
b
e
d

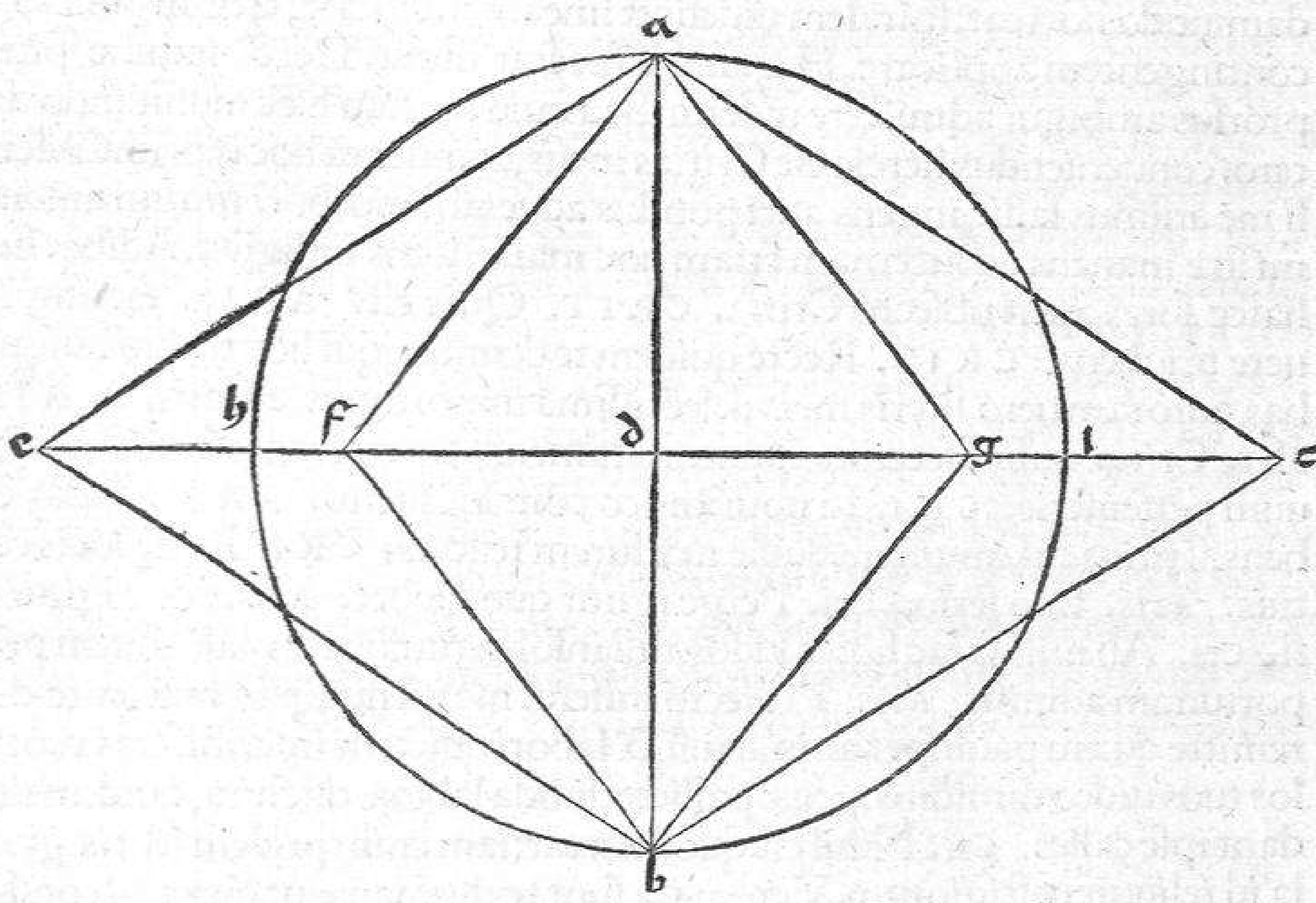
Propositio tertia.

Arcui semicirculi rectam, & areæ eius curuæ rectilinealem commensurabiles designare.

Sit circulus, & b c arcus semicirculi, cuius medium a & d punctus magisterij æquedistans de a & b, puta hoc casu centrum circuli, & trahe a d lineam, deinde trahe d b in continuum, & sit d e, ita quòd si medietatem d e feceris cordam a g, quæ de a per d e trahit, ipsa transeat per f punctū d e, qui f punctus distet de d per quartā partē d e modo quo supra. Deinde claude orthogoniū per a e latus, dico aream a d e orthogonij commensurabilem areæ semicirculi, & d e commensurabilem arcui b c. Secundum patet supra. Primum patet eodem modo ut prius per duo supposita, quorum primum est d e posse signari, & per e a orthogonium claudi, taliter quòd si ducitur corda, quæ sit medietas d e de a per d e, ut sit a f g area inter a f e, cadens erit commensurabilis tribus quartis areæ semicirculi. patet, quia datur ubi est plus & ubi minus, igitur & ubi nec plus nec minus. Secundo præsuppono, quòd quanto d e fuerit minor, tanto illa area a f e est minoris habitudinis ad totam aream orthogonij a d e, & quanto maior maioris. Primum igitur præsuppositum aut uerificatur, quando area orthogonij a d e est commensurabilis areæ semicirculi, & habetur intentum. Aut ubi minor seu maior, & utrumq; implicat contradictionem præcise modo quo supra.

Palam igitur est, quòd si orthogonius, cuius unum latus est semidiameter, & aliud cum illo rectum angulum faciens, est commensurabile toti circumferentiæ circuli: area illius orthogonij est commensurabilis areæ circuli. Et quia quælibet polygonia in aliam uerti potest, igitur poteris areæ circuli commēsurabilem aream trianguli, quadranguli, quadrati, pentagoni, & cuiuscunq; alterius polygoniæ assignare, & cuiuslibet partis circuli etiam circulo incommensurabili. Dare etiam angulos poteris datarum linearum habitudinis, & figurarum omnium unius in aliam cōmensurabiliter: dico mirabiles transmutationes facere. Salua cuiuslibet figuræ capacitate & propria inuariabiliq; natura, & ad multa occulta, quæ uix enarrari possunt, hac arte peruenies, etiam in sectionibus & uniformiter difformibus curuitatibus, etiam angulos & instrumenta componere poteris, cum quibus præmissa facilime & subito facies, quæ tuæ industriæ relinquimus.





Area a g b f cõmensuratur medietati areæ circuli,& area a b c e commensuratur areæ circuli,medium proportionale inter a d semidiametrũ & e c rectã medietati circumferentiæ circuli commensurabilẽ,quã nona sexti Euclidis reperire docet,est costa quadrati,cuius area commensuratur circulo d f recta commensurabilis est octauæ circumferentiæ circuli,ideo area a d f orthogonij commensuratur octauæ areæ circuli.Ideo quando habes rectam arcui commensurabilem,habes & aream rectilinealem areæ portionis circuli commensurabilem.

F I N I S.

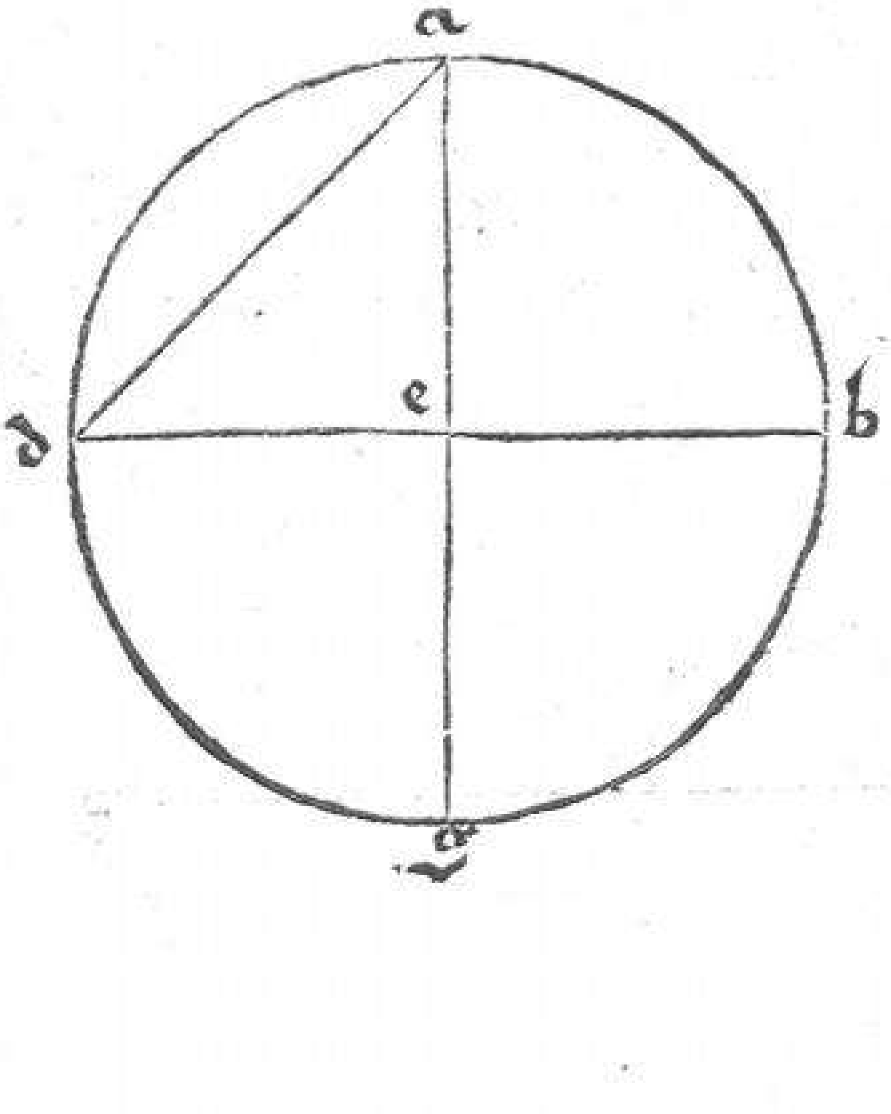
ἐπιχειρήματα ποικίλα πρὸς τοὺς τοῦ κύκλου τετραγωνισμοὺς Νικόλεω τοῦ Κουσαίω ἐκδεδομένους.

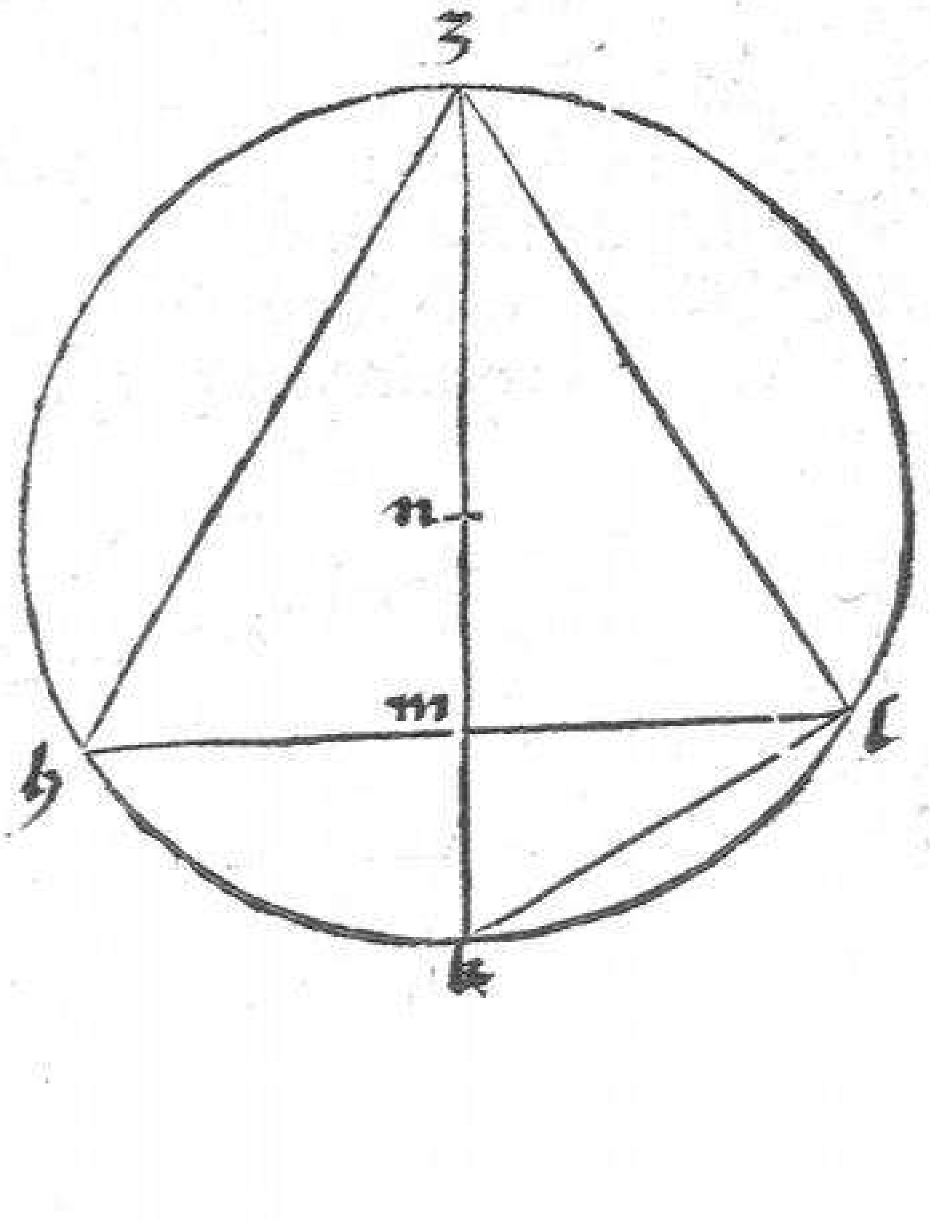
DE QVADRATVRA CIRCVLI SECVNDVM NIcolaũ Cusensem, Dialogus Ioan. de Monteregio.

ARISTOPHILVS. CRITIAS.

ARIS. GRANDIS me tenet huius uiri admiratio, cui & si publicis arduisq; circũuento negocijs, tantum tamq; clarum philosophiæ munus suo ex thesauro natura ipsa deprompsit. Scio equidem plurimis iamdudum philosophis huiuscemodi metæ attingendæ libidinem incessisse; plerisq; quidem frustra nitentibus, Archimedi autem palmam non iniuria uenisse, tametsi principia sua non modo non admittere cogatur animus, uerũ etiam quodammodo horreat: spiralem uidelicet lineam designare, eiq; in puncto quolibet contingentem applicare. Hic autem spectatissimus Dei & naturæ præco, nihil prorsus ambigui admiscere uidetur. Sed quid mecum hæc mussitando diem contero? conueniendus hercle est Critias meus, ut inuentũ hoc ꝗ primũ resciat: cui, nisi me animus fallit, ingens auri pondus aduexisse uidebor. mirum autem si nõ domi suæ manens ad lucernam etiam hoc mane literis inuigilet. Adibo. hui graues hasce fores aperi obsecro Critia. CRIT. Quis est? ARIS. Aristophilus saluere te iubens. CRIT. Recte quidem te demiror, qui hoc triduo nusquã apparebas, auroram uero literis meis delectissimã importunus adimis. ARIS. Haud ab re Critia mihi succenses, habituro tamen, sic spero, ueniam, ubi quod porto nouum persenseris. CRI. Id noui amico cõmune facito. ARIS. Faxo equidẽ libens, si prius calamum medullæ tuæ furem reijcias. CRI. Ita'ne iocis cedendum tuis? Aris. Imò serio. Cri. Perge igitur quod lubet. Aris. Pone igitur quod iussi. Cri. Ah missos fac hosce ludos, nisi insolens aufugere malis, quem pridem importunum admisi. Aris. Profecto miseret me tui nunq; se macerare desinentis. remitte quæso paulisper animũ tuũ, & labori quietem intermisceas tuo. uix oculos tuos uideo dimidios; genæ pallidæ; liuida labiorũ tinctura, quid mali portendant ipse calles. Cri. Nihil est quod uerear; iam enim pridem febris grandiuscula id reliquit uestigiorum. Verum ita sunt res humanæ, ut quæ tibi conducant, alius quispiam ꝗ ipsemet certius iudicarit. auscultandum tibi censeo Aristophile. Aris. Nobile cunctis iamdudũ philosophis natura exposuit brauium, cuius obtinendi gratia plerosq; Græcos clarissimos egregie cucurrisse atq; concertasse aiũt. Cri. Quas mihi nebulas affers? Aris. Archimedem in ea re cæteros superasse fama est. Cri. Pergin perplexe loqui? Aris. Ambitum circuli dirigere, areamq; suam quadrare perpaucis hactenus libuit. Cri. Imò nemini conanti etiam iter pateret, nisi Siculus ille Geometrarũ flos inuenta sua literis mandasset. Aris. Aliũ tibi dabo qui lucide breuiterq; lineæ circulari æqualem rectam dare pollicetur, unde & circulum ipsum quadrare haud arduum uidebitur. Cri. Hippocratem forsitan quem per lunulas id assequi conatum defecisse clamant, ubi lunulæ exagonæ æqualem triangulum rectilineum datum iri tanq; certum pridem & firmatum assumit,

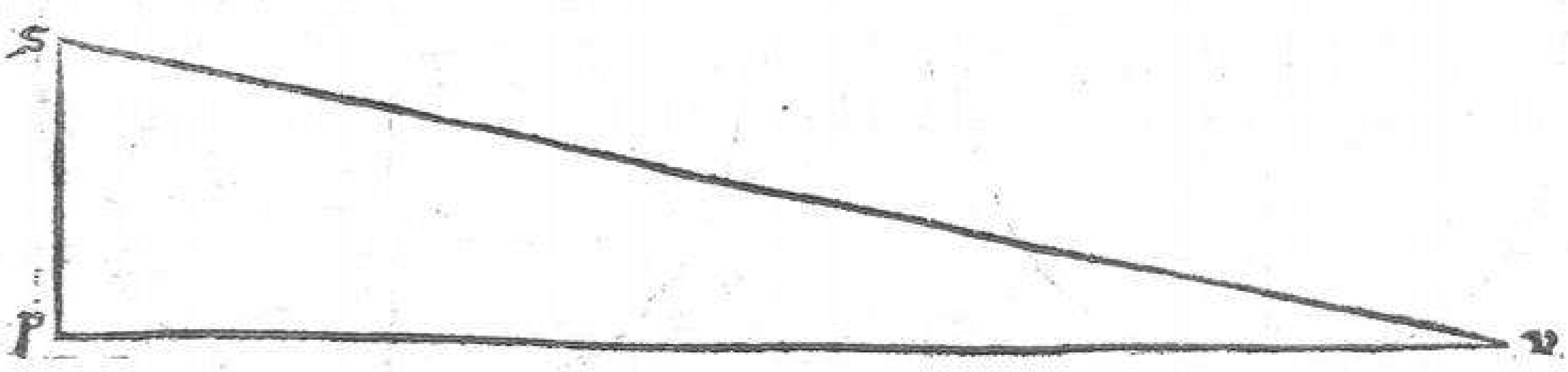
ſumit,nõ enim niſi lunulæ tetragonæ æquum trigonum rectilineum deſignauit. Aris. Non Chium illum,ſed moderniorem uirum præſtantiſſimum. Cri. Græcum an Latinum? Aris. Latinum. Cri. Perplacet ſi Græca rerum inueniendarum facilitas Latino cuipiam acceſſerit,ut quamuis uiri,proh fortunæ inuidiam, incertis hac noſtra tempeſtate uagentur ſedibus,bonarum tamen artium ſuarum ſimulacra animus quiſquam poſſideat egregius. Sed tantæ rei inuentorem noſſe uelim. Aris. Vidiſtin opus quoddam de docta ignorantia? Cri. Vidi. Ariſt. Alius autem de ſtaticis experimentis libellus tibi unq̃ obiectus eſt? Cri. Eccum ipſum. Aris. Qui hunc & alia inſuper clariſſima edidit opera digito monſtraretur,ſi Romæ unà eſſemus. Cri. Quàm iuuat hominem uidere. Aris. Principem appelles Chriſtianæ religionis:rubro etenim galero tegitur,ſummoq́ Pontifici frater habetur digniſſimus. Cri. Etſi uirum hunc uidere nunq̃ licuerit,tanta tamen,tamq́ inſignia monimenta ſua facile mihi perſuaſere,ut quidquid philoſophus ille aſſeruerit,à ueritate alienum eſſe non poſſit.ſola enim autoritate ſua fides extemplo naſcitur.Sed quonam pacto rem illam tradiderit,Ariſtophile doceri percupio. Aris. Si benignas aures orationi crudæ, quam Geometra uitare nequit,accõmodes,planè dabo ſententiam eius. Cri. Ha bone uir,quaſi uenuſtati magis q̃ ueritati ſtudendũ ſit:quin uocabulis peregrinis,aut characteribus quibuſuis utaris licet,modo quod uerum eſt afferas. Aris. Ita intelliges. hanc cõcluſionem uir ille affirmat. Si ex ſemidiametro circuli dati,atq; corda quadrantis eius directe coniunctis,diametrum alteri circulo conſtitueris:triangulus æquilaterus eidem inſcriptus circulo dato iſoperimeter habebitur. Cri. Teneo quod aſſeris. Verum ut Geometris mos eſt,figurationem inſtituto tuo accõmodandam cenſeo, quo res ipſa cognitu fiat facilior. Aris. Oportune mones.Pingo igitur circulum a b g d ,cuius duæ diametri a g & b d ad rectos angulos ſe ſecent in e centro circuli,ducta corda quadrantis a d ,alius demum circulus z h k l ſup centro n deſcriptus,diametrũ habeat z k æqualem duabus lineis,e d uidelicet ſemidiametro circuli dati & a d cordæ quadrantis,pariter iunctis. inſcribatur deniq; huic ſecundo circulo triangulus æquilaterus z h l. Cri. Quid tum poſtea? Aris. Triangulum z h l inquit ille iſoperimetrũ eſſe circulo a b g d. Cri. Tres ergo lineas rectas z h , h l & l z ambitum circuli a b g d æquare affirmat. Aris. Rem tenes. Cri. O memoratu dignam concluſionẽ.quæ ſi uerum prædicat,uetus iamdudum inimicitia circuli & figurarũ rectilinearum prorſus abolebitur,





tur, circulus enim posthac in figuram rectilineam quamlibet ac uice uersa spaciũ rectilineum in circulum facile transmutabitur, quod in figuris tuis Aristophile supra definitis intueri licebit. Corda enim quadrantis a d semidiametrũ e d potentialiter duplans ex penultima primi elementorum Euclidis principis nostri data erit, utraq; igitur rectarum e d & a d unde & z k æqualis eisdem data ueniet, cumq; ipsa z k diameter circuli z h k l potentialiter sesquitertia sit ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti. Aris. Hem quam turbam mihi ingeris, ubi dicis z k diametrum potentialiter esse sesquitertiã lateri trianguli z h l? Cri. Scies quid uelim. Potentiam lineæ rectæ quadratũ suum uocant Geometræ. Aris. Id me non fugit, uerum quadratis linearum z k & z l proportionem esse sesquitertiam ostendas quæso. Cri. Duc igitur in circulo tuo maiori cordam k l. Aris. Factum. Cri. Ea habebitur latus exagoni æquilateri circulo z h k l inscriptibilis. Aris. Confiteor, quandoquidẽ arcus k l est sexta pars de ambitu circuli huius. Cri. Dimidiam insuper circuli æquabit diametrũ, nisi decimũquintum quarti elementorum theorema mentiatur, quadratum ergo z k diametri ex quarta secundi quadrato k l quadruplũ accipietur. Angulus autem rectus z l k duo quadrata cordarum z l & l k ipsi quadrato z k æquipollere iubet. Vnde & ipsa quadratum k l quadruplabunt; quadratumq; k l tertiam partem esse quadrati z l nemo inficias ibit. Congeries itaq; duorum quadratorũ z l & l k, cui æquipollet quadratum diametri z k super quadratum z l, addit eius tertiã partem. Duo igitur quadrata z k uidelicet diametri, & z l lateris trianguli proportionẽ habebunt sesquitertiã. Aris. Iam satis est, ostendisti etenĩ ipsam z k diametrum lateri z l potentia sesquitertiam fore, perge quod cœpisti. Cri. Datam ergo accipiemus cordam z l, ideoq; cõgeries trium laterũ trianguli z h l æquilateri dabitur, cui æqualem rectam p r designare licebit, quæ & ambitum circuli a b g d si uerum præ se fert conclusio æquabit. Qđ si ex termino p eiusdem rectam p s erexeris æqualem semidiametro e d circuli dati claudendo triangulũ s p r: ille triangulus circulo a b g æquabitur, quemadmodũ in libello mesurationis circuli demonstrauit Archimedes. Ex ultima autẽ secũdi elementorũ triangulo s p r æquale quadratum describere didicisti, quod & circulo a b g d nimirũ æquabitur. Aris. Recte procedit ratio tua. Sed de conclusione supra memorata, quæ caput huius rei uidetur, quid sentis? ueram ne accipis, an non? Cri. Auctoritas uiri magna est. Aris. Quid ni? Cri. Fama præclara. Aris. Etiam. Cri. Nihil neq; sapientiæ neq; bonarum artium reliquit intentatum. Verum ut profunde res diuinas in animo uersat, ita subtiliter omne genus philosophiæ perlustrauit. Aris. Quas per ambages serpis? Siccine satis mihi respondisse te arbitraris? quin ad rem ipsam conuertaris decet. Cri. Tantæ rei idoneus iudex aliunde petendus est. Sed tu si quam huiusce conclusionis probandæ uiam habes proferto. Aris. Nullam prorsus inuenio, ratione tamen quadam demonstrasse uidetur, quæ nunc in mentem uenire non potest. Cri. Ita negligentiam tuam aperte fateris?

Aris.



Aris. Siue negligentiam siue inscitiam dicere malis nihil mea refert, hoc unum scias Critia, syllogismo suo sæpenumero me delusum esse. dum enim meram præ se ferre certitudinem uidetur, nescio quæ animo irrepit fluctuatio, ueluti anguillã prendẽs quo intentius manũ constringit, eo facilius illa subterfugit. Cri. Fac reminiscaris. Aris. Quiesce. Cri. Rediјt memoria? Aris. Nondum. Cri. Profecto mirari non sufficio, ꝙ tam facilem circuli rectilineationem nemo priscorũ adinuenerit, qui longe difficiliora enisi sunt. Aris. Quid tu tecum? Cri. Nihil ad te Si quod quærebas menti redditum est, edissere. Aris. Ah Critia mi nõ est hac in re terendus dies, Demipho noster exemplum habet, is ubi domum redibit e uestigio nobis afferet. Cri. Potes ne recordari quo demonstrationis genere usus fuerit ille philosophus, mathematico uidelicet, an alio quopiam? Aris. Mathematicum haud uidetur. Cri. Frustra igitur hoc mane obtundis, qui conclusionẽ hanc absq; demonstratione portas: facisq; ut hac atq; illac cursitem si quid certitudinis habeat explorando. Dum autẽ sic cogito, modus occurrit, qui, nisi me animus fallit, quietem nobis afferet. Aris. Eum exponas amice mi. Cri. Ausculta igitur. Archimedes noster in libello mensurationis circuli officio numerorum demõstrauit ambitum circuli siue circumferentiã addere super triplum diametri suæ minus quidem septima parte eius; maius autẽ decem septuagesimis primis eiusdem diametri. Aris. Nemini dubiũ id est. quid tum postea? Cri. Scies pedetentim, si prius semidiametrũ e d circuli minoris in quadringẽtas nonaginta & septẽ æquas 497
particulas apud intellectum secueris, erit enim una earum quælibet mensura communis omnibus lineis proposito nostro seruituris. cum rationales duntaxat lineas admittere sit consilium; ubi ergo unitatis characterem uidebis in lineis quidem unam huiusmodi particularum, in quadratis autem quadratellum eius fac intelligas. Mirandum præterea nequaq; est, ꝙ numeros huic linearum negocio accommodarim, cum Archimedis supra memorato exemplo satis liceat. Lineis deniq; siue longitudine siue potentia cõmuincãtibus proportionẽ, esse quã & numerorum decimus Euclidis theoremate suo quinto docuit. imò uero lineæ tales sunt numeri realiter, intellectu secundum unitatem mensuræ cõmunis eas discernente. Aris. Placet apprime hæc tua introductio; iam enim pridem arbitrabar numeros in huiuscemodi linearum comparatione nihil habere loci, cum & alius quidam circulũ quadrare frustra tentarit numeris fretus. Sed tu quo tendebas Critia perge. Cri. Diameter ad circumferentiam circuli se habet, quemadmodũ semidiameter ad semicircumferentiam. Aris. Confiteor totius ad totum, dimidijq; ad dimidiũ eandem habitudinẽ. Cri. Dimidia ergo circũferentia super triplũ semidiametri addit minus quidem una eius septima; maius autẽ decem septuagesimis primis, sic enim in totis accidebat. Aris. Non eo inficias. Cri. Mille quingentæ sexaginta 1561
una partes addunt super triplum quadringentarũ nonaginta septem partiũ decem septuagesimas primas ipsius simpli. Aris. Ita est, una enim septuagesima de quadringentis nonaginta septem partibus est septem. hæc decies facit septuaginta, quæ superaddita mille quadringentis nonaginta uni particulis triplo uidelicet quadringentarũ nonaginta septem partium, summã conflabunt mille quingẽtarum sexaginta unius partium. Cri. Laudem mereris Aristophile, qui tam facile ueritatem accipias. nonne igitur semicircumferentia circuli mille quingentas sexaginta unam partes superabit? Aris. Necessario res ita est. Cri. Totam deniq; circumferentiam a b g d duplo dictarum partium uidelicet tribus milibus centum 3122
uiginti duabus maiorem haberi negabis? Aris. Minime. Cri. Id ergo memoriæ sedulo hæreat, ut dũ opus eo fuerit extemplo respõdeas. Nunc ad triangu

lum z h l ueniendum est, ut quanta sit eius perimeter non lateat; aut quanta magnitudine minor necessario sit exploremus. Semidiametrum e d constituimus secari in quadringentas nonaginta septẽ partes, quarum quadratũ tu elicias. Aris.
247009 Ducenta quadraginta septem milia & nouem inuenio. Cri. Tantum est quadratum e d semidiametri, & toties quadratellũ unius sæpe memoratarum partium in quadrato ipsius semidiametri e d reperietur. Sicut eñ pars linealis lineas oẽs ita quadratellum eius omnes metietur superficies. Cum autem quadratum cordæ a d quadratum semidiametri e d duplet, erit ipsum quadratum a d quadringen
494018 ta nonaginta quatuor milia & decemocto. Aris. Verum est. Cri. Hic numerus non est quadratus: proximus tamen eo maior quadratus radicem habet septingẽta & tria. quamobrem cordam a b minorem esse septingentis & tribus constat. Aris. Nemini dubium. Si enim quadrato quadratũ minus existat, costam quoq; costa minorem haberi necesse est. Cri. Erat autem semidiameter e d quadringẽtæ nonaginta septem partes; quibus adiunge memoratas septingentas & tres, ut summa resultet mille ducentarum partium, quibus profecto minor est congeries duarum linearum e d & a d. Aris. Ratio conuincit, nam idem cõmune duabus inæqualibus adiectum quantitatibus duarum summarũ alteram altera minorem efficiet. Cri. Duabus demum lineis e d & a d simul iunctis æqualem statuebam diametrum z k, quæ ob eam rem mille ducentis partibus minor existet, quadratumq; eiusdem diametri mille quadringẽta & quadraginta milia nequaq; attinget. Aris. Teneo, mille nanq; & ducentis partibus in se multiplicatis, mille quadringenta & quadraginta milia resultabunt. Cri. Quarta item pars quadrati diametri z k ex eo quadrato sublata, relinquet quadratũ lateris trianguli æquilateri circulo inscripti. Habent enim, ut supra cõmemoratũ est, hæc quadrata proportionem sesquitertiam; ueluti quatuor ad tria, ex quatuor autem si quartam sui dempseris partem, tria residuabuntur. Aris. Bene. Cri. Quarta insuper pars de mille quadringentis & quadraginta milibus est tricẽta sexaginta milia, quam ex toto suo auferens mille & octuaginta milia relinqui cernes. Cũq; sit ꝓportio quadrati z k ad quadratum z l, tanq; mille quadringẽtorum & quadraginta miliũ ad mille & octuaginta milia; utraq; enim earum sesquitertia est; erit permutatim quadrati z k ad mille quadringenta & quadraginta milia, ea proportio quam habet quadratum z l ad mille & octuaginta milia. Quadratum autem diametri z k minus est mille quadringentis & quadraginta milibus; unde & quadratum z l mille & octoginta milibus minus habebit. Hæc omnia patere uidetur; aut si quã habes ambiguitatẽ pulsam faxo. Aris. Certa intelligo uniuersa. Cri. Quadratus demum proximo maior mille & octoginta milibus, is enim quadratus nõ est, radicem habet mille & quadraginta, quãobrem linea z l minor erit iã dictis mille & quadraginta. Aris. Haud incertum. Si enim quadratum lineæ z l minus est mille & octoginta milibus, minus quoq; erit pluribus; quare & ipsa costa z l minor erit radice quadrata huiuscemodi plurium. Cri. Firma igitur in animo tuo latus trianguli z l minus esse mille & quadraginta partibus; prope enim portui concessimus. Aris. Non inficiabor unq;, quod syllogismo ratũ dedisti tuo. Cri. Veritas sibi me delegit amicum; eam equidem operæprecium inuestigare studeo, inuentã autem suis cõmonstrare cultoribus; qua perspecta autor ipse ueritatis altissimus digniuscule saltem laudetur. Aris. Quàm iuuat audire quonã rerum tandem euades ò Critia. Cri. Pauculis prius detinebere uerbis Aristophile; continuoq; nisi fallax contentus abibis. Sed latus z l trianguli nostri æquilateri minus esse mille & quadraginta particulis adhuc confitere? Aris. Et confiteor & certum

scio

ſcio. Cri. Si haſce mille & quadraginta particulas ter repetiero, ſummã triũ miliũ centum & uiginti partium colligens, nonne partes ille triplum lateris z l, id eſt perimetrum trianguli æquilateri z h l ſuperabunt? Aris. Maxime cum ut ſimplum ad ſimplum, ita triplum ad triplum, terminosq́ꝫ proportionũ permutando luce clarius id uideatur. Cri. Perimeter itaqꝫ triãguli z h l minor erit tribus milibus centum & uiginti. Aris. Negare non poſſum. Cri. Multo igitur minor erit tribus milibus centum & uiginti duabus particulis. Aris. Verum concludis, quid tum? Cri. Iam redde quod antehac dudum memoriæ mandatum iri iuſſeram. Aris. Quid hoc erat? Cri. Circumferentiam circuli a b g d maiorem eſſe tribus milibus centum & uiginti duobus. Aris. In memoria habeo. Cri. Perimeter ideo trianguli z h l, quæ minor erat tribus milibus centum & uiginti duobus, multo minor erit circumferentia circuli a b g d. Aris. Hem quo ruis? Cri. Perimetrum eam trianguli z h l non æqualem eſſe circumferentiæ dicti circuli demonſtratum habes. Aris. Siccine concluſioni audes contradicere? Cri. Imò uero non audeo, ſed cogor. Plerunqꝫ tamen concurſores ad metam ſupramodum intenti, & ſi campus tranſcurrẽdus ſit planiſſimus, auiditate brauij uacillare comperiuntur, quibus cum ne ludibrio habeamur computum cenſeo retractãdum. Aris. Recte ſuades, nam ubi alienum contrectare cœperis opus, ſi quid paulo iniquius carpas, geminum incurres uituperiũ: odium etenim amici & inſcitia te tua condemnabunt, fac iterum perluſtres ſingula. Cri. Aſpicias & tu Ariſtophile, ut ſi quis error me fugiat tibi notetur. Aris. Ita libet. Cri. Hi numeri recte iacent, hoc bene ſtat, nihil iſta multiplicatio fefellit, conſequentiæ omnes bonæ habẽtur. Quid igitur obſtat, cur non uera putes quæ concluſimus? Aris. Virum tantum temere ſententiam ſuam pronunciaſſe uix habeo uerisimile. Cri. Quid tũ? Aris. Pace tua dixerim Critia mi, tãto philoſopho nõ poſſum nõ adhærere. Cri. Ha ha tecum ego ſentire uideor, quis enim omniũ noſtra tempeſtate hominum cæteris tantopere præſtat Geometris, ut nouam prorſus, etiam ſi tota pereat, tradere poſſit artem; cuius hactenus diuerſi & magni paſſim extitere conditores. Sanè huic uiro & lineæ & numeri libentes obediunt. Aris. Quo amplius procedis Critia doctiſſime, eo perplexiorem me reddis, duas equidem inter diuerſas partes incertus pendeo: utri earum concedã nõ ſatis doceor. Vellem non modo nõ contradicere memoratæ concluſioni, uerumetiam pro poſſe tutari, contra autem tuæ me deterrent argumentationes. Cri. Meas arbitraris eſſe rationes, quibus animi tui fidem hac concluſione arcebam? Aris. Tuas non putem, qui mirum in modũ cõfutandi officium aſſumpſeris? Cri. Meas haudquaqꝫ fac ſuſpiceris; ſed omnium prorſus & Geometrarũ & Arithmeticorum quos priſca tulit ætas concinnem fuiſſe uoluntatem, ne quis concluſionem huiuſcemodi proferret, quibus ego præco modernus inſtituor. Quocirca non mihi, uerum illis tribuas, ſiue acerbam dixeris alienæ ſententiæ diſcuſſionem, ſiue dulcem ueritatis cuiuslibet inueſtigationem. Aris. Satis hercle perſuades, uanæ me hactenus credulitati nimium indulſiſſe. Fateor equidem trianguli noſtri æquilateri perimetrum circumferentia dati circuli minorem haberi neceſſario, tandemq́ꝫ rectam æqualem curuæ circulari producere, ac ideo circulum ipſum quadrare nihil ſpei ſupereſt. Hoc unum tamen poſtremo doceas, quantum interſit ueritati & opinioni meæ iam penitus abiectæ. Cri. Quantulum id ſit, nemini mortalium natura in hunc uſqꝫ diem diſcernendum dedit, neqꝫ enim perimeter trianguli numerum habet rebus ut antea diſpoſitis; neqꝫ circuli ambitum rationalem eſſe lineam conſtat. Sed illud accipe defectum perimetri trianguli à circumferentia circuli dati maiorem eſſe duabus ſæpe dictarum partium,nam ut supra ostensum habes,perimeter quidem trianguli minor est tribus milibus centum & uiginti:circumferentia uero circuli maior tribus milibus centum & uiginti duobus.Numerorum autem iam adductorum differentia est binarius:quare differentiam perimetri trianguli & ambitus circuli maiorem binario constat esse,modico tamen:cuius deductionem cum parum afferat utilitatis missam facio. Aris. Propinque igitur ueritati concessit uir ille. Cri. Propinque adeo,ut sudoris sui fructu haud penitus frustrari uideatur:& quidem non sine gloria.in plærisq; nempe rebus uix prope uerum consistendi natura mortalibus donat licentiam. Aris. Nunq; ad te accedo Critia quin doctior abeam.Quã callide homo nodum mihi tantum dissoluit:neq; minus hilarem me reddidit contrarium ueritati refellendo,quàm si curuam circularem rectificandi areamúe suã quadrandi facultatem tradidisset. Cri. Quid tecum taciturnus reputas?si reliqui nihil est quod me uelis,abire iam licet,absoluendum mihi est opus problematum Almagesti quod cœperam,iamdudum refrixit calamus, quẽ uix domum ingressus abijci iusseras:is denuo resumendus est hora monet. Aris. Discedam hinc tua cum beneuolentia,si prius pollicearis huius negocij nostri exempla literis te mandaturum. Cri. Et scribam & communia tibi faciam:ea tamen lege,ut amicis nostris nostra scripta uisuris Critiam suum cõmendare studeas,seq; haud mordaci dente quempiam læsisse,neq; minimũ sibi quid arrogasse persuadeas, qui tuo permotus instinctu quicquid id est ac lubens effecerit. Aris. Omnes digne tibi plausuros arbitror,quos dubia hucusq; sententia detinuit.ex ueritate autem declarata odiũ tibi nasci tua non sinet modestia.Verum si opus fuerit tua iam nunc monita curabo satis.Vale.

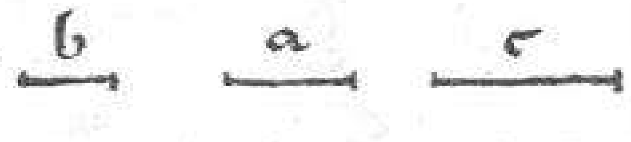
Ιωάννης ὁ γερμανὸς τοῦτον διάλογον
ἐν τῇ ὀυενετίᾳ εὐτυχῶς ἐποίησε.

IOANNES GERMANVS PAVLO FLORENTINO ARtium & medicinæ doctori celebratiſſimo, ac Mathematicorum præſtantiſſimo S. P. D.

NISI fidelem te mihi præſtolarer iudicem atqꝫ tutorē Paule optime, tam audax facinus, tamq́ꝫ dubiū ſcribendi genus haud quaq́ꝫ attentaſſem, ſiquidem nouam ac propriā tractantibus materiem, uix hac noſtra tempeſtate ſatis parcitur, quin liuore quodā præter æquum & bonū perturbentur. Nam ſi quid paulo obſcurius traditur, uel diminutæ ſcientiæ uel etiam ignorantiæ notam impingunt æmuli. Si uero dilucide ac ſcitiſſime unum aliquid pronunciaueris, furem te non ſcriptorē eſſe extemplo inſimulant. At ego recens diſciplinarum uerſator, longe duriorem accepi prouinciam, quippe qui alienam retractare auſim materiem: plurimisq́ꝫ modis inquiſitā curui rectilineationem quibuſdā medijs examinare decreuerim. Sed Deum teſtor immortalem, nullam unq́ꝫ laceſſendi libidinem mihi inceſſiſſe: nullis me pollicitationibus gloriæ inductum eſſe, quo confidentius id agerem. Veritas nāqꝫ ſola tantos mihi labores effecit iucundiſſimos: quos emendationi tuæ ſubieciſſe non pudebit, quoniam qui id officij dignius in mundo accipiat reperio neminē. Habes profecto pleniſſimam Geometriæ cognitionem: habes expeditiſſimam numerorꝫ peritiam, quibus abſqꝫ rebus ſicut cōpleri non potuerūt hæc examina, ita neqꝫ limabuntur: habebis, niſi me fallit animus, aliquando ocium literis alienis accōmodabile. Ingenium præterea tuum adeo mite & manſuetū perſpexi, ut ſi quæ nimium prolixa, aut non ſatis lucubrata, uel forſitan inordinate dicta offenderis, immodeſte tolerare atqꝫ interpretari non poſſis, quod inde libentius te facturum arbitror, ubi hæc ſcripta mea breui admodū tempore abſoluta perpenderis, lituris crebris primorum exemplarium id docentibus. Ne autem pluribus detinearis, ad rem ipſam propius accedendum cenſeo, ubi exemplo Archimedis in libello ſuo de menſuratione circuli non niſi lineis ſiue longitudine ſiue potentia rationalibus utendum erit. Solebat enim Archimedes, ſi qua linea potentialiter tantum rationalis occurrit, inter duas notas lineas longitudine rationales eam conſtituere: quem uirum inter oēs Mathematicos primarium imitatus ego quædam præambula huic negotio conſcripſi neceſſaria, quo facilius cætera intelligerentur: neqꝫ eadem ſæpius q̄ꝫ decet repetere oporteret. Hoc igitur literale exercitiū, quod Venetijs peregrinanti mihi pauculos abſumpſit dies, in manūs tuas depono gratiſſimas limandū atqꝫ tradendum, ſi placuerit ei uiro, cuius res agitur: nolim equidem in publicum prodeat, niſi primo tibi perſpectum fuerit atqꝫ iudicatum. Vale.

DEFINITIONES.

Quantitatem per ſe notam uocabimus, quam menſura aliqua famoſa aut pro libito aſſumpta ſecundum numerum notum metitur. Terminus quantitatis cuiuſlibet dicetur quantitas alia per ſe nota maior aut minor huiuſmodi q̄titate. Vt ſi b quantitas minor fuerit a quantitate, & c maior eadē, fueritq́ꝫ utraqꝫ quantitatum b & c per ſe nota, b & c dicentur termini quantitatis a, ſiue ipſa a quantitas per ſe nota exiſtat ſiue non. Dicemus quoqꝫ a quantitatem inter huiuſmodi



terminos contineri. His demum communibus animi cōceptionibus utemur. Minus adiectum minori constituit minus, maius quoq; maiori adiunctũ maius reddit. Subtractio minoris quantitatis ab alia quantacunq; maius relinquit q̃ subtractio maioris ab eadem, hæ sententiæ sunt manifestissimæ.

PRAEAMBVLA.

I.

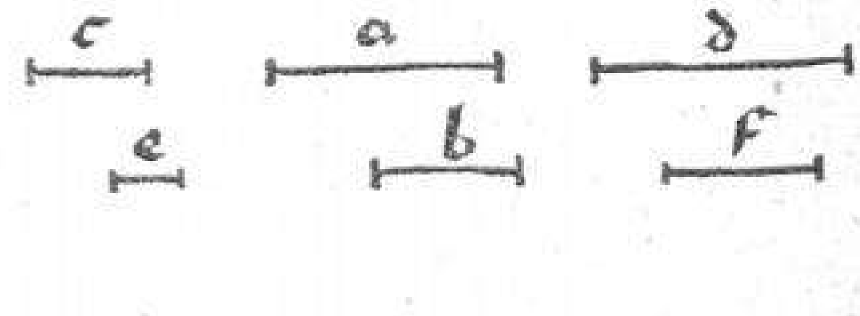
Si utraq; duarum quantitatum propositarum inter duos notos constituta fuerit terminos, congeries quoq; earum inter duos notos reperietur terminos.

Sint duæ quantitates a & b, inter binos terminos notos, a quidem inter c & d, b autem inter e & f, congregatisq; duabus quantitatibus a & b resultet g. Summa autem duarum c & e sit h, & congeries duarum quantitatum d & f sit k. Dico g quantitatem contineri inter duos terminos notos h & k. Cum enim c sit minor a, & e minor quantitate b, ex a autem & b coniunctis resultat g, erit per primam conceptionem h minor g, similiter ostendetur k maiorem esse g quantitate. Sic g quantitatis inter duos terminos h & k cōprehenditur, quos oportet esse notos per .3. primi Triangulorum, quatuor quantitatibus c e d & f notis existentibus. Quòd si ad operationem accomodare uoluerimus, hoc præambulum numeros duorum terminorum minorum congregabimus, resultabit nãq; numerus termini minoris quæsitus, similiter numeros duorum terminorũ maiorum colligemus pro maiori termino quæsito. Idem etiam tenebit, si plures q̃ duo huiusmodi quantitatum obijcientur ordines. At si una quantitatũ per se data fuerit, reliqua uero inter duos terminos notos habeatur, ipsa per se nota quantitas duarum uices quantitatum habebit: addita nanq; minori termino minorem, maiori autem adiecta maiorem constituet.

II.

Si fuerint duæ quantitates inæquales, quarum altera quidem inter duos notos terminos concludatur, altera uero per se nota existat, aut utraq; earũ inter duos notos constituatur terminos: differentia quoq; earum inter duos notos habebitur terminos.

Duæ quantitates inæquales a & b inter binos notos constituantur terminos, a quidẽ maior inter c & d, b autem minor inter e & f: quarum quantitatum differentia sit g. Dico q & g quantitas inter duos notos consistet terminos. Cũ enim e sit minor quantitate b, & b minor ipsa a, ac demum a minor d quantitate, erit & e minor d quantitate: differentia igitur duarũ quantitatum e & d sit k. sit deniq; c quantitas maior f quantitate, aliter enim non concluderemus g inter duos notos terminos: differentiaq; duarum quantitatũ f & c sit h; erit itaq; h minor g, nam b ex a dempta relinquit g differentiam, quare per communẽ scientiam secundam f quantitas maior ipsa b subtracta ex c minore q̃ sit a relinquit h minorem g quantitate. Item cũ b ex a sublata relinquat g differentiã, per eandem communem scientiã e quantitas minor ipsa b subtracta ex d maiori q̃ sit a, relinquit k differentiam maiorem g quantitate: sic g differentia inter duos



duos terminos h & k constituitur, quos quidem terminos notos esse oportet ex quarta primi triangulorũ, propter quatuor terminos c d e & f notos. Tenor autem operatiõis erit ille. Subtrahe minorem terminum minoris quantitatis ex maiori termino maioris quantitatis, & relinquetur maior terminus differentiæ, deinde subtrahe maiorem terminum minoris quantitatis ex minore termino maioris quantitatis, & relinquetur minor terminus differentiæ. Hactenus utranq; duarum quantitatum inter duos notos constituti terminos supposuimus, tanq; difficilius: nã si altera duarũ huiusmodi quantitatum per se nota fuerit, facilius operabimur, dum enim maior earum per se nota existet, ex ea subtrahemus maiorem terminũ minoris quantitatis, & relinquetur minor terminus differentiæ duarum propositarum quantitatum: minor autem terminus minoris quãtitatis demptus ex ipsa maiori quantitate per se nota, relinquet maiorem terminum differentiæ. Si uero minor quantitas per se nota fuerit, subtrahemus eam singulatim ex duobus terminis maioris quantitatis, & relinquentur duo termini differentiæ quos quærebamus. Horum omnium demonstratio planissima est, immediate fermè ex communibus animi conceptionibus pendens. Exempla autem inferius occurrent plurima, rem hanc abunde declaratura.

III.

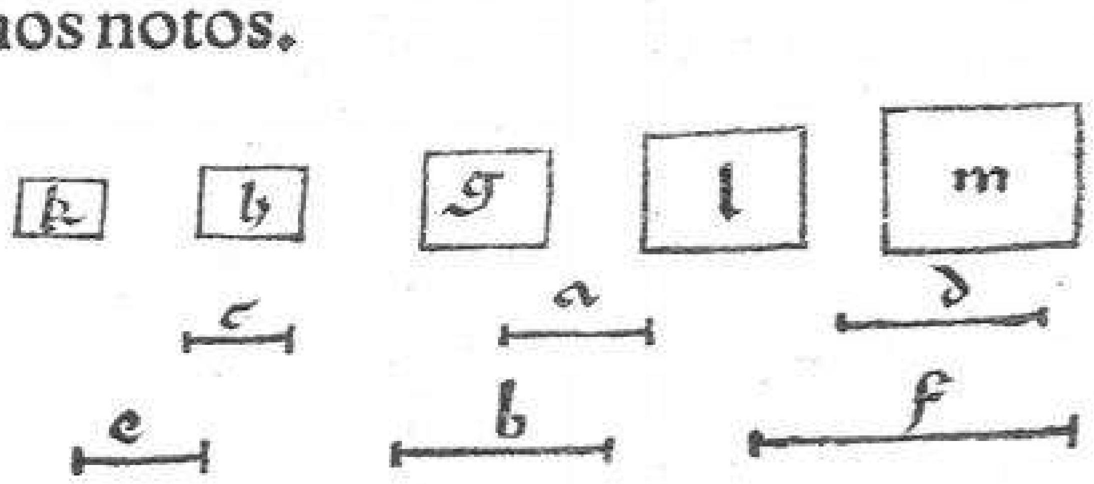
Si quis duas lineas inter binos terminos habuerit notos, quod ex ductu alterius earum in alteram nascitur, inter duos quoq; notos terminos comprehendetur.

Sint duæ lineæ a & b, quarum altera quidem a duos terminos c minorem & d maiorem habeat: b autem linea e minorem & f maiorem. Dico q parallelogrammũ rectangulũ ex a in b inter notos duos consistet terminos. Fiat enim ex a in b parallelogrammũ g: ex e autem in a fiat h: item ex e in c producatur k, deinde ex b in d fiat l, & ex f in d nascatur m parallelogrammum. erit igitur per primam sexti elementorum proportio k parallelogrammi ad h parallelogrammũ, sicut lineæ e ad lineam b sumpta c cõmuni altitudine duorum parallelogrammorũ k & h: sed e linea minor est b, quare & k parallelogrammũ minus est parallelogrammo h. Similiter probabitur h parallelogrammũ minus ipso g parallelogrammo sumpta b communi altitudine duorum parallelogrammorum h & g, constat itaq; k parallelogrammũ minus esse parallelogrammo g. Non aliter probabimus parallelogrammũ m maius esse ipso g parallelogrãmo, sic g parallelogrammũ inter duos terminos k & m constituitur notos propter quatuor terminos c d e & f cognitos. 16. primi triangulorum arguente. Modus autem operãdi habebitur, si minores terminos in se, alterum uidelicet per alterum multiplicabimus, maiores quoq; duarum linearum terminos per seipsos, nam ex hac quidẽ multiplicatione minor, ex illa aũt maior terminus procreabitũ.

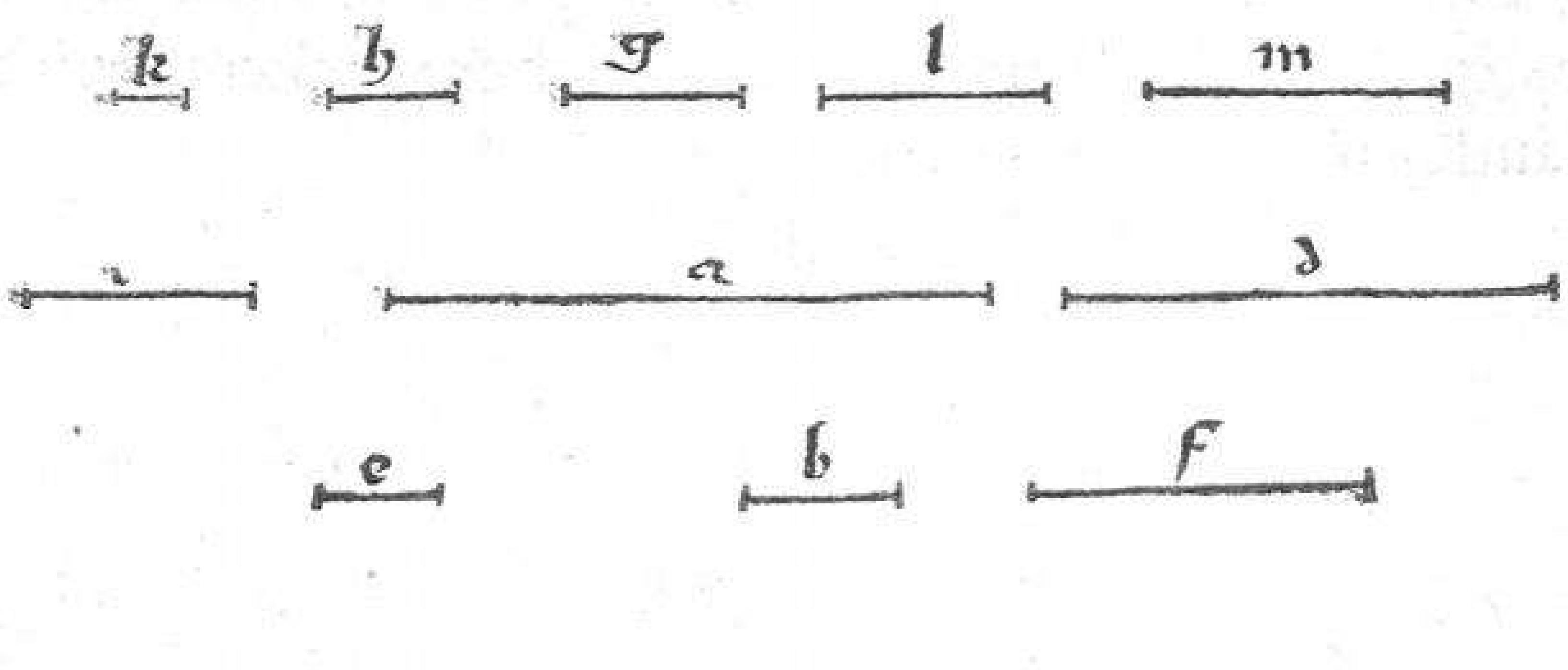
IIII.

Datis duabus quantitatibus singulatim inter duos terminos notos, quod ex diuisione alterius per alteram elicietur, inter duos quoq; claudetur terminos notos.

Sint duæ



Sint duæ quantitates a & b, quarum utraq; inter duos terminos notos conſtituatur, a quidem inter duos c & d: b autem inter duos e & f, diuidendoq; a per b, exeat g, dico g quantitatem inter duos notos claudi terminos. Diuiſa enim a quantitate per f, exeat h, per eandē quoq; diuiſa c exeat k, erit k quantitas nota propter duos terminos f & c notos, minor quantitate g. Nam cū per diffinitionem diuiſionis ex b in g, fiat a quantitas, quæ etiam fit ex h in f, erit per. 15. ſexti, ſiue uigeſimam ſeptimi proportio b ad f ſicut h ad g, ſed b minor eſt f: quare & h minor erit ipſa g quantitate. Item cum ex f in h fiat a, ex eadem quoq; f in k fiat c, erit per primam ſexti, aut per decimāoctauā ſeptimi proportio c ad a ſicut k ad h, ſed c minor eſt a, quare & k minor eſt h quantitate: erat autem h minor g, unde & k multo minor erit ipſa g. Rurſus diuiſa quātitate a per e, exeat l, d autem diuiſa per e, exeat m, erit ut prius proportio b ad e ſicut l ad g, ſed b maior eſt quantitate e: quare & l ſuperabit ipſam g. Similiter proportio m ad l erit ut d ad a, cumq; d maior ſit a, erit & m maior l, erat autem l maior g, quare multo maior erit m ipſa g quantitate. Sic igitur g quantitas inter duos terminos k & m collocabitur notos, propter quatuor terminos c d e & f cognitos. Tenor operationis talis habebitur: Diuide minorem terminum quantitatis diuidendæ per maiorem terminum quantitatis diuidentis, & exibit minor terminus quæſitus, item maiorem terminum quantitatis diuidendæ partiaris per minorem diuidētis, & exibit maior terminus quæſitus. Inter hos ergo terminos quantitas exiens continebitur. Solent autem nonnulli in multiplicationibus atq; diuiſionibus quoſdam habere ſcrupulos, mirum enim uidetur eis, ꝙ linea trium (uerbi gratia) pedum ducta in lineā, quatuor pedum faciat ſuperficiem duodecim pedum, cum linea quatuor pedum ter ſumpta, non niſi linea duodecim pedum linealium coaceruetur. Duarū enim quantitatū alteram per alterā multiplicare non eſt aliud, niſi alteram earum toties ſibi coaceruare, quoties in reliqua eſt unitas; multiplicatio nanq; quælibet additioni cuidam reſpondet ſiue æquipollet. Circa hoc conſiderandū eſt, ꝙ non cuilibet ductioni lineæ in lineā correſpondet quædā multiplicatio, nam ſi lineæ in ſe ductæ fuerint incōmunicantes, altera quidem in alteram duci poteſt per diffinitionem eius, quod eſt lineam duci in lineam, nulla tamen multiplicatio habebit ibi locum: multiplicatio enim in numeris duntaxat reperitur, ſed linearū incōmunicantium non eſt ut numerorū proportio. Cuilibet autem ductioni linearum cōmunicantium aliqua reſpondet multiplicatio; nam tales lineæ proportionem habent ſicut numeri certi, imò ipſemet lineæ ſunt numeri numerati, ex collectione menſuræ eārum cōmunis reſultantes, ut in exemplo. Duæ lineæ a b & b c in ſe ductæ, habeāt proportionem duorum numerorum tria & quatuor, a b quidem ſit ut tria, id eſt menſura cōmunis ſit ter in ea, b c autem ut quatuor, diuidaturq; a b in tres particulas æquales, & b c in quatuor, quæ ſignentur characteribus ſuis, ut in figura cernis, ducanturq; à punctis ſectionum lineæ æquediſtantes lateribus parallelogrammi a c, ita ut totum parallelogrammum reſolutum habeatur in quadratella, quorum quodlibet à menſura communi deſcribitur, Sicut ergo lineuncula b g eſt unitas linealis, ita quadratum



dratum suum b q est unitas superficialis, totq; unitatum superficialium est parallelogrammum b p, quot linealium linea b c per primam sexti elementorum. Similiter tot sunt unitates superficiales huiusmodi in parallelogrãmo b l, quot unitates lineales in latere suo a b. Cum deniq; quamlibet rem mundi pro unitate sumere liceat, quemadmodum in ueritate ipsa existit. Si sumpserimus parallelogrãmum b p tanq; unitatem, erunt tot tales unitates in toto parallelogrammo a c, quot sunt unitates lineales in latere suo a b, quod non ineptius dici potuit de parallelogrammis b l, g m, h n & k d æqualibus, unumquodq; enim eorũ toties est in superficie a c, quoties unitas linealis est in latere b c. Vno igitur & eodẽ charactere aut signo, siue uocali siue scripto scilicet. 4. significamus lineã b c superficiem b p, & superficiem b d, quælibet enim harũ quantitatum quatuor habet unitates. Similiter dicetur de latere a b & superficiebus ex eo surgentibus, oẽs enim ternario atq; eius caractere. 3. significãtur. Dum itaq; in hoc proposito multiplicantur quatuor unitates per tres, non intelligas unitatem linealem, sic enim nihil aliud q̃ linea resultaret: sed per unitatem de quatuor intellige quadratellum b q, per unitatẽ aũt de. 3. intellige superficiẽ b p: hæc igit̃ quæ est quatuor quadratella ter sumpta, constituet totam superficiem b d scilicet duodecim quadratellorum, hoc modo in reliquis omnibus multiplicationibus te expedias. Sed sint diuidenda. 12. per. 4. intellige. 12. quadratella, quorum unumquodq; describitur ab unitate lineali b c, per quatuor huiusmodi quadratella. Vnitas itaq; de. 12. est unum quadratellum huiusmodi, & similiter unitas de. 4. sed unitas de. 3. quæ per diuisionem exeunt, est superficies b p. Facta igitur diuisione, dicimus lineam a b esse trium unitatum, non q; unitas ternarij, qui per diuisionem exiuit, principaliter sit linea a e, aut alia sibi æqualis, sed superficies a o, quæ cum ter sit in tota superficie a c, necesse est lineam quoq; a e ter contineri in linea a b, & ad hunc modum in cæteris.

V.

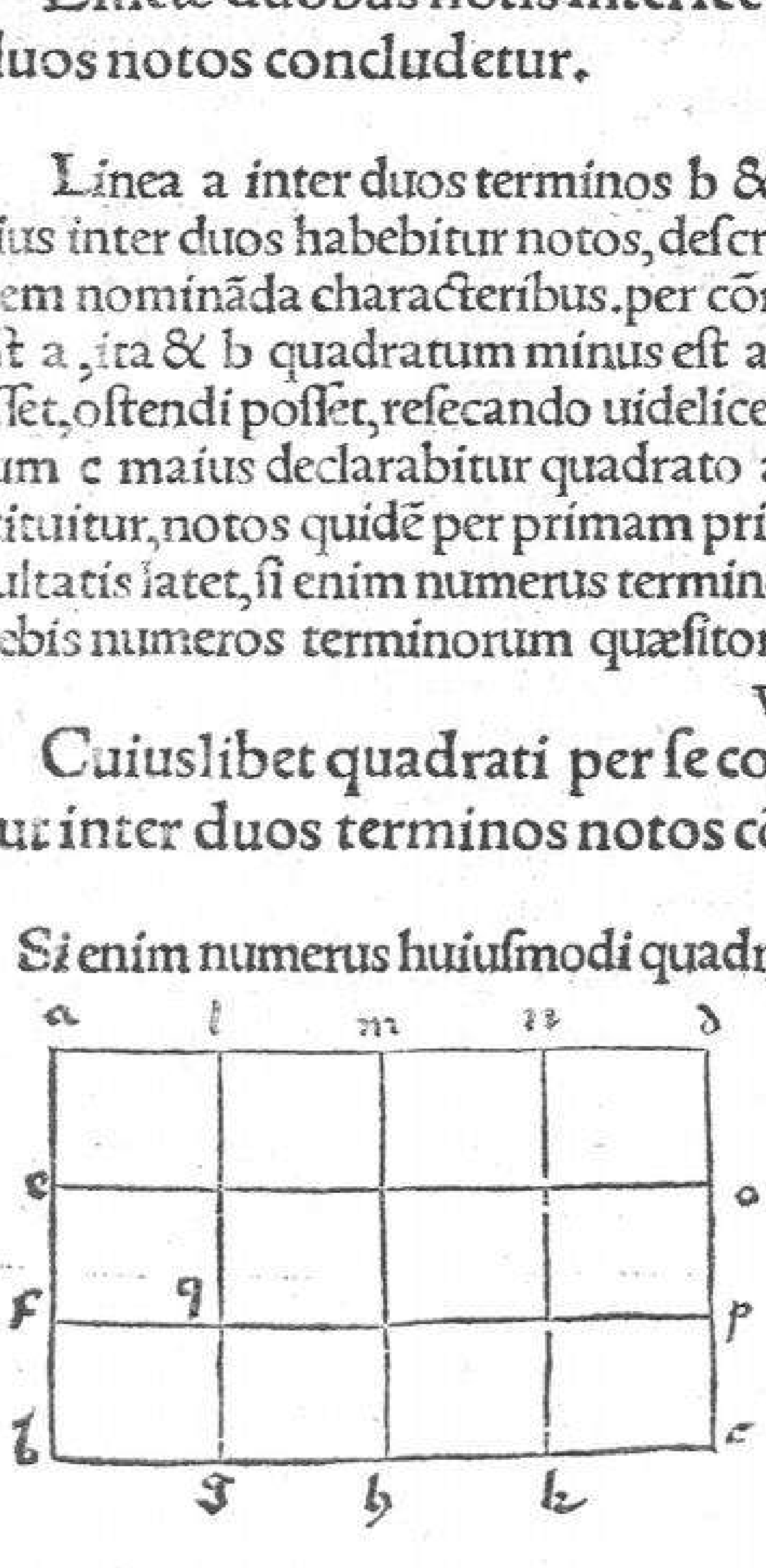
Lineæ duobus notis interiectæ terminis, quadratum quoq; inter duos notos concludetur.

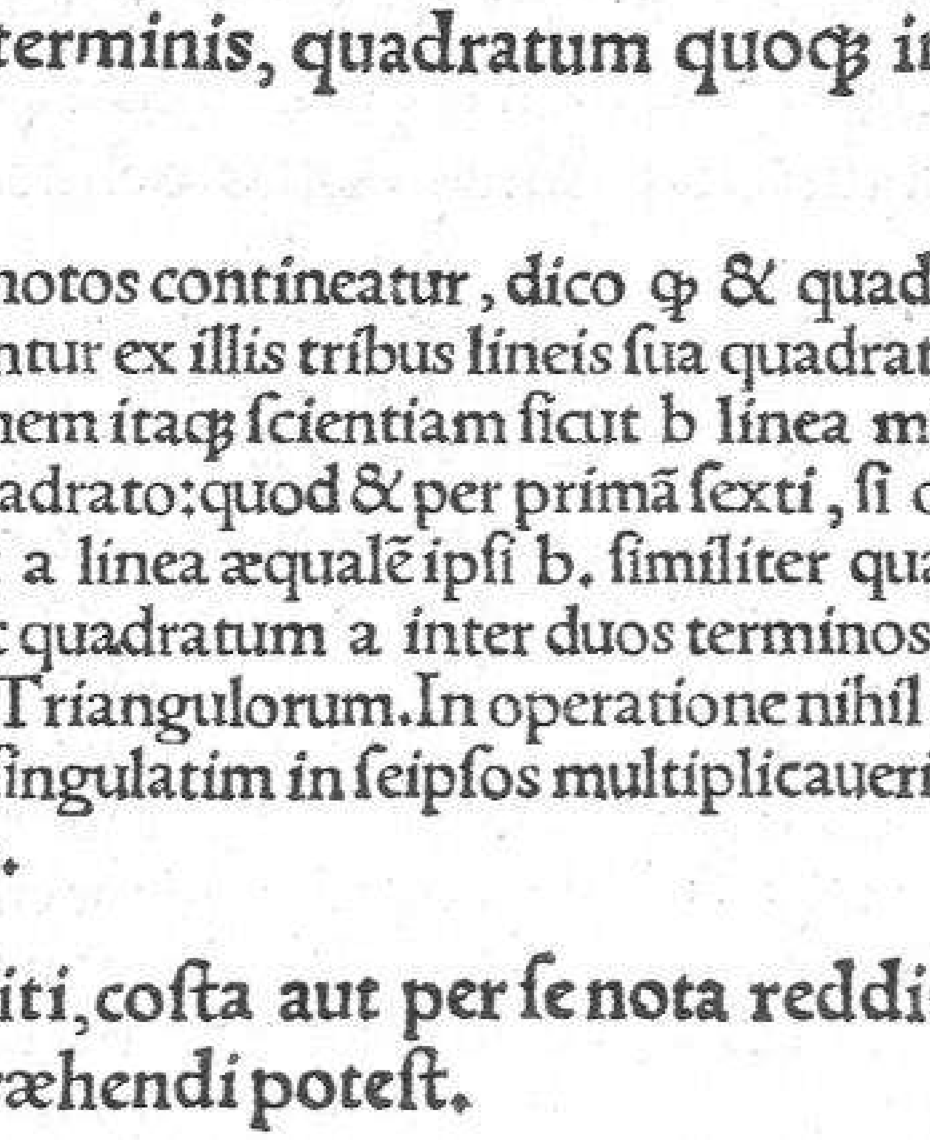
Linea a inter duos terminos b & c notos contineatur, dico q; & quadratũ eius inter duos habebitur notos, describantur ex illis tribus lineis sua quadrata eisdem nominãda characteribus. per cõmunem itaq; scientiam sicut b linea minor est a, ita & b quadratum minus est a quadrato: quod & per primã sexti, si opus esset, ostendi posset, resecando uidelicet ex a linea æqualẽ ipsi b. similiter quadratum c maius declarabitur quadrato a. sic quadratum a inter duos terminos constituitur, notos quidẽ per primam primi Triangulorum. In operatione nihil difficultatis latet, si enim numerus terminorũ singulatim in seipsos multiplicaueris, habebis numeros terminorum quæsitorum.

VI.

Cuiuslibet quadrati per se cogniti, costa aut per se nota redditur, aut inter duos terminos notos cõpræhendi potest.

Si enim numerus huiusmodi quadrati quadratus est, radix eius costam quadrati propo





ti propositi manifestabit. Si uero numerus ille non fuerit quadratus, necessario cõtinebitur inter duos quadratos numeros sibi uicinos, quorũ radices notificabũt duos terminos costæ quadrati propositi. Vt si quadratum propositum fuerit 25. costa eius erit 5. Si uero quadratũ tale sit 28. cum numerus ille 28 circa se proximos habeat quadratos 25 & 36. quorũ radices sunt 5 & 6. erit costa quadrati 28. inter hos terminos 5 & 6. hæc oĩa sunt manifestissima, & demonstratione nõ egent.

VII.

Si quadratum quodlibet inter duos terminos notos contineatur, costam quoq; eius duobus notis terminis interponi.

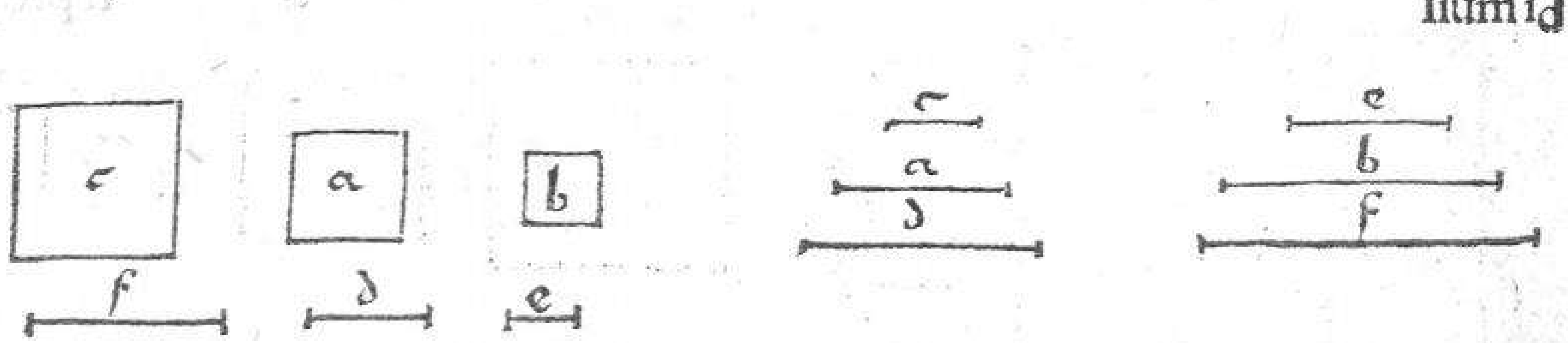
Vt si quadratum a fuerit inter duos terminos notos, qui sint b & c, dico costam eius, quæ sit d distinctionis gratia inter duos terminos notos contineri. Sit enim e costa quadrati b, & f costa quadrati c, quas oportebit esse notas, si saltem numeri quadratorũ b & c quadrati fuerint. Costam autem d esse inter duas lineas e & f nemo dubitabit communi animi conceptione informatus. Sicut enim quadratum b minus est quadrato a, ita & costa eius minor ipsa costa d habebitur, similiter costa f maior eadem concipietur. Quòd si duo numeri quadrata b & c notificantes non fuerint quadrati, accipiendus est numerus quadratus proxime minor numero quadratum b notificante, & huius numeri radicem dabimus termino minori costæ d, sed pro termino maiori accipiendus est numerus quadratus proxime maior numero quadratum c notificante, huius radicem maiori termino costæ d accomodabimus. Qđ si alter duorum numerorum costæ d circumpositorum quadratus fuerit, alter autem non quadratus, utemur radice eius, qui quadratus est, pro uno termino: pro reliquo uero termino ut prius radicẽ numeri proximo minoris aut maioris assumemus, secundum quod res ipsa hortat.

VIII.

Si aliqua quantitas inter duos terminos notos comprehensa fuerit, quæcunq; ad eam quantitatem habuerit datam proportionem, & ipsa inter duos terminos notos collocabitur.

Sit a quantitas inter duos terminos notos c minorem & d maiorem, quantitas autem b ad ipsam a proportionem habeat notam: dico q & b quantitas inter duos terminos notos collocabitur. Cum enim proportio a ad b sit cognita, ponamus ei æqualem proportionẽ c ad e, similiter proportio d ad f sit sicut a ad b, oportebit igitur b quantitatem comprehendi inter duos terminos e f, ita q e sit minor b, & f maior eadẽ: erãt aũt duo termini e & f noti, ꝓpter proportionem a ad b notã cum utroq; terminorum c & d. q autem e minor sit b & f maior eadem, sic constabit. Proportio c ad e est ut a ad b, & ideo permutatim c ad a sicut e ad b, sed c minor est a, igitur & e minor est b quantitate. Similiter permutando terminos duarum proportionum a ad b & d ad f, concludemus f esse maiorem quantitate b, quemadmodum d maior erat a quãtitate. Quantitas igitur b inter duos terminos notos constituetur, quod erat explanandum. Quo autem pacto duo termini e & f inueniantur, nemo hæc nostra scripta lecturus nescire debet, facile enim per legem quatuor numerorum proportiona-

lium id



lium id abſoluet, ſi productum ex multiplicatione conſequentis proportionis notæ in utrumlibet duorum terminorum notorum diuiſerit per antecedens proportionis notæ, exibit enim terminus minor ſecundæ quantitatis, ſi minorem primæ quantitatis multiplicabit, maior uero ſi maiorem. Quòd ſi per diuiſionem huiuſmodi numerus habens fractionem annexam, eliciatur, & libeat terminos ſecundæ quantitatis habere integros, abijcienda erit minutia, quæ circa minorem terminum ſecundæ quantitatis reperitur. Pro fractione autem, quam maior terminus habet, unitas integra adijciēda erit, hoc enim pacto nouos terminos integros ſecundæ quantitatis extrahemus, quorum alter quidem minor erit eo, quem per opus quatuor numerorum proportionalium accepimus, reliquus autem maior erit eo, quem huiuſmodi opus elicuit. Numeros autem exemplares, quoniam faciles ſunt, prætereundos cenſui.

IX.

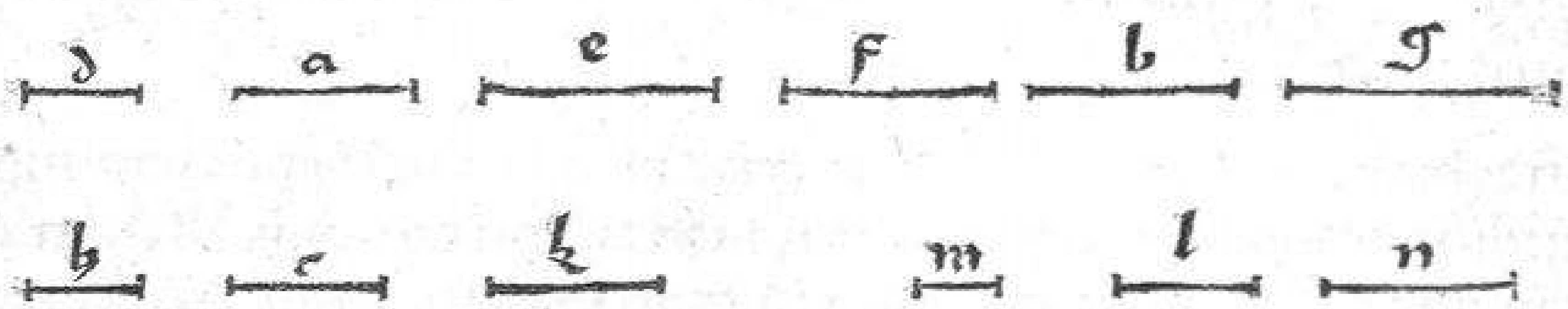
Si fuerint tres lineæ continuæ proportionales, quarum duæ quæcunq; inter binos terminos notos conſtituantur, reliqua quoq; inter duos notos terminos reperietur.

Sint tres huiuſmodi lineæ a b & c, quarum duæ inter binos terminos notos conſiſtant: dico ꝙ & reliqua duobus notis interiacebit terminis. Si enim duæ extremæ terminos habeant notos, erit per tertium præambulum, quod fit ex altera in alteram inter duos terminos notos, illud autem per. 16. ſexti elementorũ æquatur quadrato mediæ lineæ: ſic quadratum mediæ lineæ inter duos notos conſiſtet terminos, & ideo per ſeptimum præambulũ ipſa linea media duos terminos habebit cognitos. Si uero media linea fuerit inter duos terminos cognitos cum altera duarum extremarum, erit per quintum præambulũ quadratum lineæ mediæ inter duos terminos cognitos, quadratũ autem lineæ mediæ cum altera duarũ linearum extremarũ per uiam diuiſionis ſuſcitabunt reliquam extremã: cunq; utraq; illarum ſit inter duos terminos cognitos, erit & per. 4. præambulum reliqua linea extrema inter duos terminos cognitos.

X.

Quatuor linearum proportionalium, ſi tres quælibet inter notos iaceant terminos, quartæ quoq; duos terminos notos ſuſcitabimus.

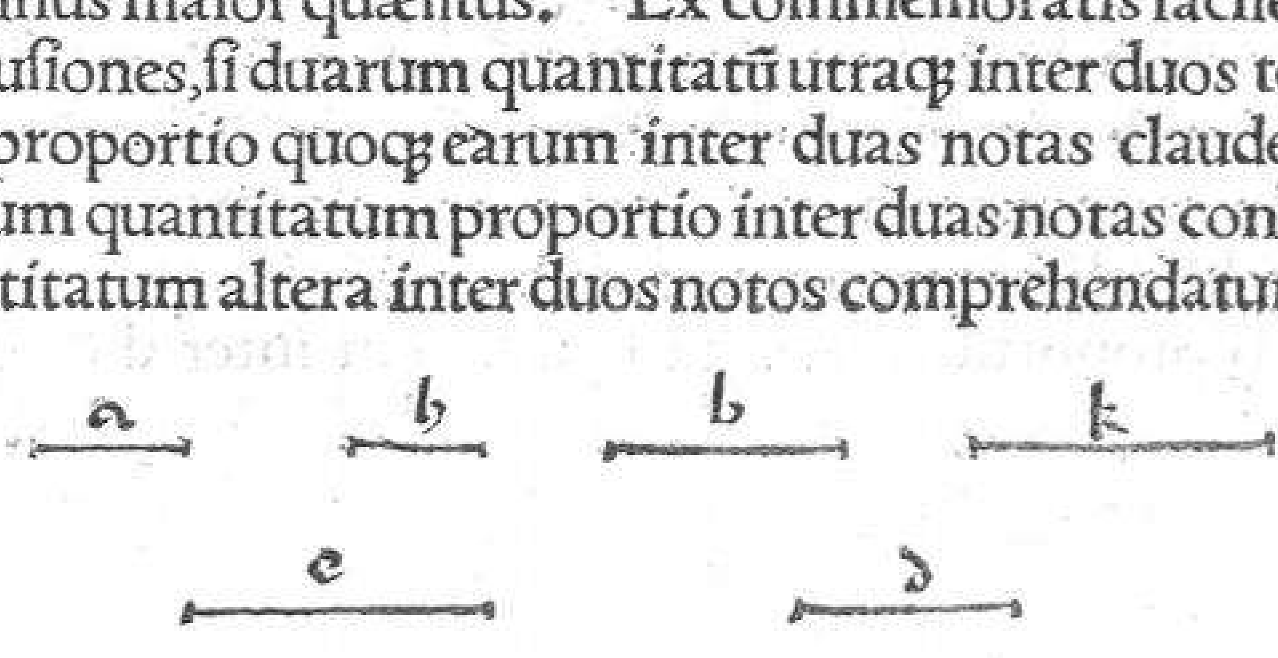
Nam per. 15. ſexti elementorum, quod ſub ſecunda & tertia continetur, æquale eſt ei, quod ſub prima & quarta: cognito igitur eo, quod ſub ſecunda & tertia cõtinetur, mediante altera duarum extremarum, per uiam diuiſionis cognoſcitur reliqua: idem quoq; accidit, ſi quod ex prima & quarta fit, parallelogrãmum fuerit cognitum, ipſum enim per uiam diuiſionis cum altera duarum mediarum cognita, reliquã ſuſcitabit notam. In hoc igitur propoſito noſtro, aut ambæ extremæ inter notos conſiſtunt terminos, aut ambæ mediæ. Si duæ extremæ inter notos iaceãt terminos, per tertium præambulũ, qđ ex ductu alterius in alterã fit, inter duos notos cõſtituet̃ terminos, & ideo p. 4. præambulũ altera duarũ mediarũ inter notos exiſtente terminos, reliqua quoq; duobus notis circundabit̃ terminis. Similiter ſi duæ mediæ inter notos cõſiſtant terminos, q̄d ſub eis continet̃, inter notos habebitur terminos per tertium præambulum, cunq; altera duarum etiam extremarum inter duos notos exiſtat terminos, erit per quartum præambulum ſecundum uiam diuiſionis & reliqua extrema inter duos terminos cognitos. In exemplo: Sit a lineæ ad b proportio ſicut c ad l, a autem inter d & e terminos, b inter f & g, c inter h & k. multiplicabimus f minorem terminum ſecundæ in h minorem tertiæ,& productum diuidemus per e maiorem primæ, exibit enim minor terminus quartæ,qui ſit m. Item g maiorem ſecundæ ducemus in k maiorem tertiæ,& productum diuidemus per d minorem primæ,ſicq; exibit maior terminus quartæ qui ſit n. Quantitas igitur l inter duos terminos m & n notos habebitur,quod erat abſoluendum. Facilius autem id exequemur, ſi una talium quantitatum per ſe data fuerit,aut duæ etiam,utemur enim termino ipſius quantitatis per ſe datæ uice duorum terminorum. Vt ſi a quantitas per ſe data fuerit, b autem inter duos terminos,& c ſimiliter inter duos,productum ex f in h diuidemus per numerum ipſius a quantitatis, & exibit m minor terminus quartæ quantitatis. Similiter productum ex g in h diuidemus per eundem numerũ quãtitatis a, & exibit n maior terminus quartæ,ita in cæteris. Rationes omniũ dictorum ex tertio & quarto præambulis cum quintadecima ſexti elementorum facile comparantur.



XI.

Si fuerint duæ quantitates, quarum proportio etſi ignota ſit, inter duas tamen notas conſiſtat, fueritq; altera duarum quantitatum per ſe data, reliqua quoq; inter duos notos continebitur terminos.

Sint duæ quantitates a & b,quarum proportio minor quidem ſit data proportiõe d ad e,maior autem proportione f ad g;ſitq; a quantitas per ſe data. Dico ꝙ b quantitas inter duos terminos notos comprehendet. Eſto enim proportio a ad h ſicut d ad e,proportio demum a ad k ſicut f ad g,erit autem h quantitas nota,propter notam proportionem d ad e,atq; quantitatem a cognitam. Cum autem ſit proportio d ad e ſicut a ad h,proportio autem d ad e maior ſit proportione a ad b,erit & proportio a ad h maior proportione a ad b, & ideo per decimam quinti h minor b quantitate. Similiter probabimus k maiorem eadem b quantitate,b igitur quantitas inter duos terminos notos conſtituitur,quod expectabatur declarandum. Operationẽ ſic habebimus: Conſequẽs maioris duarum datarum proportionum multiplicabimus per quantitatem datam,& productum diuidemus per antecedens eiuſdem maioris proportionis, exibit enim minor terminus ſecundæ quantitatis,deinde ſimiliter conſequens minoris datarum proportionum multiplicabimus per primam quantitatem,per ſe ſcilicet datam,& productum partiemur per antecedens eiuſdẽ minoris proportiõis, & exibit terminus maior quæſitus. Ex commemoratis facile demonſtrabuntur hæ duæ concluſiones,ſi duarum quantitatũ utraq; inter duos terminos notos conſtituta fuerit,proportio quoq; earum inter duas notas claudetur proportiones. Item:Si duarum quantitatum proportio inter duas notas conſiſtat proportiões, quarum quantitatum altera inter duos notos comprehendatur terminos, reliqua quoq;



quoq; inter duos notos reperietur. Sed quoniam ad propositum nostrum nō sunt necessariæ scitu, silentio prætereundas censui.

XII.

Nunc ad primordia exercitij nostri propius ueniendo, certissimũ pronunciamus, circumferentiam circuli esse eiusdem generis cum qualibet linea recta, imô omnes lineas, siue rectæ fuerint, siue curuæ, qualicunq; curuitate, non differre specifice.

Nam idem est principium generationis omnibus lineis cōmune, scilicet punctus, cuius fluxu siue motu imaginario lineas nasci prædicant Mathematici: eo enĩ fluente, per uiã breuissimã linea recta creaĩ, per uiã aũt aliã curua generaĩ. Similiter sentiendũ est de supficiebus oĩbus, & itẽ de corpibus: sicut enĩ ex fluxu pũcti linea, ita ex motu lineæ supficies, & ex fluxu superficiei corpus cõficiĩ. Ad hãc rem cõfirmandã testimonia subsistunt plurimorũ Geometrarũ. Nonne Archimedes in principio primi de sphæra & cylindro demonstraturus congeriem laterum polygonij circulo circumscripti maiorẽ esse circuli circumferentia, assumit quaslibet duas rectas à punctis contactuũ polygonij & circuli ad punctum unum concurrentes, esse maiores eo arcu, qui inter ipsa puncta contactuũ intercipitur: maiores autem esse non possent, nisi de eodem genere quãtitatis existerent; alias enim inter eas & arcum circuli non caderet proportio. Archimedes deniq; in de spiralibus lineis circumferentiæ circuli æqualem rectam inueniri posse supponit. Item in libello de mensuratione circuli eum triangulum rectangulum circulo æqualẽ esse demonstrat, cuius unum quidem latus rectum angulum ambiens semidiametro, reliquum uero circumferẽtiæ circuli æquale est, unde aperte sensisse dinoscitur Archimedes curuũ & rectum lineale eiusdem esse generis. Ptolemæus quoq; in sexto libro magnæ compilationis suæ capitulo septimo, ubi ex digitis eclipticis linearibus superficiales conatur elicere, Archimedem imitatus, proportionem circumferentiæ circuli ad diametrum eius inter duas proportiones claudi notas enunciat: aream insuper circuli dimensurus, semidiametrum circuli in semicircumferentiã suam ducit, quam rem profecto imprudenter ageret, nisi eiusdem generis diametrum cum circumferentia circuli esse cognouisset. Sed & in libello trium fratrũ talia supponuntur, ubi etiam demonstrandum proponitur cuiuslibet circuli circumferentiam ad diametrum suam eandem habere proportionem. Id autem præsupponit curuam circularem & rectam esse eiusdem generis: proportionem enim diffiniunt Geometræ duarum quantitatum eiusdem generis certam habitudinem. Quo uehementius admirãdi sunt, qui nescio quibus territi somnijs, curui ad rectũ inquiunt non esse proportionem. rogatiq; cur nam id fieri oporteat, respondent curuum & rectum non esse de eodem genere quantitatis, quæ res ꝙ temeraria sit, facile quisq; senserit. curuum reuera & rectum passionem quidem quantitatibus inferunt, genus autem non diuersificant. Hunc rumorẽ ortum esse arbitror ex uerbis Aristotelis in Prædicamentis, ubi ad tempus usq; suum neminem circuli quadraturam testatur inuenisse: circuli autem quadratura non uidetur possibilis, nisi doceatur quonam pacto circumferẽtiæ circuli æqualis recta describatur. Difficultatem igitur quam nonnulli impossibilitatem dicunt, quadrandi circulum ex difficultate, aut si uis dicere ex impossibilitate, circumferentiam rectificandi consurgit. Hanc autem impossibilitatem rectificandi circumferentiam circuli, siue æqualem ei rectam describendi clamitant inde euenire, ꝙ non sint eiusdem generis.

XIII.

Praeterea non est ignorandum, circumferentiam circuli addere super triplum diametri suæ, minus quidem una septima eius, plus autẽ decem septuagesimis primis ipsius diametri.

Cuius rei certitudinem Archimedes in libello de mensuratione circuli manifestauit, numerorum fretus officio. Vtemur autem & nos penè simili ingenio numerorum in hoc nostro proposito, licentiam id faciendi ab Archimede sumentes. Neq; turbabit nos unq̃, q̃ plerisq; uisum est, ineptum siue impertinens linearũ habitudines per numeros inuestigare: nam in proposito nostro non nisi lineis rationalibus communicantibus utemur, quarum proportionem quinta decimi demonstrat esse ut numerorum. Quid quæso aliud suspicaris esse lineas, aut quantitates quasuis communicantes, nisi numeros ex coaceruatione mensuræ earum communis resultantes? Cur autem nonnullis in negocio linearum numeri suspecti sint, nisi me fallit animus, apertum dabo. Arabes olim circulum quadrare polliciti, ubi circumferentiæ suæ æqualem rectam descripsissent, hãc pronunciauere sententiã. Si circuli diameter fuerit ut unum circumferentia sua, erit radix quadrata de decem. Quæ quidem sententia, cum sit erronea, quemadmodũ alibi explanauimus, cunq; numeros rectilineationem effecturos introducat, numeri ipsi in hoc negocio suspecti habentur. Ex supra cõmemoratis trahitur, q̃ si diameter circuli diuisa fuerit in 497. particulas æquales, circumferẽtia circuli erit minor 1562. huiusmodi particulis, maior autem q̃ 1561. Similiter si semidiameter posita fuerit 497. particularum æqualiũ, semicircumferentia minor quidem erit linea recta cõplectente 1562. huiuscemodi particulas, maior autem linea recta habente 1561. tales particulas. Nam 1562. addunt super triplum de 497. unam septimã de ipsis 497. circũferentia autem circuli, ut præmissum est, minus addit. Item 1561 addunt super triplum de 497. decem septuagesimas primas de 497. circumferentiam autẽ addere super triplum diametri, quæ ponitur 497. plus q̃ decem septuagesimas primas, superius explanatum est. Non iniuria igitur dicemus circumferentiam circuli inter prædictos numeros existere, non quidem tanq̃ numerum, cum inter dictos numeros nullus cadat medius, sed tanq̃ maiorem minore eorum, & minorem maiore, ita q̃ addat supra minorem aliquam particulã unitatis, cuius particulæ quantitatem nemo usq; ad hodiernum diem didicit, sicut neq; comprehensum est circumferentiam esse communicãtem diametro, aut incommunnicãtem. Hoc suspicor etiã esse illud, quod plerosq; impulit dicere, curui ad rectum non esse proportionem: ubi enim non esse proportionem cognitam siue datam dicere debebant, simpliciter abnegauere proportionem, quasi non sit proportio aliqua non cognita siue nõ data, quales tamen multæ sunt. Sic ex genere proportionis ignoto proportionẽ nullam prorsus esse, falso putauerunt. Dictos itaq; numeros uocabo terminos circumferentiæ, q̃ inter eos quantitas circumferentiæ concludatur, quem loquendi morem in alijs similibus negocijs obseruatum ire decreui. Non autem solum illos sed quoslibet etiam numeros maiores maiore dictorum, & quoslibet minores minore eorũ, terminos appellabo. Nam si (uerbi gratia) circuli circumferentia est inter hos duos 1561. & 1562. erit etiam inter hos 1560, & 1563. & similiter de alijs. Quod autem de circumferentia circuli enunciauimus, ad omnes alias quantitates quibus binos huiusmodi terminos circumponimus, accomodandum erit.

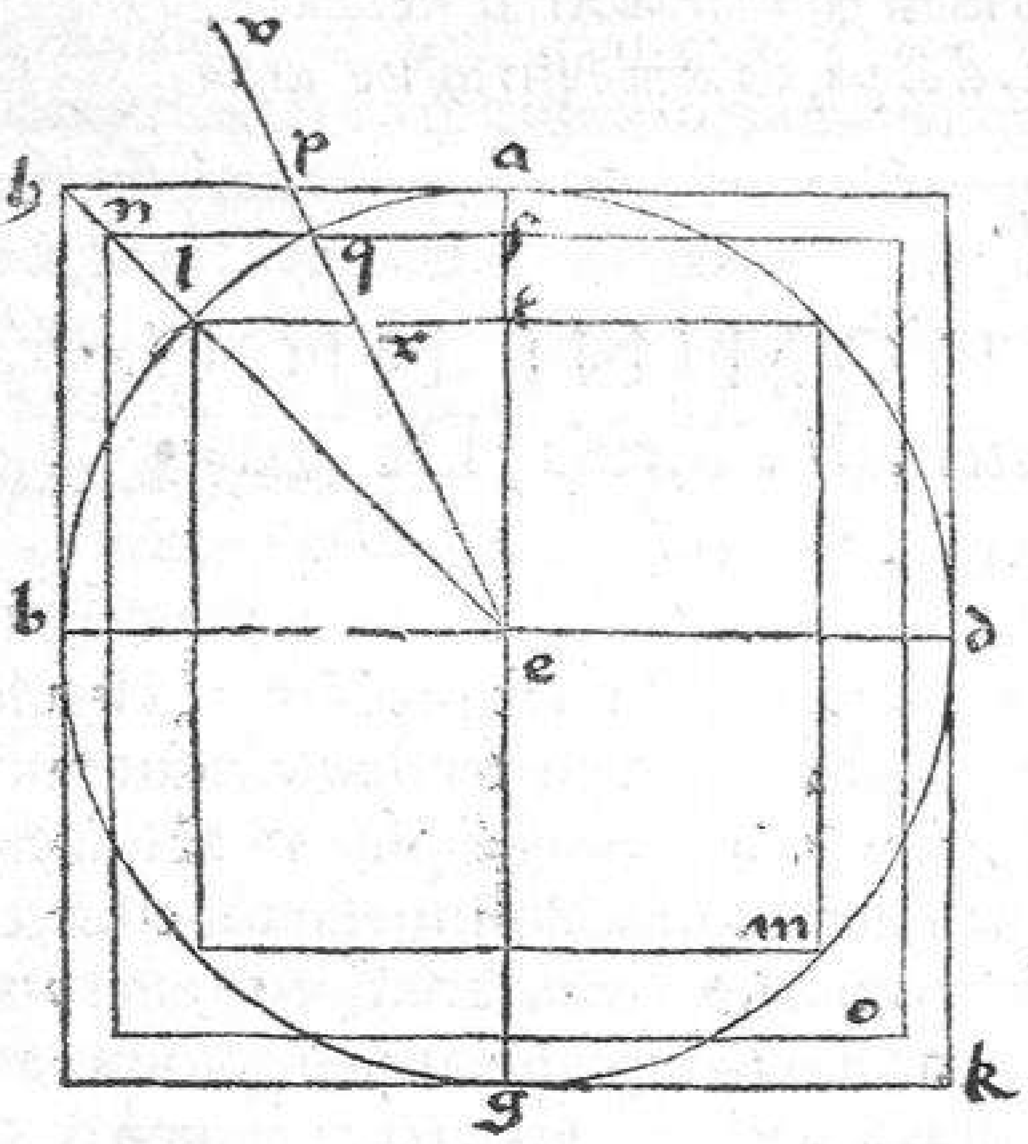
ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς Νικόλεω τοῦ κουσαίω ἐκδεδομένος. ἔστι δὲ οὗτος ὁ τετραγωνισμὸς ἄνευ εὐθείας ἴσης τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ διαγεγραμμένης καθάπερ ὁ Ἀρχιμήδης ἐποίησε. ἐπεὶ οὖν ἐκεῖνος οὐ φανερὰν προσφέρει τὴν ἀπόδειξιν, πειράσομαι τινὰ τρόπον εὑρεῖν τῆς ἀκριβείας αὐτοῦ ἢ τοὐναντίον. εἰ γὰρ ταύτῃ τῇ προτάσει παρακολουθεῖ τι ἀδύνατον, οὐκ ἔσθ᾽ ὅπως ἡ εὕρησις καλὴ γενήσεται. εἰ δὲ μή, εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ ἀναστρεπτέον.

ἀγαθῇ τύχῃ.

IN EDITIONEM DOMINI NICOlai de Cusa Cardinalis S. Petri ad Vincula, De quadratura circuli.

Apud maiores nostros uetus iamdiu agitatum est problema, circulū propositum quadrare, breue quidem uerborum tenore, effectu autē ita arduum atq; inexplicabile, ut plurimis philosophis id absoluere tentantibus, tametsi diuersam quisq; pro modo ingenij sui eligeret uiam, spes omnis adempta sit, nemo autem eorū satis docte rem hanc tradidisse uidetur. Nam etsi Archimedes Syracusanus egregie atq; propinque ad metam hanc accesserit, adeo, ut uniuersos alios longe superasse credatᷣ, tamen quia utitur lineis spiralibus ad propositum suum, quarū descriptio difficilius fermê problema obijcit intellectui, q̃ ipsa circuli quadratura, uisum est plerisq; Archimedi huiusce problematis absolutionem haudquaq; constitisse. Adde ꝙ in hac re utitur linea recta contingente spiralem in prima reuolutiōe descriptam in termino suo: quod profecto obscurum atq; incertum factu est. Neq; mireris, ꝙ Archimedis in hoc negocio meminerim, de quo nihil scripsisse uidetur: quippe qui nulli librorum suorum de quadratura circuli titulum imposuit. Satis reuera hoc intendisse uidetur, dum circumferentiæ circuli æqualem rectam describere conatur, qua quidem descripta, nihil reliqui est, quod circulum quadrare prohibeat. Verum Archimedes ipse, quo pacto linea recta æqualis circumferentiæ circuli describeretur, nō tradidit, q̃uis hanc conclusionem enunciauerit. Si linea recta contingat spiralem in prima circulatiōe descriptam in termino eius, educaturq; recta ab initio spiralis, continēs angulum rectum cum linea, quæ circulationis existit, principium recta quæ ipsa contingente, & dicto circulationis principio intercipitur, circumferentiæ circuli æquabitur. Describere enim rectam æqualem circumferentiæ circuli præsupponit descripsisse lineam spiralem, eiq; contingentē applicuisse, quæ duo non minus profecto difficilia uidentur, q̃ circumferētiæ circuli æqualem rectam designare. Nonnulli tamen fuere, qui circulum quadrare tentarūt absq; descriptione præuia rectæ æqualis circumferentiæ circuli, quemadmodū Hippocras, cui per lunulas circulum quadrare conanti, Philopatris notam insufficientiæ impinxit, & quidem non iniuria. Hac demum tempestate nostra, uir quidam egregius circulo proposito æquale quadratum describere tentauit, similiter absq; designatione rectæ æqualis circumferentiæ circuli, sed lege quadam constituit quadratū medium inter duo quadrata, quorum alterum quidem circulo proposito circumscribitur, alterum uero eidem inscribitur, ita, ut circa diametros amborum consisteret, cuius intētionem q̃ paucissimis explicandam censui. Circulo a b g d super e centro descripto, circumscribatur quadratum h k, inscribaturq; quadratū l m, pro=

l m, productis duabus circuli diametris a g & b d, orthogonaliter se secātibus ad rectos etiam lateribus dictorum quadratorum incidentibus. ducatur deinceps ex centro circuli linea e h per angulos quadratorum h & l. & item alia e u indefinitæ longitudinis ex parte u, cuius quidem terminus e semper adhæreat centro circuli e, ipsa uero linea intelligatur moueri à linea e h uersus lineam e a secando circumferentiam circuli: intelligatur insuper quadratū, cuius latera æquedistent lateribus prædictorum quadratorum, unum autem eorum laterum transeat per punctū sectionis prædictæ, in quo uidelicet linea e u secuit circumferentiā circuli: ipsum etiam quadratū huiusmodi medium cōsistat circa diametros duorum quadratorum extremorum. Oportebit autem tale quadratū necessario semper uariari, propter motū lineæ e u circumferentiam circuli diuersimode secantis, ita q quanto magis recedet linea e u à linea e h, tanto magis habebitur, dum autem linea e u coincidit cum linea e h



quadratum, tale coincidet cum quadrato l m, cum uero ad situm lineæ e a traducta fuerit, coincidet quadratum tale cum quadrato h k. Præterea linea e u secabit duo latera qnadratorum h k & l m, contingitq; aliquando, ut duæ particulæ dictorum laterum interceptæ, duabus lineis e u & e a simul iunctæ, sint æquales medietati lateris quadrati medij, quod scilicet secundum motum lineæ e u uariatur. Nam quando linea e u iacet in situ lineæ e h, duæ lineæ h a & l t simul iunctæ, longiores sunt medietati lateris quadrati per punctum sectionis l transeuntis. Dum autem fuerit linea e u in situ lineæ e a, nihil inter duas lineas e u & e a intercipietur: sic ergo per motum lineæ e u à maiori transitur continue usq; ad non quantum, quare aliquando uentum est ad æquale: hoc, nisi me fallit opinio nemini dubium uidebitur. Sit itaq; nunc linea e u in tali situ, secans circumferentiam quidem circuli in puncto q, latera autem quadratorum h k & l m in punctis p & r, describaturq; quadratum n o, cuius unum latus incedat per punctū q, eo pacto ut supra commemorauimus. Duæ autem lineæ p a & r t simul iunctæ, æquales sint ipsi lineæ n f, dimidio uidelicet lateri quadrati medij, quibus ita dispositis, prædicat philosophus ille quadratum n o æquari circulo a b g d. Qđ si ita esset, ingentes non iniuria haberemus huic inuentori gratias, q̄uis nondum problema circuli quadrandi absolutum esset. Hæc namq; conclusio aliud præmitti sibi uellet problema, duo scilicet latera quadratorum extremorum, per lineam à centro circuli egredientem, sic secare, ut duæ particulæ p a & r t simul iunctæ, æquales essent dimidio lateri quadrati, quod per incisionem circumferentiæ in q puncto factam transit. Tale autem problema difficilem præ se fert absolutionem, unde licet uerum esset quadratū medium sæpedictū æquari circulo, dum duæ particulæ p a & r t coniunctæ, æquantur dimidio lateris quadrati n o, non tamen adhuc circulum quadrādi facultatem nacti essemus. Circulum enim quadrare est aliquid operari, sed nihilo minus explorandum censeo, an uera sit hæc propositio, nā de problemate efficiundo posthac tacebo. Si ex centro circuli dati egrediatur linea

Proposi tio inuē toris.

linea recta indefinitæ longitudinis, secans circumferentiã eius, itemq; latera quadratorum circumscripti scilicet & inscripti ipsi circulo, quadratorum inquam circa eandem diametrum consistentium, sic q; duæ portiones laterum prædictorum quæ ab ipsa linea indefinitæ longitudinis, & semidiametro circuli orthogonaliter lateribus quadratorum incidente, intercipiuntur, coniunctim sint æquales dimidio lateri quadrati, quod per punctum incisionis circumferentiæ incedit, & circa diametros prædictorum quadratorum consistit, tale quadratum medium æquale circulo proposito habebitur. Hanc tamen propositionem facilius ex supra memoratis quisq; intelliget, q̃ per longam uerborum seriem absq; characterum assignatione. Exploraturus igitur quidnam ueritatis habeat hæc cõclusio, præmitto hãc consequentiam bene ualere. Si duæ portiones p a & t r sunt æquales lineæ n f, quadratum n o æquale est circulo a b g d, igitur si quadratum n o æquale est circulo a b g d, duæ portiones p a & r t coniunctim sint æquales lineæ n f, ita q; alterum ex altero pendet, æqualitas uidelicet linearum p a & r t coniunctim cum linea n f, ex æqualitate quadrati n o cum circulo a b g d. Nam si dixeris æqualitatẽ cõgeriei linearũ p a & r t cũ linea n f, nõ sequi ad æqualitatẽ quadrati n o cũ circulo a b g d. ponatur quadratũ n o æquale circulo a b g d, & cõgeries duarũ linearũ p a & r t, maior (uerbi gratia) ipsa linea n f. Cũ aũt possibile sit traducere lineã e u uersus e a, donec cõgeries linearũ p a & r t fiat æqualis lineæ n f, nõ dico autem lineæ n f prius designatæ, sed ei, quæ designanda erit per nouã sectionem lineæ e u, & circumferentiæ circuli a b g d. illud enim quoties oportuerit, repetendum uolo, ut transmota linea e u, quadratum quoq; n o uarietur, sic q; latus eius superius incedat per punctum circumferentiæ circuli, ubi eam linea e u secabit. Procedente autem linea e u uersus lineam e a, duæ lineæ p a & r t continue fiunt minores; linea autem n f continue maior, nam punctus sectionis in circumferentia circuli propinquior erit ipsi puncto a, q̃ antea fuerit. Sit ergo iam transmota ad talem situm, ubi congeries duarum linearũ p a & r t sit æqualis ipsi n f: erit ergo secundum te quadratum n o æquale ipsi circulo a b g d, sed ponebatur quadratum n o primum æquale ipsi circulo: quare per communẽ scientiam quadratum n o secundum æquabitur quadrato n o primo, totum parti, quod est impossibile. Non aliter ad inconueniens redigemus aduersarium, si propter æqualitatem linearum p a & r t coniunctim sumptarum cum linea n f dixerit, quadratũ n o esse æquale circulo a b g d, nõ tñ econuerso, propter æqualitatẽ quadrati n o, & circuli prædicti duas lineas p a & r t coniunctim sumptas, æquales esse lineæ n f, sed minores ipsa linea n f. Nam transmota linea e u uersus h, donec duæ lineæ p a & r t fiant æquales ipsi lineæ n f, nouiter ut supra monuimus designandæ, erit ex tenore conclusionis supra memoratæ quadratum n o secundum æquale circulo proposito. ponebatur autem & quadratum n o primum æquale circulo: quare quadratum n o secundum æquabitur quadrato n o primo, pars toti, quod est impossibile. Siue igiť uera sit propositio superius recitata siue non, consequentiam præfatam optime ualere oportebit, quod præterea amplius confirmabitur hoc pacto. Quotiescunq; signatur quadratum circa diametros quadrati h k, consistens æquale circulo proposito, latus eius superius secabit circumferentiam circuli in eisdem semper punctis: aliàs enim facile cõcluderetur, partem æqualem esse toti. Sit ergo, q; propter duas lineas p a & r t coniunctim æquales lineæ n f, quadratũ n o sit æquale circulo, ꝓposito, seceťq; latus eius superius circumferentiam circuli in puncto q, ita, ut tria puncta p q & r sint in linea recta e u indefinitæ longitudinis, detur deinde quandocũq; libet quadratũ æquale circulo proposito, quod circa diametros quadrati h k consistat: secabit ergo iterum latus superius huiusmodi quadrati circumferentiam circuli in puncto q, productaq́ linea e u indefinitæ quantitatis per punctum q, secabit duo latera superiora duorum quadratorum extremorum in punctis p & r, in quibus & prius secuit: quare iterum duæ lineæ p a & r t coniunctæ, sunt æquales lineæ n s. Sed quid in hac re manifestissima contero diem? ad principale negocium descendere iubemur, quod ut q́ breuissime atq́ facillime absoluatur, ponamus semidiametrũ circuli propositi 497. particularũ æqualiũ, erit ob hoc per 13. præambulũ semicircumferentia memorati circuli inter hos duos notos terminos 1561 & 1562. maior quidem minore, minor autem maiore eorum. cumq́ area circuli ex ductu semidiametri in semicircumferentiã nascatur, quemadmodum Archimedes in libello de mensuratione circuli tradidit, & in libello trium fratrum habetur demonstratũ erit per 3. præambulum area circuli inter duos terminos notos, qui sunt 775817. & 776314. Sit deniq́ quadratum n o æquale ipsi circulo, cuius latus superius secet circumferentiam circuli in puncto q; eductaq́ linea e u indefinitæ longitudinis per punctũ secet latus quadrati quidem circulo circumscripti in puncto p, latus autem quadrati eidem inscripti in puncto r. Sit autem quadratum n o cõsistens circa diametros quadrati h k, latus insuper quadrati n o secet lineam e a in puncto s. Cum igitur quadratum n o sit æquale circulo a b g d, cuius areã inter duos terminos notos conclusimus, erit & area quadrati n o inter duos terminos notos: quare per 7. præambulum costa sua inter duos notos reperietur, qui sunt 880. & 882. & ideo per 8. præambulum medietas huius costæ scilicet linea n s, inter duos notos concludetur, qui sunt prædicti termini dimidiati, scilicet 440. & 441. Est autem linea e s æqualis ipsi n s, unde & ipsa inter commemoratos habebitur terminos. Sed per penultimam primi elementorum quadratum e q, æquipollet duobus quadratis linearum e s & s q. quadratũ aũt e q est 247009. quadratum uero e s inter hos consistit terminos $193954\frac{1}{4}$. & $194078\frac{1}{2}$. illud quidem per 8. præambulum: nam proportio quadrati n o ad quadratum lineæ e s, est quadrupla, cum suarum costarum proportio sit dupla. Sunt autum duo termini, quos assignauimus subquadrupli ad duos terminos quadrati n o. Igiť quadrato lineæ e q per se noto, & quadrato e s inter duos terminos notos existente, per 2. præambulum differentia eorum scilicet quadratũ q s inter duos terminos notos continebitur, qui erunt 52930. & 53055. quare & per 7. præambulum ipsa linea q s inter duos notos collocabitur terminos scilicet 230. & 231. Rursus quadratum e a ad quadratum e t est duplum, nam quadratum e a æquatur quadrato e l, quod per penultimam primi elementorum duplum est ad quadratum e t. Est autem quadratum e a 247009. quadratum ergo e t erit $123504\frac{1}{2}$. numerus autem ille non habet radicem quadratam, sed quadratus proximo minor eo habet radicem 351. proximo autem maior eo quadratus radicem habet 352. quãobrem necessario linea e t erit inter hos 351. & 352. Est autem per quartam sexti elementorum e s ad s q sicut e a ad a p, quarum duæ quidem primæ inter binos terminos notos constituũtur, tertia autem per se nota est; unde & per 10. præambulum quarta quoq́ a p inter duos notos terminos concludetur, scilicet 259. & 261. Amplius cum proportio e a ad a p sit sicut e t ad t r, quarũ prima quidem per se data est, reliquæ uero duæ terminos circum se positos habent notos, erit per 10 præambulũ & linea t r inter duos notos, qui sunt 182 & 185. sed nuperrime a p fuit inter duos notos collocata, quare & per primum præambulum congeries duarum linearum a p & t r inter duos terminos notos comprælende

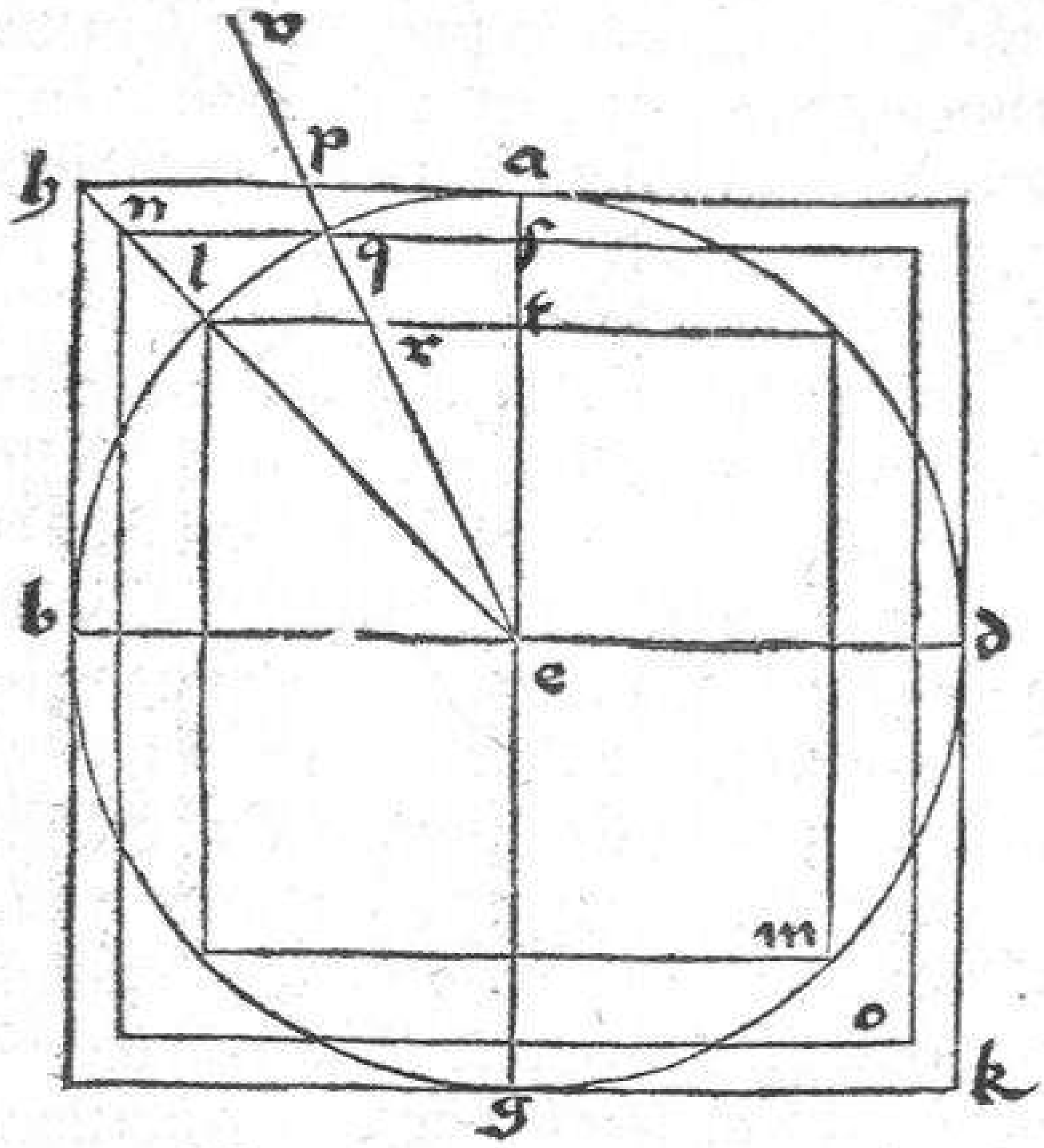
tur,

tur, scilicet 441 & 446. maior quidem minore existens & minor maiore. Superius autem didicimus lineam n s esse inter hos duos terminos 440 & 441. maiorē scilicet primo & minorem secundo. congeries igitur linearum a p & t r maior existens q̄ 441. multo maior erit ipsa linea n s. quare falsa est hæc hypothetica conditionalis: Si quadratum n o est æquale circulo a b g d. cōgeries quoq; linearū a p & t r æqualis est lineæ n s. Cumq; huiusmodi propositio per præmissam huius negotij inferatur ex illa: Si congeries linearū a p & t r æqualis est lineæ n s, quadratum n o æquabitur circulo a b g d: ex uero autem non sequitur falsum: oportebit & dictam propositionem à ueritate recedere. Nondum ergo quadratū æquale circulo proposito designare licebit, nisi prius rectam æqualem circumferentiæ circuli descripserimus. Quòd si libeat subiectum huius propositionis efficere, scilicet q̄ duæ lineæ a p & t r coniunctæ sint æquales lineæ n s. dimidiæ scilicet costæ quadrati per incisionem circumferentiæ modo sæpe dicto transeuntis, oportebit lineam e u transmoueri à situ pristino uersus a punctum. cū ergo ad huiusmodi situm perueniet, ubi duæ dictæ lineæ a p & t r coniunctim sint æquales lineæ n s, quadratum n o creuisse interea constat. Quadratum autem n o primum ponebatur æquale circulo: quare quadratum n o secundum maius erit ipso circulo, tametsi congeries duarum linearum a p & t r æqualis sit lineæ n s in secundo situ lineæ e u. hinc iterum falsitas supra memoratæ conclusionis colligitur. Argumentationem autem, qua usus est in hoc suo proposito inuentor ille, nō in prompto teneo, sicuti neq; alijs libellis meis uti iam licet in hac peregrinatione diuturna. Ne tamen solem Venetorum frustra mihi luxisse quispiam fortasse clamitet, has notulas ut inciderunt raptim conscribendas censui: quas quicūq; lecturus es, ueritati fauere potius, quàm Ioanni Germano succensere uelis: cui profecto non lacessendi, sed ueritatem cognoscendi cupido huiuscemodi periculum iniecit.

Venetijs die quinta Iulij, anno 1464.

τέλος τῶν περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κατὰ Νικόλεων τὸν κουσιάνον ἐν τῇ οὐενετίᾳ εὐτυχῶς συντελουμένων.

Νικόλεως ὁ κουσαῖος τὸν κύκλον τετραγωνίζειν βουλόμενος αὐτῷ εὐθεῖαν ἴσης τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, τοιοῦτο κατασκευάζει διάγραμμα. ἔχει δὲ ταύτῃ μέθοδος οὐδὲ ῥᾳδίαν οὐδὲ φανερὰν ἀπόδειξιν, διόπερ τῶν ἀριθμῶν ἀκολουθίᾳ πειράσομαι τοῦτο τὸ πρᾶγμα.



Circulus a b g d quadretur duabus diametris a g & b d, orthogonaliter se in centro e secātibus: circumscribatur huic circulo quadratum h k, circa cuius diametrum aliud quadratum existens l m eidē circulo inscriptū sit; intelligaturq́ linea e u ad centrum circuli terminata, ex alia autē parte indefinitæ longitudinis, hanc lineā imaginemur moueri ab h uersus a secando circumferentiā circuli a b g d, sitq́ tandem traducta ad eū situm ubi secet latera duorum quadratorum prædictorum in punctis p & r, circūferentiam autē in puncto q, describaturq́ quadratū n o, circa diametrum h k consistens, cuius unum latus per punctum q transeat, sit autē medietas huiusmodi lateris n s, ita quod duæ lineæ a p & t r coniunctim sint æquales lineæ n s. Dicitur ꝙ quadratum n o sit æquale circulo a b g d. Id experiar lineis rationalibus intercedentibus.

Pone e a. 497.

1561. 1562.

Inter hos erit semicircū ferentia b a d.

Quare per præambulū area circuli erit inter duos notos terminos, nā ipsa fit ex semidiametro in semicircumferentiam.

1561
497
10927
14049
6244
775817

minor terminus areæ circuli a b g d.

1562
497
10934
14058
6248
776314

maior terminus areæ circuli.

Inter hos etiam terminos erit area quadrati n o, & ideo per præamb. latus eius siue costa inter duos notos cōtinebitur.

51	8
x374	8
775817	0
x676	
1	

1	
8x2	8
x38953	8
776314	1
x676	
1	

880. 882.

Inter hos est costa quadrati n o.

Quare per præamb. medietas eius scilicet linea n s inter duos notos habebitur.

880. 882.

440. 441.

Inter hos erit linea n s. cui æqualis est e s.

Quadratum autem e s demptū ex quadrato e q relinquit quadratū q s, & ideo per præamb. quadra quadratū q ſ inter duos notos habebitur.

497
497

3479
4473
1988

247009

quadratum e a.

Eſt autem quadratū n o quadruplū ad quadratū lineæ e ſ. coſta enī ſua ad lineam e ſ dupla eſt, ſed quadratum n o eſt inter duos notos, quare & per præambulū quadratū e ſ inter duos notos concludetur.

3132
778817

193954¼

minor terminus quadrāti e ſ.

31 32
776314
194078½

maior terminus quadrati e ſ.

247009
194079

52930

minor terminus quadrati q ſ.

247009
193954

530555

maior terminus quadrati q s.

1 | 2
57930 | 3
4 6 | 0
4

111 | 2
53055 | 3
4 6 | 0
4

230 231

Inter hos eſt linea q ſ.

Eſt autem quadratū e a duplum ad quadratū e t nā e a æqualis eſt lineæ e t.

247009

123504½

quadratum e t.

313 3 | 3
1235045 | 5
870 | 1

351 352

Inter hos eſt e t.

Sed proportio e ſ ad q s, eſt ſicut e a ad a p. cūq; duæ illarū inter terminos notos ſint, & tertia per ſe nota, erit per præambulum & quarta inter duos notos.

440 230
441 231
497

497
230

14910
994

114310

497
231

497
1491
994

114807

77
364 | 2
114807 | 6
440000 | 0
444
4

1
7449
381611 | 2
1143105 | 5
444111 | 9
444
4

259 261

Inter hos eſt linea a p.

Similis proportio e ſ ad ſ q eſt, ut e t ad t r, quare iterum per præamb. t r inter duos notos concludet̄. Item proportio e a ad a p ſicut e t ad t r. Hac ſecunda proportionalitate utar.

497 259
261
351
352

259
351

259
1295
777

90909

14
765
49468
51745 | 1
909099 | 8
497777 | 2
499
4

352
261

352
2112
704

91872

4
8
1 42
4298
82114 | 1
91872 | 8
49777 | 4
499
4

182 185
Inter hos est t r.

259 261
Inter hos erat a p.

441 446
Inter hos erit cõgeries ex a p & t r

440 441
Inter hos erat n s.

Congeries itaq; linearũ a p & t r maior est q̃ 441. Linea autem n s minor q̃ 441. quare cõgeries linearum a p & t r multo maior erit linea n s. Hoc autem pacto argumentabimur Tu ponendo congeriẽ linearũ a p & t r esse æqualem lineæ n s, nã hoc est possibile, asseris quadratũ n o æquari circulo proposito, sed dũ quadratũ n o æquatur circulo dicto, congeries linearũ a p & t r nõ est æqualis lineæ n s. ergo si congeries linearũ a p & t r est æqualis lineæ n s, ipsa congeries dicta nõ est æqualis lineæ n s quod est impossibile.

Est & alia uia directius id examinandi.

Ponamus semidiametrũ e a. 4970. unde per demonstrata Archimedis semicircũferentia b a d, erit inter hos 15610 & 15620. ductaq; semidiametro e a in utrunq; horum terminorũ, producẽtur duo termini, inter quos necessario continebitur area circuli. & sunt isti 77581700 & 77631400. hæc ex prioribus cõputans facile trahuntur.

Nunc ponatur congeries linearum a p & t r æqualis lineæ n s, siue e s. dico autem, q linea a p necessario erit inter hos terminos 2578 & 2586. Nam si posueris a p. 2578. erit cõgeries ex a p & t r minor ipsa n s. multo igitur minor esset, si poneres a p minorem q̃ 2578. Item si posueris a p 2586. erit dicta congeries maior ipsa n s. multo igitur maior esset si poneres eã maiorem q̃ 2586. Primum sic ostendetur.

Esto a p primus 2578.

2578
2578

20624
18046
12890
5156

6646084
quadratum a p.

24700900.
quadratum e a.

24700900
6646084

31346984
quadratum e p.

1 3
1 9948 | 5
61 9884 | 5
1 346984 | 0
1 01018 | 8
1 1 1

5598. 5599.
Inter hos est e p.

Est autem proportio e p ad e a, sicut q e siue e a ad e s. & ideo e a est medio loco proportionalis inter p e & e a.

5598. 4970.
5599.
497.

3
47
98
1531
16842 | 4
2344311 | 4
24700900 | 1
5599999 | 1
55999
555
5

2
3
145
6972 | 4
17284 | 4
2348724 | 1
24700900 | 2
5598888
55999
555
5

4411. 4413.
Inter hos est e s siue n s ei æqualis.

24700900.

12350450.
quadratum e t.

25 | 3
3132374 | 5
123504 50 | 1
67002 | 4
7

3514. 3515.

Inter hos est e t.

Proportio autem e a ad a p est ut e t ad t r. quare per præam. t r erit inter duos notos.

4970. 2578.
3514.
3515.

3514
2578
28112
24598
17570
7028
9059092

13
38
1137
48658 | 1
518365 | 8
9059092 | 2
4970000 | 2
49777
499
4

9059092
2578
9061670

11
34
1163
48778 | 1
519526 | 8
906167 | 0 | 2
497077 | 3
4979
44
4

1822. 1824.

Inter hos erit t r.

2578. 2578.

4400. 4402.

Inter hos habebitur congeries linearũ a p & t r

4411. 4413.

Inter hos erat n s.

Congeries igitur ex a p & t r minor est q̃ 4402, & ideo multo minor q̃ 4411. Sed linea n s maior est quàm 4411. quare congeries dicta minor est q̃ linea n s. multo igitur minor esset si poneres a p minorem q̃ 2578. sic enim decresceret congeries ex a p & t r: linea autẽ n s cresceret.

Ponamus nunc a p 2586.

2586
2586
15516
20688
12930
5172
6687396

quadratum a p.

24700900
31388296

quadratum e p.

5 | 5
6 268 2 | 6
3138829 6 | 0
101220 | 2
111

5602. 5603.

Inter hos erit e p.

Vtar per omnia syllogismis pristinis,

5602. 4970.
5603.
4970.

16
2577
2392182 | 4
24700900 | 4
5602122 | 0
56009 | 9
566
5

28
2479 | 4
2388776 | 4
24700900 | 0
5603333 | 8
56000
566
5

4408. 4410.

Inter hos est e s siue n s

4970. 2586.
3524.
3515.

2586
3514
10344
2586
12930
7758
9087204

42
69
141
49936 | 1
511184 | 8
9087204 | 2
4970000 | 8
49777
499
4

9087204
2586
9089790

44
48
82
4446
9984 | 1
4441333 | 8
90897790 | 2
497777 | 8
4999
44

1828. 1829.
Inter hos eſt t r.

2586. 2586.

4414. 4415.
Inter hos erit congeries ex a p & t r.

4408. 4410.
Inter hos erat n s.

Cum itaq; congeries ex a p & t r ſit maior q̃ 4414. erit multo maior q̃ 4410. Linea autẽ n s eſt minor q̃ 4410. quare congeries ex a p & t r maior eſt q̃ linea n s. multo igitur maior fiet ſi linea a p maior ſtatueretur q̃ 2586. nam ſic creſceret congeries ex a p & t r, linea autẽ n s decreſceret.
Concluditur ergo lineã a p neceſſario reperiri inter hos 2578 & 2586. dum cõgeries ex a p & t r eſt æqualis ipſi n s.

Nunc quod reliquũ eſt abſoluamus.

2578. 2586.
Inter hos eſt a p.

Horũ quadrati proximo ſuperius eliciti ſunt hi.
6646084. 6687396.

24700900
6646084

31346984
minor terminus quadrati e p.

24700900
6687396

31388296
maior terminus quadrati e p.

Hos numeros hic repeto, ut omnes in parato habeantur, q̃uis etiam ſuperius expreſſi ſint.

4 3
4 9948 | 5
614 9884 | 5
3 4 3 4 6 9 8 4 | 9
4 0 4 0 4 8 | 8
4 1

5
6 2 6 8 2 | 5
3 4 3 8 8 2 9 6 | 6
4 0 4 2 2 0 | 0
4 1 1 | 2

5598. 5602.
Inter hos erit linea e p.
Eſt autẽ e a medio loco proportionalis inter e p & e s. quare per præã. inter duos notos habebitur.

5598.
5602. 4970.
4970.

2
3
445
6972
47284 | 4
7348724 | 4
74700900 | 1
5598888 | 2
55999
555
5

16
2577 | 4
2392482 | 4
4700900 | 0
5602222 | 9
56000
566
5

4409. 4413.
Inter hos erit e s ſiue n s æqualis ei.

4409. 4413.

8818. 8826.
Inter hos erit coſta quadrati n o, erat enim n s medietas dictæ coſtæ.

8818
8818

70544
8818
70544
70544

77757124
minor terminus quadrati n o.

8826
8826

52956
17652
70608
70608

77898276
maior terminus quadrati n o.

Superius autẽ area circuli erat inter hos, 77581700. & 77631400.
Quadratum ergo n o maius eſt q̃ 77757124. & ideo multo maius q̃ 77631400. ſed area circuli minor eſt quàm 77631400. quamobrem quadratũ n o maius eſt circulo a b g d, dũ congeries ex a p & t r æqualis eſt

qualis est lineæ, nisi ꝙ est contrarium enunciationi recitatæ. Quo autē pacto concluserim lineam a p esse oportere inter prædictos terminos, longū esset enarrare: & fortasse obscurum uideretur, paucis enim admodū artē Algebræ, siue rei & census satis cognitam scio, qua quidē arte hoc in negocio usus sum. Satis tamē erit unicuiq; uidisse ea, quæ hactenus tractauimus: sic etenim negare non poterit lineā a p inter dictos claudi terminos, dū congeries ex a p & t r æqualis est lineæ n s. De hoc finem facio.

Venetijs die. 27. Iunij. Anno 1464.

ἐπαινῶμεν τὸν θεὸν τὸν σωτῆρα ἡμῶν, ὃς οὐ μόνον τὴν ζητουμένην ἀλήθειαν ἀποκαλύπτει, ἀλλὰ καὶ πᾶν ψεῦδος ἀποφαίνει.

ALIVD EXAMEN SVPERIORIS EDITIONIS.

SEd repetenti mihi parumper negotiū istud, neq; quiescenti prius ꝗ directiorē modum id explorandi reperiam, aliud iter monstratum est; quod literis mandare constitui. Principio igitur hoc certissimum prædico, ꝙ si duas lineas a p & t r æquales lineæ n s habere uoluerimus, necesse est lineā a p contineri inter hos duos terminos 2578. & 2586. dum semidiameter e a est 4970. particulæ. Quo autem pacto hos duos terminos inuestigauerim, longū esset enarrare, & ualde arduū, nisi doctissimus in Algebra existeres. Vt tamē prædicta ostendantur esse uera, ꝗ paucissimis numeris utemur. Esto prius linea a p 2578. & semidiameter e a 4970. quadratū e a duplū est quadrato e t: sed quadratū e a est 24700900. unde quadratum e t erit 12350450. hic numerus non habet radicem quadratam, sed radix quadrati proximo minoris est 3514. & proximo maioris 3515. quare necessario linea e t erit inter hos duos terminos 3514 & 3515, Est autem proportio e a ad a p, sicut e t ad t r, quare cum primæ duæ sint per se notæ, tertia autem inter duos terminos notos erit per 10. præambulū. & linea t r inter duos notos, qui sunt 1822. & 1824. unde & per primum præambulū congeries duarum linearum a p & t r inter duos terminos notos habebitur, scilicet 4400. & 4402. Deinde quoniā quadratum lineæ e p duobus quadratis linearum e a & a p notarum æquipollet, erit & quadratum ipsius e p cognitum, scilicet 31346984. hic autem numerus radice quadrata caret, radix tamē quadrati minoris eo proxime est 5598. & radix quadrati maioris eo est 5599. quare linea e p necessario continebit inter hos duos terminos 5598 & 5599. Est autem proportio lineæ p e ad e a sicut q e ad e s similitudine triangulorū p e a & q e s ratiocinante, & q e æqualis est ipsi e a, quare linea e a est medio loco proportionalis inter duas lineas p e & e s, atq; idcirco per 16. sexti quadratū lineæ e a æquabitur ei quod fit ex p e in e s. per 9. ergo præambulū, ut breuis sim, linea e s inter duos terminos complectetur cognitos, qui sunt 4411. & 4413. linea autem e s æquatur lineæ n s, quæ est dimidia costa quadrati per incisionem circūferentiæ q transeuntis

seuntis. Linea igitur n f maior est ꝗ 4411. & ideo multo maior ꝗ 4402. congeries autem linearum a p & t r minor erat ꝗ 4402. Dum ergo linea a p est 2578. congeries linearum a p & t r minor est ipsa linea n f. & ideo necesse erit lineam a p maiorem esse ꝗ 2578. si congeries duarũ linearum a p & t r debebit esse æqualis ipsi n f. Nam si poneres lineam a p minorem ꝗ 2578. fieret dicta congeries ex a p & t r multo minor ꝗ linea n f. quanto enim linea a p abbreuiatur, tanto linea n f maior redditur. Constat itaq; ꝙ lineam a p maiorẽ esse oporteat ꝗ 2578. ad hoc ut congeries ex a p & t r æqualis sit ipsi lineæ n f. Quod autẽ lineam a p minorem esse oporteat ꝗ 2586. simili ingenio lucubrabimus, erit enĩ ut prius linea e t inter hos duos 3514. & 3515. & ideo per 10. præambulũ linea t r hos duos terminos 1828. & 1829. comprehendetur: hinc per primũ præambulũ congeries ex a p & t r inter hos terminos 4414. & 4415 constituetur. Rursus quadratum lineæ p e innotescet propter duas lineas e a & a p cognitas, erit enim tantũ 31388296. sed hic numerus radicem quadratam non habet, minor tamen eo proximus quadratus radicem habet 5602. quare linea p e continebit inter hos terminos 5602. & 5603. Sed quemadmodum supra ostendimus, linea e a medio loco proportionalis est inter p e & e s: unde quadratum lineæ e a cum ipsa linea p e notam suscitabũt lineam e s. sed lineæ quidem e a quadratum per se notum est. p e autem linea inter duos terminos notos iacet: quare & per 9 præãb. linea e s inter duos terminos notos habebitur, qui sunt 4408. & 44010. sed linea e s æquatur ipsi n s, quare & linea n s inter eosdem concludetur terminos, minor scilicet existens ꝗ 4410. & ideo multo minor ꝗ 4414. erat autem congeries linearum a p & t r maior ꝗ 4414. Quando ergo linea a p 2586. particulas habebit, quales e a habet 4970. congeries linearũ a p & t r maior est ꝗ linea n s. quare necesse est lineam a p minorem esse ꝗ 2586. si congeries ex a p & t r debet esse æqualis lineæ n s. nam si posueris eam maiorem ꝗ 2586. erit dicta congeries multo maior ꝗ linea n s. quanto enim linea a p prolongatur tanto breuior linea n s efficitur. Ad summã igitur huc usq; conclusimus lineam a p esse inter hos terminos 2578. & 2586. quãdo saltem congeries ex a p & t r æqualis est ipsi n s. Nunc quorsũ hæc tendant ne frustra diem contriuisse uidear, ꝗ paucissimis absoluam. Cum linea a p sit inter duos terminos notos, & linea e a sit per se nota: quadrata autem dictarũ linearum æquipolleãt quadrato lineæ e p, erit per 1. & 7. præambula linea p e inter duos terminos cognitos, scilicet 5598. & 5603. hos autem numeros ex supra cõputatis collegimus. est deniq; e a medio loco proportionalis inter p e & e s, ut etiam prius cõmemoratum est. sed quadratum e a per se notum est, & linea p e iam inter duos notos habebatur: quare per 9. præambulum linea e s & ideo n s æqualis ei inter duos notos constituetur terminos, qui sũt 4408. & 4413. inter quorũ quadratos per 5. præambulũ continebitur quadratum lineæ n s, qui sunt 19430464. & 19474569. est autem quadratũ n o quadruplum quadrato lineæ n s: costa nãq; eius dupla est ad lineã n s: illud per 18. sexti uel per 4. secundi elementorum: cũq; quadratum lineæ n s sit inter duos terminos notos, erit & per 8. præambulũ quadratum n o inter duos terminos cognitos, qui sunt 77721856. & 77898276. Dum autem semidiameter e a est 4970. semicircumferentia circuli a b g d per. 13. præambulum inter hos terminos collocabitur 15610. & 15620. quare & per. 3. præambulum area circuli huius erit inter terminos notos, qui sunt 77581700. & 77631400. sic

area

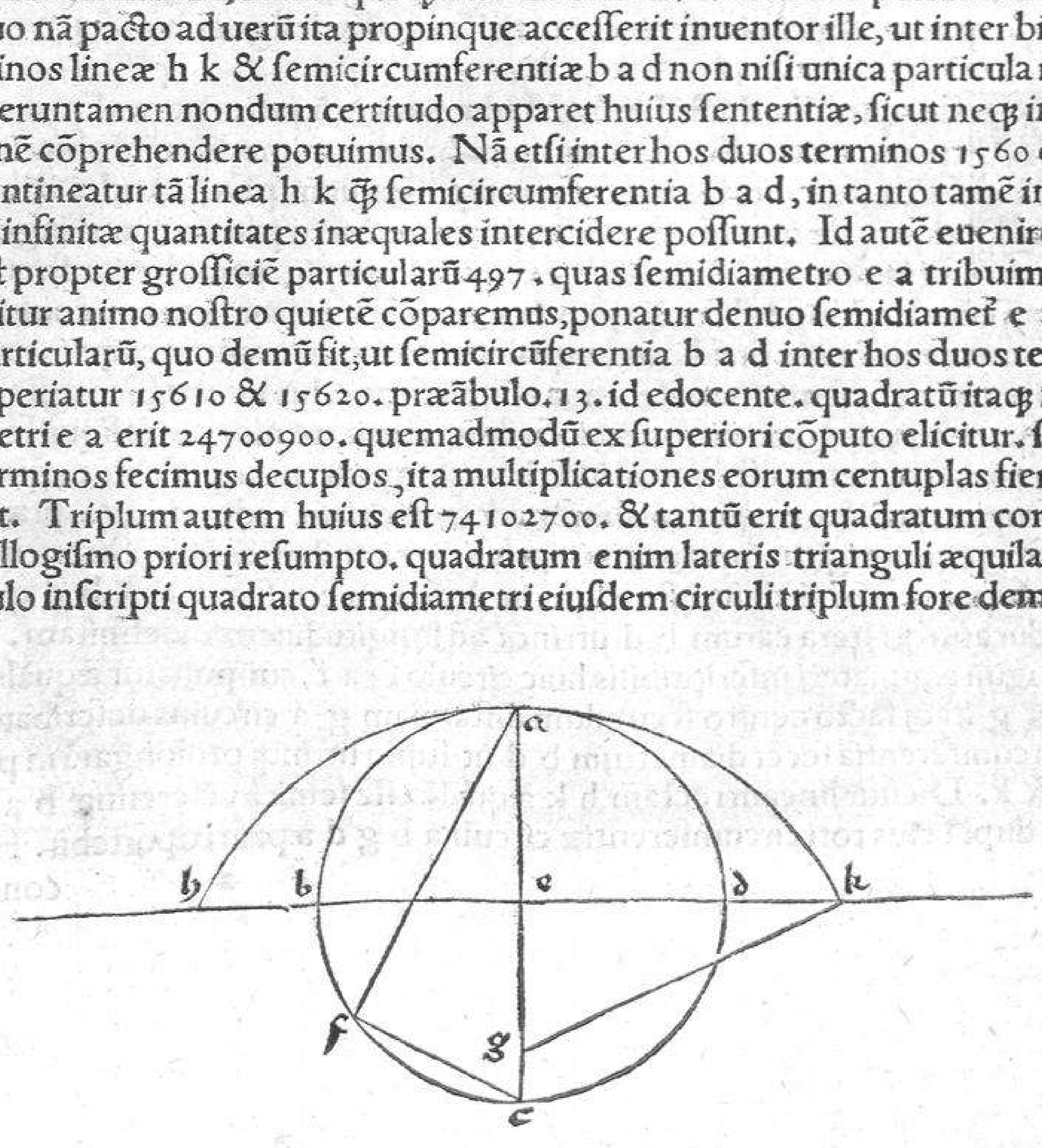
area circuli minor erit quam 7763 1400: & ideo multo minor quam 7772 1856. sed quadratū n o maius erat quam 7772 1856. unde necessario area circuli minor erit quadrato n o. Igitur ut ad primordia huius negocij reuertamur, dum congeries linearum a p ... t r æqualis est lineæ n s, area circuli a b g d, minor est quadrato n o: quod quidem repugnat conclusioni superius memoratæ. reliquū ergo quisque ueritatis amator concludere potest. Habes tandem ô lector syncere directiorem huius negocij lucubrationem, quam si numeros tibi obediētes reddideris, librare, limare, postremo etiam si ratio iusserit reprehendere licebit. Velim tamen ita tranquille Ioannis Germani scripta suscipias, ut modeste is sese rem hanc contrectasse arbitratur. Nam si more quorundā paulo uehementius in eos strideret, qui gloriam nondum effectæ rei sibi usurpant, aut ingenium suū insolentius ostentant, tunc & maxime odio habendus esset, quippe qui uel erranti, quod humanum est, non daret ueniam: uel iuste forsitan redarguendo non compateretur; præsertim cum morbus ille familiaris quem dulcedo gloriæ parit, neminem non tangat mortalium. Quicquid igitur hac in re effectum est, ueritati iubenti potius quam obsequenti scriptori non iniuria tribuendum erit.

Venetijs die sexta Iulij. 1464.

τέλος τοῦ ἑτέρου πειρασμοῦ εἰς τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν Νικολέω τῷ κυσαίω ἐκδεδομένον.

IN EDITIONEM EIVSDEM, QVO pacto semicircumferentiæ circuli æqualis designetur recta.

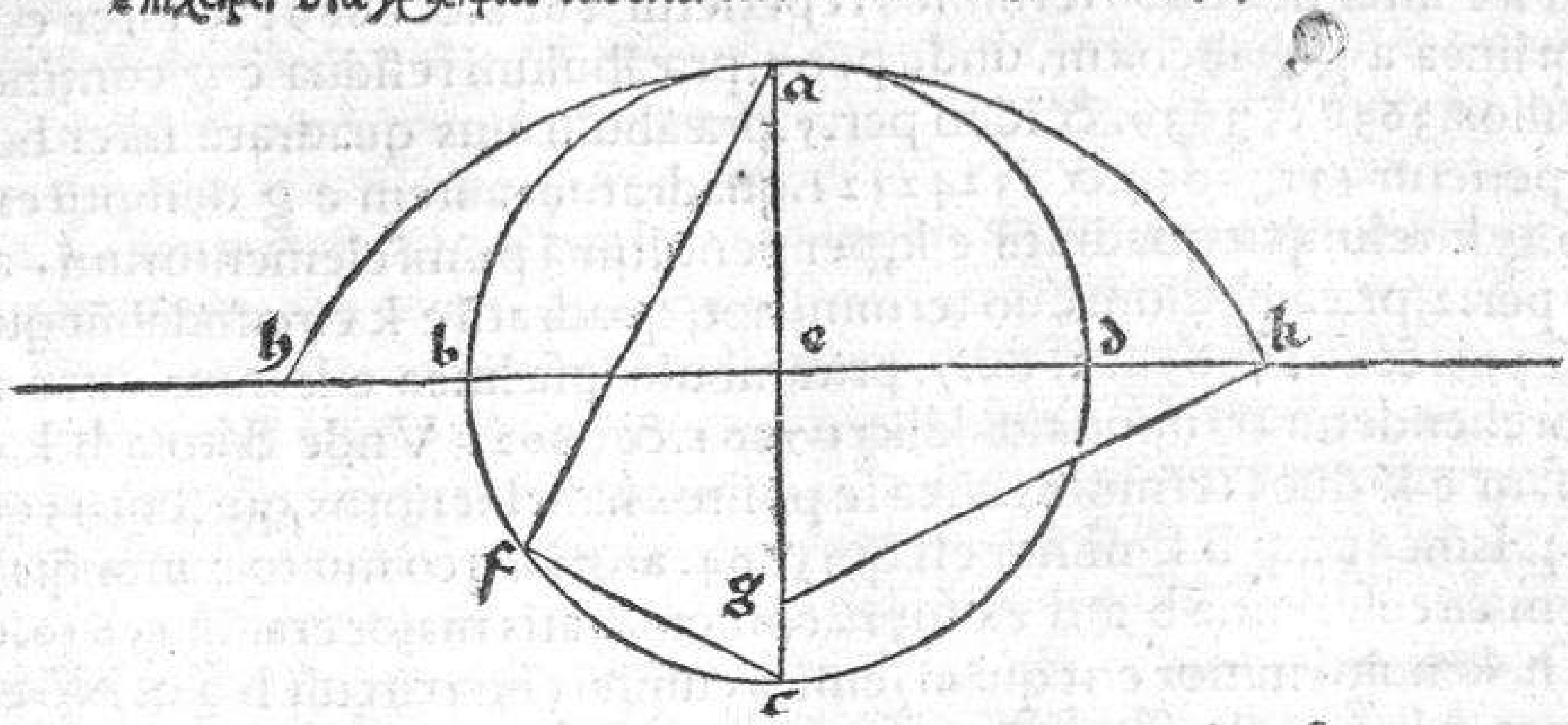
GEorgius ille doctissimus Mathematicorū præceptor olim meus quandam curui rectificationem breuem admodū mihi obiecit ac factu expeditissimam, cui principio quidem plurimū fidei habuit autoritate inuentoris persuadente: ubi uero pro acumine ingenij sui inuentum huiusmodi examinare cœpit, nam demonstrationem nusquam cōperit, longe aliter quam ratus erat accidere didicit: lineam enim rectam, quam inuentor ille prædicauit æqualem semicircūferentiæ circuli, multo minorem eadem semicircumferentia conclusit: modus tamen Georgij acutissimi, quem huic negocio discutiendo accomodauit, memoriam reliquisse uidetur meam: si tamen is est, quem inferius exponam, non pudebit unquam aliena scripta retractare, quo recentior ad memoriam redeat imago præceptoris. Sententiam igitur inuentoris in primis recitandam censui. Sit circulus a b c d super centro e descriptus, quem duæ diametri suæ a c & b d quadrēt: educaturque altera earum b d utrinque ad longitudinem indefinitam. latus trianguli æquilateri inscriptibilis huic circulo sit a f, cui ponatur æqualis a g: super g itaque facto centro secundum distantiam g a circulus describatur, cuius circumferentia secet diametrum b d ut supra utrinque prolongatā in punctis h & k. Dicitur lineam rectam h k æqualē esse semicircūferentiæ b a d: unde & duplā eius toti circumferentiæ circuli a b g d æquari oportebit. Hāc conclusionem nulla demonstratione firmatam uideo, quare more meo experiar per lineas rationales, quid sequatur si talis dispositio subijciat, qualem hæc conclusio p̄supponit. Continuabo duo puncta g & k per lineam g k, ducta etiam in circulo corda f c, quæ erit latus exagoni circulo proposito inscriptibilis. Si igitur posuerimus semidiametrum e a 497. particularum æqualium erit per. 13. præambulū semicircūferentia b a d inter hos duos terminos 1561. & 1562. Linea autem a f scilicet latus trianguli æquilateri circulo inscriptibilis potentialiter triplat semidiametrum circuli, quēadmodum ex trigesima tertij uel octaua tertijdecimi & penultima primi elementorum concluditur. Sed quadratum semidiametri est 247009. quare quadratū a f erit 741027. hic autem numerus radicem quadratā non habet. minor tamē eo proxime quadratus hanc habet radicem. 860. & proximo maior eo habet. 861. quamobrē necessario corda a f reperietur inter hos duos terminos 860, & 861. erat autem a g æqualis ipsi a f, quare & a g inter eosdem cōtinebitur terminos. Cūq; semidiameter e a per se nota sit, erit per. 2. præambulum linea e g residua inter duos terminos cognitos, qui sunt 363. & 364. Iam consequēter ad quātitatem lineæ e k ueniendum est. Quoniam e g inter duos notos concludit terminos, erit per. 5. præāmbulum & quadratum eius inter duos terminos notos, qui sunt 131769. & 132496. sed erat quadratum g k per se notum: est enī g k æqualis cordæ a f, quadratū autē g k per penultimā primi duobus quadratis linearum e g & e k æquipollet: per. 2. præambulum igitur quadratū e k inter notos terminos habebit, qui sunt 608531. & 609258. & ideo per. 7. præambulum ipsa quoq; linea e k inter duos notos habebitur, scilicet 780. & 781. Hinc tandē per. 8. præambulū tota h k dupla ipsi e k inter duos cōprehendetur terminos notos, qui sunt 1560. & 1562. erat autē circūferentia circuli inter hos 1561. & 1562. & idcirco etiā inter hos 1560. & 1562. quicquid enī maius est maiore, maius quoq; minore existet. Vnde non possum non mirari quo nā pacto ad uerū ita propinque accesserit inuentor ille, ut inter binos terminos lineæ h k & semicircumferentiæ b a d non nisi unica particula intersit. Veruntamen nondum certitudo apparet huius sententiæ, sicut neq; incertitudinē cōprehendere potuimus. Nā etsi inter hos duos terminos 1560 & 1562. contineatur tā linea h k q̄ semicircumferentia b a d, in tanto tamē interuallo infinitæ quantitates inæquales intercidere possunt. Id autē euenire palam est propter grossiciē particularū 497. quas semidiametro e a tribuimus. Vt igitur animo nostro quietē cōparemus, ponatur denuo semidiamet̄ e a 4970. particularū, quo demū fit, ut semicircūferentia b a d inter hos duos terminos reperiatur 15610 & 15620. præābulo. 13. id edocente. quadratū itaq; semidiametri e a erit 24700900. quemadmodū ex superiori cōputo elicitur. sicut enī terminos fecimus decuplos, ita multiplicationes eorum centuplas fieri oportet. Triplum autem huius est 74102700. & tantū erit quadratum cordæ a f syllogismo priori resumpto. quadratum enim lateris trianguli æquilateri circulo inscripti quadrato semidiametri eiusdem circuli triplum fore demonstratum est



tum est. Numerus autem ille radicem quadratam nō habet, uerum minor eo proximus quadratus radicem habet 8608. maior autem habet 8609. quãobrẽ corda a f inter hos duos terminos reperietur 8608. & 8609. & inter eosdem quoq; linea a g habebitur. unde per. 2. præãbulum residua e g continebitur inter illos, 3638 & 3639. & ideo per. 5. præãbulũ, eius quadratũ inter hos duos reperietur 13235044. & 13242321. quadratum autem e g demptũ ex quadrato g k relinquit quadratũ e k, per penultimã primi elementorum. atq; idcirco per. 2. præambulum duo termini noti quadratũ e k circundabũt qui sunt 60860379. & 60867656. & ex. 7. præambulo ipsa linea e k inter duos notos comprehendetur terminos, uidelicet 7801. & 7802. Vnde & tota h k dupla ad ipsam e k duos terminos circa se positos habebit notos, qui sunt 15602. & 15604. Linea itaq; h k minor est q̃ 15604. atq; idcirco multo minor q̃ 15610. sed semicircũferentia b a d ex supra cõmemoratis maior erat q̃ 15610. quare linea h k multo minor erit quàm semicircumferentia circuli b a d. Nõ est igitur linea h k æqualis semicircumferentiæ circuli b a c, cuius contrarium inuentor ille asserebat. Quantum autem ueritati & opinioni inuentoris intersit nemo satis docere poterit. nondum enim semicircumferentiæ b a d neq; ipsius etiam lineæ rectæ h k longitudo mensurata est, tametsi utraq; earũ duobus terminis notis interiaceat. Verum differentia huiusmodi necessario maior erit sex particulis, quales 4970. semidiametro a e dedimus, minor autem decemocto huiuscemodi particulis, erat enim semicircumferentia b a d maior q̃ 15610. sed 15610. superauit 15604. in sex particulis. quare semicircumferẽtia b a d excedit 15604. in pluri q̃ sex particulis. amplius 15604. superant lineam rectam h k, excessu quamuis ignoto. manifestum igitur est, excessũ semicircumferentiæ b a d ad rectam h k maiorẽ esse sex dictis particulis. Præterea cum recta h k maior sit q̃ 15602. & semicircumferentia b a d minor q̃ 15620: differentia autem terminorum commemoratorũ est 18. constat differentiã semicircumferentiæ b a d & rectæ h k minorem esse decemocto dictis particulis. Prope igitur ad metã accessit uir ille, quamuis medio frueretur facillimo. non tamen idcirco satisfecit intellectui ueritatem magis q̃ propinquitatem inuestiganti. nam si ad metam ipsam propinquius etiam q̃ Archimedes ueniendi fuerit libido, uiam in promptu habemus, ab Archimede sumptã. qui quemadmodum proportionem circumferentiæ ad diametrũ conclusit intẽ duas, scilicet triplam, sesquiseptimam, & triplam superpartientẽ decem septuagesimas primas: ita inter duas proportiones multo inter se uiciniores eandẽ constituere poterimus circumferentiæ ad diametrum proportionẽ. sed in hoc non quiescit animus, cum recta æqualis circumferentiæ circuli nõ sit data. atq; idcirco spes omnis circulum quadrandi adempta. Si qui ergo siue modernorũ siue posterorum huius rei gloriam uenari uelint, curuæ lineæ rectificandæ uel circuli quadrandi problema sibi nouiter obiectum habent, q̃uis plurimi quidẽ uetustissimi philosophi id aggressi sint, nemo autem Archimedem in hoc philosophandi genere usq; ad hodiernũ diem superauerit. admirandus profecto esset, qui tantũ tamq; inexplicabile curui & recti discrimen rumperet: alterũq; in alterum commutandi facultatem traderet: is enim maiores nostros uniuersos ingenio suo, præsertim in Geometricis exercitijs, longe anteuenire crederetur.

Venetijs die octaua Iulij. Anno 1464.

Νικόλεως ὁ Κουσαῖος
ἐπιχειρεῖ διαγράψαι εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ.



SIt circulus a b c d supra centro e descriptus, quem duæ suæ diametri a c & b d quadrent, educaturq́; altera earum b d utrinq; ad longitudinem indefinitam: latus trianguli æquilateri inscriptibilis huic circulo sit a f, cui ponatur æqualis a g: super g itaq; facto centro secundũ distantiam g a, circulus describatur, cuius circumferentia secet diametrum b d, ut supra utriq; prolongatam in punctis h & k. Dicitur lineam rectam h k æqualem esse semicircumferentiæ b a d; unde & duplam eius toti circumferentiæ circuli a b g d æquari oportebit.

Hanc conclusionẽ nulla demonstratione firmatam uideo, quare more meo experiar per lineas rationales, quid sequatur, si talis dispositio subijciatur qualem hæc conclusio præsupponit. Ex puncto itaq; g ad k, producta recta g k æquali ipsi g a, pono semidiametrum e a 497. particularum &c.

$3\frac{10}{17}$ $3\frac{1}{7}$

$\frac{22}{7}$ $\frac{223}{71}$

22 | 497

154 |

1562. 1561.

Inter hos erit semicircũferentia b a c necessario.

Linea autẽ a f, scilicet latus triãguli æquilateri potentialiter triplat semidiametrũ circuli a b c

497.

Linea e a siue f c.

497

497

2479

4473

1988

347009

quadratum e a.

247009

3

741027

quadratum a f.

1 | 8

1454 | 6

741027 | 0

1872

1

860. 861.

Inter hos est a f siue a g ei æqualis.

Quare per præamb. e g inter duos notos erit.

860. 861.

497. 497.

363. 364.

Inter hos erit e g.

Quadratum autem g k notum (est enim g k æqualis lateri triãguli) æquipollet duob. quadratis e g & e k. & e g iam inter duos notos habet, quare per & præãbula e k inter duos notos continebitur.

363

363

1089

2178

1089

131769

quadratum minoris termini e g.

364

364

1456

2184

1092

132496

quadratum maioris termini e g.

741027.

quadratum g k.

```
741027
132496
608531
```

minor terminus quadra ti e k.

```
741027
131769
609258
```

maior terminus quadra- ti e k.

```
     3
  1181 |7
608531 |8
  1456 |0
     1
```

```
     3
  1178 |7
609258 |8
  1456 |0
     1
```

780. 781.

Inter hos est e k.

Quare per præamb. dupla sua, scilicet h k inter duos continebit notos.

780. 781.
780. 781.

1560. 1562.

Inter hos est linea h k.

1561. 1562.

Inter hos erat semicircũ ferentia b a c.

Nullum igitur inconueniens adhuc apparet, nã si semicircumferẽtia est inter hos 1561. & 1562. erit quoq; inter hos 1560. & 1562.

Sed pono semidiametrum e a 4970. & ideo semicircumferẽtia b a c erit inter hos 15610. & 15620.

24700900.

tantum erit quadratum semidiametri e a.

74102700.

quadratum a f.

```
       185
  14548136 |8
  74102700 |6
   16  70  |0
      7 2  |8
      1 7
        1
```

8608. 8609

Inter hos erit a f.

4970. 4970.

3638. 3639.

Inter hos erit e g.

```
    3638
    3638
   29104
   10914
  21828
 10914
13235044
```

quadratum minoris termini e g.

```
    3639
    3639
   32751
   10917
  21834
 10917
13242321
```

quadratum maioris termini e g.

13235044

74102700

quadratum g k

```
74102700
13242321
60860379
```

minor terminus quadra ti e k.

```
74102700
13235044
60867656
```

maior terminus quadra- ti e k.

```
     3 14  |7
  116257 8 |8
 60860379  |0
   145660  |1
     1 5
       1
```

```
     3 1
  116222 5 |7
 60867656  |8
   145660  |0
     1 5   |1
       1
```

7801. 7802.

Inter hos est e k.

7801. 7802.

15602. 15604.

Inter hos est h k.

15610. 15620.

Inter hos est semicircũ- ferentia b a d.

Linea itaq; h k minor est q̃ 15604. & ideo minor q̃ 15610. sed semicircumferentia b a d maior est q̃ 15610. quare linea h k multo minor est semicircumferentia b a d. cuius contrarium affirmat conclusio.

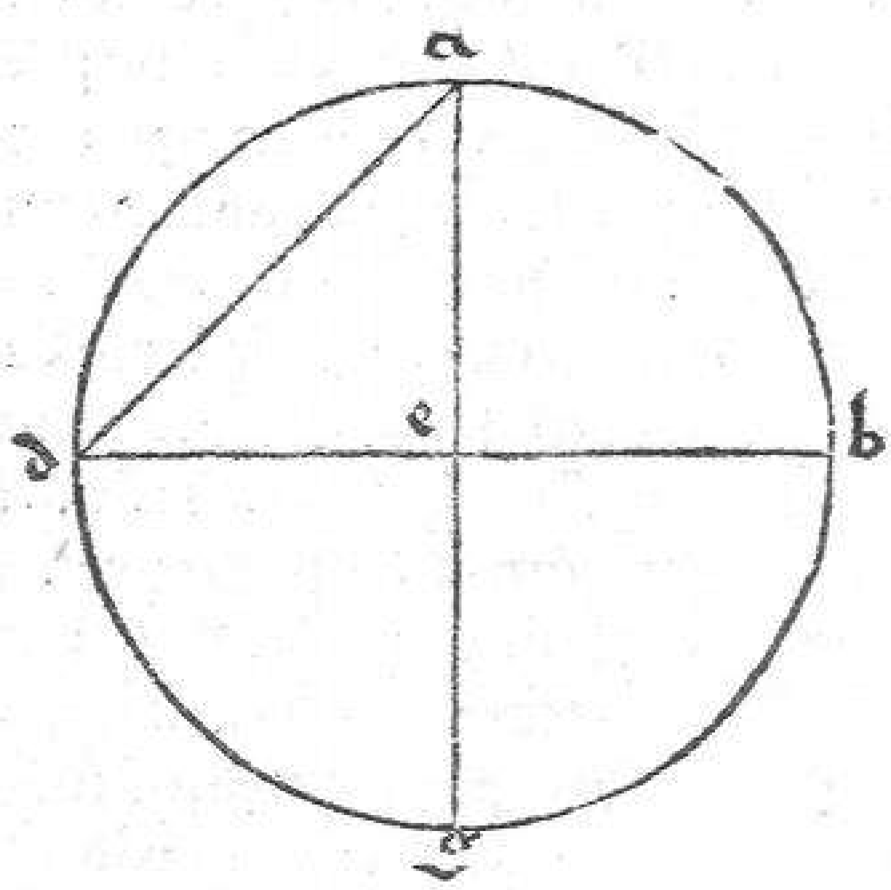
Venetijs die 26. Iunij. Anno Christi 1464. Nona die ab exitu sũmi põtificis de urbe Romana, ituri contra Teucros. Deus bene uortat.

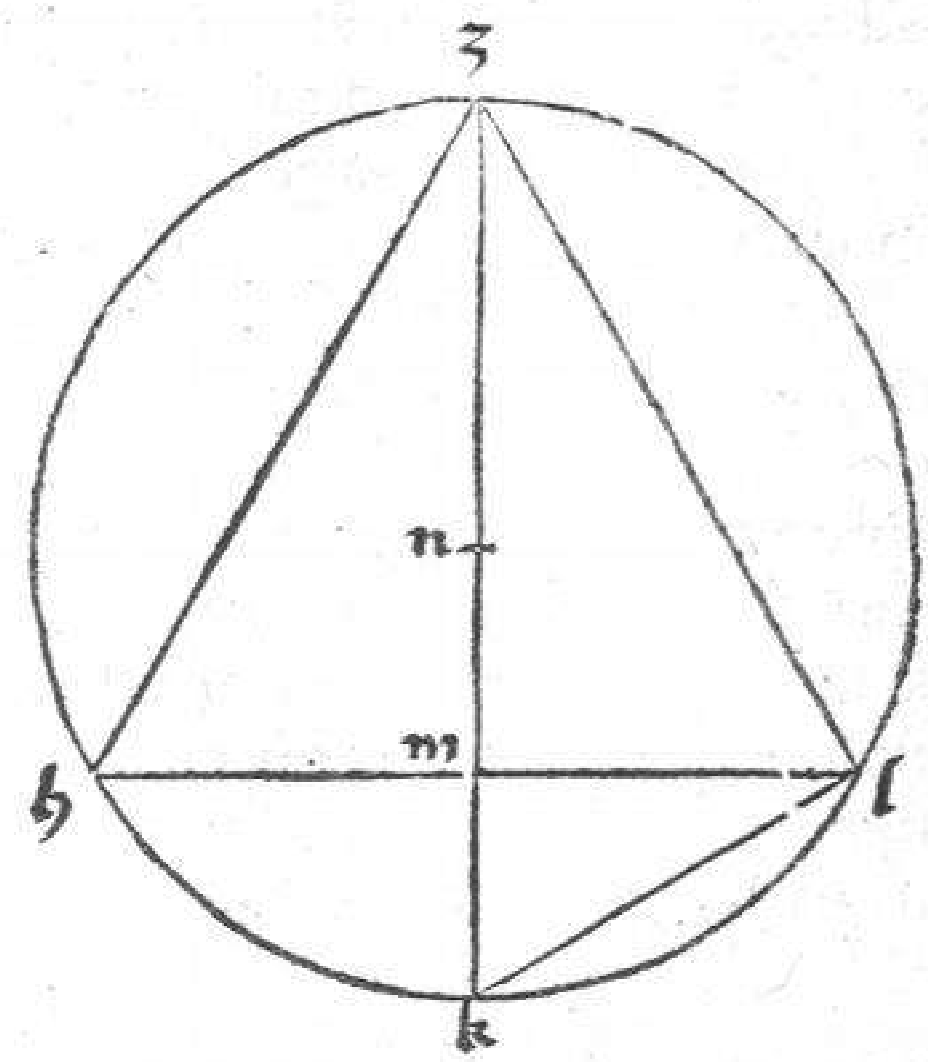
ἀγαθῇ τύχῃ.

IN EDITIONEM EIVSDEM, QVO nam pacto triangulus æquilaterus describatur, ambitũ habens æqualem circumferentiæ circuli dati. hæc nempe inuento circumferentiæ circuli dati æqualem rectã, atq; deinceps ipsi circulo æquale quadratũ designare facile esset.

SI quisq; est, quem studium philosophiæ celebrem reddere, aut mathematicarũ decus æternitati cõsecrare debuit, præsertim hac nostra tẽpestate, unicus es inter Italos Paule Florẽtine tãto dignus munere: quippe qui disciplinas oẽs adeo egregie tenes, ut cũ Archimede, uictoriam propemodum habiturus, certare uidearis. te philosophia ex alumno docili professorẽ doctissimum reddidit: neq; unq; qui euisses, uirorum optime, nisi post medicinam summopere percognitam, literas græcas didicisses, quo ingenij tui uim abundiorẽ ostenderes, & si quid somnolento interprete latinitati ineptius forsitã redditum è greco offenderes, ipse limare ac demum cæteros docere posses. Igitur Nicolao Cusano sancti Petri ad uincula cardinali, episcopo Brixineñ. uiro in omnibus scibilibus profundissimo, cuius ingenium magis diuinum q; humanum apud omnes nostræ ætatis homines reputatur, hæc tua excellentia adeo perspecta est & probata, ut familiaritatis suæ maximum participem te faceret: quod equidẽ ex dialogo quodam circumferentiæ circuli rectificandæ compertum habeo: ubi personas colloquentes Nicolaum & Paulum offendo. quem quidem dialogum nuper legẽti mihi, tanta & tam suauis iniecta est animi uoluptas, ut nunq; ea maiorem in Mathematicis studijs senserim. Platonem enim ipsum in dialogo scribere solitũ uidere uidebar: ipsa deniq; materies multis quidẽ iamdudum celeberrimis quæsita ingenijs, mihi aũt cognitu desiderũtissima, animũ supra modũ affecit: & eo uehemẽtius, q̃ tantæ autoritatis uiros haberet tractatores. Sed iterũ atq; iterũ relegentẽ nũq; me defatigauit ille dialogus, quinimo pmaxime placuit. interea tamen scrupulus quidã crebro mihi obijciebatur. Nã etsi solidã enunciationi fidem haberem autoritate tantorũ uirorum permotus, tamen pro consuetudine mea feruorẽ animi scire cupientis magis q; credere, haudquaq; sedare potui, nisi argumentatio quædã demonstratiua redderetur: ratio enĩ quã dialogus ille habebat, sicuti non plene intelligebatur, ita neq; animo satisfaciebat. quæ res tandem effecit ut inuentum illud penitus negligerem: nihil lectu dignum arbitratus, in Geometricis potissimum: quod non demonstratione roboratur. Nunc autem in urbe Venetorum existenti mihi, forte in mentem redijt huiuscemodi inuentio: uerum argumentatio sua non occurrit, quam in exemplo commemorati dialogi uidebã. quamobrem decreui explorare, an hæc dicta inuentio circumferentiæ rectificandæ consonet demonstratis Archimedis, aut ei in aliquo repugnet. nam si consonabit, non poterit ullo pacto repræhendi, cum Archimedem in nulla unq; re defecisse constet. si autem repugnabit, quod reliquum est, facile quisq; concludere poterit. Tenorem autẽ inuentionis sæpe dictæ, sub forma conclusionis talis, exprimendum censui. Si ex semidiametro circuli dati atq; corda quadrantis eius, directe in longũ coniunctis diametrum alteri circulo constituerimus: triangulus æquilaterus eidem alteri circulo inscriptus, circulo dato æque circummensurabitur. Sed exemplari figuratiguratione lucidius id fiet. Circulus a b g d datus, quadretur duobus diametris a g & b d in centro eius e se secantibus, ductaq; corda quadrantis a d, exponatur 3 k recta æqualis duabus e d, scilicet semidiametro circuli a b g d & a d cordæ quadrantis circumferentiæ. deinde 3 k per medium diuidatur in puncto n, super quo facto centro secundum distantiã n 3 describatur circulus 3 h k l, cui demum inscribatur triangulus æquilaterus 3 h l. Dicitur huiusmodi triangulum esse æquecircummensuratũ circulo a b g d: id est tres lineas eius laterales coniunctim æquales circũferentiæ circuli a b g d. Quod si uerum esset, quis nesciret circumferentiæ circuli dati æqualem rectam designare, atq; deinceps circulũ ipsum quadrare? Huius igitur negocij prosequẽdi gratia, ponam semidiametrum a e circuli dati 497. particularum: erit itaq; semicircumferentia b a d, per 13. præambulũ inter hos duos terminos 1561. & 1562. & ideo tota circumferẽtia a b g d, inter hos duos 3122. & 3124. Quadratum autem cordæ a d, duplum est quadrato semidiametri a e, penultima primi id arguente. sed quadratum a e est 247009: quadratum ergo a d erit 494018. Hic autem numerus caret radice quadrata: proximus tamẽ minor eo quadratus radicem habet 702. & maior eo quadratus radicem habet 703. quare corda a d inter hos duos terminos continebĩt, qui sunt 702. & 703. & ideo per præambulum 2. congeries duarum rectarum a e & a d, inter duos notos comprehendeĩ terminos, qui sunt 1199. & 1200. quadratũ ergo diametri 3 k inter duos notos continebitur terminos, qui sunt 1437601. & 1440000. Est autem quadratum diametri 3 k sesquitertium quadrato lateris trianguli æquilateri inscripti circulo suo: quod facile confiteberis, si in circulo 3 h k l cordã k l protraxeris: quæ erit latus exagoni inscriptibilis circulo 3 h k l, semidiametroq; ipsius circuli æquabitur. erit enim angulus k l 3 rectus, & ideo quadratũ 3 k, duobus quadratis linearum 3 l & l k æquale erit. cumq; ipsum sit quadruplum quadrato k l: est enim 3 k dupla ad ipsam k l: erit & quadratũ 3 k sesquitertium quadrato 3 l, scilicet lateris trianguli æquilateri circulo inscripti. sed quadratum 3 k erat inter duos terminos notos: quare per 8. præambulũ, quadratum 3 l inter duos notos continebitur terminos, qui sunt 1078200. & 1080000. & ideo per 7. præambulum, ipsa linea 3 l inter hos duos notos constituetur terminos 1038. & 1040. totus autem ambitus trianguli 3 h l triplus est ad lineam 3 l. Per 8. ergo præambulũ, totus ille ambitus inter duos notos comprehendetur terminos, qui sunt 3114. & 3120. ambitus itaq; trianguli 3 h l minor est q̃ 3120. quare & multo minor q̃ 3122. erat autem circumferentia circuli a b g d, ut supra conclusimus, maior q̃ 3122. quo circa manifestum est, circumferentiam circuli a b g d maiorẽ esse ambitu trianguli a b g d. & ideo ipse triangulus 3 h l, non æquecircummensuratur circulo a b g d dato, cuius contrariũ supra memorata conclusio enunciabat. Non consonat itaq; hæc conclusio demonstratis Archimedis, sed discrepat. differentia tamen inter ueritatem & opinionem inuentoris, maior est duabus particulis, quales 497. sunt, in semidiametro a e circuli dati, & minor decem huiusmodi particulis. minor enim terminus circumferentiæ circuli a b g d, excedit maiorem terminũ ambitus trianguli in duabus huiusmodi particulis. & ideo circumferentia circuli a b g d, excedit ambitũ trianguli in pluri q̃ duabus huiuscemodi particulis. Itẽ maior terminus circumferentiæ circuli a b g d, excedit minorem terminũ ambitus trianguli in decem huiusmodi particulis: quare circumferentia circuli a b g d necessario excedit ipsum ambitũ dicti trianguli in minori, q̃ decẽ huiusmodi particulis. Habes tandem ô Paule doctissime, breue huius inuentionis examen, quod si unquam oculis tuis obiectum fuerit, pro mansuetudine tua legere uelis ac existimare. nihil enī unquam proferre ausim, quod iudicio tuo æquissimo non foret confirmatum. Quod si rationem meā iudicaris efficacem, tibi gloriam tribuendam censeo, qui singularis ac obseruandus mihi haberis præceptor: si uero inualidam aut forsitan nullam prædicaueris, id mihi lucro erit inuenisse, qui errores meos aperte atque fideliter emendet, uirum integerrimū: quod genus hominū hisce nostris temporibus perrarū existit, adeo ista secta Gnatonica inoleuit, quæ & mores quosque optimos interimit, & leges maiorū nostrorū funditus euertit. Sed ne distantius egrediar, ualere te iubeo.

Venetijs die nona Iulij. 1464.





Νικόλεως ὁ κουσαῖος πειρασόμενος κύκλῳ τῷ δοθέντι ἰσοπερίμετρον ἀποδοῦναι τρίγωνον ἰσόπλευρον εὐθύγραμμον οὕτως πορεύεται, εἰ ταῦτα δὲ οὐκ ἀρκούντως τῆς ἀποδείξεως δεῖ ἐκ τῶν τῶν γραμμῶν εὐθειῶν ἔστω τὸ πρᾶγμα συντελέσθω. Ἰωάννης ὁ γερμανός.

CIrculus a b g d quadretur duabus diametris a g & b d in centro eius e se secantibus, ductaque corda quadrantis a d, exponat̄ z k recta æqualis duabus e d, scilicet semidiametro circuli a b g d & a d cordæ quadrātis. deinde z k per medium diuidatur in n puncto, quo facto centro secundū distantiam n z, describatur circulus z h k l, cui inscribatur triangulus æquilaterus z h l. Dicitur huiusmodi triangulum esse isoperimetrū circulo a b g d: idest tres lineas eius laterales coniunctim æquales circumferentiæ circuli a b g d. Hæc enunciatio quoniam demonstrationem manifestā non habet, per lineas rationales pulchre examinabitur.

ponatur

ponatur ā e semidiame
ter 497. particularum.

1561. 1562.

Inter hos erit semicircū
ferentia b a d.

1561. 1562.

3122. 3124.

Inter hos erit tota circū-
ferentia circuli a b g d.

497
497

3479
4473
1988

247009

quadratum a e.

Est autem quadratū a d
duplum quadrato a e.

247009
247009

494018

quadratum a d.

1
~~2~~ ~~2~~ 4 | 7
~~4~~ ~~9~~ ~~4~~ ~~0~~ 1 8 | 0
~~1~~ ~~4~~ 0 | 2
14

702. 703.

Inter hos erit corda a d.

Quare per præamb. cō-
geries duarū a e & a d,
inter duos notos cōtine
bitur terminos.

702. 703.
497. 497.

1199. 1200.

inter hos erit congeries
linearum a e & a d, si-
ue tota 3 k.

Et ideo per præamb. li-
neæ 3 k quadratum in-
ter duos notos compræ
hendetur terminos.

1199
1199

10791
10791
1199
1199

1437601

minor terminus quadra
ti 3 k.

1200
1200

240000
12

1440000

maior terminus quadra-
ti 3 k.

Est autem quadratū 3 k
sesquitertium quadrato
3 l, quare & per præam.
quadratum 3 l inter du-
os notos concludetur.

~~2~~ ~~1~~
1 4 ~~3~~ ~~7~~ ~~6~~ 0 1
359400 $\frac{1}{4}$

1078200 $\frac{3}{4}$

minor terminus quadra
ti 3 l.

~~2~~
~~1~~ 4 4 0 0 0 0
360000

1080000

maior terminus quadra
ti 3 l.

4
~~1~~ ~~1~~ 8 7 | 1
~~2~~ 9 ~~1~~ 6 9 | 0
~~1~~ 0 8 ~~0~~ ~~0~~ ~~0~~ ~~0~~ | 3
~~2~~ ~~2~~ ~~0~~ 0 6 | 9
2

7
~~1~~ 8 5 | 1
~~1~~ ~~1~~ ~~3~~ ~~7~~ 6 | 0
~~1~~ 0 ~~7~~ 8 ~~2~~ ~~0~~ 0 | 3
~~2~~ ~~2~~ ~~0~~ 0 6 | 8
2

1038. 1040.

Inter hos est linea 3 l.

Perimeter autem trian-
guli 3 h l, tripla est ad li
neam 3 l. quare per præ
amb. & ipsa perimeter
inter duos terminos no
tos habebitur.

1038. 1040.
3 3

3114. 3120.

Inter hos erit perimeter
trianguli 3 h l.

3122. 3124.

Inter hos erat circumfe
rentia circuli a b g d.

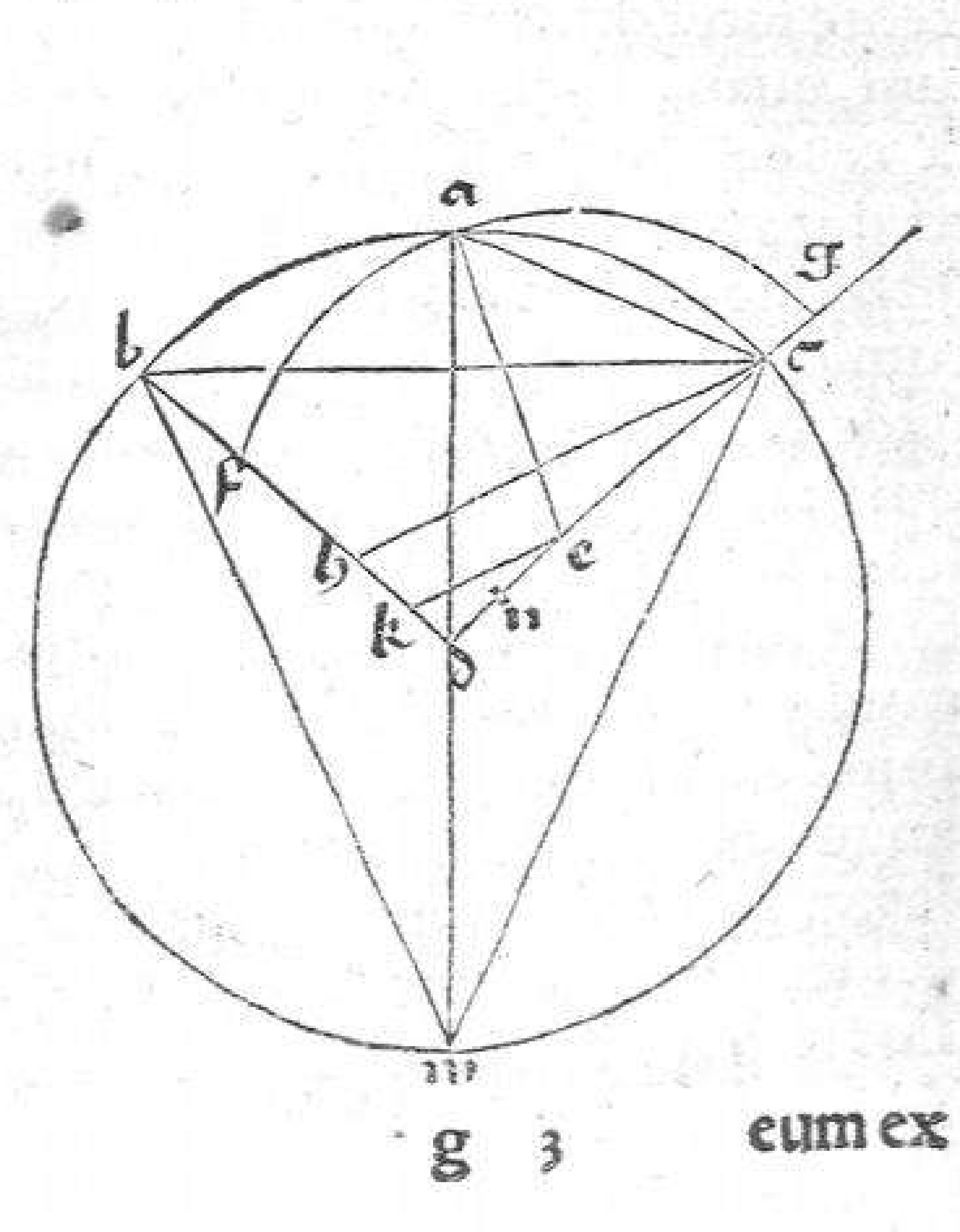
Perimeter itaq; triangu
li minor est q̃ 3120. &
ideo multo minor q̃
3122. circumferentia au
tem circuli maior est q̃
3122. quare perimet' tri-
anguli non est æqualis
circumferentiæ circuli a
b g d, cuius contrarium
asserebatur.

Venetijs 26. Iunij, 1464.

IN EDITIONEM EIVSDEM, QVO modo ſpaciũ reperiatur æquilaterum & æquiangulum, cuius ambitus circumferentiæ circuli dati ſit æqualis: quod iterum ad curui rectificationẽ circuliq́ꝫ quadraturã conferret, ſi bene traditum eſſet.

SAepe & multum ipſe mecum recenſui, atqꝫ admiratus ſum uehementer, tantam tamq́ꝫ inexplicabilem curui & recti diſtantiam, ut nemo ad hunc uſqꝫ diem ſatis aperte tradiderit, quo pacto alterum ex altero naſceretur, præſertim in lineis: quibus tantum diſcrimen propter curuitatem & rectitudinem interiectũ eſt, ut neqꝫ ex recta linea curuam, neqꝫ curuæ propoſitæ æqualem rectã conſtituere poſſimus. qua de re factum eſſe arbitror, ut poſt multas ueterum uigilias, ac uarios curuum rectificandi modos, Archimedes tandẽ permotus ſit excogitare quoddam medium, utroqꝫ extremorum, uidelicet curuo & recto participans, exemplum trahens à tranſmutationibus naturalibus, ubi de extremo ad extremum nunq̃ tranſitur, niſi interceſſerit quoddam mediũ, cum quo extrema ipſa tranſmutanda communitatem quandam habeant. Natiuitas autem lineæ rectæ fit per motum puncti breuiſſimũ, curua uero linea circularis ex fluxu puncti cuiuſlibet a puncto centrali in motu ſuo æquediſtantis naſcitur. Hos igit̃ duos motus, rectum uidelicet & circularem Archimedes commiſcens, motum quendã promiſcuum adinuenit, & per eum motum quandã lineam mediã inter rectũ & curuũ conſtituit, quam ſpiralem appellauit, cuius quidẽ lineæ officio curuæ circulari æqualem rectam deſignare conatus eſt. ſed ſicuti modũ producendi hanc lineam non tradidit niſi per imaginationem, ita neqꝫ contingentem rectã ei applicare in puncto quolibet docuit: quæ res neceſſariæ ſunt ad hoc, ut curuæ circulari æqualẽ rectã deſignemus. Vnde nõ iniuria quiſpiã dicere auſit Archimedem curuæ circulari nunq̃ æqualem rectam deſignaſſe: quippe qui contingentem rectam ſpirali lineæ applicare nuſq̃ docuerit. Quis enim, ut ex primordijs Geometriæ exempla ſumamus, à puncto quolibet dato lineæ rectæ propoſitæ æqualem rectã produceret, niſi prius triangulum æquilaterũ ſuper lineam datam collocare ſciret? Nemo deniqꝫ angulo plano rectilineo æqualẽ redderet angulum, ſi prius tribus lineis rectis propoſitis, quarum quælibet duæ tertia reliqua maiores ſunt, ex tribus alijs eis æqualibus triangulũ conſtituere didiciſſet. Ingentes nihilominus Archimedi habendæ ſunt gratiæ, qui tot & tãtis tamq́ꝫ ſubtilibus inuentis Geometricis poſteritatem adornauit, ut ſempiternum inde monimentũ haud indigne nactus ſit: qui profecto rem hanc plenius edidiſſet, niſi importuno milite Marci Marcelli Syracuſas obſidentis, ſpiritum cœlo reddidiſſet. ò ingenium uiri acutiſſimum. ò uigilias & labores perennes, quos in Geometricis ſtudijs ad mortem uſqꝫ pertulit philoſophus ille celeberrimus. Quis unq̃ dignum aliquid tantis ſudoribus rependet? Quem non miſerebit huius hoĩs, qui cariora duxit poſteritatis ornamenta publica q̃ uitã propriam? cui minime pepercit, ut maximum Geometriæ theſaurum poſteris congereret. Occurrit demum illud inter omnia opera ſua admiratione digniſſimũ, ꝙ ſuperficiem planam curuilineã in planam rectilineã uertere docuerit, nullo medio intercedẽte, quod curui & recti naturã cõiter ſaperet. demonſtrauit enĩ ſectionem coni parabolam eſſe ſeſquitertiam triãgulo rectilineo, qui baſim haberet

beret communem cum ipsa sectione parabola & altitudinem eandem. quamobrem facile redditur ipsi parabolæ sectioni æqualem rectilineam designare superficiẽ. Sic in transmutandis superficiebus uir ille acutissimus iter præbuit, quod in lineis inuentu erat difficillimum. Nolim tamen quispiam mihi succenseat, ꝙ superius dixerim, Archimedẽ curuæ circulari æqualem rectam non descripsisse, atq; idcirco quadraturam circuli nunq; attigisse: ipse enim de seipso id confiteri uidetur, ubi in libello de mensuratione circuli curuæ circulari æqualem fermê, non tamen præcise rectam designare docet: officio numerorũ concludens proportionem circumferentiæ circuli ad diametrũ eius inter duas con sistere proportiones: quem quidem libellum post lineas spirales scripsisse creditur: ut saltem propinque ad uerum quomodolibet accederet, quandoquidẽ æqualẽ curuæ circulari rectam in ueritate consequi non posset. ad metam enĩ si prope conieceris sagittam, tametsi punctum non tangas, haud inglorius habeberis. Hoc igitur curui rectificandi problema, ad nostræ ætatis uiros tandẽ deuolutum est quasi intentatum & nemine unq; satis absolutũ: soluendi tamẽ spes atq; possibilitas, ægregium quendam hisce nostris diebus uirũ inuasit, qui multos quidẽ alios modos id efficiendi tradidit faciles & absq; motu linearum fiendos: hunc uero difficilẽ & per motus linearum docuit absoluendum, cuius tenorem hoc in loco explicandũ censui. Esto circulus propositus a b c super centro d descriptus, à cuius diametro a m æque uelociter moueri intelligant duæ semidiametri d b & d c, hæc quidem uersus dextram, illa autem uersus si nistrã: iáq; sint transmotæ ad eũ sitũ, ubi b & c puncta æqualiter ab a puncto distent: ductáq; corda a c & linea a e ei æquali, super puncto e facto centro secundum quantitatem e a describatur circulus, cuius circumferentia secet se midiametrũ quidem d b in puncto f, d c autem continuatã in g, ita ut d f sit subdupla ad d g. Dicitur ꝙ triangulus æquilaterus inscriptus circulo habenti semidiametrum d g, æquecircummensuretur circulo a b c. (.i. habeat ambitũ æqualem circumferentiæ circuli a b m c.) Ponitur autem d f subdupla ad ipsam d g ob hanc causam. Nam si eidem circulo unum quidem inscripseris, alium uero circumscripseris triangulum æquilaterũ, perpendicularis quæ ex centro circuli ad latus trianguli inscripti ducitur, subdupla est ad eam, quæ ex centro circuli ad latus circumscripti protrahitur perpendicularem. Quod si libeat quadratum æquecircummensurabile circulo a b c designare, secundum intentionẽ huius inuentoris, dispositis cæteris ut antea, sit proportio lineæ d f ad lineã d g, sicut perpendicularis ductæ ex centro circuli cuiuscunq; ad latus quadrati eidem circulo inscripti, ad perpendicularem ductam ex centro talis circuli ad latus quadrati eidem circũscripti. Similit̃ de pentagono reliquisq́; figuris æquilateris ac æquiangulis intelligendum est. Quamuis autem modus iste pulcher admodum uideatur, ꝙ ad omnes figuras æquilateras & æquiangulas accomodari possit, nullam tamen eius demonstrationẽ offendo, qua id roborari possit, quod p



eum exponitur. At si uera esset hæc sententia inuentoris, nondum circumferē tiæ circuli æqualem rectam designare possemus, nisi prius subiectum huius cō clusionis prædisponere sciremus. difficile enim & nequaꝗ absolutum est, quo pacto duæ semidiametri d b & d c sic elongent æque uelo[...]ter à puncto a, ut dispositis cæteris, quemadmodū supra commemorauimus, linea d f sit sub dupla ad ipsam d g. Illud autē prius efficiendū erit, ꝙ circulari curuæ æqualē rectā assignemus. problema itaꝗ curuæ circularis rectificandæ, ex alio proble mate prius absoluendo, pendere dinoscitur. Sed eo prætermisso, ad sententiā inuentoris supra recitatā ueniendum censeo, atꝗ explorandū, consonet ne de monstratis Archimedis an nō. Hic igit diu ac summopere laboranti mihi (diffi cile nanꝗ erat modū hunc examinare, propter motum linearum qui in eo sup ponitur) tandem uia compræhensa est consequendi intentum. Sit itaꝗ secun dum mentem inuentoris, linea d f subdupla ad lineam d g, & ob hoc trian gulus æquilaterus inscriptus circulo habenti semidiametrum d g, æquecircū mensuratus circulo a b c: ponaturꝗ semidiameter a d 60000. particularum æqualium, unde & circumferentiā circuli a b c inter duos terminos notos cō præhendi oportebit. Nam quando semidiameter a d est 497. particulæ, semi circumferentia circuli a b c per 13. præambulum inter hos duos terminos con stituitur 1561. & 1562. quare & per 11. præambulum dum semidiameter a d 60000. particulas æquales habuerit, semicircumferentia circuli a b c inter hos duos continebitur, 188450. & 188572. atꝗ idcirco per 8. præambulū tota circū ferentia circuli a b c inter duplos dictorum terminorum reperietur, scilicet, 376900. & 377144. cumꝗ secundū mentē inuentoris, ambitus trianguli æqui lateri inscripti circulo habenti semidiametrū d g, æqualis sit circumferentiæ circuli a b c, erit & dictus ambitus inter commemoratos terminos. sed ambi tus ille triplus est lateri ipsius trianguli: quare & per 8. præambulū latus dicti trianguli inter duos terminos notos compræhendetur, qui sunt tertiæ partes dictorū terminorum totius ambitus trianguli. latus itaꝗ trianguli continebit inter hos terminos 125633. & 125715. Latus autē trianguli æquilateri circulo inscripti, potentialiter triplat semidiametrū eiusdem circuli. Vnde & per 8. præ ambulū linea d g semidiameter scilicet circuli, cui inscribi intelligit dictus tri angulus, inter duos notos claudetur terminos. Nā latere ipsius trianguli exi stente inter duos terminos notos, scilicet 125633. & 125715. per 5. præambu lum, quadratū eius duobus terminis notis concludet, qui sunt 15783650689, & 15804261225. sed quadratū lateris dicti trianguli ad quadratum semidiame tri d g proportionem habet triplam. quare per 8. præambulum, quadratū d g inter duos notos iacebit terminos, qui sunt tertiæ partes prædictorū termino rum. quadratū ergo d g erit inter hos terminos 5261216896. & 5268087075. unde & per 7. præambulū ipsa linea d g inter duos notos reperietur terminos qui sunt 72534. & 72582. habebat autem d c æqualis ipsi a d. 60000. æqua les particulas: quare per 2. præambulum residua c g inter duos notos cōtine bitur terminos istos 12534, & 12582. Sunt autem duo trianguli a d c, & e a c æquianguli. nam angulus c communis duobus dictis triangulis per quintam primi elementorum, æquatur utriꝗ angulorum d a c & a e c. Duo igitur tri anguli æquicrures a d c & a e c binos angulos supra bases suas habēt æqua les. quare per 32. primi tertius reliquus unius tertio reliquo alterius æquabitur. & ideo per quartam sexti proportio d c ad a c siue e g æqualem ei est ut a c siue e g ad e c, sed e g maior est ipsa e c, quare & d c maior est linea e g, ablata igitur communi e c relinquetur d e maior ipsa c g. abscindatur itaq; ex ea e n æqualis c g, ita ut tota c n fiat æqualis ipsi e g; erit ergo proportio d c ad c n sicut c n ad e c, totius ad totam, sicut abscisæ ad abscisam, & ideo residuæ d n ad residuam n e, sicut totius d c ad totam c n: quare per 15. sexti, quod continetur sub d c & n e æquabit ei quod sub d n & n c. quod autē sub d c & n e continetur, inter duos terminos notos habetur per 3. præambulū. nam d c per se nota est, & n e æqualis ipsi c g inter duos terminos notos compræhendebatur. quare & quod sub d n & n c, compræhendetur inter duos terminos notos, qui sunt 752040000. & 754920000. Quod autem sub d n & n c continet, cum quadrato dimidiæ differentiæ linearū d n & n c, per quintam secundi, æquatur quadrato medietatis d c. cumq; quadratum medietatis d c sit notum, scilicet 900000000. erit per 2. præambulum, quadratū dimidiæ differentiæ linearū d n & n c inter duos terminos notos, qui sunt 145080000. & 147960000. & ideo per 7. præambulum, dimidia differentia linearum d n & n c inter duos notos terminos reperietur, qui sunt 12044. & 12164. Hæc autē dimidia differentia sublata ex medietate lineæ d c, relinquit lineam d n, & eidem addita, conficit totam lineam n c. quamobrem linea n c continebitur inter hos duos terminos 42044. & 42164. & ideo linea a c æqualis ei inter eosdem reperietur terminos. In hoc autē processu supponitur lineā d n minorem esse linea n c, cuius probationē inferius aperiemus. Producta deinceps linea c m cum ipsa a c angulum rectū continente, per trigesimā tertij, quadratum a m duobus quadratis linearū a c & c m æquipollebit per penultimam primi. cumq; linea a c inter duos terminos notos, atq; idcirco quadratum eius inter duos notos terminos habeatur, sed & quadratum diametri a m per se notum sit, erit per 2. præambulum, quadratū lineæ c m inter duos terminos notos. quadratū autem a c est inter hos 1767697936. & 1777802896. & quadratum a m est 14400000000. quare quadratum c m inter hos reperietur terminos 12622197104. & 12632302064. & ideo per septimū præambulum ipsa linea c m inter duos notos comprehendetur terminos istos 112348. & 112394. Ducantur demum lineæ b m & b c cum ipsa c m claudentes triangulum b m c similem triangulo a d c. Cum enim arcus a c & a b sint æquales, erunt & residui ex semicircumferentijs b m & c m æquales, & ideo cordæ suæ b m & c m æquales. Vterq; autē angulorū a d c & b m c duplus est ad angulum a m c: ille quidem per 19. tertij: iste uero per ultimam sexti elementorum Euclidis, q̄ arcus b c duplus sit arcui a c. duo igitur anguli a d c & b m c sunt æquales. Cumq; duo trianguli a d c & b m c sint æquicrures, oportebit reliquos eorum binos angulos esse æquales: & ideo triangulos ipsos esse æquiangulos. quare per quartam sexti proportio d a ad a c est ut m c ad b c: & prima quidem harum quatuor proportionaliū linearum per se nota est, reliquæ autem duæ inter terminos notos constituuntur: quare per 10. præambulū linea quoq; b c duobus notis intercipietur terminis, qui sunt 78725. & 78984. Constat itaq; cordam b c maiorem esse semidiametro d c, cum terminus minor eius ipsam semidiametrum d c excedat. sed & quadratum b c minus est necessario duobus quadratis linearū b d & c d: id est duplo quadrati semidiametri b d: cum quadratum maioris termini b c minus sit duplo quadrati semidiametri b d. quare per 42. primi Triangulorum nostrorū angulus b d c acutus habebitur. ducta igitur perpendicularis c h ad lineā b d cadet intra triangulum, quemadmodū ex 30. primi triangulorū concluditur, sed per 45. eiusdē,

excessus

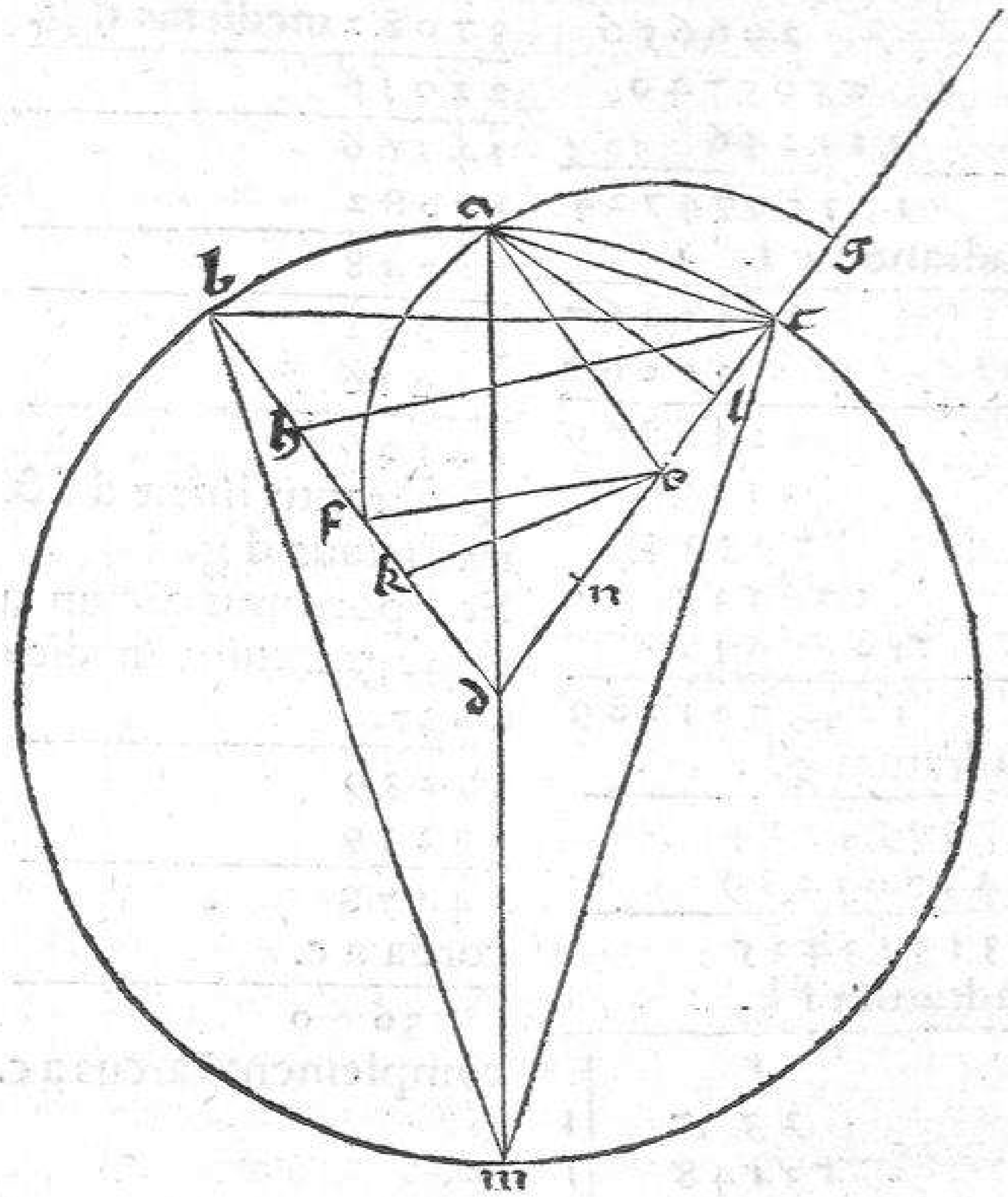
excessus quadratorum b c & c d æquatur ei quod sub differentia casuum b h & h d atque tota ipsa b d continetur. sed excessus quadratorum b c & c d inter duos notos consistit terminos per 2. præambulum, quoniam alterũ quidẽ ipsorũ quadratorum per se notum est: alterum uero inter duos terminos cognitos comprætendit. est enim quadratum c d 3600000000. quadratum autẽ b c inter hos iacet terminos notos 6167925625. & 6238472256. quare per præambulũ 2. differẽtia horũ quadratorũ est inter hos terminos 2597625625. & 2638472256. & inter eosdem erit etiã quod sub differentia casuũ b h & h d ac tota b d continetur. cumque tota b d per se nota sit, erit & per 4. præambulũ differentia casuũ b h & h d inter duos terminos cognitos, qui sunt 43293. & 43975. differentia autem duorum casuũ b h & h d dempta ex tota b d, relinquit duplum casus minoris, scilicet h d: per 2. igitur præambulum, duplũ lineæ h d est inter hos duos 16025. & 16707. quare & per 8. præambulum ipsa h d linea inter hos duos continebit terminos 8012. & 8354. Quadratum insuper h d cum quadrato h c æquipollent quadrato d c per penultimam primi elementorum. quadratum autem h d est inter hos duos 64192144. & 69789316. & quadratum d c per se notum est: quare per 2. præambulum quadratum h c inter duos notos reperiet terminos, qui sunt 3530210684. & 3535807856. atque idcirco per 7. præambulum, ipsa linea h c continebitur inter hos terminos 59415. & 59463. Est autẽ per quartã sexti, proportio d c ad c h sicut d e ad e k perpendicularem ductam ex puncto e ad lineam b d: & prima quidem harum quatuor linearũ proportionalium per se nota est: reliquarũ uero duarum utraque inter duos notos comprætenditur terminos. erat enim c n æqualis ipsi a c inter duos terminos cognitos, scilicet 42044. & 42164. tota autẽ d c erat 60000. & ideo residua d n inter illos duos notos cõcludet 17836. & 17956. Sed & c g siue e n ei æqualis inter hos duos erat 12534. & 12582. quare per primum præambulum tota d e continebitur inter hos terminos 30370. & 30538. Linea uero c h concludebatur inter hos 59415 & 59463. quare & per 10. præambulum, quarta dictarum linearum, quæ est e k inter duos terminos notos comprætendetur, scilicet 30073, & 30265. Itẽ proportio c d ad d h est sicut e d ad d k quarta sexti arguente. sed prima harum quatuor linearum proportionalium per se nota est, scilicet 60000. secunda uero, scilicet d h concludebatur inter hos duos 8012. & 8354. tertia denique inter hos duos 30370. & 30538. quare per 10. præambulum linea d k inter duos reperiet notos terminos, qui sunt 4055. & 4252. Ex penultima autẽ primi quadratum e f duobus quadratis linearum e k & k f æquipollet. quadratum autem e f lineæ æqualis ipsi a c, superius inter duos terminos notos continebatur: & ipsa linea e k inter duos notos consistit, qua de re etiam quadratum eius inter duos notos comprætendetur, quinto præambulo id edocente: quare & per 2. præambulum, quadratũ lineæ f k duobus terminis notis circũdabitur, qui sunt 851727711. & 873417567. unde & per 7. præambulum, ipsa linea f k duos circa se notos accipiet terminos, scilicet 29184. & 29554. Sic utraque duarũ linearum f k & d k inter duos notos habebitur terminos: quare & per primum præambulũ congeries duarũ linearum f k & d k. scilicet tota linea d f inter duos notos constituetur illos 33239. & 33806. Sed linea d g habebatur superius inter hos terminos 72534. & 72582. atque idcirco medietas eius inter hos 36267. & 36291. Linea igitur d f minor existens quam 33806. multo minor erit quam 36267. sed medietas lineæ d g maior est quam 36267. Est itaque linea d f multo minor quam subdupla ad ipsã d g. Dũ ergo

ergo triangulus æquilaterus inscriptus circulo habenti semidiametrũ d g, æquecircũmensuratur circulo a b c. ipsa linea d f minor est q̃ subdupla ad lineam d g: quare nõ poterit stare sententia inuentoris, nisi contradictoria sese compatiantur in ueritate. Nam ex dispositione subiecti conceditur (quia supponitur) lineam d f esse subduplam lineæ d g, & deinceps ex argumentatione nostra concedi oportet lineã d f, manente eadem semper dispositione, nõ esse subduplam ad ipsam d g. Ad finẽ igitur laboris maximi perducti sumus, concludentes inuentionem supra recitatã ad uerum quidem accedere, intellectui autem ueritatem ipsam desideranti nequaq̃ satisfacere. Sed dubitabit forsitan quispiam lineam d n minorem esse linea n c, quod tanq̃ certum superius assumpsimus, ita ut punctus n cadat ultra punctum mediæ sectionis lineæ d g uersus punctũ d, quatenus per quintam secundi elementorũ, ratio nostra procedat, ut supra explanauimus. Illud ergo ratificabimus hoc pacto. Ponamus duas lineas d b & d c motibus suis discessisse à puncto a, intantum q corda a c sit latus decagoni æquilateri inscriptibilis circulo a b c: & ponat̃ linea a e æqualis ipsi a c: factoq̃ puncto e centro super eo secundum quantitatẽ e a describatur circulus, cuius circumferentia secet lineam quidẽ d b in puncto f, lineam autẽ d c continuatam in puncto g, quemadmodum etiã superius disponebatur: ducatur demum linea e f. Cum igitur secundum argumentationẽ superius factã, duo trianguli a d c & a e c sint æquianguli: ita q angulus a d c sit æqualis angulo e a c, & reliqui reliquis: angulus autẽ a d c, p ultimã sexti elementoꝝ, sit decima pars q̃tuor rectorũ, atq̃ idcirco quinta ps duorũ rectorũ: erit & angulus e a c quinta pars duorũ rectorũ. sed angulus d a c est duæ quintæ duoꝝ rectoꝝ, ppterea q duo anguli d a c & d c a æquales inuicẽ ualẽt q̃tuor quintas duoꝝ rectoꝝ: erit igit̃ angulus d a e æq̃lis angulo e a c, qui æq̃lis erat angulo a d c. sic duo anguli d a e & e d a sunt æquales, & ideo per sextã primi, duæ lineæ a e & e d æquales habebuntur. posita demũ e n æquali ipsi c g, ita ut tota c n sit æqualis lineæ e g, atq̃ idcirco ipsi a c siue a e, erit d n residua æqualis ipsi e c. sed propter similitudinẽ triangulorũ a d c & a e c proportio d c ad a c sicut a c ad e c. & ideo proportio d c ad c n sicut c n ad n d. Est itaq̃ linea d c diuisa in puncto n, secundũ proportionem habẽtem medium & duo extrema, cuius maior portio est c n. In tali igit̃ situ lineaꝝ d b & d c punctus n cadit ultra punctũ mediæ sectionis d c uersus centrũ circuli. Amplius cũ duo latera e d & d f triãguli d e f sint æqualia, erunt p 5. primi duo anguli e d f & e f d æquales. sed angulus e d f est duæ quintæ duorum rectorum, quia duplus ad angulum a d c, qui est quinta duorum rectorũ: quare & angulus e f d est quintæ duorum rectorum, & ideo angulus d e f una quinta duorum rectorum. igitur triangulus d e f triangulo e a c est æquilaterus & æquiangulus: erit itaq̃ d f æqualis ipsi c e, & ideo etiã æqualis lineæ d n: sed d n minor est q̃ medietas lineæ d c, cum ipsa d n minor sit linea n c: multo igit̃ minor erit d n & ideo etiã d f q̃ medietas lineæ d g. quamobrem oportet duas semidiametros d b & d c amplius elongari à puncto a, ad hoc ut d f fiat æqualis medietati d g: quanto autem magis elongantur dictæ semidiametri à puncto a, tanto minor fit linea d n, ponendo semper c n æqualem ipsi a c siue e g: dum autem a c est latus decagoni æquilateri circulo a b c inscriptibilis, linea d n ostẽsa est minor medietate d c, quare multo minor erit in maiore elongatione semidiametrorũ d b & d c à puncto a. Constat itaq̃ punctum n cadere ultra punctũ mediæ sectionis d c uer ſus punctum d, dum d f eſt ſubdupla ipſi d g. quod erat explanandũ. Nemo inſuper ſuſpicari debet, ꝙ circumferentia circuli ſuper e centro deſcripti, ſecet lineam d b in alio puncto ꝙ̃ f. concluſimus namq́ ſuperius lineam e f ſiue a c inter hos duos terminos 42044. & 42164. lineam autem d e inter hos 30370. 30538. Linea ergo e f, ſcilicet ſemidiameter circuli ſuper e centro deſcripti, maior eſt ipſa e d linea. quare nullus punctus lineæ d b eſt in circumferentia circuli ſuper e centro deſcripti, præter punctum f. Ad ſummã ergo concluditur ꝙ, ſtante ſupra memorata diſpoſitione, triangulus æquilaterus inſcriptus circulo habenti ſemidiametrum d g, non habet æqualem ambitum circulo a b c. Nam ſi ita eſſet, ſequeretur lineam d f minorem eſſe ꝙ̃ ſubduplã lineæ d g, quæ tamen ſupponitur ſubdupla eidem: quod implicat contradictionem. Huiuſmodi examen accomodari etiam poſſet ad quadratum, ad pentagonum, ac alias figuras æquilateras circulis inſcriptibiles: in triangulo tamẽ æquilatero facilius erat propter datam proportionem rationalem perpendicularium, quæ ex centro circuli ad latera triangulorum æquilaterorũ, inſcripti uidelicet & circũſcripti, ꝓducunt: in reliquis aũt figuris æquilateris ꝓportiones huiuſmodi perpendiculariũ irrationales ſunt, inter binas tñ datas rationales ꝓportiones oẽs cõtinent, q̃d quidẽ ꝓ examine fiẽdo ſufficeret. Sed poſtꝙ̃ in triangulo æquilatero nõ proceſſit inuẽtio cõmemorata, uериſiſe eſt ꝙ neq́ in cæteris figuris locũ habeat. Tanto igit̃ labori noſtro fructus reſpondebit ille, ꝙ poſteri ſupra recitatam concluſionem lecturi, non ſuſpenſum habeant animũ, qualẽ nos diu geſſimus, priuſꝙ̃ ſatis negociũ iſtud exploraremus. ingẽteſq́ nõ iniuria nobis agent gratias, qui ueritatẽ tantopere & ſcrutati ſumus & poſthac tuebimur. Neq́ fruſtra uigilias noſtras huic exercitio nos impendiſſe quiſpiã ſuſurrare auſit, quamuis nihil aſtruxiſſe uideamur, quippe qui neq́ curuam rectificare docuimus lineam, neq́ æqualem circulo quadratam aream reddiderimus. ſolent enim nonnunꝙ̃ opiniones erroneæ grauius nocere ꝙ̃ ueræ ac firmæ ſententiæ prodeſſe poſſint. Hunc igitur ſcrupulum diuturna meditatione ac magno tandem labore eripuimus. Rationes autem quæ mouere potuerũt inuentorem, nullas inuenio ſcriptas, quibus, ſi quæ eſſent, non iniuria obuiandum eſſet in calce huius orationis: quas nequaꝙ̃ Mathematicas, ſed Lullianas potius fuiſſe arbitror: qualeſcunq́ tamen fuerint, efficaciam habere non potuerunt, niſi duo contradictoria ſimul ſtare poſſe aliquis confiteat̃. Satis in hoc negocio luſiſſe uidemur, ad aliam deinceps inuentionem nouiſſimam tranſire licebit, ſi prius uniuerſos hæc noſtra ſcripta lecturos hortabimur, ut pro manſuetudine ſua noſtras ſuſcipiant rationes, non tanꝙ̃ detractorias, ſed ueritatis duntaxat monſtratrices. nam ſi alium quempiam laceſſere, aut noſtra oſtentare facta cupidi fuiſſemus, multo plures, ꝙ̃ fecimus, rationes adduxiſſemus, more oratorum, qui ſuum ꝙ̃plurimis argumentis confirmant propoſitum, quãuis non æque fortibus. Vnica igitur ratione uſi ſumus, ut humiliter ac ſincere ueritatem inueſtigaſſe potius credamur, ꝙ̃ arroganter alijs detraxiſſe.

Finis.

προηγούμενα τοῦ τοῦ κύκλου τετραγωνισμοῦ κατὰ Νικόλεων τὸν κουσάνον διὰ σχημάτων εὐθυγράμμων καὶ ἰσοπλεύρων τῶν γεγραμμένων ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου δοθέντος.

Dispositio. Sit circulus a b m c super centro d descriptus, cuius diameter a m: duæ autē semidiametri eius d b & d c incœperīt simul moueri ab a puncto recedendo, hæc quidē uersus dextrā, illa uero uersus sinistram: motus earum sit æque uelox. Iamq; traductæ sint ad talē situm, ut ducta corda a c & linea a e sibi æquali, super pūcto e facto centro secundum quantitatem e a describatur circulus, cuius circumferētia secet semidiametrum quidē d b in puncto f: d c autē continuatam in g, ita ut d f sit subdupla ad d g. Dicitur q triangulus æquilaterus inscriptus circulo cuius semidiameter d g sit isoperimeter circulo a b m c.



60000.
semidiameter d a.

Ponatᷓ arcus a c 36. gra.

18541
18541

37082
corda a c.

35267.
Linea a l.

54 0
complementū arcus a c.

48541.

11459.
Linea l c.

11459.

22918.
Linea e c.

37082.
Linea d e.

37082.

74164.
Linea d d.

72 0
arcus b c.

57063.
Linea c h.

18 0
complementū arcus b c.

18541.
Linea d h.

60000. 57063.
37082.

57063
37082

114126
456504
399441
171189

3 445
2 1 1 6 0 1 | 0166
35266

35267.
Linea e k.

60000. 18541.
37082.

37082
18541

37082
148328
185410
196656
37082

2 3 5
6 8 7 5 3 | 7362
11458

11458.
Linea d k.

h 2

37082
37082

74164
296656
2595740
111246

1375074724
quadratum e f.

35267
35267

246869
211602
70534
176335
105801

1243761289
quadratum e k.

1375074724
1243761289

131313435
quadratum f k.

1
23 7 | 1
13148 | 1
1255295 4 | 4
131313435 | 5
2222890 | 9
2 2
2

11459.
Linea f k.

Sed quid opus erat tantis? cum d e & e f sint æquales, necesse fuit lineam d k æqualem esse ipsi k f.

11458
11458

22916
Linea d f.

Dum ergo ponitur corda a c, 37082. sit linea d g, 74164. & linea d f, 22916. minor scilicet q̃ subdupla ipsius d g, quare necessario corda a c maior erit, si d f debet esse medietas de d g.

74164
37082 medietas d g.

22916
14166
37082

51248
37082
22916

14166
Differentia lineæ d f. & medietatis d g.

Sed ponamus arcum a c 54. gra. cuius medietas 27.

27239
27239

54478
corda a c.

36 0
complementũ arcus a c.

35267.
Linea d l

24733
2473[illegible]

494[illegible]6
Linea e c.

10534.
Linea d e.

54478.
65012.
Linea d g.

54
54

108

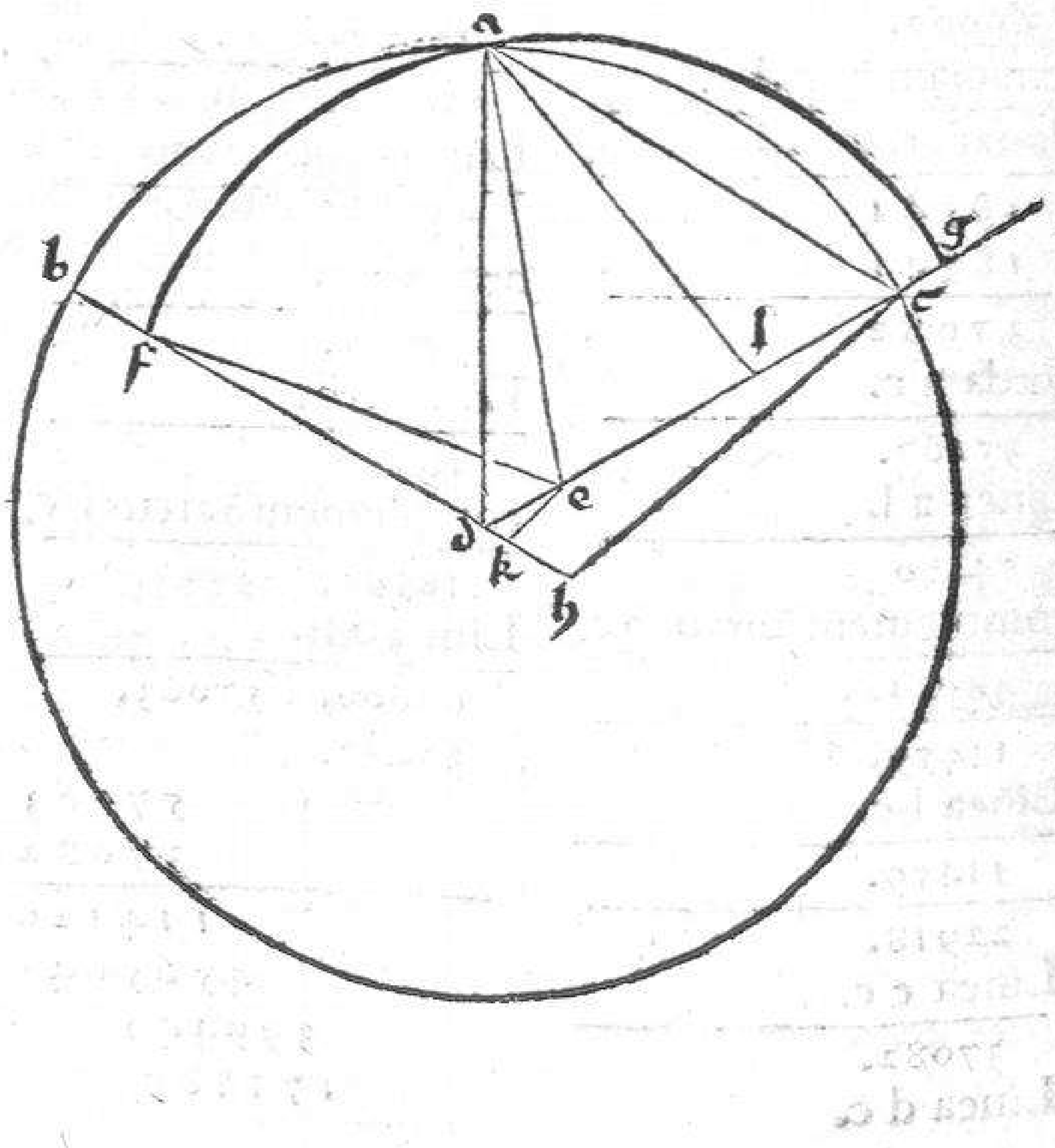
27

57063.
Linea c h.

18 0

18541
Linea d h.

60000. 57063.
10534.



57063
10534

228252
1[illegible]189
285[illegible]5
57063

82
60110 | 1642
10018

10018.
Linea e k.

60000. 18541.
10534.

18541
10534

74164
55623
92705
18541

13
19531 | 0894
3255

3255.
Linea d k.

54478
54478

435824
381346
217912
217912
272390

2967852484
quadratum e f.

10018
10018

80144
10018
10018

100360324
quadratum e k

2967852484
100360324

2867492160
quadratum f k.

11 8
596395 | 5
35824452 6 | 3
2867492160 | 5
10067008 | 4
11007 | 8
1

53549.
Linea f k.

3255.

50294.
Linea d f.

65012.

32506.
medietas d g.

50294
32506

17788
Differentia lineæ d f & medietatis d g.

Dum igitur posui cordã a c 37082. linea d f minor fuit medietate d g in 14166. dum uero posui cordam a c 54478. linea d f maior fuit medietate lineæ d g in 17788. Faciam igitur secundum regulam positionis falsæ ad inueniendum propinque, quantam oporteat esse, cordam a c sicut d f fiat medietas d g.

positio 1. positio 2.
37085. 54478.

14166. 17788.
error 1. diminutus. error 2. additus.

37082
17788

296656
296656
259574
259574
37082

659614616

54478
14166

326868
326868
54478
217912
54478

771735348
659614616

1431349964

17788
14166

31954
Summa errorum.

1
32124
43365
258157
393463 | 4
1535786 | 4
29518 31 88 | 7
14313499 649 | 9
3195 44444 | 4
3195555
31999
311
3

44794.
Corda igitur a c uellet esse tanta. Sed examinemus illud.

22397.

22 57
22 57

45 54
Arcus igitur a c uellet esse tantus.

44 6
complementũ arcus a c.

60000.
41755.
Linea d l.

18245
18245

36490

Linea e c.

23510.

Linea d e.

44794.

68304.

Linea d g.

45 54

45 54

91 48

88 12

59970.

Linea c h.

Respice secundam figuram, est enim angulus b d c obtusus.

1 48.

1885.

Linea d h.

60000. 59970.

23510.

59970

23510

599700

29985

17991

11994

1409894700

27541

140989|4700

23498

23498.

Linea e k.

60000. 1885.

23510.

23510

1885

117550

18808

18808

2351

253

4431|6350

738

739.

Linea d k.

44794

44794

179176

403146

313558

179176

179176

2006502436

quadratum e f.

23498

23498

187984

211482

93992

70494

46996

552156004

quadratum e k.

2006502436

552156004

1454346432

quadratum k f.

6

9

44

126882

5737395 7

1454346432

876622 6

476

38136.

Linea k f.

739.

37397.

Linea d f.

68304.

34152.

Medietas lineæ d g.

3245.

Differentia lineæ d f & medietatis d g.

Faciam iterum secundũ positionem falsam.

37082. 44794.

14166. diminutus. 3245. additus.

37082

3245

185410

148328

74164

111246

120331090

44794

14166

268764

268764

44794

179176

44794

634551804

120331090

754882894

Numerus diuidendus.

14166

3245

17411

Diuisor.

1

15

141

3931

2618457 4

5771668 3

3718449548 3

754882894 5

174111111 6

1741111

17444

177.

1

43357.

Corda igitur a c uellet esse 43357. secundũ hãc regulam positionis falsæ iterum examinabo.

21679.

21 11
21 11

42 22

Tantus ergo uellet esse arcus a c.

47. 38.

complementũ arcus a c.

60000
44331

15669
15669

41338

Linea e c.

28662.

Linea d e.

43357

72019

Linea d g.

42 22
42 22

84 44

arcus b c.

59747.

Linea c h.

Respice primam figurã. est enim angulus b d c acutus.

5 16

complementũ arcus b c.

5507.

Linea d h.

60000. 59747.
28662.

59747
28662

119494
358482
358482
477976
119494

83
171746 | 8514
28541

28541.

Linea e k.

60000. 5507.
28662.

28662
5507

200634
143310
143310

31
157841 | 1634
2630

2631.

Linea d k.

43357
43357

303499
216785
130071
130071
173428

1879829449

quadratum e f.

28541
28541

28541
114164
142705
228328
57082

814588681

quadratum e k.

1879829449
814588681

1065240768

quadratum f k.

541
26227 | 3
543322 | 2
1414884884 | 6
1065240768 | 3
6645226 | 8
65
6

32638.

Linea f k.

32638
2631

35269

Linea d f.

72019

36009

Medietas lineæ d g.

36009
35269

740

Differentia lineæ d f & medietatis d g.

Faciam secundum regulam positionis falsæ utẽdo duabus positionibus ĩmediate p̃scriptis, quarum una habet errorem additũ & alia diminutũ.

Positio 1.

44794.	43357.
error additus.	error diminutus.
3245.	740.

44794
740

1791760
313558

33147560

43357
3245

216785
173428
86714
130071

140693465
33147560

173841025

Diuidendus.

3245
740

3985

Diuisor.

43624. Quotiens.

Tanta uellet esse corda a c.

Nunc iterũ examinabo

illud.

21812.

21 19
21 19

42 38
tãtus uellet eſſe arc9 a c

47 22
complementũ arcus a c.

60000
44142

15858
15858

31716
Linea c e.

28284.
Linea d e.

43624.

71908.
Linea d g.

42 38
42 38

85 16
arcus b c.

59795.
Linea c h.

4. 44.
complementũ arcus b c.

4951.
Linea d h.

60000. 59795.
28284.

59795
28284

239180
470360
119590
478360
119590

41842
189124 | 1780
28187

28187.
Linea e k.

60000. 4951.
28284.

28284
4951

28284
141420
254556
113136

140034084.

2775
40033 | 4084
2333

2334.
Linea d k.

43624
43624

174496
87248
261744
130872
174496

1903053376
quadratum e f ſiue a c.

28187
28187

197309
225496
28187
225496
56374

794506969
quadratum e k.

1903053376
794506969

1108546407
quadratum f k.

5
85
8326
1793897 | 3
2293862381 | 3
11085464407 | 2
8666458 | 9
86 | 4
6

33295.
Linea f k.

2334.

35629.
Linea d f.

1904.

35954.
Medietas d g.

325.
Differentia lineæ d f & medietatis d g.

Iam per regulam poſitionis falſæ.

Poſitio 1. Poſitio 2.
43357. 43624.
Error di. Error di.
740. 325.

43624
740

1744960
305368

32281760

43357
325

216785
86714
130071

14091025

32281760
14091025

18190735
Diuidendus.

740
325

415
Diuiſor.

11
3113 4
1547725 | 4
276548 | 3
18190735 | 8
4155555 | 3
41111 | 3
444

43833.
Tanta uellet eſſe corda a c.

Examinabo illud.

21916.

21 25
21 25

42 50

Tantus uellet esse arcus a c.

47. 10.

complementũ arcus a c.

60000
44000

16000
16000

32000

Linea c e.

28000.

Linea d e.

43833.

71833.

Linea d g.

42 50
42 50

85 40

Arcus b c.

59828.

Linea c h.

4. 20.

Cõplementũ arcus b c.

4534.

Linea d h.

60000. 59828.
28000.

59828
28000

478624000
119656

45154
1675184 | 4000
27919

27919.

Linea c k.

60000. 4534.
28000.

4534
28000

36272000
9068

3
12695 | 2000
2115

2116.

Linea d k.

43833
43833

131499
131499
350664
131499
175332

1921331889

quadratum e f siue a c.

27919
27919

251271
27919
251271
195433
55838

779470561

quadratum e k.

1921331889
779470561

1141861328

quadratum f k.

2
13
1 7996
5614777 | 3
262675247 | 3
11418613287 | 7
6667458 | 9
67 | 1
6

33791.

Linea f k.

2116.

35907.

Linea d f.

71833.

35916.

Medietas lineæ d g.

9.

Differentia lineæ d f & medietatis lineæ d g.

Iam iterum per regulã positionis falsæ.

Positio 1.

43624. 43833.
error di. error di.

325. 9.

43833
325

219165
87666
131499

14245725

43624
9

392616

14245725
392616

13853109

Diuidendus.

325
9

316

Diuisor.

123
2234
3621 | 4
28784 | 3
14153721 | 8
13853109 | 3
31666666 | 8
31111
333

43839.

Tanta uellet esse corda a c.

Examinabimus illud.

21920.

21. 26.
21. 26.

42. 52.
arcus a c.
47. 8.
complementū arcus a c.
60000
43976
16024
16024
32048
Linea c e.
27952.
Linea d e.
43839.
71791.
Linea d g.
42 52
42 52
85 44
Arcus b c.
59834.
Linea c h.
4. 16.
complementū arcus b c.
4464.
Linea d h.
60000. 59834.
27952.

59834
27952
119668
299170
538506
418838
119668
48473
1677477 | 9968
27874
27875.
Linea e k.
60000. 4464.
27952.
27952
4464

111808
167712
111808
111808
83
1247717 | 7728
2079
2088.
Linea d k.
27872
27875
139375
195125
223000
195125
55750
777015625
quadratum e k.
43839
43839
394551
131417
350712
131517
175356
1921857921
777015625
1144842296
quadratum f k.
25
7338
876873 | 3
7654943 7 | 3
1144842296 | 8
6667666 | 3
67 | 5
6
33836.
Linea f k.
33836
2080
35916
Linea d f.
71791.
35895 ½.

Medietas lineæ d g.
9.
21.
Differentiá linearū d f, & medietatis d g.
Dum igitur ponitur corda a c 43833. linea d f minor est medietate d g in 9. dū uero ponit̃ corda a c 43839. linea d f maior est medietate d g in 21. Vellet itaq; corda a c esse inter hos numeros 43833. & 43839. ad hoc ut d f haberetur medietas d g.
¶ Sed nunc explorabo quantā oporteat esse d g, dum triangulus æquilaterus inscriptus circulo, cuius ipsa est semidiameter, isoperimeter fuerit circulo a b c.
$3\frac{10}{70}$ $3\frac{10}{71}$
220. 223.
70. 71.

220
154
15620. 15610.
4970.
Dum ergo semidiamet̃ circuli est 497. semicircumferētia est inter hos 1562. & 1561.
Sed linea a d est 60000. queādmodū hucusq; usi sumus. Igitur per præambulum semicircumferentia circuli a b c, erit inter duos.
497. 1561. 1562.
60000.
1561
60000
93660000

1
422
112653 | 1
43 87 | 8
5498 25 | 8
93660000 | 4
49777777 | 5
499999 | 0
4444

188450.
minor terminus semicircumferentiæ a b c.

1562
60000
93720000

12
12333 | 1
1438571 | 8
4224922 | 8
548645135 | 5
937200000 | 7
49777777 | 1
499999
4444

188572.
Maior terminus semicircumferentiæ a b c.

Semicircumferentia igitur a b c est inter hos, 188450. & 188572. & ideo tota circumferentia inter duplos eorum.

188450. 188572.
188450. 188572.
376900. 377144.

Inter hos est circumferẽtia tota a b c.

Quare & ambitus trianguli isoperimetri e est inter eosdẽ. & ideo per præambulum latus eiusdẽ trianguli est inter tertias horũ terminorum.

11111 12 12
376900 377144
125633 125714
125633 125715

Inter hos est latus dicti trianguli.

Quoniã autem latus trianguli æquilateri potentialiť triplat semidiametrum circuli cui inscribitur, erit data proportio quadrati lateris dicti trianguli ad quadratum semidiametri, & ideo per præambulum quadratũ semidiametri huiusmodi dabitur.

125633
125633
376899
376899
753798
628165
251266
125633
15783650689

Minor terminus quadrati lateris trianguli dicti.

125715
125715
628575
125715
880005
628575
251430
125715
15804261225

Maior terminus quadrati lateris trianguli prædicti.

1 22221
15783650689
5261216896

Minor terminus quadrati semidiametri circuli, cui inscribiť prædictus triangulus.

22 2 1
15804261225
5268087075

Maior terminus quadrati iam dicti.

123
1455
115517 74 | 7
38798555 | 2
5261216896 | 5
14 4 0 6 | 3
4 5 0 | 4
1 4 5
1 4
1

72534.
Minor terminus semidiametri circuli p̃dicti, cui inscribitur triangulus æquilaterus.

31
1128
13269 5 | 7
384835614 | 2
5268087075 | 5
14445616 | 8
11445 | 1
1

72582.
Maior terminus semidiametri circuli, cui inscribitur dictus triangulus. Sed hæc semidiameť secundũ tenorem propositionis æqualis debet esse ipsi lineæ d g, quare necesse est lineã d g esse inter hos terminos, 72534. & 72582. si triangulus æquilaterus inscriptus circulo, cuius ipsa est semidiameter, debet esse isoperimeť circulo a b c.

Conclusimus superius cordã a c esse inter hos terminos 43833. & 43839. quorum primus facit, ut linea d f minor sit medietate d g in 9. partibus. secundus autẽ facit q̃ maior sit in 21. ita quôd hic quidem est occasio minoris diminutionis, quàm ille additionis. Si ergo pro minori termino accipiemus 43832. & pro maiori 43838. uerisimiliter tantum minuet d f ex medietate d g propter minorem eorũ, quantum addit propter alterum. Seruemus ergo hos dictos terminos, & omnia per demonstrationes lineares inueniamus, non per tabulam sinus. Continuemus autẽ in figura semidiametrũ a d usque ad occursum circumferentiæ in puncto m, ductis tribus cordis b c, b m & c m. Est autẽ a c medio loco proportionalis inter d c & c e, quadratũ ergo a c æquatur ei, quod fit ex d c in c e.

43832. 43838.
Inter hos est a c.

43832
43832
87664
131496
350656
131496
175328
1921244224
quadratum a c.

1
192124|4224
32020|

32020. 32021
Inter hos est c e, dum a c est 43832.

27980. 27979.
Inter hos est d e.

43832. 43832.
71812. 71811.

Inter hos est d g.
Quadratum autem a m æquatur quadratis linearum a c & c m.

1440000000.
quadratum a m.

1921244224.
12478755776.
quadratum c m.

11
227 | 1
113888 | 1
3573615 12 | 1
124787557767 | 7
2222234 0 | 0
222234 | 8
2

111708. 111709.
Inter hos est c m.
Sed proportio d a ad a c est ut c m ad b c. quare per præambulum b c inter duos notos habebitur.

60000. 43832.
111708. 111709.

43832
111708
350656
306824
43832
43832
43832
4896385056

3 2
489638|5056
81606|

81606.
Minor terminus b c.

4896385056
43832

3
489642|8888
81607|

81608.

Minor terminus b c.
81606. 81608.
Inter hos est b c.

81606
81606
489636
489636
81606
652848
6659539236
quadratum minoris termini b c.

81608
81608
652864
489648
81608
652864
6659865664
quadratum maioris termini b c.

6659539236
3600000000
3059539236
Minor terminus eius quod fit ex differentia casuum b h & h d in totam b d.

6659865664
36
3059865664
Maior terminus huiusmodi.

81
305953|9236
60992|

54
305986|5664
50997|

50992. 50998.
Inter hos est differentia casuum b h & h d.

9008. 9902.
Inter hos est duplum casus minoris, qui est h d.

4504. 4501.

Inter

Inter hos est casus h d.

Quadratum autem h d cum quadrato c h ualēt quadratū lineæ c d, quare per præambulum c h inter duos notos habebitur.

4504
4504

18016
22520
18016

20286016

quadratum maioris termini h d.

4501
4501

4501
2250
18004

20259001

quadratum minoris termini h d.

3600000000
20286016

3579713984

quadratum minoris termini c h.

3600000000
20259001

3579740999

quadratum maioris termini c h.

x
33
x468 | 5
xx98375 | 9
3579713984 | 8
x0x89666 | 3
xxx19 | 0
1

1
34
x471 | 5
xx98332 | 9
3579740999 | 8
x0x89666 | 3
xxx19 | 0
1

59830. 59831.

Inter hos est c h.

Est autem proportio d c ad c h sicut d e ad e k. quare per præambulū e k inter duos notos cōtinebitur.

60000. 59830. 59831.
27979. 27980.

59830
27979

538470
418810
538470
418810
119660

45554
x67298 | 3570
27899

59831
27980

4786480
538459
418817
119662
---
45 1
x67407 | 1380
27901

27899. 27902.

Inter hos est e k.

Item proportio c d ad d h sicut e d ad d k, quare & d k inter duos notos habebitur.

60000. 4501. 4504.
27979. 27980.

27979
4501

27979
139895
111916

55
x7593 | 3479
2098

4504
27980

360320
40536
31528
9008
---
x7602 | 1920
2100

2098. 2101.

Inter hos est d k.

Quadratum autem e f æquatur duobus quadratis e k & k f.

27899
27899

251091
251091
223192
195293
55798

778354201

Quadratus minoris termini e k.

27902
27902

55804
251118
195314
55800

778521604

Quadratus maioris termini e k.

1921244224
778521604

1142722620

minor terminus quadrati f k.

1921244224
778354201

1142890023
maior terminus quadrati f k.

1	
88742	3
26398424	3
114277726270	8
66676660	0
67	4
6	

14	
88 943	3
2634584873	3
1142890023	8
66676660	0
67	6
6	

33804. 33807.
Inter hos est f k.

33804 33807
2098 2101

35902 35908
Inter hos est d f.

71811. 71812.
inter hos erat d g

$35905\frac{1}{2}$. 35906.
Inter hos est medietas d g. nondũ ergo apparet certitudo huius rei, neq; incõueniens aliquod, nã si medietas d g est inter hos $35905\frac{1}{2}$.& 35906. erit necessario etiã inter hos 35902.& 35908. inter quos etiã est ipsa d f.

Huc attende animum.

Aggrediar aliam uiam. In prima facie præcedẽtis cartæ columna tertia conclusimus lineam d g esse inter hos terminos 72534.& 72582. cumq; linea d c sit 60000, erit per præambulum c g inter duos notos.

72534 72582
60000 60000

12534 12582
Inter hos erit linea c g, cui sit æqualis e n. oportet enim d e maiorẽ esse ipsa c g, nam proportio d c ad e g siue a c, est ut a c siue e g ad e c, sed e g maior est ipsa e c, quare & d c maior est linea e g. ablata communi e c relinquitũ d e maior ipsa c g. Cum igitur sit proportio d c ad c n sicut c n ad c e totius ad totã, sicut abscisæ ad abscisam: erit residuæ d n ad residuam n e sicut totius d c ad totam c n. quare quod sub d n & c n cõtinetur, æquale erit ei quod sub n e & d c. sed quod fit ex n e in d c, est inter duos notos per præambulum.

12534
60000

752040000

12582
60000

754920000
Igitur quod fit ex d n in n c est inter hos duos 752040000.& 754920000.

Sed quod fit ex d n in n c cũ quadrato dimidiæ differentiæ earum æquatur quadrato medietatis d c, quare per præambulum quadratum dimidiæ differentiæ d n & n c inter duos notos habebitur.

30000

900000000
Quadratum medietatis d c.

900000000
754920000

145080000

900000000
752040000

147960000
Quadratum ergo dimidiæ differentiæ linearũ d n & n c est inter hos. 145080000.& 147960000.

2	
3	1
1126	2
12284840	0
1450800000	4
22440088	4
224	

2	
31	
1924	1
131453	2
3558441	1
1479600000	6
2 4 2 2	3
2 4 3	
2 4	
2	

Igitur dimidia differentia linearum d n & n c est inter hos 12044.& 12164.

30000. 30000.

42044. 42164.
Inter hos est necessario n c linea, cui æqualis est a c.

Quadratum autẽ a c cũ quadrato c m æquipollẽt quadrato diametri a m, quare & per præambulum quadratum c m, & ideo

& ideo etiam ipsa linea c m inter duos terminos notos concludetur.

42044
42044
168176
168176
84088
168176
1767697936

Minor terminus quadrati a c.

42164
42164
1777802896

Maior terminus quadrati a c.

14400000000
1777802896
12622197104

Minor terminus quadrati c m.

14400000000
1767697936
12632302064

Maior terminus quadrati c m.

1
1324
12969 | 1
1772121 | 1
58894356 | 2
12622197104 | 3
222244668 | 4
22224 | 8
222

1
112
3785 | 1
218976 | 1
18225981 | 2
598118925 | 3
12632302064 | 9
222244678 | 3
22224
2

112348. 112394.

Inter hos est c m.

Est autem proportio d a ad a c sicut c m ad b c propter similitudinē triangulorū, quare & per praeambulū b c inter duos notos habebitur.

60000. 42044.
42164.
112348.
112394.

112348
42044
449392
449392
224696
449392

5413
477385 | 9312
78725

112394
42164
449576
674364
112394
224788
449576

5541
473898 | 0616
78983

Hic ostendas angulum b d c esse acutum.

78725. 78984.

Inter hos est b c.

Differētia autē q̄drati b c & q̄drati d c aequat̄ ei q̄d fit ex b d in differētiā casuum b h & h d.

78725
78725
393625
157450
551075
629800
551075
6197625625
3600000000

11524
259762 | 5625
43293

78984
78984
315936
631872
710856
631872
552888
6238472256
3600000000

25423
263847 | 2256
43974

60000. 60000.
43293. 43974.

Inter hos est differentia casuum b h & h d.

16707. 16025.
8354. 8012.

Inter hos est linea h d.

Quadratum autem h d cum quadrato h c ualet quadratū d c. Igit̄ &c.

8354
8354
33416
41770
25062
66832
69789316

Quadratum maioris termini h d.

8012
8012
16024
8012
64096
64192144

Quadratum minoris termini h d.

```
 3600000000
   69789316
 3530210684
```

Quadratum minoris termini c h.

```
 360000000
   64192144
 353580785 6
```

Quadratum maioris termini c h.

```
        6
        7
      111
      766      |5
     57784     |9
 1149857559    |4
 35302106844   |1
  10188882     |5
    11118
        1
```

```
        7
       18
       39
     1818      |5
    174664     |9
  11546492124  |4
  35358078566  |6
  10188892     |2
    11118
        1
```

59415. 59463.

Inter hos est linea c h.

Est autem proportio d c ad c h sicut d e ad e k, quare & per praeambulū e k inter duos notos habebitur. Sed prius quaerenda est d e.

```
 60000  60000
 42164  42044
 17836  17956
```

Inter hos est d n.

12534. 12582.

Inter hos erat c g siue e n.

```
 17836  17956
 12534  12582
 30370  30538
```

Inter hos erit d e.

```
 60000.  59415.
         59463.

 30370.
 30538.
```

```
    59415
    30370
  4159050
  178245
 178245
      75|
 180443 |3550
  30073 |
```

```
    59463
    30538
   475704
  178389
 297315
 178389
     374|
  181588|1094
   30264|
```

30073. 30265.

Inter hos est linea e k.

Item proportio c d ad d h sicut e d ad d k, quare & per praeambulū d k inter duos notos habebitur.

```
 60000.   8012.
          8354.
 30370.
 30538.
```

```
   30370
    8012
   60740
   3037
 24296
 74332|4440
  4055|
```

```
   30538
    8354
  122152
 152690
 91614
 244304
  13  5|
 75511 |4452
  4251 |
```

4055. 4252.

Inter hos erit d k.

Cum autem duo quadrata linearū e k & f k ualeant quadratū e f, duae autem lineae e f & e k sint datae inter binos terminos, erit & per praeambulū f k inter duos notos.

42044. 42164.

Inter hos est e f siue a c.

30073. 30265.

Inter hos est e k.

```
     30073
     30073
     90219
  210511
  90219
 904385329
```

Quadratum minoris termini e k.

```
     30265
     30265
    151325
   181590
  60530
  90795
 915970225
```

Quadratum maioris termini e k.

Quadrata autem terminorum lineae e f siue a c aequalis ei superius habētur.

1767697936
915970225
8,5[illegible]27711

Minor terminus quadrati f k.

1777802896
904385329
8734175 6,7

Maior terminus quadrati f k.

21
52
838 | 2
1427515 | 9
4959113775 | 1
85117277711 | 8
4588236 | 4
558

3
3267 | 2
1376118 | 9
41216575 8 | 5
8734175667 | 5
4589010, | 3
559

29184. 29554.

Inter hos erit f k.

Sic utraque linearũ f k & d k int duos notos habetur terminos, quare per 3. præambulũ cõgeries earum inter duos notos constituetur.

29184	29554
4055	4252
33239	33860

Inter hos erit linea d f.

72534. 72582.

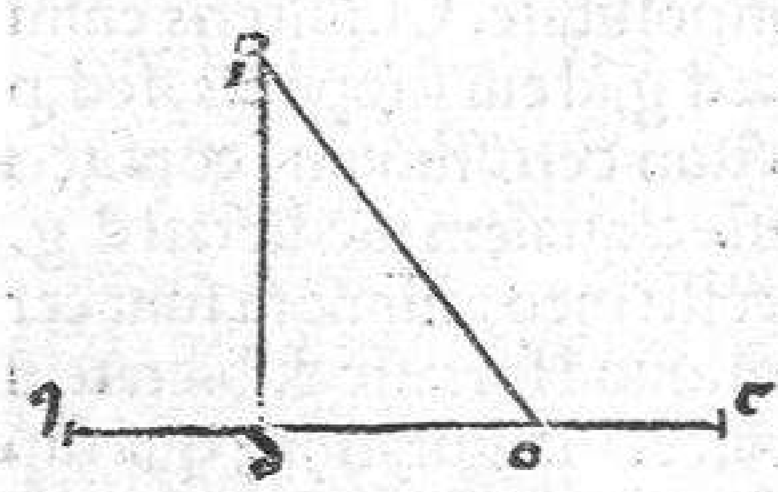
Inter hos erat d g.

36267. 36291.

Inter hos est medietas lineæ d g.

Dum igit triangulus inscriptus circulo, cuius semidiameter est d g, isoperimeter est circulo a b c, necesse est lineam d f multo minorem esse medietate lineæ d g, nã linea d f minor est q̃ 33806. quare & minor q̃ 36267. sed medietas lineæ d g est maior q̃ 36267. igitur &c.

Finis laboris maximi. Hoc igitur pacto ad impossibile duceris. Esto secundum intentionem tuam, q duæ lineæ d b & d c æque uelociter motæ recedant à linea d a, sintq; iam in eo situ quem supponis, scilicet q dispositis omnibus, ut conclusio tua sonat, linea d f sit subdupla lineæ d g: & ob hoc sit triangulus æquilaterus inscriptus circulo habenti semidiametrum d g, isoperimeter circulo a b c. Iam sequitur secundum processum meũ resoluendo hoc negocium, q in hoc situ linea d f multo minor sit q̃ medietas lineæ d g. Sic lineam d f æqualẽ esse medietati d g, & eandem non esse æqualẽ medietati d g confiteberis, q̃d est impossibile. Confiteris enim d f esse medietatẽ lineæ d g, id enĩ supponis, sed ꝓpter processum iam factum certissimum, confiteri cogeris, lineã d f non esse æqualem medietati d g. Omnia autẽ in hoc processu meo assumpta sunt certissima, præter hoc unum, quod fortasse dubietatem ingeret intellectui, q scilicet in figuratione quã supponit conclusio, linea d n minor sit q̃ linea n c, ita q punctus n cadat ultra punctum mediæ sectionis d c uersus d. Hoc autẽ sic roborabitur. Ponamus duas lineas d b & d c motibus suis peruenisse ad eum sitũ ubi a c sit latus decagoni inscriptibilis circulo a b c, dispositisq; reliquis omnibus ut res ipsa postulat, erunt duæ lineæ a e & e d æquales. nam duo trianguli a d c & c a e sunt æquianguli, duo enim anguli d a c & d c a per quintã primi æquantur, similiter duo anguli a e c & a c e trianguli a e c æquales sunt: accepto ergo angulo a c e cõmuni duobus triangulis & ad eum cæteris relatis, omnes quatuor dicti anguli inter se æquales habebuntur. Hinc & per 32. primi tertius tertio æquabitur. Est autem angulus a d c decima pars quatuor rectorũ per ultimam sexti, & ideo quinta pars duorũ rectorũ: unde angulus d a c duæ quintæ duorũ rectorũ erit: sed & angulus e a c æqualis angulo a d c quinta pars est duorũ rectorum, unde reliquus angulus d a e erit quinta pars duorum rectorũ: duo itaq; anguli d a e & e d a æquales sunt, unde & duæ lineæ a e & e d æquales conuincuntur. Cũ deniq; e f linea sit æqualis ipsi a e siue a c, & ideo ipsi d e, erit triangulus d e f duorum æqualium angulorũ e d f & e f d, angulus autem e d f est duæ quintæ duorũ rectorum, duplus enim est ad angulũ e d a, qui erat quinta pars duorũ rectorum: quare angulus d e f erit una quinta duorũ rectorum, & triangulus d e f æquilaterus & æquiangulus triangulo a e c. unde & linea d f æqualis reperietur lineæ c e, sed c e est minor q̃ me[illegible]etas lineæ d g. Cum enim propter similitudinem triangulorum a d c & [illegible] c sit proportio d c ad a c, & ideo ad d e ei æqualem, sicut a c siue d e ad e c, & d c maior est ipsa d e, erit & d e maior linea e c. Sic constat lineam e c minorẽ esse medietate lineæ d c: quare multo minor erit medietate ipsius d g. ergo & d f minor erit medietate lineæ d g. & ideo oportebit duas lineas d b & d c magis elongari ab ipsa d a, ut crescat linea d f. Si autem posuerimus c n æqualẽ ipsi a c siue e g, erit linea d n minor linea n c. & ideo â fortiori minor erit linea d n ipsa n c in maiori elongatione linearum d b & d c ab ipsa d a. quã to enim magis elongantur duæ lineæ d b & d c ab ipsa d a, tanto maior redditur linea e c, & etiam tanto maior linea c n. Quod autem linea d n minor sit linea n c, dum a c est latus decagoni æquilateri circulo a b c inscripti per numeros sic ostendemus. Semidiameter d c est diuisa in puncto e secundũ proportionem habentem medium & duo extrema, est enim proportio c d ad a c siue d e æqualem ei sicut d e ad e c. Videndum igitur quanta sit d e. Diuidatur d c per medium in puncto o, & â puncto d erigatur orthogonalis d p æqualis ipsi d c ducta o p, cui sit æqualis o q. Iã d q linea erit latus decagoni inscriptibilis circulo cuius semidiameter d c.



60000.
Linea d c.

360000000
9

450000000
Quadratum o p.

1 2
2 1 3 2 7 5 4 7 | 6
9 6 1 6 8 3 6 8 6 | 7
4 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 0
1 2 3 4 4 0 1 6 | 8
1 1 3 3 4 | 2
1

67082. 67083.
Int̃ hos est o p siue o q.

30000. 30000.

37082. 37083.

Inter hos est d q. scilicet latus decagoni.

60000 60000
37083 37082

22917 22918

Inter hos est e c, cui est æqualis d n. nam duæ c n & d e sunt æquales. quare ablata cõmuni n e relinquitur d n æqualis ipsi e c.

Sic cõstat d n esse minorẽ ipsa n c. multo igitur minor erit quando duæ lineæ d b & d c magis elongabunt â linea a d.

Habemus igitur finem huius rei, quæ iã diu magnum laborem ingessit mihi.

Venetijs die 26. Iunij. Anno 1464. turbata re publica Christiana per hostem suum Mahumetum.

IMmensa su[mmi] [d]ni dei perfectio aperte nobis demonstratur, dum insatiabilem animæ rationa[l]is cupidinem perpendimus: nam & si continuis additamentis nasci soleant artes humanæ, ad plenitudinem tamen earum nunquam pertingere licet. Quo namque amplius in scientijs procedimus, eo plus (mirabile dictu) restare uidetur ad discendum: fitque deinceps, quemadmodum uulgo dicit, ut plura dubitent, qui plura didicere. Summus igitur gradus perfectionis nequaquam humanitus attingi potest, sed cognitis scibilibus quantiscunque, ad alia semper inuenienda tenditur, quod profecto obtigisse arbitror huic uiro celeberrimo ac diligentissimo rerum secretarum inuestigatori: qui post multos modos circũsumerentiam circuli aut eius medietatem rectificandi, areamque suam quadrandi, sedulo conatus est tradere, quo nam pacto arcui quantolibet æqualis recta designaretur: ac econtra lineæ rectæ quantæcunque propositæ, quæ minor sit circumferentia circuli dati, æqualis ex ipsa circumferentia arcus abscinderet. Ipse tamen, quemadmodum uerba sua sonant, non æqualem circumferentiæ, aut arcui cuilibet rectam assignare pollicetur, sed ei commensurabilem, credẽs fortasse, curuæ circulari æqualem rectam dari non posse, cum, ut uulgus Geometrarum clamat, curui ad rectum non sit proportio, cuius contrarium superius comprobatum est. Pollicetur itaque curuæ circulari commensurabilem rectã designare ad hunc sensum, ut tot sint pedes, uerbi gratia, recti, in ipsa linea recta designata, quot sunt curui in linea curua proposita, sed reuera fugiendo inconueniens, quod secundum mentem huius philosophi sequeretur, si curuæ circulari

LECTORIBVS.

Hactenus progressus est scriptis suis Regiomõtanus, quibus ut nihil dempsimus, sic ne addere quidẽ quicquam placuit. Imperfectũ igitur opus, ac potius uix instituti particulã hanc curauimus & ipsam apponi, quæ sanè tolli commode poterat. Sed fidem nostram præstare uoluimus, quam gratissimam uobis esse par fuerit, ita ut studium laboremque nostrum.

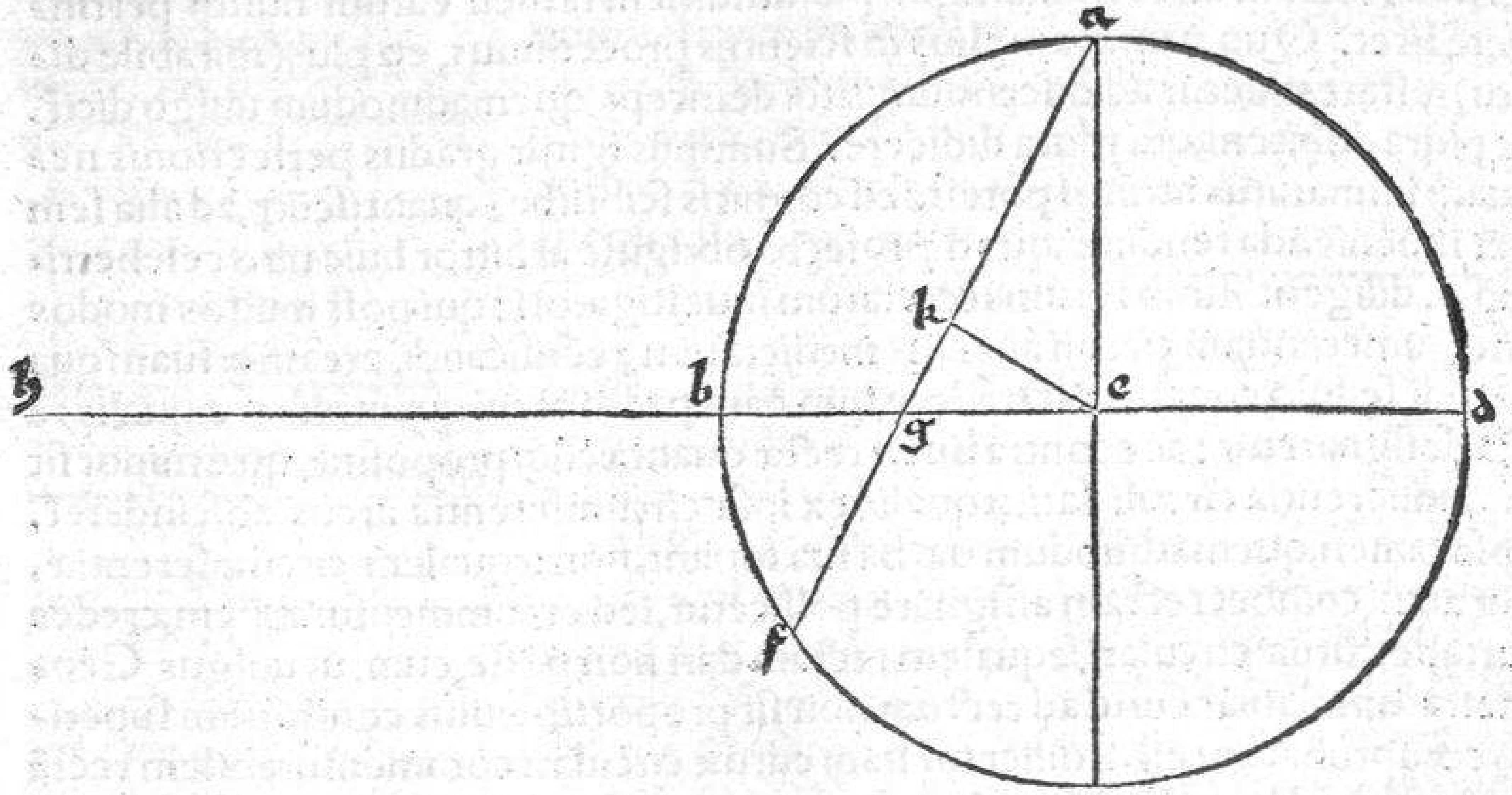
Νικόλεω τοῦ Κουσαίου ἐλαχίστη μέθοδος τοῦ εὑρεῖν εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ὃ
οὐ μόνον ὅλῃ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, ἀλλὰ καὶ παντὶ τμήματι ἥττονι τῆς τοῦ κύκλου ὅλης
περιφερείας ἴσην εὑρίσκειν εὐθεῖαν. πειράσομαι οὖν πρότερον ἀναλῦσαι τοῦτο τὸ πρόβλημα
καὶ μετὰ ταῦτα ἑτέρως δὲ αὐτὸ δοκιμάζειν, τοῦ θεοῦ διορθοῦντος.

CIrculum a b g d super centro e descriptum, duæ diametri suæ secent in quatuor quadrantes, extendaturque d b diameter ultra b absque fine determinato: demittatur corda ex puncto a, quæ sit a f, secans diametrum prædictã in puncto g, hac lege, ut si recta e h sumatur dupla ad eam cordam a f, e g intercepta centro circuli & puncto g sit quarta pars lineæ e h. Dicitur rectam e h esse æqualem semicircumferentiæ b a d.

Pro huius rei executione, ex centro circuli educo ad cordam a f perpendicularem e k. Esto igitur nunc secundum intentionem atque assertionem inuentoris, linea e h dupla ad cordam a f, & e g quarta pars lineæ e h: & ob hoc linea e h æqualis semicircumferentiæ b a d, liceat demum ponere semidiametrum

 trum

trum e a 4970. particularum, quamobrem semicircumferentia erit inter hos terminos 15610. & 15620. ut ex superioribus iam conclamatum est. Vnde & lineam e h inter eosdem terminos repertum iri constat. Nunc ... numeros descendendum.



15610. 15620.
Inter hos est linea e h.

Est autem a f medietas eius, & ideo per præambulum inter duos notos habebitur.

15610. 15620.

7805. 7810.
Inter hos erit a f.

Ex puncto autem e trianguli a e g rectanguli ad latus recto angulo oppositũ descendit perpendicularis e k. quare per 8. sexti e a erit medio loco proportionalis inter k a & a g, & ideo per 16. sexti & præambulũ linea a g inter duos notos habebitur.

4970
4970
347900
4473
1988
24700900

Quadratum e a.

1217
3368
129123 | 6
63794755 | 3
247009000 | 2
39055555 | 5
39000
399
3

7805. 7810.

3902. 3905.
Inter hos enim oportuit esse a k medietatẽ cordæ a f.

1
32
12212
6388344 | 6
2470009000 | 3
39022222 | 3
390000 | 0
399
3

6325. 6331.
Inter hos erit a g.

Quare per penultimam primi & præambulum quadratum e g inter duos existet notos.

6325
6325
31625
12650
18975
37950
40005625
Quadratum minoris termini a g.

24700900.

15304725.
Minor terminus quadrati e g.

6331
6331
6331
18993
18993
37986
40081561
Quadratum maioris termini a g.

24700900.

15380661.

Maior term[illegible]us quadrati e g.

11
229 | 3
699668 1 | 9
18304728 | 1
67882 | 2
7

16
1374 | 3
697422 | 9
15380661 | 2
67884 | 1
7

3912. 3922.

Inter hos erit linea e g.

3
15610 15620.

3902½. 3905.

Inter hos est quarta ps lineæ e h.

Linea igitur e g maior est ꝙ 3912. & ideo multo maior ꝙ 3905. sed q̄rta pars lineæ e h siue semicircumferentiæ a b d est minor ꝙ 3905. quare linea e g maior est quarta parte lineæ e h. Propter hypothesim itaq; tuam confiteris (quia ponis) e g quartam partē esse lineæ e h: & propt̄ enunciationem tuam dicendo e h esse æqualē semicircumferentiæ, cogeris concedere lineam e g esse maiorem quarta parte e h, quod implicat contradictionem.

Vel aliter. Quia linea e g ponebat̄ quarta pars ipsius e h, & e h est int̄ hos duos 15610. & 15620. ipsa e g inter q̄rtas partes dictorum terminorū necessario claudetur, & ideo inter hos 3902. & 3905. sic ipsa minor est ꝙ 3905. sed per syllogismū conclusimus eā esse maiorē ꝙ 3912. unde & maior erit ꝙ 3905. sic maior & minor eodem quod est impossibile.

Aliter ad idem. Quoniam e h est inter hos 15610. & 15620. erit a f inter hos 7805. & 7810. itē e g inter hos 3902. & 3905. unde per penultimam primi & præambulum quadratū a g inter duos notos habebit.

3902. 3905.

Inter hos erit e g.

	3902
	3902
	7804
	35118
	11706
	15225604
	24700900
	39926504

Minor terminus quadrati a g.

	3905
	3905
	19525
	35145
	11715
	15249025
	24700900
	39949925

Maior terminus quadrati a g.

1 3
13 4
219688 | 6
333444 | 3
39972 8504 | 1
122662 | 8
112

21 | 6
33875 | 3
3994992 5 | 2
122664 | 0
112

9318. 6321.

Inter hos erit a g.

4970	4970
3905	3902
1065	1068

Inter hos erit b g.

4970	4970
3902	3905
8872	8875

Inter hos erit g d.

Quod autem fit ex b g in g d, æquatur ei quod ex a g in g f, quare & g f inter duos notos habebitur.

1065.	1068.
8872.	8875.

	8872
	1065
	44360
	53232
	8872
	9448680

Minor terminus producti ex b g in g d.

	8875
	1068
	71000
	53250
	8875
	9478500

Maior terminus producti ex b g in g d.

 Cumq;

Cūq; a g inter duos notos sit, erit per præambulum & g f inter duos notos.

6318. 6321.

Inter hos erat a g.

5
8381
6823
79941
31772964 | 1
94458680 | 4
.6322111 | 9
6322,2 | 4
633
6

11 | 1
3168 | 5
94785000 | 0
63188880 | 0
63111
633
6

1494. 1501.

Inter hos erit g f.

6318. 6321.

7812. 7822.

Inter hos erit a f.

Sed propt̄ hypothesim erat inter hos 7805. & 7810. ppt̄ hypothesim ergo minor est q̄ 7810. & ideo minor q̄ 7812. sed per agumētationem ex eadē hypothesi procedēte maior ē q̄ 7812. sic maior & minor eodē quod est impossibile.

Venetijs die 28. Iunij. Anno 1464.

προσκυνήσεως γενομένης τῆς ἱερέως τοῦ δεσπότου μου.

ταῦτα τὰ γεγραμμένα ἐπιχειρήματα κατὰ ἀνάλυσιν γεγόνασι. νῦν δὲ κατ' ἄλλην μέθοδον ... ὑστέραν τὸ αὐτὸ δὲ χρηματίσεως.

Quoniam autem e h ponit dupla ad a f, & quadrupla ad e g, erit a f dupla ad e g, & ideo a k æqualis ipsi e g.

Pono itaq; a h 1. rem.

Vnus census erit quadratum eius a h.

Ponaturq; ut prius e a 4970.

24700900.

quadratum e a.

Id aufero ex uno censu, scilicet quadrato a g, relinquit unus census dēptis inde 24700900. nā aliter exprimi nequit. erit ergo quadratum e g & inde a k unus census dēptis 24700900.

Est autem e a per 8. sexti medio loco proportionalis int̄ h a & a g, quare per 21. sexti quadratū e a erit medio loco proportionale inter quadrata linearum h a & a g. & ideo quadratū e a in se ductum æquabitur ei quod fit ex quadratis linearum h a & a g, alterius scilicet in alterum. Sed non mireris q̄ quadratū in quadratum duci iubeatur, cum ductio in lineis dūtaxat locum habeat, hoc eni quo pacto & fiat & intelligēdū sit alibi ostenditur, facileq; trahitur ex cōmēto Campani sup ultima decimi elementorum.

24700900
24700900

2223081900
1729063
988036
494018

610134460810000

Quadratū quadrati e a.

1. census
1. censu demptis
24700900.

1. census de censu demptis 24700900. cēsibus.

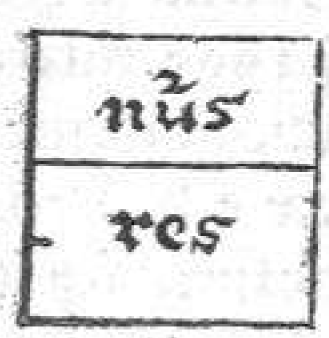
Hoc fit ex quadrato h a in quadratum a g.

Quare 1. census de censu dēptis 24700900. censibus, æquatur
610134460810000.

Restaurandoq; diminuta sicut præcipitur in Algebra, erit unus census de cēsu æq̄lis 24700900 censibus &
610134460810000.

Vtendo igitur censu de censu tamq; censu, agemus per capitulum sextum Algebræ donec reperiemus substantiā rei quæ tamen res est census in hoc proposito; cuius tandē radix q̄drata erit numerus lineæ a g.

Cēsus totus.



24700900.

12350450.

Medietas numeri rerū.

Hic numerus in se multiplicandus esset, sed cū sit medietas de 24700900. cuius quadratum superius procreatū est, erit quadratus numeri rerū dimidiatarū quarta pars huiusmōi magni quadrati.

2 2 82 2 2
610134460810000

152533615202500
quadratus numeri dimi diati rerum.

152533615202500
610134460810000

762668076012500

4
617
3122 8
32753 | 2
3 264974 4 | 7
3192472278745 | 6
343255958258975 | 1
762668076012500 | 6
4545222322888 | 4
55555 22332 | 4
55552 | 5
5

27616445 27616446
12350450 12350450

39966895 39966896
Inter hos erit substantia rei, quam hactenus quæsiuimus, sed hæc res in ueritate census erat. Accipio ergo radices quadratas, si quæ sint, horũ numerorum.

1		1	
2		2	
2318	6	2318	6
3374454	3	3374455	3
39966895	2	39966896	2
122664	1	122664	1
1 2		1 2	
1		1	

6321. 6322.
Inter hos est a g.

Quare per penultimam primi & præam. e g int̃ duos notos cõtinebit.

6321
6321
6321
12642
18963
37926

39955041
24700900

15254141
Minor terminus quadrati e g.

6322
6322

12644
12644
18966
37932

39967684
24700900

15266784
Maior terminus quadrati e g.

5 | 3
6849 16 | 9
15254141 | 0
67880 | 5
7 |

2 | 3
6857135 | 9
152667840 | 0
67880 | 7
7 |

3905. 3908.
Inter hos erit e g.

Igitur si linea a f debet esse dupla ad ipsam e g, quemadmodũ ad hypothesim statim sequitur, necesse est lineã e g reperiri inter hos duos terminos 3905. & 3908.

Quare & per præambulum linea e h quadrupla eius int̃ duos notos collocabitur.

3905 3908
4 4

15620 15632
Inter hos erit linea e h.

15610. 15620.
Inter hos erat semicircũferentia b a d.

Sed linea e h maior est ꝙ 15620. & semicircumferẽtia minor ꝙ 15620. Quare linea e h maior est semicircumferẽtia p̄dicta, quod est contra enunciationẽ inuentoris.

Illud bene consonat supra memoratis. Nã quãdo ponebatur e h æqualis semicircumferentiæ, erat e g maior quarta ipsius e h. Oportuit ergo lineam e h maiorẽ fieri & consequenter a f maiorem, si e g debuit esse quarta ipsius e h. quo facto, e h maior habetur semicircũferẽtia p̄dicta.

Poterit quispiã hæsitare circa id q̃d supius conclusum est, lineã e g contineri int̃ hos duos 3905. & 3908. si debeat esse medietas lineæ a g, & ideo quarta pars ipsius e h. Quamuis enim bene id conclusũ sit, uia tamẽ huius inuẽtionis perpaucis cognita est. Rarissimi enim artem rei & cẽsus, quam Algebrã plerięq; nominant Arabico uocabulo, satis didicerunt. Ideo ꝑ media aptiora id cõfirmandũ cẽsui.

Quòd aũt nõ possit esse 3908. neq; maior, hac lege declarabimus.

Esto linea e g 3908.

3908
3908

31264
35172
11724

15272464

15272464

24700900

39973364

Quadratum a g.

1

356

2467 | 6

338198 | 3

39973364 | 2

122664 | 2

112

6322. 6323.

Inter hos erit a g.

4970

3908

8878

Linea g d.

1062.

Linea b g.

8878

1062

17756

53268

8878

9428436

7

98

5361

77744 | 1

31858263 | 4

94284356 | 9

63233333 | 1

63222

633

6

2

183

5376

77883 | 1

3188684 | 4

94284369 | 9

6322222 | 1

63222

633

6

1491. 1492.

Inter hos erit g f.

6322. 6323.

7813. 7815.

Inter hos erit a f.

3906½. 3907½.

Int̃ hos erit medietas lineæ a f, scilicet linea a k.

Sed erat linea e g 3908. maior ergo quam 3907½. & ideo multo maior medietate lineæ a f. Non potuit igitur linea e g esse 3908. si saltem debuit esse medietas lineæ a f. Nec poterit esse maior quam 3908. quãto enim crescit linea e g, tanto decrescit corda a f: multo igitur maior redderetur e g quam sit medietas lineæ a f. Non denique poterit esse 3905. si saltem debebit esse q̃rta pars cordæ a f. Sit enim e g 3905. erit per penultimam primi quadratũ a g notum.

3905

3905

19525

35145

11715

15249025

Quadratum e g.

24700900.

39949925.

Quadratum a g.

21 | 6

33875 | 3

39949925 | 2

122864 | 0

112

6320. 6321.

Inter hos erit a g.

Quod autem fit ex b g in g d æquatur ei quod fit a g in g f, & ideo per præambulum linea g f inter duos notos habebit: inde quoque tota corda a f cum eius medietate.

4970

3905

8875

Linea g d.

1065.

Linea b g.

8875

1065

44375

53250

8875

9451875

1

329

6635

7156 | 1

313248 | 4

9451875 | 9

6321111 | 5

63222

633

6

33

665

7164 | 1

31335 | 4

94518759 | 9

63200000 | 5

63222

633

6

1495. 1946.

Inter hos erit g f.

6320. 6321.

7815. 7817.

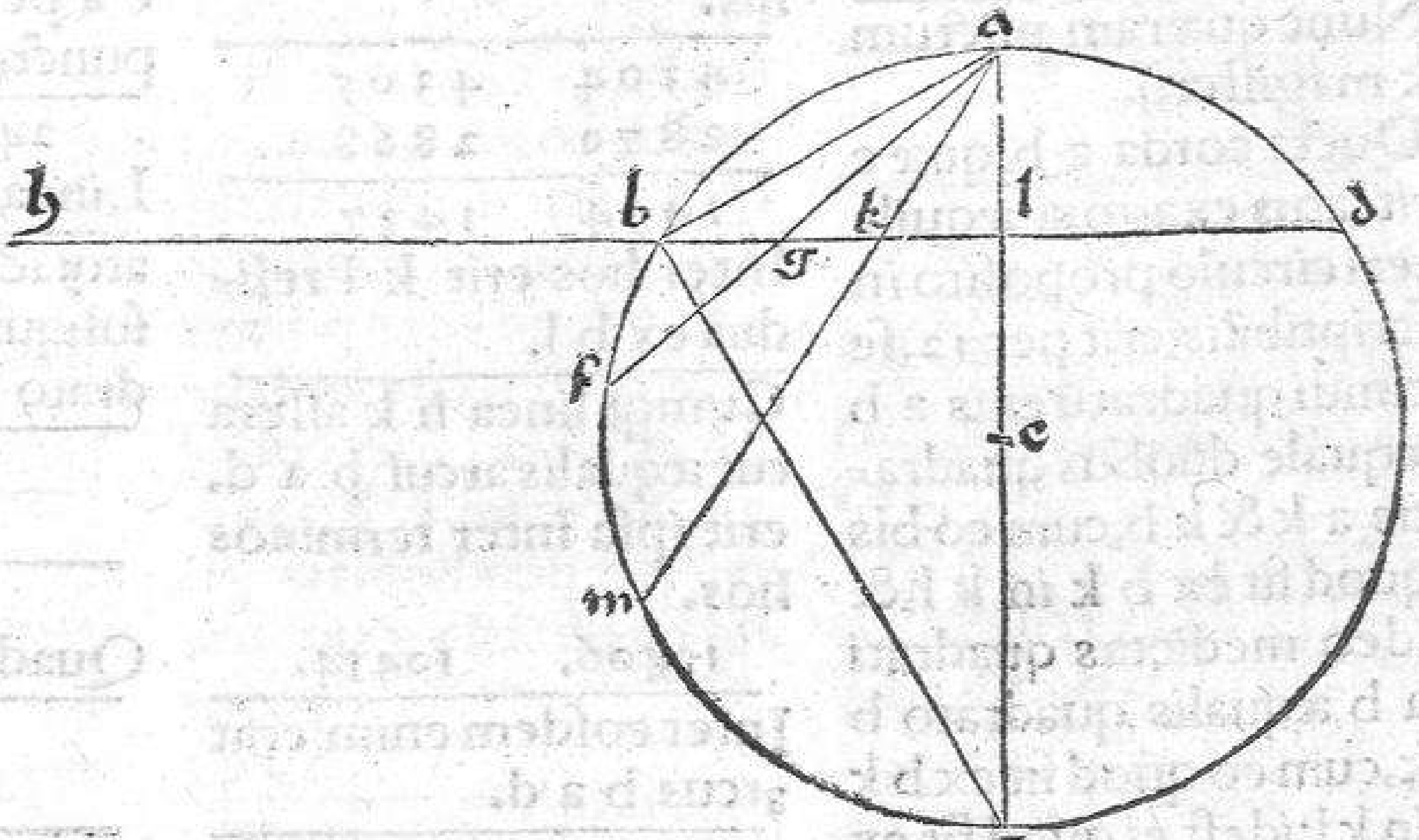
Inter hos erit corda a f.

3907½. 3908½.

Inter hos erit medietas cordæ a f, scilicet linea a k.

Cũ itaque linea e g sit posita

sita 3905. erit ipsa minor ꝙ 3907. sed medietas a f maior est ꝙ 3907. quare linea e g minor erit ꝙ medietas cordæ a f. Non poterit igitur esse 3905. si debebit esse medietas de a f. sed neq; minor, nam quanto linea e g decrescit, tāto a f corda fit maior, & eius etiam medietas maior. Prius autē non potuit esse 3908. neq; maior, quare necessario linea e g inter hos terminos 3905. & 3908. claudetur, si debebit esse quarta pars cordæ a f. Sed linea e g existente inter dictos terminos, ipsaq; existente quarta parte totius e h, quemadmodum supponitur, linea e h necessario maior est semicircumferentia sæpe dicta: quod est contra sententiam eius qui arcum circuli dirigere conabatur. Hæc autem inuentio cæteris plurimis adinuentionibus suis eo abundantior uisa est, quo illæ quidem circumferentiæ totalis aut eius medietati æqualem rectam definire pollicent, hæc uero nō modo totius circumferētiæ, sed & cuiuslibet portionis eius longitudinem in rectum uertere molitur. Quod ut manifestius reddatur, exemplari figuratione utendum censeo.



Circuli a b c d super e cētro lineati, arcus accipiatur b d q̄ntuscūq;, minor tn̄ semicircūferentia, quē subtendat corda sua b d, sagittaq; a l protensa ultra centrū, offendat circumferētiam circuli in pūcto c. erit itaq; a uertex portionis b a d, Sumatur demum in corda b d punctus k, tantum distans per rectam lineam à uertice portionis a, quātum à b altero termino portiōis. Hunc punctum magisterij uocauit uir ille, ꝙ ab eo tanq; radice totū fermè præsens pendeat negocium. Ducatur insuper ex puncto a corda a f, & corda d b directe continuetur usq; ad h, donec h k sit dupla ad cordam a f, & quadrupla ad lineam g k: unde & cordam a f duplam esse lineæ g k consequitur. Asserit inuentor ille lineam rectam h k commensurabilem esse arcui b a d: uidetr̄ uoluisse dicere æqualem. Hoc pacto cuilibet arcui proposito, qui minor est semicircumferentia, æqualem rectam assignare conatur.

Ponamus igitur, exercitij gratia, arcum b a d tertiam partem circumferentiæ: semidiametrum autem e a ut prius 4970. & ideo semicircumferentiam inter hos duos 15610. & 15620. sintq; omnia ut disponuntur & asseruntur.

15610	15620
15610	15620
31220	31240

Inter hos erit tota circūferentia.

10406⅔.	10413⅓.
10406.	10414.

Intr̄ hos erit arcus b a d.

Quærēda est primo corda b d, scilicet latus trianguli æquilateri circulo inscriptibilis, ipsū autem potentialiter triplū ē semidiametro circuli.

4970
4970
347900
4473
1988
24700900

l

24700900
3

74102700

Quadratũ b d siue b c.

165 | 8
145461366 | 6
74102700 | 0
1571 20 | 8
117

8608. 8609.

Inter hos est b d.

4304. 4304.

Inter hos est b l, medietas scilicet cordæ b d.

Nunc quæram pũctum k magisterij.

Ducta corda a b, quæ erit latus exagoni æquilateri circulo proposito inscriptibilis, erit per 12. secundi quadratũ eius a b æquale duobus quadratis a k & k b, cum eo bis quod fit ex b k in k l, & ideo medietas quadrati a b æqualis quadrato b k, cum eo quod fit ex b k in k l: idest ei quod fit ex a k in b l, ponitur enim b k æqualis ipsi k b.

24700900.

112350450.

quod fit ex b k in b l.

733
358
35987
474681 | 2
17335 0450 | 8
4305555 | 6
43000 | 8
433
4

2
245
3512
358937 | 2
4742214 | 8
1733504506 | 6
43044449
43000
433
4

2868. 2870.

Inter hos erit b k. & tantum distat punctus magisterij à uertice portionis.

4304 4305
2870 2868

1434 1437

Inter hos erit k l residua ex b l.

Cumq; linea h k assera tur æqualis arcui b a d. erit ipsa inter terminos hos.

10406. 10414.

Inter eosdem enim erat arcus b a d.

2601 ½. 2603 ½.

Inter hos erit quarta p̃s h k, scilicet ipsa g k.

& ideo inter hos.

2601 2604.

1434. 1437.

4035. 4041.

Inter hos erit g l.

Est autem per 8. sexti a b medio loco proportionalis inter c a & a l.

4970
4970

9940

Linea c a.

1
45
324
1249 | 2
48522 | 4
69247 | 8
2470090 0 | 5
9940000
99444
999
9

Sed nõ erat opus hac diuisiõe, demõstrari enim potest, semidiametrum e a per æqualia secari in puncto l.

2485.

Linea a l.

atq; idcirco quadratũ a l subquadruplum est quadrato e a.

32 12
24700900

6175225

Quadratum a l.

4035
4035

20175
12105
16140

16281225

Quadratum minoris termini g l.

4041
4041

4041
16164
16164

16329681

Quadratum maioris termini g l.

16281225
6175225

22456450

Minor terminus quadrati a g.

16329681
6175225
22504906

Quadratum maioris termini a g.

7
18
818
3933 | 4
88648176 | 7
224884850 | 3
89446 | 8
9

18
398
48715 | 4
69183387 | 7
22504908 | 4
89448 | 3
9

4738. 4744.

Inter hos erit a g.

4304 4305
4041 4035

263 270

Inter illos est b g.

4304 4305
4035 4041

8339 8346

Inter hos est g d.

Quare quod fit ex b g in g d inter duos notos continebitur.

8339
263

25017
50034
16678

2193157

Minor terminus ei9 q̃d ex b g in g d.

8346
270

584220
16692

2253420

Maior terminus eius q̃d ex b g in g d. Illud aũt æquat ei quod sub a g, g f continetur. cumq́ a g sit inter duos notos, erit & g f inter duos notos &c.

1
24
118
75392
39813
8171819 | 4
21931876 | 6
474444 | 2
4744
47

2
3
288
779
5957
36811
67128 | 4
2283420 | 7
473588 | 5
4733
47

462. 476.

Inter hos est g f.

4738. 4744.

5200. 5220.

Inter hos est corda a f.

2600. 2610.

Inter hos erit medietas cordæ a f.

2601. 2604.

Inter hos erat g k.

Quare & g k inter præscriptos erit terminos, scilicet 2600. & 2610. inter quos erat medietas cordæ a f. Incertum igitur adhuc est, an g k sit æqualis medietati cordæ a f, an maior aut minor ea, q̃d hactenus scrutabamur. Id autẽ ex eo uenit, ꝙ terminos nimis distantes assumpsimus, & potissimũ ꝙ 4970. particulæ semidiametri e a nimium grossæ sunt.

Nũc subtiliores ponam ueritatis explorãdæ gratia.

Ponat̃ semidiameter e a particularum 497000. & ob hoc semicircumferentia inter hos 1561000. & 1562000.

1561000. 1562000.
1561000. 1562000.

3122000. 3124000.

Inter hos erit tota circũferentia.

1040666. 1041334

Inter hos erit tertia pars circumferẽtiæ, scilicet arcus b a d.

Quærenda est prius corda b d, latus scilicet triãguli æqlateri circulo inscriptibilis, q̃d quidẽ potentialiter triplum est semidiametro circuli.

247009000000.

quadratũ semidiametri.

3

741027000000.

Quadratum b d.

32
164437 | 8
356288 | 6
1658694775 | 0
145481388649 | 3
741027000000 | 2
18677201664 | 9
1177721
17
1

860829.
860830.

Inter hos est corda b d.

1 2

430414.
430415.

Inter hos est b l, medietas scilicet cordæ b d.

Deinde quæram pũctũ k magisterij, ut antea.

247009000000.

123504500000.

quod fit ex b k in b l.

135
241
822
843
241884 1
35499599 | 2
3598131617 | 8
4742274158 | 6
1235045000000 | 9
43041555555 | 4
430411111 | 2
4304444
43000
433
4

1
22
83
9815
6726
2418 1375
3549593609 | 2
35981927 81 | 8
474227864448 | 6
1235045000000 | 9
43041444444 | 4
430411111 | 3
4304444
43000
433
4

286942.
286944.

Inter hos erit b k.

430414 430415
286944 286942
143470 143473

Inter hos erit k l.

Cũq; linea h k asseratur æqualis arcui b a d, erit ipsa inter hos terminos.

1040666. 1041334.

Inter eosdem enim erat arcus b a d.

260166. 260334.

Inter hos est quarta ps lineæ h k, sc3 linea g k.

260166 260334
143470 143473
403636 403807

Inter hos erit linea g l.

497000.

298500.

Linea a l.

403636
403636
2421816
1210908
2421816
1210908
1614544
162922020496

403807
403807
2826649
3230456
1211421
1615228
163060093249

247009000000.

61752250000.

Quadratũ a l, est enim a l medietas semidiametri e a, & ideo quadratũ eius quarta pars quadrati e a.

162922020496
61752250000
224674270496

Minor terminus quadrati a g.

163060093249
61752250000
224812343249.

Maior terminus quadrati a g.

1
726
1857
977364 | 4
11338578 | 7
3949434189 | 3
68758868372 | 9
2248174270496 | 9
84688 | 8
9479
947
94
9

7
3958
145689 | 4
33319138 | 7
689565356 | 4
224812343249 | 1
84828 | 4
9482 | 3
948
94
9

473998. 474144.

Inter hos erit a g.

430414 430415
403807 403636
26607 26779

Inter hos erit b g.

430414 430415
403636 403807
834050 834222

Inter hos erit g d.

834050
26607
5838350
500430
500430
166810
22191568350

minor terminus eius q̃d fit ex b g in g d,

834222
26779

507998
5839554
5839554
5005332
1668444

22339630938

Maior terminus eius q̄d fit ex b g in g d.

2
4
61
3 1726
464937
8812697
3225842281 | 4
6337964138 | 6
22191588350 | 8
4741444444 | 0
47414444 | 3
474111
4744
47

2
141
6123
582325
3787281 | 4
34894854 | 7
6513714419 | 1
22339630938 | 3
4739988888 | 0
47399999.
473999
4733

46803. 47131.
Inter hos est g f.

473998 474144
46803 47131

520801 521275
Inter hos est corda a f.

260400½. 260637½.
Inť hos est medietas cordæ a f.

260166. 260334.
Inter hos erat linea g k.

Quamobrem linea g k minor existēs q̄ 260334 minor quoq; erit q̄ ille 260400. Sed medietas cordæ a f maior est q̄ 260400. quare linea g k multo minor est q̄ medietas cordæ a f. Ex hypothesi autē linea g k habebatur æqualis ipsi medietati a f. Sic æqualis alicui & minor eodē q̄d est impossibile. Non est ergo linea recta h k æq̄lis arcui b a d.

Posset præterea simile examen fieri, ponēdo arcum b a d decimā partem, aut quintā aut quartā totius circumferentiæ partem, sed quoniam labor plurimus est, & ex cōmemoratis finē eius consecuti sumus, hic nō iniuria quiescendum cēsui.

Venetijs die 29. Iunij.
Anno 1464.

τέλος τούτου πράγματος τοῦ δυσκολωτάτου.

Ιωάννης ὁ γερμανὸς τὰ τῆς ἀληθείας κρυπτὰ πανταχοῦ ζητήσας, ταύτην τῶν ἀριθμῶν διάλεξιν ἐποίησε.

ERRATA RECOGNITI OPERIS.

Pagina 6.linea 5.lege diuideretur.Ibidem linea 36.lege dictarum pro differentiarum.Pagina 7.lin: 15.lege ꝙ si semidiameter. Pagina 11.lin: 5.pro puncto lege puta.Ibidem li: 22.diameter.Pagi: 12.in calce lege releuare.Pagi: 13.li: 15.quadrate.Pagi: 14.li: 41.lege Probatur.Lin: 44.lege & hoc probat prima suppositio.Li: 45.lege maiorem.Pag: 15.li: 16.lege orthogonalis. Lin: 23.pro ac lege aut. Pagi: 22.lin: 38.lege licuit.Pag: 33.lin: 38.lege numeros.Pagi: 34.lin: 35.lege erunt. Pag: 40.li: 21.pro magis lege maius.Pagina: 41.lin: 14.lege sunt.Pag: 45.columna 2.lin: 7.pro e t lege e l.Eadem pag: colũ: 3.lin: 11.lege Similiter.Pag: 46.col: 2.lin: 12.lege prius computatis. Ibidem col: 3.lin: 5.in fine pro o pone 9.Pag: 47.col 3.li: 21.lege 35 14.Pag: 50.li: 12.lege linea t r inter hos duos. Pag: 53.lin: 23.lege superant. Pag 54.col: 1.lin: 16.pro $3\frac{10}{17}$ $3\frac{1}{2}$ lege $3\frac{1}{7}$ $3\frac{10}{71}$.Ibidem lin: penultima pro 347009.lege 247009.Lin: 39.lege circulo a b g dato, delendo d.Pag 64.lin: 7.pro 6167925625.lege 6197625625.Pagina 67.col: 3.lin: 7.ab infra scandendo pro 196656 lege 296656.Pag: 68.col: 1.lin: 6.dele o in primo loco.Ibidem lin: 5.ascendendo lege fit.Ibidem col: 3.lin: 16 ꝓ 27.lege 72.Pag: 69.col: 2.li: 12.ascẽdendo pro 37085.pone 37082. Pagina 72.col: 1.lin: 11.ascendendo pro 470360.pone 478360. Ibidẽ col: 3.lin: 10.ascendendo pro 3134.pone 3234.Pag: 74.col: 2.lin: 9.pro 2088.pone 2080.Lin: 11.pro 27872.pone 27875.Lin: 23.pro 131417.pone 131517.Pag: 76.col 3.li: ascendendo 12.pro 60992.lege 50992. Pagina: 77: col: 3.lin: 19.ascẽdẽdo pro 167298.lege 167398. Lin: 14.ascendẽdo pro 538459.pone 538479.Ibidẽ col: 3.lin: 9.ascẽ: ꝓ 55800.pone 55804.Pag.79.col: 3 li: 20.ꝓ 43974.pone 43975. Pag.81.col: 1.lin: 12 ascen: pro 33860.pone 33806.Pag: 88.col.2.li.penult.lege fit ex a g.Pag.90.col.1.li.30.lege b k in b l,& seq.lege a k æqualis.

EXCVDEBATVR NORIMBERGAE PER
IOH. PETREIVM ANNO
M. D. XXXIII.
MENSE AVGVSTO.