del Collego de la Compa de Jhs de la Concepcon de Seg. Pbz.

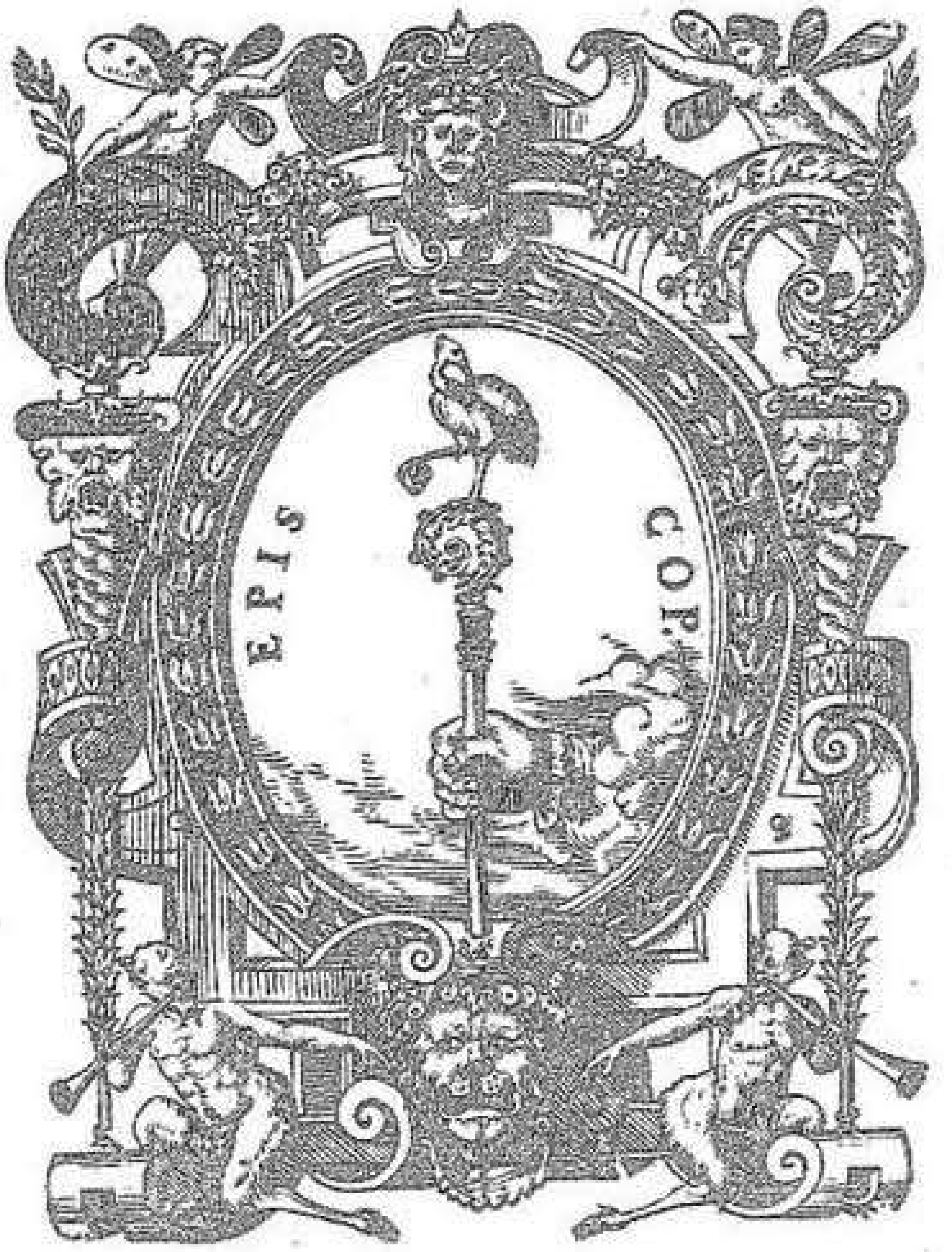
DIOPHANTI
ALEXANDRINI
Rerum Arithmeticarum Libri ſex,

quorũ primi duo adiecta habent SCHOLIA,
MAXIMI (ut coniectura eſt)
PLANVDIS.

Item LIBER DE NVMERIS POLYGONIS
ſeu Multiangulis.

Opus incomparabile, ueræ Arithmeticæ Logiſticæ perfectionem continens, paucis adhuc uiſum.

A GVIL. XYLANDRO Auguſtano incredibili labore
Latinè redditum, & COMMENTARIIS explanatum, inq; lucem editum,
AD
Illuſtriſs. Principẽ LVDOVICVM *Vuirtembergenſem.*



BASILEAE
PER EVSEBIVM EPISCOPIVM,
& NICOLAI Fr. hæredes.
M D LXXV.

AD ILLVSTRISSIMVM AC SVMMAE EXSPECTATIONIS PRINCIPEM LVDOVICVM, VVIRTEMBERGICVM Teckiumq; ducem, comitem Montpelgardicum, &c.

In DIOPHANTI *Arithmetica à ſe latinè reddita, & tandem edita,*

GVILIELMI XYLANDRI
Auguſtani
PRAEFATIO.

OFFERIMVS *numeros, numeri ſunt principe digni.* Liceat enim mihi apud te, Illuſtriſſime ac Magnificentiſſime Princeps, hac uti parodia: cuius ſententiam eſſe ueram, & pręſens teſtabitur ætas, & (ſi qua erit) poſteritas. Non ego damnauerim eorum inſtitutum, qui Principum, quibus ſuas lucubrationes conſecrant, laudes prædicant, etiã ab atauorum atauis repetitas. Hoc mihi dabunt æqui, ut more meo mihi uti in dedicationib. liceat. Scilicet ego te & tuos, ac ueſtra illuſtria facta prædicem. quaſi uel buccinatores gloriæ ueſtræ idonei deſint, uel TVBINGA tua ranas alat ſeriphias, aut me anſerem obturbare oloribus oporteat. Itaque huius argumenti tractationem, ne aliena inuadam, remitto ad eos quib. debetur. Hoc agamus. Tametſi non multum refert, ad tuam Illuſtriſſime Princeps gloriam, quanti te ipſe homuncio & litterator faciam: tamen mea intereſt, bonos ſcire quis in te obſeruando ſim, & quid me tibi debere fatear, tum quid à te exſpectem, nullo meo admodum merito, ſed uirtute fretus tua. Ergo quod adhuc facere ſum ſolitus, citra adulationem & inanem rerum iactantiam tibi, Princeps Illuſtriſſime, paucis explicabo, & cur te munere hoc meo condecorãdum exiſtimauerim, & quid rei ſit quod tibi offero: poſtremò quem hinc fructum exſpectem. Ac primò quidem conſtat Deum, à quo habemus quidquid omnino habemus boni, noſtræ gratitudini etiam ineffabilia præmia propoſuiſſe. Et ueteres illi ſapientes, inter quos Euripidem nequaquam ultimum colloco, quaſi per nubes Lunam à coitu obſeruantes, idipſum tamen utcunque contuiti teſtatum fecerunt, quando gaudio affici deos enunciârunt ob habitum eis ab hominibus honorem. Iam te, tuiq́ue ſimiles, Dei in terra uicarios eſſe non neſcis. Quo fit, ut adducar in ſpem certiſſimam, meam tibi pietatem, gratitudinem, ſtudiumq́; amplificandæ rei litterariæ, quod ad nominis tui gloriam, glorięque ad poſteros etiam (ſi qui erunt) propagationem nonnihil cōducat, accepta fore. Itaque pergo. Egreſſum me è ſchola triuiali (ut loquar uſitatè) Auguſtana, Tubinga tua excepit: cum quidem (eſt enim fatendum) quid rei eſſet philoſophia, nondum cognouiſſem. Tubingæ quinquennium ferme integrum exegi: qua conditione, & quibus caſibus iactatus, alio loco exponetur. Huc id propriè facit, quod ex animo fateor, & publicè conſtare uolo: meæ eruditionis adoleſcentiam & iuuentutem Tubingæ tuæ deberi, & quantulacunq; eſt illa, neque me eius pœnitet, neque (quod exiſtimare poſſim) Tubingam Xylandri alumni ſui piget aut pigere debet. Enimuerò quandoquidem ad te legitima ſucceſſione aui patrisq́ue tui, Principum laudatiſſimæ memoriæ, bona imperiumq́; peruenerunt: non uideo, quid cauſæ excogitari poſſit, cur non & eorum clientes te patronum ſuum agnoſcant. Tubingenſia tua ſunt, deriuata in te maiorum in Academia ea tutanda amplificandaque cura, quam te ſeriò ſuſcepiſſe, & gnauiter proſequi accipimus. Ego qui Tubingæ tuæ permultum debeo, adhuc ſemper me in ære Illuſtriſſimæ tuæ familiæ eſſe, non modò agnoui, ſed etiam affirmaui. Ne quid alienum meo ingenio faciam: hoc eſt, ne uel aduler, uel ſimulem: planè & conceptis uerbis dicam quod res eſt, Gratias ego pro acceptis apud tuos beneficijs tibi ago, Princeps humaniſſime, quantas poſſum, meæq́ue gratitudinis hoc publicum monimentum tibi demiſſiſſimo obſequendi ſtudio ac reuerentia conſecro. quod quanti facere debeas, docti (quorum copia abundas) facilè tibi explicabunt. Dicam tamen ipſe ea, quæ in mentem alijs uenire uix (puto) poſſunt. À multis annis ego mathematicarum uerarum ſcientiarum

tiarum

tiarum (Geometriam dico, Arithmeticā, & quæ propriè dicitur Coſmographiam) ita flagraui, ut docere etiam conarer alios ea, quæ diſcendi mihi neceſſitatem iniunxeram. Huius rei teſtimonia exſtant in meis lucubrationibus, ijs præſertim, quas iniquitate temporum circumuentus abſoluere, & edere nondum potui. Itaque cum apud Suidam de Arithmetica Diophanti aliquid obſeruauiſſem commemoratum, amatores imitatus, adſpectum ſaltem eius operis exoptaui. Inueni deinde tanquam exſtantis in bibliothecis Italicis, ſibiq́; uiſi mentionem à Regiomontano, (cuius etiam nominis memoriam ueneror) factam. Sed cùm ederet nemo: cepi deſideriū hoc paulatim in animo cōſopire, & eorum quos conſequi poteram Arithmeticorum librorum cognitione, & meditationibus noſtris ſepelire. *Veritatis* porrò apud me eſt autoritas, ut ei coniunctum etiam cum dedecore meo teſtimoniū lubentiſſimè perhibeam. Quod Coſſica ſeu Algebrica (cum his enim reliqua comparata, id ſunt quod umbræ Homericę in Necya ad animam Tireſiæ) ea ergo quòd non aſſequebar modò, quanquam mutis duntaxat uſus pręceptoribus cætera αὐτοδίδακτος, ſed & augere, uariare, adeoq́; corrigere in loco didiciſſem, quæ ſummi & fideliſſimi in docendo uiri Chriſtifer Rodolphus Sileſius, Micaelus Stifelius, Cardanus, Nonius, alijq́; litteris mandauerant: incidi in οἴησιν, ἱερὰν νόσον, ut ſcitè appellauit Heraclitus ſapientior multis alijs philoſophis, hoc eſt, in Arithmetica, & uera Logiſtica, putaui me eſſe aliquid: itaq́; de me paſſim etiam à multis, ijsq́ue doctis uiris iudicatū fuit, me non de grege Arithmeticum eſſe. Verùm ubi primùm in Diophantea incidi: ita me recta ratio circumegit, ut flendúſne mihi ipſi anteà, an uerò ridendus fuiſſem, haud iniuria dubitauerim. Operæprecium eſt hoc loco & meam inſcitiam inuulgare, & Diophātei operis, quod mihi nebuloſam iſtam caliginem ab oculis deterſit, immò eos in cœnum barbaricum defoſſos eleuauit & repurgauit, guſtum aliquem exhibere. Surdorum ego numerorum tractationem ita tenebam, ut etiam addere aliorum inuentis aliquid non pœnitendum auderem. atque id quidem in rebus arithmeticis magnum aliquid habetur, & difficultas iſtarum rerum multos à mathematib. deterret. Quanto autem hoc eſt præclarius, in ijs problematis, quæ ſurdis etiam numeris uix poſſe uidentur explicari, rem eò deducere, ut quaſi ſolum arithmeticum uertere iuſſi obſurdeſcant illi planè, & ne mentio quidem eorum in tractatione ingenioſiſſimarum quæſtionū admittatur. Tum illa rectanguli trianguli proprietas, cuius demonſtratio Pythagoræ adſcribitur, cui non uiſa eſt mathematico diuina? At cum Diophanteis comparata conſiderationibus, rudimētū uidebitur. nā datis quibuſcunq; duobus numeris, triāguli rectanguli latera dare, unde Thaſus bonorū mathematicorū exſiſtit, quid nō habet & facilitatis & ſubtilitatis? Itaq; adſentior Plutarcho noſtro, grauiſſimo autori, q̃ ſacrificiū illud Pythagoreū non trianguli rectanguli laterum facultati excogitatæ, ſed rationi, datis duabus figuris inæqualibus & diſſimilibus figuram conſtituendi quæ alteri iſtarum æqualis, alteri ſimilis exſiſtat, inuentæ accommodat, quod apud Euclidem libri ſexti propoſ. 25. demonſtratur. Taceo miras quadratorum aliorumq́ue numerorum proprietates, & progreſſionum, aliaq́ue ſexcenta, quæ prȩfationis modus excludit, & ex ipſo ſunt cognoſcenda opere. Memini me aliquando legere, Leonardum quendam Piſanum de quadratis numeris ſcripſiſſe librum. non dubito, quin ex noſtro tranſtulerit Diophanto. & ex eius libris, quos nunc edimus, immenſum texi opus ac theſaurum id genus rerum arithmeticarum, uel noſtri commentarij eſſe argumento poterunt. Sanè tredecim libri Arithmeticæ Diophanti ab alijs perhibentur exſtare in bibliotheca Vaticana: quos Regiomontanus ille uiderit. Sed de ijs neque quod ſperem habeo, neque quod iudicem. Noſtri ſunt ſex de rebus arithmeticis, quorum duo primi ſcholia Græca habent adiecta, quæ Maximi Planudis eſſe creduntur. & probabilius id mihi eo fit, quòd ſub eius nomine quædam logiſtica codici ſunt adiecta, quo nos uſi ſumus. Non ſum neſcius Hypateiam philoſopham Alexandrinam in Diophantum eſſe commentatam. Sed profectò ſi ea tanta fuit, quantam Suidas & alij perhibent, iſtæ annotationes eam autorem non agnoſcunt. de quibus quid ſenſerim, meo more liberè dixi ſuis locis. Reliqui quatuor, & alius de numeris multiangulis inſcriptus, ſcholijs carēt. quod æquiſſimo animo & nos tulimus, & lector feret, cui noſtris in

eos

eos commẽtarijs uti licebit. Id uerò mihi accidit durũ & uix inſuperabile incõmodum, quòd mirificè deprauata omnia inueni, cùm neq; ꝓblematũ expoſitio interdũ integra eſſet, ac paſſim numeri (in quibus ſita omnia eſſe in hoc argumento, quis ignorat?) tam problematũ quàm ſolutionũ ſiue explicationũ corruptiſſimi. Non pudebit me ingenuè fateri, qualem me heic geſſerim. Audacter, & ſummo cum feruore potius quàm alacritate animi opus ipſum initio ſum aggreſſus, laborq́; mihi omnis uoluptati fuit. tãtus eſt meus rerũ arithmeticarũ amor. quin & gratiã magnã me apud omnes liberaliũ ſcientiarum amatores ac patronos initurum, & præclarè de rep. litteraria meriturum intelligebam, eamq́; rem mihi laudi (quam à bonis profectam nemo prudens aſpernatur) gloriæq́;, fortaſſe etiam emolumento fore ſperabam. Progreſſus aliquantulum, in ſalebras incidi: quæ tantum abeſt ut alacritatẽ meam retuderint, ut etiã animos mihi addiderint. neq; enim mihi nouũ aut inſolens eſt aduerſus librariorũ incuriã certamen, & hac in re militaui, (ut Horatij noſtri uerbis utar) non ſine gloria. qđ me nõ arrogãter dicere, Dio, Plutarchus, Strabo, Stephanusq́; noſtri teſtantur. Sed cum mox in ipſum pelagus monſtris ſcatens me curſus abripuit: non deſpondi equidem animum, neque manus dedi, ſed tamen ſæpius ad orã unde ſoluiſſem reſpexi, quàm portum in quem eſſet euadendum cogitando proſpicerem, depræhendiq́; non minus uerè quàm eleganter ea ceciniſſe Alcęum, quæ (ſi poſſum) Latinè in hac quaſi uotiua mea tabula ſcribam.

Qui uela uentis uult dare, dum licet,
Cautus futuri præuideat modum
Curſus. mare ingreſſus, marino
Nauiget arbitrio neceſſe eſt.

Sanè qđ de Echeneide piſce fertur, eũ nauim cui ſe adplicet remorari, pœnè credibile fecit mihi mea cymba tot mẽdorũ remoris retardata. Expediui tamẽ me ita, ut facilè omnes mediocri de his rebus iudicio præditi, intellecturi ſint incredibilẽ me laborẽ & ęrumnas difficilimas ſuperaſſe: pudore etiam ſtimulatũ oneris quod ultrò mihi impoſuiſſem, nõ perferẽdi. Paucula quędã non planè explicata, ſtudio & certis de cauſis in alium locum reiecimus. Opus quidem ipſum ita abſoluimus, ut neque eius nos pudere debeat, & Arithmeticæ Logiſticesq́ue ſtudioſi nobis ſe plurimum debere ſint haud dubiè profeſſuri. Neq; prætereundum eſt qua occaſione atq; unde Diophantei codicis copiam ſim conſecutus. Cum menſe Octobri, anni à repręſentato ſeruatore mũdi CIↃ IↃ LXXI. Vuittebergam ueniſſem, ſingularem eius nobiliſſimæ Academiæ in me humanitatem expertus, quam hîc non eſt locus prædicandi, neq; ſatis pro merito poteſt prædicari: inter alia in colloquium de reb. mathematicis ueni cũ clariſſimis ac doctiſſimis uiris, ſummis mathematicis D. Sebaſtiano Theodorico, & M. Vuolfgango Schulero, quos honoris cauſa & obſeruantiæ nomino. Ibi mihi aliquotij paginas Diophanti Græcas inſpiciendas dederunt, non diſſimulato eius, ad quem is codex pertineret nomine. Is eſt ampliſſimus uir, ſummo apud Polonos loco natus, uirtute, doctrina humanitateq́; inter populares ſuos facilè princeps, Andreas Dudicius Sbardellatus, hoc tempore Imperatoris Romanorum apud Polonos orator, quē, ut ipſius amplitudo, inq́; remp. litterariam merita poſtulant, honorificentiſſimè nominatũ uolo. Ei ego iã antè à ſtudio & peritia arithmeticæ ita fuerã cõmendatus, ut mutuas etiã de iſto argumēto litteras dederimus acceperimuſq́;: & ſummopere fui ab eo, tãto uiro, in harũ ſtudio rerũ confirmatus. Vitteberga proficiſcēs, unũ problema Diophãteum exſcripſi, quo me in itinere oblectarē. cuius cũ explicationē perſcripſiſſem, Lipſiæ id Simoni Simonio Lucenſi, philoſopho doctiſſimo & acutiſſimo, ac medico eximio, ꝗ mandato Illuſtriſſimi Auguſti Saxoniæ electoris, &c. ibi docet, & humaniſſimè me hoſpitio ſuo exceptũ habuit, oſtēdi, ſimulq́; expoſui, me ſi ita Dudicio uideretur, Latinã iſtã Diophanti arithmeticã facturũ. placuitq́;, ut ad eũ de iſto negocio ſcriberemus. Paucis pòſt mēſib. Dudicius ad me Diophãtum miſit, meq́; ut promiſſa implerē, maiorē in modũ cohortatus eſt. cuius ego nõ modò libēter autoritatē ſum ſecutus, ſed liberalitatē ipſius hãc, quòd mea opera Diophantũ reip. litterariæ donauit, ut facinus uerè heroicũ, ac magnificũ tanti æſtimo, æſtimatũq́; iri & abs te Illuſtriſſime Princeps, & ab omnibus alijs rerũ intelligentib. arbitror, ut nõ minori, ſed maiori etiã gloriæ ei hæc donatio, quàm mihi ipſi elucubratio ſit futura.

Neq;

Neq; exigua debetur clariſſimo Simonio gratia, qui autor ac ſuaſor Dudicio fuit mittendi ad nos ſui Diophanti. Tibi uerò, Illuſtriſſime Princeps, etſi ea diuinitus obtigerunt, ut ad ueram ſolidamque gloriam tibi à meæ conditionis hominibus nulla ſit optanda aut ſperanda gloriæ acceſsio, aut nominis amplificatio: non debes tamẽ huius noſtri Operis patrocinium à tua maieſtate alienum eaúe indignum putare. Habes tu quidem TVBINGAE præcipuè, tum ditionis tuę alijs etiam in locis uiros doctrina illuſtres: habes, ut unum loco omnium appellem, D. Iacobum Scheckium, principem huius ſęculi philoſophorum, præceptorem meum, & cui merito ipſius, idq́; candidè, quidquid in Ariſtotelea profeci philoſophia (quantulumcunq; id ſit, non omnino tamen pœnitendum) acceptum refero. qui uir uel ſolus ornando Principi & patriæ ſufficere poterat. Non tamen ideò noſtrum tuę Amplitudini debet ſordere ſtudium, neq; nos uel alieni prorſus, uel inepti planè ad celebrationem inclyti nominis tui exiſtimandi ſumus. Res quidem quæ hoc noſtro opere tractatur, tanta eſt, ut eius dignitas omnem ſuperet orationem. Eſt enim Arithmetica omnium mathematicarum ſcientiarũ, quas Xenocratem ſummum illum & ſeueriſſimum philoſophum anſas ſapientiæ appellaſſe legimus, dux & interpres, à qua in humanæ uitæ uſus quæ & quanta propagentur adiumenta, etiam uulgo non eſt obſcurum. Verùm alio loco à nobis mathematicarum ſcientiarum dignitas, utilitas, & neceſsitas eſt copioſè demonſtrata, & ignauorum, ingratorumq́; calumniæ refutatæ. neque conuenit, Tuam Celſitudinem à me prolixiore oratione detineri. Quem autem ego fructum huius mei & operis & facti ſperem, paucis aperiam. Aliter me ſperare auita tua indoles, uirtus, & humanitas non ſinunt, quàm hoc litterarium munus tibi fore acceptiſſimum, teq; pro tua bonitate & liberalitate haud grauatè eius tutelam ſuſcepturum, & nos in tuorum clientum numerum benignè adſcripturum. Hoc non modò tibi Princeps Illuſtriſſime, honorificum erit, atque glorioſum: ſed te labores noſtros approbante, arithmeticæ ſtudium cùm alibi, tum in tua Academia & Gymnaſijs, excitabitur, cõfirmabitur, prouehetur, & ad perfectam eius ſcientiam multi tuis auſpicijs, noſtro labore

bore perducti, magnam hac re tuis in remp. beneficijs acceſſionem factam eſſe gratiſſima commemoratione prædicabunt. Deum ex animo precor, ut illuſtriſſimam tuam Celſitudinem, ſpiritu ſuo gubernet; omniaq; proſpera largiatur, & ſub umbra alarum ſuarum te ac tuos perpetuò protegat.
Vale. Heidelberga. poſtrid. Eidus Sextiles.
CIↃ IↃ LXXIV.

T. Illuſtriſs. Celſit.

Obſeruantiſsimus

M. Guilielmus Xylander Auguſtanus, publicus philoſophiæ Ariſtoteleæ in ſchola Heidelbergenſi doctor.

DIOPHANTI ALEXANDRINI RERVM ARITHMETICARVM LIBER PRIMVS,

Guilielmo Xylandro Auguſtano interprete.

CVM animaduerterem te, obſeruandiſſime mihi Dionyſi, ſtudio diſcēdi explicationem quæſtionum earum quæ in numeris proponuntur teneri; aggreſſus ſum eius rei uiā rationemq́; fabricari; ex ipſiſq́; fundamentis, quibus tota res nititur, initio petito naturam ac uim numerorum conſtituere. Quod negocium ut uideatur fortaſſe difficilius (quippe ignotum adhuc) cùm animi incipientium ad bonam de re dextrè conficiēda ſpem concipiendum nequaquam ſint procliues: tamen cùm tua alacritas, tum mea demonſtratio efficiet, ut facilè id cōpræhendas. celeriter enim addiſcunt, quorum ad diſcendi cupiditatem doctrina accedit. Verùm etiam præter hæc, intelligēti tibi omnes numeros compoſitos eſſe è quadā unitatum multitudine: liquet eorum in infinitū progredi naturā. Iam cùm in his quidam ſint quadrati, qui fiūt numero aliquo in ſe multiplicato, qui numerus latus quadrati dicitur; aliqui cubi, qui exſiſtunt quadratis in ſua multiplicatis latera; alij rurſus quadratoquadrati, qui gignuntur quadratis in ſeipſos ductis; nonnulli quadratocubi, quos quadrata in cubos ab eodem profectos latere multiplicata procreant; quidā denique cubocubi, qui cubis in ſeipſos ductis naſcuntur: uſu uenit, ut ex horum uel compoſitione, uel quo præſtant alij alijs, uel multiplicatione uel ratione inter ſe, aut uniuſcuiuſq; ſingulorum'ue ad ſua latera, plurimæ nectātur arithmeticæ quęſtiones, quæ ſoluantur tamen, ſi ea quam commonſtrabimus uia incedas.

SCHOLION.

Exemplo ſit numerus 3. Quadratus 9. Nam 3. in ſe multiplicatus hunc facit: & 3. eſt latus quadrati 9. Cubus eſt 27. nam 3. in quadratum à ſe procreatum multiplicatus, gignit 27. Quadratoquadratum eſt 81. nam 9. quadratus in ſeipſum (quod idem eſt ac ſi dicas 3. numerus in cubum 27.) ductus eum producit. Quadratocubus eſt 243. quippe 9. quadratus in cubum 27. (idem eſt ſi dicas numerus 3. in quadratoquadratum 81.) multiplicatus eum conficit. Cubocubus eſt 729. nam cubus 27. in ſeipſum (idem eſt ſi dicas quadratus 9. in quadratoquadratum 81. uel 3. numerus in quadratocubum 243.) multiplicatus eum procreat.

Statutum porrò receptumq́; eſt, ut quiſque horum numerorum breuiorem nactus denominationem, pro elemento arithmeticæ conſiderationis habeatur. Appellatur ergo quadratus Facultas: nota eius Q. quæ cuiuis quadrato numero uel ſuperſcribitur uel adſcribitur; quod de alijs omnibus notis intelligi uolo. Cubo ſuū nomen eſt, nota C. Qui quadrato in ſe multiplicato fit, Quadratoquadratum dicitur, nota eius Q Q. Qui fit quadrato in cubum, qui ab eodem latere eſt profectus, ducto, Quadratocubus nominatur: nota eius Q C. Qui ex cubo in ſe ducto naſcitur, Cubocubus uocetur: nota eius CC. Cui nulla harū proprietatū obtigit, ſed cōſtat multitudine unitatum, Rationis expers uocatur: nota eius N. Eſt & aliud ſignū immutabile definitorum, unitas: nota eius ſit V.

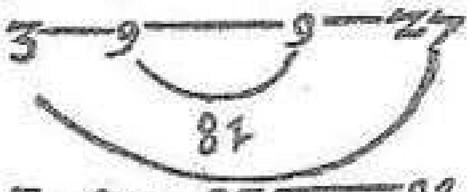
SCHOLION.

Horum hæc eſt expoſitio.

N.	Q.	C.	QQ.	QC.	CC.
3.	9.	27.	81.	243.	729.

Quadratum porrò ſic fit $^{3}\underset{9}{\overline{\qquad}}{}^{3}$. *cubus* $^{3}\underset{27}{\overline{\qquad}}{}^{9}$.

Quadratoquadratus



Quadratocubus

Cubocubus

De his numeris ſimplices ſunt, quod ad nomen attinet, N. Q. & C. compoſiti Q Q. Q C. & C C. Ac ſimplicibus quidem uel in ſeipſos, uel inuicem, uel in compoſitos multiplicatis, cùm ſimplices tum compoſiti producuntur numeri. Verbi gratia 3. numerus in ſe ductus, ſimplicem ducit 9. Q. & in hunc ſimplicem ductus, 27 C gignit ſimplicem. rurſus in hunc, procreat 81 Q Q. compoſitum uidelicet. idem in alijs depræhendere licet. Atq; hæc eſt ſimplicium ratio. At uerò compoſiti neq; in ſe neq; in alios multiplicati numeros quorum exſtet nomen producunt. Etſi enim 81. Q Q. compoſitum in ſeipſum multiplicans 6561. produco: tamen huic numero aliud quod tribuam nomen haud habeo, niſi quod ipſum quoq; Quadratoquadratum appello. heic enim 81. accipio pro quadrato, 9. pro numero. atq; eadem eſt reliquorum conditio.

Enimuero ſicut partes totius unius alicuius certæ à numeris certis ſuam habent denominationem, iisq; ſunt cognomines: (etenim à ternario triens, à quaternario quadrans, ab alijs numeris aliæ totius partes ſuum nomen ducunt) ita nunc quoq; denominatis numeris idem congruit, ut ab ipſorum denominatione partis quoq; nomẽ deriuetur. numeri ſcilicet à numero, quadrati à quadrato, cubi à cubo, quadratoquadrati à quadratiquadrato, quadraticubi à quadraticubo, cubocubi à cubocubo. Harum partium adijciatur cuiuſque numero nota, quæ ſpeciem à ſpecie diſtinguat.

SCHOLION.

Numerus in exemplo ſuprà propoſito fuit 3. Ergò triens unitatis, quod ſcribitur $\frac{1}{3}$. pars erit ab ipſo numero nomen deducens, idemq; de alijs deinceps ſentiendum eſt. Nona unitatis pars, $\frac{1}{9}$. à quadrato, qui eſt 9. ſuam denominationem trahet. unitatis pars uigeſimaſeptima, $\frac{1}{27}$. à cubo 27. denominabitur. octogeſimaprima unitatis pars, $\frac{1}{81}$. à quadratiquadrato 81. unitatis pars ducẽteſimaquadrageſimatertia, $\frac{1}{243}$. à quadratocubo 243. pars unitatis ſeptingenteſima undetrigeſima, $\frac{1}{729}$. à cubocubo 729.

XYLANDRI.

Locus hic Latinè non poteſt exprimi, ut uerba uerbis conſentiant. Sed hæc eſt Diophanti ſententia. Vnitas, quatenus totum & σύμολον intelligitur, non ςιγμὴ ἄθετος (qua de re alio loco diſſerui copioſius) partes habet certorum numerorum cognomines. puta, ſextans à ſenario numero nomen habet, triens à ternario, &c. Ita etiam certæ partes (minutias, fractionésue appellant) unitatis phyſicæ huius, à quadrato, cubo, reliquis denominationem accipiunt. Nam $\frac{1}{27}$. minutia eſt cubica, cùm 27. ſit cubus. & in Algebrico opere ſæpiſsimè huiuſmodi minutiarum eſt maximus uſus: ut ſuis locis patebit. Cætera ante primi problematis tractationem illuſtrantur omnia in mea Algebra. quod hîc, obſcuritas ne quem deterreret, obiter monẽdum Lectorẽ duxi. In Græco pro παρομοίως lege παρωνύμως.

Multiplicatio numerorũ denominatorũ.

Proinde cùm tibi ſingulas numerorũ denominationes expoſuerim, ad earũ multiplicationes me confero. quę tibi facilè patebunt, cùm per ipſam nominum impoſitionem ferè ſint iam antè declaratę. Ergo numerus in numerũ multiplicatus, quadratum producit, in quadratum, cubum: in cubum, quadratoquadratum: in hunc, quadratocubum: inq; hunc ductus, cubocubum. Quadratum in quadratum ſi multiplices, gignetur quadratoquadratus: ſi in cubum, quadratocubum: ſi in quadratoquadratum, cubicubũ. Cubus in cubum ductus, cubicubum producit.

SCHOLIA.

Numerus in numerum ductus, quadratum efficit. Vt 3. in ſe, 9.
Numerus in quadratum, cubum procreat. ut 3 in 9, 27.
Numerus in cubum, quadratiquadratum: ut 3 in 27, 81.
Numerus in Q Q, producit Q C. ut 3 in 81, 243.
Numerus in Q C, producit CC. ut 3 in 243, 729.
Q in Q multiplicatus, gignit Q Q. ut 9 in ſe, 81.
Q in C. mult. gignit Q C. ut 9. in 27, 243.
Q in Q Q multipli. gignit CC. ut 9 in 81, 729.
C in C multipl. gignit CC. ut 27 in ſe, 729.

Sciendum hoc loco, non quemuis numerum in quemuis numerum, quadratum, cubúmue eſſe multiplicandum, ut alia numeri forma exſiſtat: ſed ſi N in N, aut Q in Q, inter ſe ſcilicet, multiplices. Alioqui ſi numerum 4 in alium numerum, utpote 5, ducas, non quadratus, ſed ſimpliciter numerus creabitur 20. Item ſi 9 Q. multiplices per 16 Q. non quadratiquadratus, ſed ſimpliciter quadratus fiet 144., cuius latus 12. Quando autem aliam ſpeciem in aliam uoles multiplicare, ea in ortam ab eodem numero ducenda eſt, puta numerus in quadratum aut cubum, uel rur-

ſus Q in C aut Q Q. Nam ſi 3. numerum in 9 quadratum ab eo procreatum ducas, cubus exſiſtet 27. non item, in alium quadratum. nam ſi 3 in 4 quadratum multiplices, 12 producetur, qui cubus non eſt. Item ſi 9 Q in C ab eodem ortum numero ducas, fiet QC 243. ſi in alium, non item: nam ſi in binarij cubum, qui eſt 8, ducas, exſiſtet 72, qui cubus non eſt. Ergo quiuis numerus in quemuis multiplicatus, omnino numerum procreat: in ſeipſum uerò, aut ſui multiplices, qui denominationem cum quadratis ab unitate progredientibus communem habeant, quadratum. Nam cum ab unitate progredientes ordine quadrati numeri ſint, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 ac deinceps: & unitas æqualitatis rationem obtineat, propter unitatem, utpote primum quadratum, omnis numerus in ſui æqualem ductus, quadratum gignit. ut 2 in 2, 4. propter ſecundum autem quadratum, qui eſt 4, omnis numerus in quadruplum ſui multiplicatus, quadratum procreat. ut 2 in 8, 16. propter tertium, nimirum 9, omnis numerus in nouencuplum ſuum ductus, quadratum producit, ut 2 in 18, 36. & ſic deinceps. Similiter quiuis numerus nullum alium in quadratum multiplicatus, unquam cubum producet, niſi in eum duntaxat, qui ab ipſo eſt ortus. Sic 2 in 4 quadratum ſuum ductus, cubum 8 procreat, & 3 in Q ſuum 9. facit C 27. itaq; deinceps reliqui. Itidem quiuis numerus in ſolum à ſe propagatum cubum ductus, quadratiquadratum gignit, ut 3 in 27 facit 81. rurſumq; in ſolum eum cuius ipſe latus eſt quadratiquadratum ductus, quadratocubum efficit, ut 3 in 81 facit 243. ac rurſus in ſolum à ſe ortum quadraticubum multiplicatus, cubocubum producit, ut 3 in 243, facit 729. neq; ullo modo aliter fiet. Quadratus porrò quiuis in quemuis quadratum ductus, quadratum gignit: in ſeipſum uerò, etiam quadratiquadratum, 4 nempe in 9, facit 36. & in 16, 64: itemq; 9 in 16, 144, productis ubique quadratis. ſed 4 in ſe, facit 16: & 9 in ſe, 81, qui ſunt Q Q. Quiuis quadratus in ſolum ab eodem propagatum latere cubum ductus, QC producit. ut 9 in 27 facit 243. & in ſolum ab eodem latere productum Q Q ductus, CC facit. ut 9 in 81 facit 729. Omnis cubus in cubum ductus, cubum gignit: in ſe uerò, etiam cubicubum. nam 8 C in 27 C, procreat 216 C, cuius latus 6. idem 8 in 64 (cubum lateris 4) 512 facit, cubum cuius latus 8. In ſe uerò ducti cubus 8 facit CC 64, C 27 facit 729 CC. Atq; hi quidem CC omnes etiam ſunt, quadrati: non item ij cubi, qui tantùm C in C ducto ſiunt. Præterea id quoq; ſciendum eſt, dictorum numerorum quoſdam in diuerſis formis ſpectari. Verbi gratia 16 & numerus eſt, ſiquidem ex eo quadratũ procreare licet: & quadratus eſt lateris 4, & quadratiquadratus lateris 2. Inſuper 64 ipſe quoq; numerus eſt, utpote latus quadrati ſui. Eſt & quadratus lateris 8, & cubus lateris 4, & cubicubus lateris 2. Huius rei deſcriptio proponatur numerorum uſq; ad denarium, ordine à ſuperioribus ad inferiora deſcenſu facto. ita quiuis numerorum ſub ſe habebit ſpecies ex ſe propagatas.

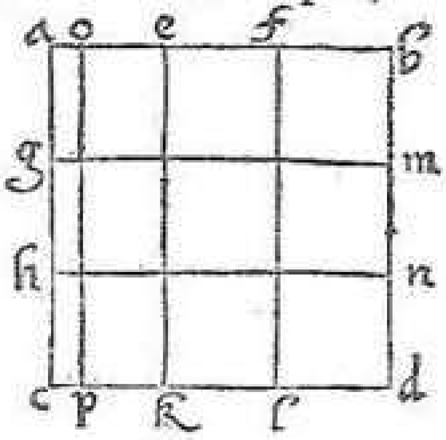
N.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N.
Q	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Q
C	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	C
QQ	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000	QQ
QC	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049	100000	QC
CC	1	64	729	4069	15625	46656	117649	262144	531441	1000000	CC

Verùm Facultates omnes eſſe quadratos numeros, patet. De cubis, qui naſcuntur cubis in ſeipſos ductis, quadrati poſſunt eſſe etiam ipſi: reliqui nequaquam. Quadratoquadrati omnes poſſunt eſſe quadrati. ſiunt enim quadratis in ſeipſos multiplicatis. Quadratocubi, ſicut & cubi, quicũq; enim ſimpliciter ſunt quadratocubi, ut 32, ut 243, ut 776, non poſſunt etiam quadrati eſſe. qui uerò procreati ſunt ſimpliciter QC in ſe multiplicatis, quadrati etiã eſſe poſſunt: ut 1024. & 59049. quorum ille 32, hic 243 in ſe ductis gignuntur. Cubicubi omnes poſſunt quadrati eſſe, cum fiant cubis in ſeipſos multiplicatis. Id quoq; in deſcriptione propoſita eſt obſeruandum, quòd ſpecies ſingulis numeris ſubiectæ ſecundum pariter parium ſeriem progrediuntur. nam tametſi non omnes ſunt pares: tamẽ quales ſunt numeri, tales etiam ſecundum imparis & paris rationem ſunt quæ ex ijs propagantur ſpecies. Itaque unitas, cùm æqualitati ratione reſpondeat: ſpecies etiam ei ſubiectæ unitatem ſeruant. Binario autem ſubijcitur 4, duplus eius; huic 8, & huic 16, ac deinceps reliqui ſemper ſuperiorum dupli. Rurſus ternario ſubijcitur 9 triplus, huic 27, & ei 81, ac ſic deinceps in tripla omnes ratione. Atq; ita pòrrò reliqui totuplices habent ſub ſe ſuos numeros ordine, quot unitatum quiſq; eſt. 4 ſcilicet quadruplices, 5 quintuplices, ac ſic deinceps.

Omnis numerus in partem ſibi cognominem multiplicatus, unitatem producit.

SCHOLION.

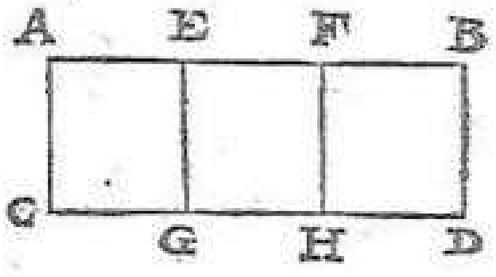
Eſto numerus 4, pars ab eo nomen habens, quadrans $\frac{1}{4}$. Si ergo multiplices 4 in $\frac{1}{4}$, producetur 1. nam quadrãs quater ſumtus, unitatem conficit. quippe in quadrantes unitas ſecata, non in plures quatuor ſecabitur: & ſi in quintantes, non in plures quàm quinq;. ac ſic deinceps. Quod ut etiam in deſcriptione appareat, ducantur duæ rectæ ad *angulum rectum altera alteri iuncta a b & a c, quarum utraque ſit unitatum ſeu punctorum 3, ſintq́; in ſuas unitates ſectæ in punctis e. f. g. h. deſcribaturq́; ſuper eas quadratum a b c d: & à punctis e atque f paralleli aduerſus lineam a o ducantur e k & f l: itemq́; à punctis g h paralleli uerſus lineam a b ducantur g m & h n. Liquet ergo, totum quadratum unitatibus conſtare: & harum ſuperficierum a k, k f, f d quamlibet continere tres unitates. Iam lineæ a e triens accipiatur, ſitq́; is a o, & à puncto o parallelus lateri a c ducatur o p. eritq́; a p ſuperficies triens ſuperficiei a k: ſiquidem a o triens erat lineæ a e, unde ſuperficies a k conſtabat, & cum tota ſuperficies a k tribus unitatibus conſtet: utiq; a p eius triens, una conſtabit unitate. demonſtratumq́; eſt, a c tribus conſtantem unitatibus, in a o trientem unitatis multiplicatam, unitatem feciſſe. Eſtq́; triens denominatus à trib. unitatibus. In uniuerſum autem quæuis pars numerum in quem multiplicatur, communicata denominatione diuidit: ſicut hîc triens ternarium in tres partes diuidebat, eiusq́; trientem, ſcilicet unitatem, ſibi ſumebat. Quod ſi a o non triens, ſed ſemiſsis (ſi ita uſu ueniſſet) lineæ a e fuiſſet: in duo diuiſiſſet ternarium: ſumta ab eo denominatione. dimidiũ enim etiam à binario nomen ducit, cùm duo ſemiſſes unitatem impleant. Sic ergo a p continuiſſet unitatis ſeſquiplum $1\frac{1}{2}$. Si uerò a o fuiſſet ſextans lineæ a e: profectò ternarium diuiſiſſet in ſex partes ipſi portioni cognomines, fuiſſetq́; a p tertia pars de ſemiſſe unitatis.*



Enimuerò cùm unitas immutabilis ſit, ſemperq́; perduret, ſpecięs numeri quę in eam multiplicatur, ſuam ſemper naturam retinet.

SCHOLION.

Hoc dicit, unitatem eundem numerum, in quemcunq; ducatur, reſtituere, ut ſi numerum 3 in unitatem multiplices: dices, ſemel 3 ſunt tria. uides reponi ternarium. quod idem de quouis numero eſt intelligendum. Sed & huius rei deſcriptionem proponamus. Ad punctum a duæ rectæ lineæ angulum rectum conficientes ſunto a b & a c. hæc unius, illa trium punctorum ſiue unitatum. & deſcribatur rectangulum parallelogrammum ab iis contentũ a b c d. idipſum quoq; pronuncio tribus unitatib. cõſtare. Partiamur enim lineam a b in ſuas unitates, in punctis e & f, atq; ex his ducantur lineæ paralleli reſpectu a c lineæ, puta e g & f h. Quando itaq; a c unicam modò continet unitatẽ, itemq́; a e tantundem: utiq; tota ſuperficies a g unius erit unitatis. Vnitas enim in unitatem ducta, unitatem gignit. Iiſdem de cauſis etiam e h & h b ſuperficies, utraq; unius eſt unitatis. ac proinde totũ parallelogrammũ a b c d è tribus conſtat unitatibus. quod fuit demonſtrandum.



Numerorum uerò aliquotæ partes à totis denominatæ, in ſe ipſas ſi multiplicantur, portiones producunt ipſorum numerorum cognomines.

SCHOLION.

Partes numeris cognomines, binario ſemiſsis (neq; enim duentem licet dicere) ternario triens, quaternario quadrans, ac deinceps. Non autem dico trientem cuiuſcunq; numeri, puta ternarij, aut quadrantem quaternarij: id enim eſſet unitas. ſed unitatis intelligo trientem aut quadrantem, qui omnino numero alicui cognominis eſt. nam unitatis triens cognominis eſt ternario, quadrans quaternario. & ſic deinceps.

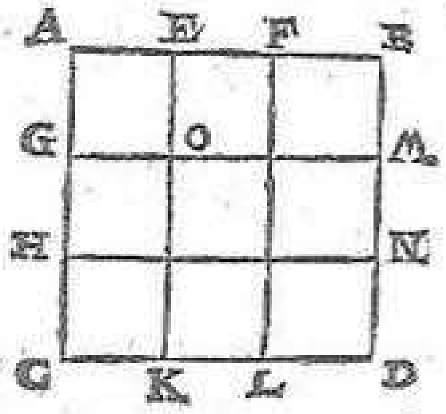
Verbi gratia, numeri aliquota pars in aliquotam numeri multiplicata, aliquotã quadrati: in hanc, aliquotam cubi: in hanc, quadratoquadrati: in hanc quadratocubi: in hanc, cubocubi aliquotam partem producit. idq́; cõmunicata denominatione cõtinget. Quadrati aũt aliquota pars in numeri aliquotam partẽ ducta, cubi gignit aliquotam partem: in quadrati, quadratoquadrâticam: in cubi, quadratocubicam: in quadratoquadrati, cubocubicam aliquotã aliquam partem. Cubi aliquota pars in aliquotam numeri partẽ multiplicata, aliquotã quadratoquadraticam: in quadrati, quadratocubicam: in cubi, cubicubicã. Quadratoquadrati aliquota pars in numeri aliquotam ducta, quadratocubicam: in quadrati, cubocubicam aliquotã partẽ ꝓducit. Quadratocubi aliquota pars in numeri aliquotã ducta, cubocubicã.

SCHOLION.

Hæc eadem ſunt cum illo: Numerus quiuis in partem ſibi cognominem ductus unitatem gignit.

ALIVD.

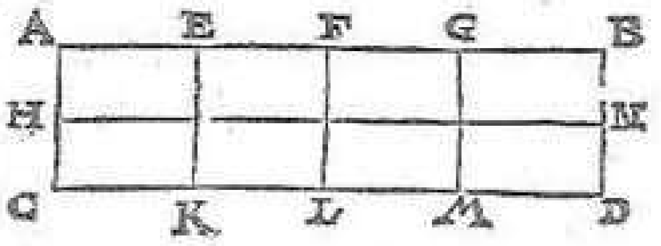
Numeri, inquit, aliquota pars in aliquotam numeri ducta, quadrati aliquotam partem producit. hoc eſt $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{3}$ facit $\frac{1}{9}$. ſiue, triens trientis, nona pars unitatis eſt. Et numeri aliquota pars in aliquotam quadrati ducta, cubicã aliquotam procreat· id eſt $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{9}$, facit $\frac{1}{27}$. uel, triẽs nonæ partis eſt 27. Sicut enim in numeris 3 in 3 multiplicatus 9: & 3 in 9 ductus 27 producebat, ita res habet in unitatis partibus horũ cognominib. Sic & quadrati aliquota pars *in ſui ſimilem,quadratoquadraticam producit.hoc eſt, $\frac{1}{9}$ in $\frac{1}{9}$ ducta, $\frac{1}{81}$ facit. ſeu nonæ partis nona pars , octogeſimauna eſt. nam 9 in 9 ducta,81 faciebāt. Hoc quoq; deſcriptiōe declaretur.Sint duæ rectæ ad angulū rectū iunctæ a b & a c,utraq; unius unitatis,& deſcribatur ſuper eas quadratū. a b c d, quod ipſum quoq; unitatem continebit.Porrò utraq; linearum diuidatur in tres trientes,a b nimirū in a e,e f,f b:a c in a g,g h,& h c. ducanturq; à punctis e & f lineæ paralleli aduerſus lineā a c, quæ ſint e k & f l: necnon à punctis g & h paralleli aduerſus lineam a b,uidelicet g m & h n:ſecetq; linea e k lineam g m in puncto o. Quando igitur unitas a b in tres trientes eſt diuiſa; quæuis harū ſuperficierum a k,k f,f d,triens unitatis erit. totum enim quadratum a b c d unitate una conſtabat.At rurſus earum quælibet à lineis g m & h n in tres diuiſa eſt triētes: ergo etiam a k.& cū hæc tota ſit unitatis triens,erit a o trientis triens,quod eſt pars nona: demonſtratūq; eſt, quo pacto numeri pars aliquota in numeri partem,nempe a e triens in trientē a g,ducta, quadrati aliquotam partem a o fecerit,nonam unitatis.totum enim quadratū a b c d,q. una cōſtat unitate,partes habet nouē tales, qualium una eſt a o. Similiter etiam ſi a g maneat aliquota pars numeri,ſeu triens unitatis,a e aūt ponamus aliquotam quadrati partē, puta nonā partē lineæ a b:erit a o aliquota pars cubica,nimirū 27.pars totius quadrati a b c d. Et ſi utranq; a g & a e poſuiſſemus quadrati aliquotā partē,a g nonā ex a c,& a e nonā de a b: a o quadratoquadratica pars fuiſſet,nimirum $\frac{1}{81}$ totius quadrati a b c d,unius unitatis.Eadem eſt cæterorum ratio. Verùm hæc multiplicatio nō eſt utcunq; inſtituenda.nō enim quæuis numeri pars in quāuis numeri aut quadrati aliquotā partē ducēda eſt,ut quadrati cubiue aliquota pars procreetur.ſed ſicut de numeris,quadratis,reliquisq; præceptum fuit,numeri pars in ſibi æqualē.i.in ſeipſam eſt multiplicāda, $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{3}$,ut fiat $\frac{1}{9}$. & eadem in partem quadrati ab ipſa ortam , hoc eſt in $\frac{1}{9}$ ducenda eſt,ut fiat pars cubica $\frac{1}{27}$.ac de reliquis idem ſentiendum eſt.*



Rurſum aliquota numeri pars in quadratum multiplicata , numerū gignit,in cubum,quadratū;in quadratiquadratum,cubum;in quadratocubū, quadratiquadratum;in cubocubum, quadraticubum.

SCHOLION.

Sicut diximus omnem numerum,ſi in cognominem ſibi partem multiplicetur , unitatē producere:ita etiā quæuis numeri aliquota pars in quadratum,non quoduis,ſed quod communicatū cum ipſa nomen gerit , multiplicata procreat numerum à quo id quadratum eſt ortum.Sit pars aliquota numeri,triens: quadratum à ternario,qui cōmunem cum dicta parte ſortitur denominationem,eſt nouem.nouies $\frac{1}{3}$,id eſt nouem trientes,tres ſunt ſcilicet unitates,productusq; hac multiplicatione ternarius eſt numerus,cognominis trienti ſeu tertiæ unitatis parti.Similiter etiam aliquotā numeri partē in cubum ſi ducas, quadratū cōficies. Ea ſit triens, cubus 27.uigintiſepties $\frac{1}{3}$,hoc eſt 27 trientes,nouem faciunt unitates, itaq; exſtitit quadratus nouem ex hac multiplicatione . Eadem eſt & aliorū ratio . Id quoq; oſtendatur deſcriptione.Sint duæ rectæ ad angulum rectū coniunctæ a b & a c: ſitq; a b quatuor unitatum,ac unius,deſcribaturq; ex eis parallelogrammum a b c d,& a b in ſuas unitates diuidatur punctis e, f, g. Iam cum a b quadratus ſit, quatuor conſtans unitatibus , natus binario in ſe ducto.A c quoq; in duas partiamur partes in puncto h,ut habeam partem cognominem numero qui quadrati eſt latus, ſemiſſem ſcilicet : ut a h, & h c,utraq; ſit ſemiſsis ($\frac{1}{2}$) unitatis.ducātur porrò è punctis e,f,g, lineæ paralleli ad lineam a c: nimirum e k,f l,g m:tum à puncto h parallelus lineæ a b, uidelicet h n. Cùm ergo totum parallelogrāmum a b c d quatuor unitatibus conſtet:& parallelogrāmum a n huius ſit ($\frac{1}{2}$) dimidium,diuiſi in duas æquales partes linea h n:utiq; a n duabus conſtabit unitatib.oſtenſumq; eſt,ut aliquota pars numeri in quadratum,nimirum a h in a b, $\frac{1}{2}$ in 4, ducta binarium numerum reſtituat, a n uidelicet.Nam totum a b c d parallelogrammum quatuor talib. partib. conſtat, quarum duas continet a n. Similiter ſi pars numeri maneat , a b aūt octo unitatum ponamus , utpote cubus: cùm rurſus totum a b c d octo unitatum ſit, & ab h n in æquales duas partes ſecetur: a n quatuor erit unitatum, qui eſt numerus quadratus. Similis eſt cæterorum quoq; ratio.



Quadrati porrò aliquota pars multiplicata in numerum, numeri aliquotam partem producit:in cubum,numerum:in quadratiquadratum, quadratum: in quadratocubum,cubum:in cubocubum,quadratiquadratum.

Cubi aliquota pars ducta in numerum,quadrati aliquotā partem gignit: in quadratum,numeri:in quadratiquadratum , numerum:in quadratocubum , quadratū: in cubocubum,cubum.

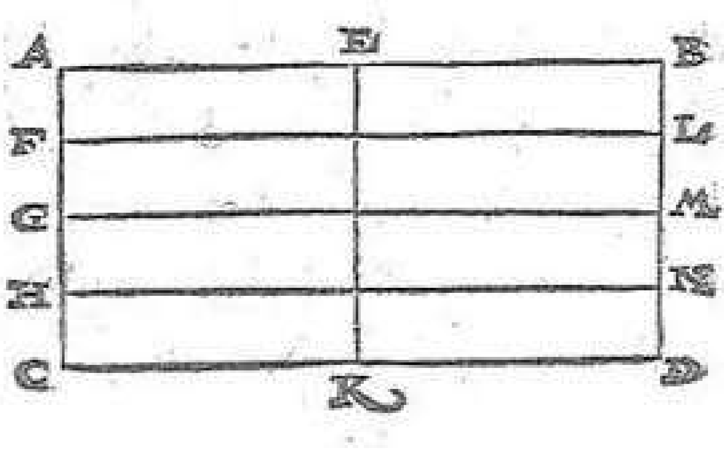
Quadratoquadrati pars aliquota multiplicata in numerum,cubi aliquotam partem creat:in quadratum,quadrati : in cubum, numeri : in quadratocubum , numerum: in cubocubum,quadratum.

Quadratocubi aliquota pars in numerum multiplicata, quadratoquadrati aliquotam partem gignit:in quadratum,cubi:in cubum,quadrati:in quadratoquadratum,numeri : in cubocubum,numerum.

Cubocubi pars aliquota in numerum ducta,quadratocubi aliquotam procudit partem:in quadratum,quadratoquadrati:in cubum, cubi: in quadratoquadratum, quadrati:in quadratocubum,numeri.

SCHOLION.

Quod ait quadrati aliquotam partem in numerum multiplicatam, numeri producere partem aliquotam: Eſto pars illa quadrans ; numerus duo. dicemus, duo quadrantes ſemiſſem faciunt : is à binario habet denominationem, cùm duo ſemiſſes totam unitatem faciant. eſtq; aliquota pars numeri . Similiter aliquota quadrati pars in cubum ducta, numerum gignit. Sit enim quadrati aliquota pars $\frac{1}{4}$*, cubus 8. octo quadrantes ſunt 2, qui eſt numerus. Hoc etiam è deſcriptione liquet. Ducantur duæ rectæ ad angulum rectum iunctæ a b & a c: quarum a b ſit unitatum duarū, a c unius. deſcribaturq; de his parallelogrāmū a b c d, diuidaturq; a b in duas unitates puncto e. & cùm a b ſit numerus, quippe duabus conſtans unitatibus, & quadratum binarij ſit 4: etiam a c diuidatur in quatuor partes æquales, punctis f, g, h, quarum una quæuis erit unitatis quadrans. ergo a f pars aliquota erit quadrati, utpote unitatis quadrans. Ducaturq; à puncto e parallelus lineæ a c linea e k: & à punctis f, g, h, ducantur paralleli ad lineam a b, uidelicet f l, g m, h n. Cùm ergo totum parallelogrammum a b c d ſit duarum unitatum, & in duas æquales partes ſecetur à linea g m: ergò a m parallelogrammum unius eſt unitatis. Quod cùm ipſum quoq; in duas æquales partes linea f l diuidat; ergo a l dimidium eſt unitatis. demonſtratumq; eſt, quadrati aliquotam partem in numerum multiplicatam, a f in a b nimirum, ſcilicet* $\frac{1}{4}$ *in 2, aliquotam partem numeri produxiſſe, a l, ſemiſſem unitatis. Similiter ſi a f maneat aliquota quadrati pars, & a b cubum, ſiue octo unitatum ponamus: a l erit numerus. nam hoc cùm ſit quadrans ex a b c d, hoc autem octo unitatum ponatur; utiq; a l duarum erit unitatum.*



Quod deeſſe dicitur (defectum uulgò uſurpant) in id quod ipſum etiam deeſſe dicitur ſi multiplicetur, productum adeſſe & reliquis adijci debere ſcito. ſi uerò in id quod adeſt, id quod deeſt multiplicetur: productum ijs quæ deeſſe dicuntur adnumerabis, ſignum eius uel *. Declaratis ergo multiplicationib. in conſpicuo ſunt etiã partitiones propoſitarum ſpecierū. Rectum itaque eſt, eum qui hoc negocij occipit, in compoſitione, diuiſione, & multiplicatione quæ formis accidere crebrò ſolent, exercitatum eſſe. nimirum qua ratione formas quæ uel adſunt uel deſunt non eiuſdem multitudinis, alijs adijcias formis, quæ uel ſunt, uel itidem ſunt atque deſunt. Et quomodo à formis quæ ſunt, alijsque quæ deſunt, alias auferas, alias quæ uel ſint, uel itidem ſint atque deſint. Deinde ſi in tractanda aliqua quæſtione ſpecies quædam emergant alijs ijſdem formis æquales, neque tamen eadem multitudine: ab utraque parte auferendæ ſunt ſimiles à ſimilibus: donec tãdem una forma uni æqualis formæ exſiſtat. Quod ſi ab utraque parte deſint quædam ſpecies alteri, alteri adſint : quæ deſunt, utrinque addenda ſunt, dum formæ eædem utrinque inueniantur: rurſumque utrinque auferenda ſimilia à ſimilibus tantiſper dum ab utraque parte eadem una forma relinquatur. Atque hoc accuratè in ipſis quæſtionū poſtulatis quoad detur conabere efficere, uſque dum una ſpecies uni ſpeciei ęqualis depræhēdatur. Poſterius aūt tibi cōmonſtrabimus, quomodo quæſtio explicetur, etiam cum duæ numerorum formæ uni æquales inueniuntur. Nunc uerò ad ipſas quæſtiones accedemus, cùm nobis uia abundè pateat, ob materiam in ipſis formis collectam. Cùm autem plurimi ſint numeri, & mole ingentes, itaque etiam tardè confirmentur, compræhendantur ab his qui eos accipiunt; ſintque in ijs multa quæ ægrè memoriter teneri poſsint: ſtatui quæ ex ijs ita decerpi poſſunt, ita ut maximè in tractationis principio elementorum partes ſuſtineant, primo loco proponere, & à ſimplicioribus ad perplexiora progredi:

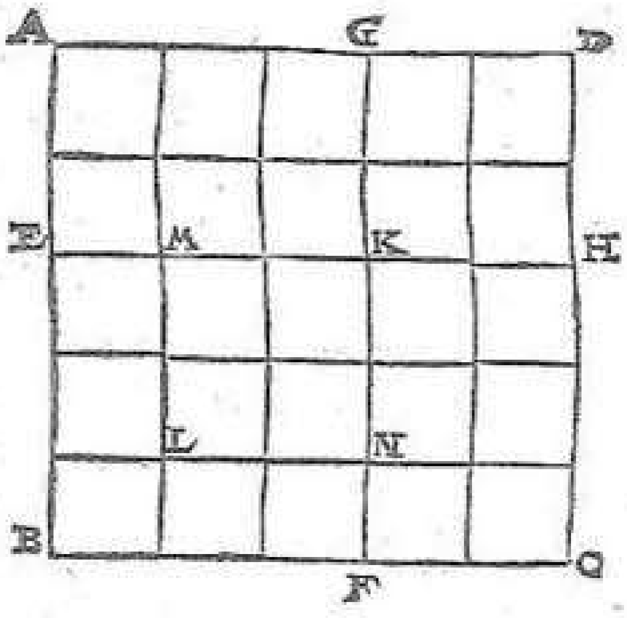
gredi:uti par eſt. ſic enim rudimentum deponentibus ea fient penetratu faciliora, & in memoria eorum hærebit deductio, pertractatione eorum libris tredecim incluſa.

SCHOLION.

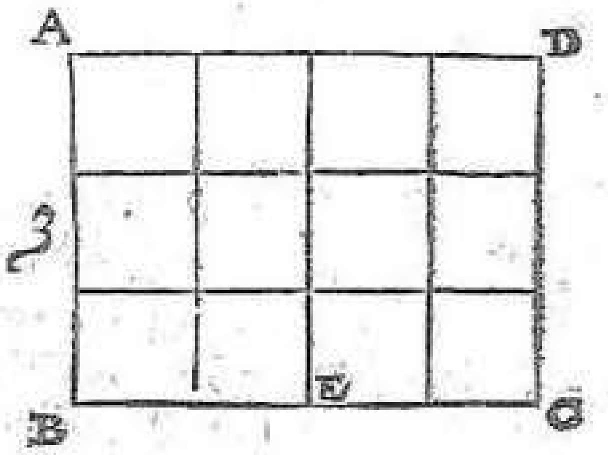
Defectum uocat non ſimpliciter, & qui nullo alio exſtante deeſſe dicatur: ſed exſtans aliquid, cui quippiam deeſſe intelligamus. ut ſi ponamus Numerum eſſe unitates 2, & dicamus, Eſto hic N. unitatum ſex: erit numerus prior 1 N — 4. nam ſex, binario demto, ſunt quatuor. Quod autem in exſtante, idem fit in defectu. Nam defectus numeri in defectum unitatum, numerum exſtantem aliquem gignit: in defectum numeri, quadratum: in quadraticubum: ac deinceps. Similiter & defectus numeri in exſtantes unitates, defectum numeri procreat, in numerum, quadrati: ac deinceps. Hæc quoque deſcriptione lineari demonſtrentur. ac primum quod negatio quantitatis ſeu defectus, in negationem quantitatis multiplicata, affirmationem quantitatis uel exſtantem quantitatem, hoc eſt penuria copiam gignat.

(XYLANDRI. *Hæc ut λεῖψιν & ὕπαρξιν interpretarer, adieci. hanc etiam præſentiam, illam abſentiam uertere libuit.*)

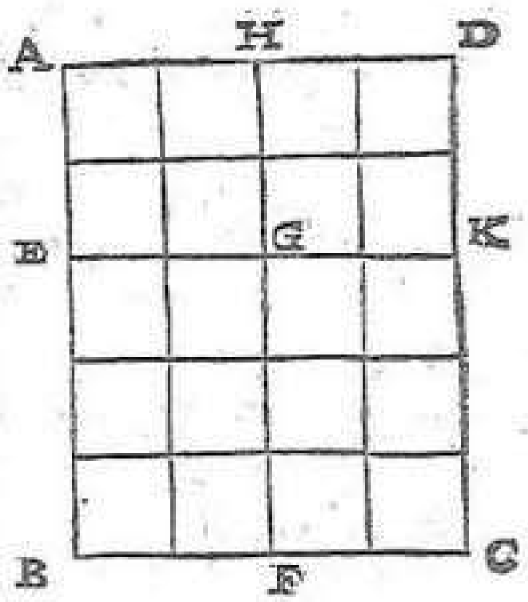
Ducantur duæ rectæ lineæ ad angulum rectum coeuntes a b & b c, quarum utraq; ſit unitatum 5 — 1 N, ponamusq́; eum numerum eſſe unitatum duarum. & ſit penuria quæ lineæ a b accidit, a e, unius numeri ſeu duarum unitatum. ergo e b conſtabit tribus unitatibus. penuria autem lineæ a c accidens, ſit c f, ipſa quoq; unius numeri ſeu duarum unitatum. ergò b f itidem tribus conſtabit unitatibus. Et cùm duæ ſint lineæ a b & b c, utraq; 5 — 1 N, eaſq́; oporteat unam in alteram multiplicari: ut oſtendatur quo pacto penuria in penuriam ducta copiam, in copiam ducta penuriam procreet: non indicam heic multiplicandi rationem, quæ inuerſum Græcanici moris ordinem ſequitur, ſed noſtram tenebimus. Primùm itaq; copiam unitatum in ſe multiplicemus: tum eandem in penuriam N pòſt penuriam N. in copiam unitatum: atq; tandem penuriā N. numeri in ſeipſum: atq; ita propoſitum demonſtremus. His ita poſitis, cùm linearum a b & b c utraq; ſit unitatum 5, altera in alteram multiplicetur, ut fiat quadratum a b c d unitatum 25. omneſq́; unitates deſcribantur totius quadrati. Secundum hæc multiplicetur a b, copia ſiue præſentia quinq; unitatum in f c abſentiam unius numeri in linea b c. ac quandoquidem unitatibus in numeros ductis numeri producuntur: & præſentia in abſentiam ducta, abſentiam procreat: auferatur f d parallelogrammum à toto quadrato a b c d, nimirum penuria 5 N, aut 10 unitatum. relinquetur a f parallelogrammum, unitates continens 15. Rurſus multiplicetur a e defectus unius N, in b c copiam 5 unitatum: fietq́; rurſum penuria numeri 5: oportebatq́; eam eſſe parallelogrammum a h. ſed quoniam prioris penuriæ cauſa quadratum g h fuit ablatum, neq; licet idem bis penuriæ utriuſq; ergò detrahi: auferetur quidem a k parallelogrammum, quod eſt numerorum 3: ac præterea quadratum k l numeri 2. ut rurſum penuria conficiatur numeri 5. quæ eſt a g, k e, n m: quæ ſuperficies ſunt, decem unitatum. ac ſupereſt gnomo b e m l n f, quinq; unitatibus conſtans. ſed quoniam detractis defectibus utrinq; a e & f c, relinquebatur tam e b quàm b f unitatum trium: hiſq; incluſum quadratum neceſſe eſt fieri unitatum 9, reſtant autem gnomonis dicti unitates quinque: his alias quatuor adijci oportet, ut trium unitatum quadratum abſoluatur. Multiplicata ergo a c penuria uniuſ N. in f c unius numeri penuriam, quadrati unius copiam procreabit, quod ſit 4 unitatum. Numerus enim qui latus fuit quadrati, erat duarum unitatum. Quadratum itaq; k l unitatum quatuor, antè ſubtractum, nunc reſtituitur, adiunctumq́; gnomoni b e m l n f, id eſt quinq; unitatibus, quadratum b k conficiet, unitatum nouem. quod futurum etiam erat ſola e b in ſolam b f multiplicata, nimirum tribus unitatibus in tres unitates ductis, ſi defectus nequaquam fuiſſent adſciti. Eſt ergo quadratum e b f k 1 Q. & 25 unitates — 10 N: ſcilicet 29 unitates — 20: hoc eſt, unitates 9. Iam ergo demonſtratum eſt, quomodo abſentia in præſentiam multiplicata, præſentiam gignat: itemq́; ut abſentia in præſentiam, abſentiam. Veruntamen hoc poſterius etiam ſeorſim demonſtretur. Ducantur duæ lineæ rectæ ad angulum rectum coeuntes, a b & b c. ſitq́; a b trium unitatum, b c 4 — 1 N. rurſumq́; numero tribuantur unitates duæ, ſitq́; numerus e c, erit ergo b e unitatū duarum. Multiplicetur primùm copia trium unitatū in quatuor unitatū copiā, exſiſtet parallelogrāmum a b c d unitatū 12. eæq́; oēs deſcribātur. Deinde a b ducatur in e c, tres nimirū unitates in numeri abſentiā: orietur penuria trium numerorū, hoc eſt unitatū ſex, parallelogrāmum uidelicet e d. ſupereſt ergo parallelogrāmū a e, unitatū ſex, cōpoſitū ex a b & b e, hoc eſt, trib. multiplicatis in duas unitatibus. quod exſti-



turum



turũ erat, etiã defectib. nõ adſcitis. Eſtq; parallelogrãmum a e 12 unitatũ, demtis tribus numeris: hoc eſt 12 —— 6. nimirũ unitatũ 6. Præterea cũ demõſtratũ ſit quõ unitates deficiente numero in unitates deficiente numero multiplicẽtur: oſtẽdamus iã quo pacto unitates cũ numero annexo ipſis, in unitates quib. numerus deſit, multiplicari debeant. Ducãtur duæ rectæ lineæ angulũ rectũ ſuo cõcurſu facientes, a b & b c. quarũ a b ſit 1 N. & unitates 3: b c unitatũ 4, deficiente uno numero. eſtoq; rurſum numerus duab. ex unitatib. collectus. Ac ſit numerus qui in linea a b continetur pro ſe, a e, in linea autem c, eius defectus f c. Erit ergo e b unitatũ trium, b f duarũ. Multiplicata primùm a e in b c: id eſt præſenſentia unius numeri in præſentiã quatuor unitatũ, fit a k parallelogrãmum, numeros cõtinẽs 4, unitates 8. Rurſus a e in f c multiplicata, id eſt præſentia unius numeri in abſentiã alterius, fit quadratũ h k, unitatũ quatuor. quo ſubtracto, relinquitur e h parallelogrãmum quatuor unitatũ. Rurſum ſi multiplices e b in b c, præſentiã triũ unitatũ nẽpe in quatuor unitatũ præſentiã, exſiſtit b k parallelogrãmum, 12 unitatũ. Quæ ſi deſcribãtur, inuenies figurã a b c k g h unitatũ ſedecim. Rurſus e b (quæ eadẽ eſt cũ k c) in f c multiplicata, hoc eſt præſentia trium unitatũ, in unius numeri defectũ: defectus procreatur numerorũ triũ, quippe parallelogrãmũ f k, numeris tribus, uel unitatib. ſex cõſtans. quod ſi auferatur à ſuperficie a b c k g h, relinquitur a f parallelogrãmum unitatũ 10. quod erat etiã futurũ, ſi a b in b f duceretur, nõ adſcito defectu. & eſt a f parallelogrãmum 4 N. —— 1 Q, 12 —— 3 N. hoc eſt, deleta copia triũ numerorũ à penuria triũ numerorũ, 1 N. unitatumq; 12 —— 1 Q. eſt aut id quadratũ unitatũ quatuor. eſt ergo ipſum 14 —— 4, id eſt, unitatũ 10. Demõſtrata aũt multiplicatione defectus, demõſtranda eſt etiã eius compoſitio & exceſſus. Si ſint duo numeri, alter (exempli gratia) 10, alter 10 —— 1 N. cõiũcti efficiẽt 20 —— 1 N. Si aũt ſint duo numeri, alter 10 —— 1 N, alter 10 —— 2 N, ſumma eorũ erit 20 —— 3 N. Si uerò ſint duo numeri, quorũ alter 3 N. † 10, alter 10 —— 3 N. collecti cõſtituent 20: tantùm copia 3 N à penuria 3 N. cùm aboleatur. Sin alter ſit 25 † 3 N, alter —— 6 N. ſumma erit 25 —— 3 N. cũ defectus 6 N. copiã 3 N. perimat, & adhuc penuria aliorũ 3 N. relinquatur. Si aũt numeri ſint 10 † 3 N. & 10 —— 2 N. ſumma cõficietur 20 † 1 N. duob. N. abolitis duorũ N. defectu, et 1 N. adhuc ſuperſtite. Atq; hæc quidẽ eſt cõpoſitio ſiue additio. Exceſſus aũt, ſiue ſubtractio ſic intelligitur. 10 amplius eſt quàm 10 —— 1 N. ipſo defectu, uno ſcilicet N. Si à 10 —— 1 N. ſubtrahas 10 —— 2 N. illũ hoc maiorẽ deprehẽdes uno N. quantum ſcilicet eſt quo præſtat defectus defectui. 10 † 3 N. præſtat huic 10 —— 3 N. ſex numeris, copia. ſ. & defectu N. 10 † 3 N. ſi ab eo ſubducas 10 —— 6 N. relinquit exceſſum 9 N. 3 ſcilicet copiæ, & 6 penuriæ. 10 † 3 N. amplius quàm 10 —— 2 N. habẽt, exceſſum uidelicet 5 N. eadẽ ratione. Ponatur uerò numerus quotquot uoles unitatum. Examinando rẽ ita, ut diximus, habere cõperies. Enimuerò quo pacto cõmunes defectus adijciat, & ſimilia de ſimilibus, æqualia de æqualibus auferat: utq; diuidendo rẽ eò deducat, ut una ſpecies uni ſpeciei æqualis relinquatur, puta numerus aliquis aut quadratũ unitatibus, aut aliquid tale: id in ipſa quæſtionum tractatione euidentius diſcemus..



Additio.

Subtractio.

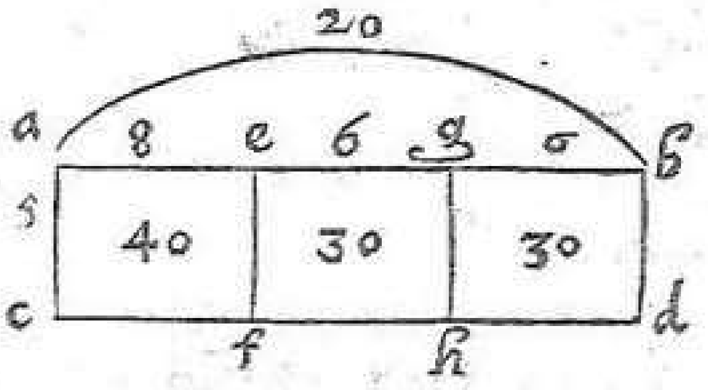
1\. QVAESTIO. Propoſitũ numerũ in duos partiri, quorũ alter alterũ quãto petitur ſuperet interuallo. Datus numerus ſit 100. interuallũ 40. Statuamus minorẽ numerũ eſſe 1 Numerum. Maior ergo erit unus numerus, & 40 unitates: Summa amborũ, N. 2. V. 40. Dabatur aũt, hãc eſſe 100 V. Proinde 100 V. æquantur 2 N. & 40 V. Iã ab his æqualibus utrinq; aufero æquale, nimirũ 40 V. & à 100 V. & à 2 N. † 40 V. reſidua erunt æqualia 2 N. atq; V. 60. ergo unus uterq; numerus eſt 30 V. Ex argumento igitur tractationis, minor eſt unitatũ 30. ergo maior unitatum 70. Demonſtratio in promtu eſt.

SCHOLION.

Iubet 100 numerũ in duos diuidere, maiorẽ & minorẽ, ut maior minorẽ ſuperet 40 unitatibus, ſicut hic 70, hunc 30. ſtatuitq; minorẽ eſſe 1 N maiorem 1 N. & 40. hi iuncti conficiunt 2 N. & 40. atqui 100 erat numerus diuidendus. ergo hi numeri iuncti (inquit) hoc eſt 2 N. † 40 æquãtur numero 100. Quoniam ergo datur hoc, ſimilia à ſimilibus auferre, & cõmunes defectus addendo explere, ut in progreſſu uidebimus: cum heic ſimiles ſint unitatib. unitates: & à 2 N. † 40, & à 100, utrinq; aufert 40. ita relinquuntur ab illa parte 2 N. ab hac 60. Et quoniam ab æqualibus, puta 2 N. † 40, & 100, æquale (ſcilicet 40.) ablatum eſt, reſidua quoq;, uidelicet 2 N. & 40, æqualia erunt. ergo etiã 1 N. & 30 æquantur. is eſt minor: addiťsq; ei 40, quod erat interuallum datum, maior eſt 70. Hypoſtaſes ſeu argumentum uocat ipſos qui quæruntur numeros. Numerum autem Dophantus nõ

ut deſi-

ut definitum accipit,ſed tantùm ut quantitatẽ ponit.nã in quibuſdam quæſtionibus maior quàm 40.in quibuſdam minor,interdum etiam ipſa unitate minor inuenitur.Notandum in hac quæſtione,quòd diuidẽdus numerus uel par eſſe uel impar,& interuallum partium itidem par aut impar pro tuo arbitratu ſtatui poteſt.Id quoq; ſciendũ,ſiue à pari imparem,ſiue ab impare parem auferas,reliquum fore impar. Vniuerſè autem omnis par numerus ex duobus aut parib.aut imparib.conſtat,in eosq; diuiditur:ut utram ſpeciem à pari auferas, reliquum ei ſit ſimile:ſi autẽ ab impari parem,ſpeciem eius à quo facta eſt detractio,ſeruat reſiduum. Quòd ſi in hac quæſtione 10, qui eſt par numerus diuideremus in duos numeros, quorũ maior minorem ſuperet ternario:3 de 10 detractis 7 relinquũtur, cuius ſemiſsis $3\frac{1}{2}$.cui ſi addas 3,maior pars erit $6\frac{1}{2}$,minor $3\frac{1}{2}$.interuallum 3.ſumma 10. Quæſtio hæc etiam lineis poteſt explicari. Eſto parallelogrãmum a b c d,ſitq; a c tot unitatum,quot continet aliquota pars numeri 40, ea lege,ut 100 quoq; aliquotã habeat partẽ,unitatũ iſtarum numero denominatã.Sit uerbi gratia a c 5,quæ eſt $\frac{1}{8}$ de 40. & cũ 100 habeat $\frac{1}{5}$,nimirũ 20,ſit a b 20.ut totũ parallelogrãmum ſit 100. Et cũ 5 ſint octaua pars è 40,a e ponatur 8,ducaturq; e f linea lineæ a c parallelus. liquet ſuperficiem a f eſſe 40.Et cũ e b (reliquũ lineæ a b poſt pũctũ e) ſit 12, liquet ſuperficiẽ e d eſſe 60.Ea ſecetur in duas æquales linea g h,erit utraq; pars e h & h b 30.cùm & g h æqualis ſit lineæ a c,& e g ac g b,utraq; 6. Addito ergo a f ad e h,fit a h 70.& relinquitur h b 30.itaq; diuiſus eſt 100 in duos,quorũ maior minorẽ ſuperat 40 unitatibus. quod fuit (demonſtrandũ.



XYLANDRI.

Tales ferè ſunt oẽs Græci ſcholiaſtæ problematũ Diophanteorũ explicatiões. Cuius ſemiſsis $3\frac{1}{2}$.) In Græco uerba ſunt mutilata.res eſt plana.Libet & huic & alijs noſtrũ calculũ ſubijcere,nihilo deteriorẽ, aliquãto etiã clariorẽ eo, quẽ ſcholiaſtes in margine ꝓblematũ Diophãti annotarat.

Minor Maior
1 N. 1 N. † 40
1 N.

Summa 2 N. † 40 || 100
aufer utrinq; 40
2 N. || 60
1 N. || 30,&c.

Vel ſic.

Maior Minor
1 N. 1 N. — 40
1 N.

Summa 2 N. — 40 || 100
adde utrobiq; 40
2 N. || 140
1 N. || 70,&c.

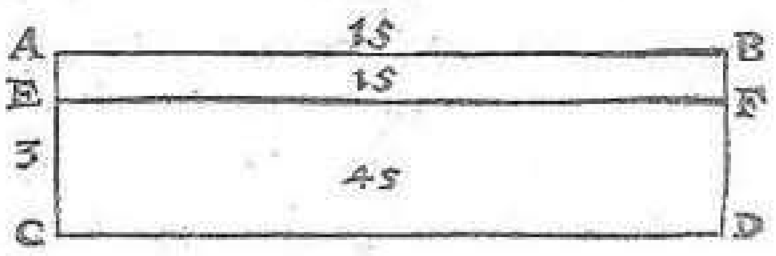
Neq; ego iſtas extheſes uolui textui adijcere, plenas characterũ inſolentiũ, ſæpe mancas, ſæpe uitioſas. numeri noſtri abũdè implebũt earũ uſum. N. in hoc problemate unitatẽ deſignat, quod deinceps ſignum omiſi.quia cùm nulla inſigniuntur nota numeri,tum uel maximè intelligitur eſſe abſolutos. Et quia canones infinitos fabricari ex Algebra operationib.etiam de reb. maximi momenti poteſt artifex:ex hac quoq; canonem generalem & demonſtratum faciemus.

CANON. Si diuidendus ſit numerus in duas partes certo interuallo differẽtes, id à toto detrahatur, aut ei addatur ſemiſſis ſummæ aut reſidui,hic minorẽ, ille maiorẽ portionem oſtendit.diuidantur 74 in duas partes, quarũ interuallũ 28.74 & 28 ſunt 102.ſemiſſis 51,pars maior. 74 demtis 28 ſunt 46,ſemiſſis 23.portio minor,&c.

II. Datum numerũ in duos partiemur,quorũ ſit quę petitur ratio. ſit numerus 60 diuidẽdus in duos,in ratione tripla.ſit minor 1 N.maior erit 3 N,triplus minoris. Hi duo iuncti 60 debẽt conficere:at conficiunt 4 N.ergo 4 N.æquales ſunt unitatibus 60.Numerus ergo eſt 15.tanta eſt minor pars,maior 45.

SCHOLION.

In prima quæſtione tãtùm exceſſus maioris ſupra minorẽ quærebatur. in hoc ratio duntaxat quæritur:in tertio ſimul & ratio quæretur,& exceſſus:autore,quod in ſe receperat,à ſimpliciorib.ad diſtortiora procedẽte.Secũdum hoc etiã facilius demonſtrare licet.Cũ de duab. numeri 60 partib.maior minoris ſit tripla,ergo quadrantem habet totus, isq; eſt minor portio,15.maior ergo 45.Id quoq; per lineas demõſtremus.Sit a b c d parallelogrãmũ.et cũ duarũ numeri 60 partium maior ſit minoris tripla:cõſequẽs eſt ipſum 60 habere partẽ aliquotã, cuius nomẽ unitate amplius quàm ternariũ gerat, hoc eſt quadrãtẽ,à quaternario denominatũ.Is ergo ſit 15.& ob quadrãtẽ iſtũ linea a c ſit 4 partiũ:& a b 15 partiũ,q eſt quadrãs ex 60.Totũ ergo parallelogrãmũ a b c d erit ſexaginta partiũ. ſumatur quadrans lineæ a c, puta a e, unitatis unicæ,ducaturq; e f parallelus ad lineam a b;erit ſuperficies a f,15.e d autem 45,prioris triplum.



in uniuerſum aũt in tali argumento, quæ ratio eſt maioris partis ad minorem, totum habere oportet aliquotam partem, cuius nomen illius rationis denominationem unitate ſuperet. uerbi gratia, ſi partes ſint in ratione tripla, quadrantem diuidendus habet: ſi in quadrupla, quintam, ac ſic deinceps, laterumq; alterum oportet tot unitatum, quot continet pars iſta aliquota, facere: alteram tot unitatum, quot eius partis denominatione continentur.

XYLANDRI.

Maior 1 N.
Minor $\frac{1}{3}$ N.

Sum. $1\frac{1}{3}$ N. || 60.

reductio——4 N. || 180

1 N. || 45.

Maior 45.
Minor 15:

Minor 1 N.
Maior 3 N.

Summa 4 N. || 60

1 N. 15.
Minor 15, &c.

Huius problematis uſus latè patet in opere geometrico & arithmetico, & ſcholiaſtes canonẽ non ineptè tradit, niſi quod ad multiplicem rationem adſtringit, quod uniuerſe omnib. omnium rationum modis ac formis congruit. res ita habet.

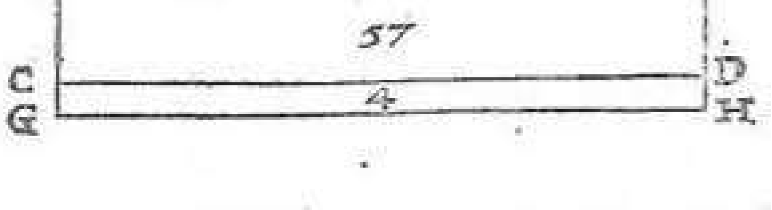
Numeri diuiſio in duas partes, quæ rationẽ præſcriptã habeant.

CANON. Si numerus in duas partes diuidendus ſit, quarum ratio ſit data: huius minimos terminos coniũge, per ſummam diuide totum, quotientem per terminos multiplica ſeorſim, habebis quod quæritur. *Id duobus exemplis monſtremus. numerus 153 diuidatur in duos, rationis octuplæ. termini rationis minimi 1 & 8. ſumma 9. per hanc diuiſo 153; quotiens eſt 17. is in 1 & 8 ductus, 17 & 136 producit, partes quæſitas. Ea conditione lata, ſi 100 diuidere iuſſus fuiſſes; hic per 9 diuiſus, quotientẽ dediſſet $11\frac{1}{9}$. partes ergo $11\frac{1}{9}$ & $88\frac{8}{9}$. Nam quod ſcholiaſtes de aliquota parte autumat, multo eſt, quàm res poſtulet, anguſtius: cùm minutiarum uſus in proportionum tractatione regnum obtineat. Alterum exemplũ. Partire 88 in duos numeros, quorum maior minorem bis, eiusq; inſuper beſſem contineat. rationem uulgo duplam ſuperbipartientem tertias appellant. termini minimi ſunt 8 & 3. ſumma 11. per hanc diuide 88, quotiens 8 multiplicetur ſeorſim in 8 et 3. habebis partes quæſitas 64 & 24. nam bis 24, hoc eſt 48, & 16, qui eſt bes de 24, coniuncti 64 omnino exhibent. Eadem lege ſi diuidendus fuiſſet 128. is per 11 diuiſus quotientem exhibuiſſet $11\frac{7}{11}$. qui ductus in 8 & 3 ſeorſim, partes deſignaſſet $93\frac{1}{11}$ & $34\frac{10}{11}$. Si experiri libet, maiorẽ per 3, minorem per 8 multiplica: quæ eſt lex proportionalium numerorum alibi à nobis quoq; declarata. Quo pacto in plures duabus partes proportionales ſeu continuè ſeu diſtinctè numeri fiat diuiſio: alius erit dicendi locus.*

III. Propoſitum numerum in duos diuidere, qui & datam rationem teneant, & quanto poſcitur interuallo diſtent. Eſto numerus 80, ratio partium tripla, interuallum 4, quo maior triplum minoris ſuperat. Statuamus minorem 1 N. erit maior 3 N. & 4: ſcilicet ut & triplus minoris ſit, ac præterea cõtineat 4. Reſtat ut ambo æquentur numero 80. atqui coniuncti faciunt 4 N. & 4: id ergo æquale eſt 80. Aufero ſimilia à ſimilibus: relinquuntur 76 æqualia 4 N. ergo 1 N. erat 19. Is ex propoſito eſt minor, maior 61. ad triplum minoris (57.) adiectis 4, quæ de 80 ſubduxeram, ut triplorum numerorum inuenirem quantitatem. Eadẽ maiori poſtea adijcio, hac cognita.

SCHOLION.

Statuatur parallelogrammum ABCD. & quando 80 numeri partes ita habent, ut maior minoris ſit tripla, ultraq; 4 unitates habeat: has de 80 detrahe: ſuperſunt 76. Cumq; pars tripla ſit una alterius, 76 habebit quadrãtem ſuum, qui nimirum diuiſione per 4 inuenitur 19. Atq; huius quadrantis cauſa, AC ſit 4 partium: itemq; propter 19 unitates AB ſit nouendecim. Ergo totum ABCD erit 76. Sumatur AE quadrans lineæ AC, ducaturq; EF parallelus lineæ AB. cumq; AE ſit 1, erit AF 19, ED autem 57. Adijciatur porrò ſuperficiei AD alia parallelogrãmus CH cuius area ſit 4, quod antè fuerat de 80 detractũ. eius latus CG ſit $\frac{4}{19}$ GH 19. Ergo totũ parallelogrãmũ EH erit 61, triplũ ſuperficiei AF, ac præterea 4 amplius unitatibus. Tota aũt figura eſt AH, octoginta unitatũ.



XYLAN=

XYLANDRI.

Minor 1 N.
Maior 3 N. † 4

Sum. 4 N. † 4 || 80
aufer 4 utrinq;
4 N. || 76

1 N. || 19.
19 minor. ergo 57 † 4, id eſt, 61, maior. Summa 80.

Aliter.

Maior 1 N. ergo 1 N.——4 triplum minoris.
Minor $\frac{1}{3}$ N.——$1\frac{1}{3}$.

Sum. $1\frac{1}{3}$ N.——$1\frac{1}{3}$ || 80
Omnia per 3 multiplica, ut fiat reductio
4 N.——4 || 240
adde utrobiq; 4

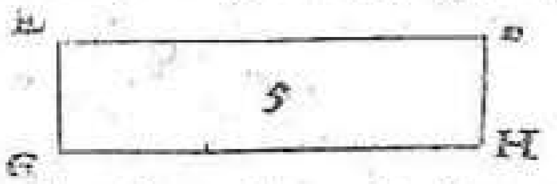
4 N. || 244
1 N. || 61. Maior. aufer 4, reſtant 57, triplum minoris. ea eſt 19.

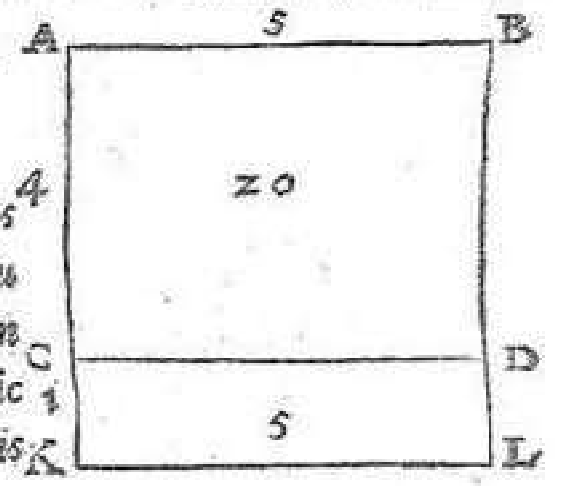
CANON. Detracto eo numero, qui ultra quotuplū minoris adeſſe maiori debet, de numero propoſito, reſiduum diuide per ſummam minimorum quæſitæ rationis terminorum. quotientem, &c. *idem enim eſt cum ſuperiore, & ipſa exempli propoſiti ratio te cætera docet.*

IV. Duos numeros inuenire in ratione data, dato etiam interuallo. Mandatū ſit ut maiorem minoris quincuplum, eoq; etiam uiginti unitatibus maiorem conſtituamus. Sit minor 1 N. ergo maior erit 5 N. interuallum numerorum eſſe debuit 20. at eſt 4 N. his ergo æquantur 20. ergo 1 N, 5. tantus eſt minor. maior itaq; 25. Ita maiore ad minorem quincuplo, interuallum eſt 20.

SCHOLION.

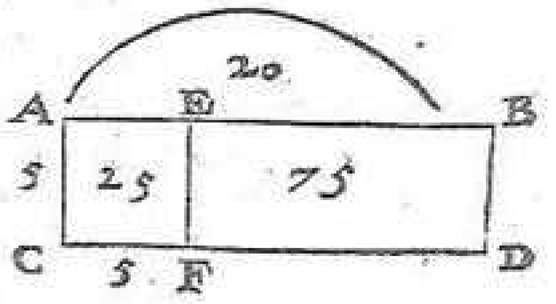
Quartam hanc quæſtionem alio in exemplo conſideremus. Superet maior minorē quinario, ſitq; minoris ſeſquiplus maior. Sit minor 1 N, maior $1\frac{1}{2}$ N. interuallum $\frac{1}{2}$ N. atqui debebat eſſe 5. ergo minor eſt 10 maior 15. demonſtremus hoc etiā lineis. Quia maior minorē ſuperat 20 unitatibus, ſit parallelogrammum ABCD, 20 unitatum, AC 4, AB 5. Et quoniam totus maior minoris quincuplus ponitur, erit utiq; exceſſus (ABCD ipſum) minoris quadruplus. Si enim numerus multiplex ſit alterius, qui numerus rationem horum denominat, eo minor unitate rationem exceſſus ad minorem denominabit. Ergo minor erit 5. cui æquale ponatur parallelogrāmum EFGH. huic ſi adijciam ad ABCD æquale CDKL, totum AL, quod eſt 25, erit minoris partis CL quincupla, & 20 unitatibus ei præſtabitur.

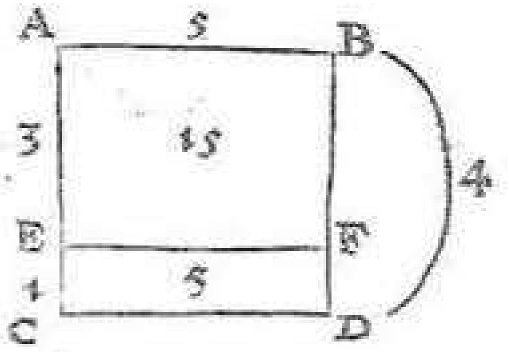




ALITER.

Cūm maior minoris ſit quincuplus, interuallum 20. propter rationem quincuplam ſit AC 5, & propter interualli numerum AB ſit 20. deſcribaturq; parallelogrammum, quod totum erit 100. Quæratur eius pars, quā unitate minor quinario numerus, id eſt 4, denominet, quod fit ducta EF linea, ut AF ſit quadrans totius. Ergo erit 25. Quæro cuius hic ſit quincuplus, & inuenio quod quinarij. Eos ergo dico eſſe qui quærebantur numeros. Atq; ita quidem res habet in multiplicibus. Nunc etiam de ratione ea qua totum & aliqua pars minoris in maiore continetur uideamus. Dentur duo numeri quorum maior minoris ſit ſeſquitertius, eundemq; ſuperet quinario. Quoniam fundus ſeſquitertiæ rationis eſt 4, propter hunc ſit AC 4, & ob exceſſum AB ſit 5. totum parallelogrammum 20. Et cum 4 ad 3 ſit ſeſquitertius, ſumo unitate minorem linea AC lineam 3, AE, & duco hanc in exceſſum 5, fiunt 15. & numeri inuenti ſunt 15 atque 20. Præſtat autem primam demonſtrationem tenere, quæ ad omnia pertinet. Nam earum rationum, qua totum & pars, ac qua totum & partes minoris in maiore continentur, ac cæterarum, ſua cuiuſq; generis deſideratur demonſtratio, & facile eſt de omnibus explicationem adferre: ſed uolenti, etiā reliqua ex poſitis ſunt manifeſta. Notandū, quod in prima demōſtratione de multiplicib. diximus, de rationis quā habet interuallū ad minorē nomine: de reliquis nihil tradidimus rationū generib. Nūc ergo dicamus, exceſſum eorū aliquotā eſſe partē minoris numeri, nō (ut in multiplicibus) unitate deficiente denominatione, ſed ab aliquota parte minoris nomē habente. Ita exceſſus ſeſquitertij triens eſt ſubſeſquitertij, ſeſquiquarti quadrās ſubſeſquiquarti, & in ſuperpartientibus, uerbi gratia, ſupertripartiētc, exceſſus eſt ſubſupertripartienti tres partes: eadēq; cæterorū ratio. Præſtat ergo prior demōſtratio.





XYLANDRI.

Minor 1 N.
Maior 5 N.
exceſſus 4 N. || 20.
1 N. || 5.
ergo numeri 5 & 25.

Vel *Maior 1 N.*
Minor $\frac{1}{5}$ *N.*
exceſſus $\frac{4}{5}$ *N.* || 20
utrinq; p̃ 5 multiplica. 4 N. || *100.reductio.*
1 N. || 25. *Maior, &c.*

ALITER.

Minor 1 N.adde exceſſum 20.ergo 1 N.† 20 || 5 N.maiori.deme utrinq; 1 N.erunt 20.|| 4 N.ergo 1 N. 5 minor,&c.

Vel

Maior 1 N. deme interuallum.ergo 1 N.— 20 || $\frac{1}{5}$ *N. minori. Adde utrobiq; 20. erunt 1 N. ||* $\frac{1}{5}$ *N.† 20.aufer utrinq;* $\frac{1}{5}$ *N.erit* $\frac{4}{5}$ *N. || 20.ergo 4 N. || 100.fit 25 maior.*

CANON. Rationis datæ minimorum terminorum minorem aufer de maiore, interuallum diuiſum per reſiduum, oſtendet numerū qui in iſtos ductus terminos, quæſitos gignit.

Inuentio duorū numerorū quauis ratione & quouis interuallo. Rationum ſeu proportionū ſpecies.

Hic canon ad omnes proportionum ſeu rationum ſpecies pertinet. quarum cum fiat ab interprete mentio, obiter eas recenſebimus, & explicabimus. Primò omnium conſtat, omnem numerum alterius numeri partem eſſe, uel partes, minorem ſcilicet maioris. Ita quinq; genera proportionum exſiſtunt. quod intellectu perfacilè eſt, ſi hoc teneas, rationem quamuis debere terminis exprimi minimis, id eſt, uerſus ſe inuicem primis. Multiplex proportio eſt, cùm maior totum minorem præciſe aliquoties continet, uel aliquoties ſumtus minor maiorem conficit: hoc eſt, cùm minor maioris eſt pars aliquota, & unitate numeratur, quota ſit numero indicante. Verbi gratia, 18 eſt $\frac{1}{8}$ *octaua pars ex 144: qui numerus octies continet minorem, puta 18. id eſt; maior octuplus eſt reſpectu minoris, & ratio dicitur hæc octupla. Sic omnis quadratus numerus eſt multiplex ad ſuam radicem. 16 ad 4, quadruplus, id eſt, ſicut 4 ad 1. In hoc genere minorem ſubmultiplicem uocant. & ſicut 24 ad 6 eſt multiplex, puta quadruplus: ita 6 ad 24 eſt ſubquadruplus, nempe eius quadrans. Nam de communicatione illa nomenclaturæ etiam ſuprà eſt facta mentio. 2. Superparticularē uocant, cùm maior minorem totum, eiusq; aliquotam (uti nunc deſcripta eſt) partem continet. Sic 12 eſt 8 & eius ſemiſsis: ſeſquiplum, & ſeſquialterum etiam nominant. idem 12 eſt ſeſquitertius ad 9, quem, & eius trientē continet.* 1 $\frac{1}{3}$ *uel* $\frac{4}{3}$ *hæc ratio, prior* $\frac{3}{2}$ *uel* 1 $\frac{1}{2}$ *ſcribitur. 3. Superpartiens eſt, cum maior minorē continet, & aliquot eius partes aliquotas: id eſt, talem præter totum portionem totius, quæ aliquoties ſumta, non totum, ſed eius multiplicem conficiat. ſuperpartientem appellant. Sic 60 ad 36 eſt* 1 $\frac{2}{3}$*, quod ſuperbipartientem tertias uocant: ad 42 eſt idem* 1 $\frac{3}{7}$*, id eſt ſupertripartiens ſeptimas. duo hæc genera, ſi minor ad maiorem æſtimetur, ſubſuperparticulares, & ſubſuperpartientes rationes conſtituunt. ut 3 ad 4 ſubſeſquitertiam, 3 ad 5 ſubſuperbipartientem tertias. Eadem ad multiplicem ſi adiunguntur, multiplicem ſeſqui, aut multiplicem ſuperpartientē conſtituunt. 4. ita 5 ad 2 eſt ratio dupla ſeſquialtera, & uiciſsim 2 ad 5 ſubdupla ſeſquialtera. 5. 11 ad 3 eſt tripla ſuperbipartiēs tertias. 3 ad 11 ſubtripla ſuperbipartiens tertias. Plurib. exemplis uti nihil attinet, cùm in uulgatis ſpeculatiuis (ut uocant) libellis etiam plurib. iſta agātur, quàm res poſcat: & quotidianus uſus abundè ſuppeditet. Barbara autē, aut nouata potiùs uocabula qui circuitionibus politioribus poſthabent, delicatiores ſunt quàm prudentiores. Heic notent rudiores, de omnibus rationum generib. ſolo in multiplici minorem eſſe partem maioris, in reliquis, partes. Canonis tamen huius, qui nō rarò te leuare moleſtia in reb. arithmeticis poteſt, exempla ad exercendos tirones ſubijciam.*

1. Da in ſeptupla ratione duos numeros, interuallo 312. Termini 7 & 1, reſiduū 6. $\frac{312}{66}$ (52 *is ergo eſt minor, cùm unitas in multiplicādo nō ſit efficax. maior ſepties 52, id eſt 364. Rurſum ſi eadē in ꝓportiōe duos, interuallo 50, poſtulet aliquis.* $\frac{\overset{2}{50}}{6}$ (8 $\frac{1}{3}$ *hic ergo eſt minor, & ſeptuplus eius* 58 $\frac{1}{3}$*. interuallum 50. 2. Dentur in ſeſquinona ratione duo numeri, interuallo 14. Termini 9 & 10, reſiduum 1. ergo 14. per 9. & 10. multiplicati, quæſitos numeros gignunt 126 & 140. Eodem interuallo in ſeſquialtera duos inuenies ratiōe, 42 & 28. & dato interuallo* 6 $\frac{1}{2}$ *in hac ratione, 13 &* 19 $\frac{1}{2}$*. In ſeſquialtera n. ratione minoris ſemiſsis & interualliū ſemper ſunt unum atque idem: in ſeſquitertia triens, & cætera: ualet enim hoc in omnibus ſuperparticularibus. de*

quo

quo alibi. Quod ideò monui, quia de ratione interualli ad minorem in multiplici ratione Scholiaſtes rectè monuit, maximè obſcuritate meis uerbis ſublata. de reliquis quod dixit, explicabitur planiùs. De multiplici quiuis intelligere poteſt, ſi uerbi gratia huic numero 12, idem adhuc ſepties adiungatur, fore totum ipſius octuplum, 96. 3. Dentur duo numeri in ſupertripartiente quintas, interuallo 33. ratio eſt $1\frac{3}{5}$*, termini 8 & 5. reſiduum 3. per hoc diuiſo 33, quotiens 11. is in terminos ductus, 88 & 55 producit, quæſtioni ſatisfacientes. In hoc rationis genere minor & interuallum eam rationem conſtituunt, quæ eſt earum partium, quibus ultra totum maior ſupra minorem abundat. Quærantur alij duò, in ratione* $1\frac{4}{5}$ *interuallo 19. hi erunt* $23\frac{3}{4}$ *&* $42\frac{3}{4}$*. 4.5. In his rationibus, quæ ex multiplici & altera reliquarum componuntur, canon de ratione minoris ad interuallum prorſus conſtat. ſed inuerſe. nam heic ſemper unitate de rationis nomine detracta, ratio interualli ad minorem nomen gerat, proditur. Dentur duo numeri in proportione tripla ſeſquiſeptima, interuallo 75. termini rationis* $3\frac{1}{7}$ *ſunt 22 & 7, differentia 15. per hanc diuiſo interuallo, 5 emergunt, quæ in terminos ducta, numeros quæſitos procreat 35 & 110. Dico autem rationem minoris ad exceſſum 35 ad 15, eſſe duplam ſeſquiſeptimã. quia 1 de* $3\frac{1}{7}$ *demto, relinquuntur* $2\frac{1}{7}$*. Rurſus dentur duo numeri in ratione* $8\frac{1}{2}$*. interuallo 31. Termini 17 & 2, diſcrimen 15. hoc diuidatur 31, quotiens* $2\frac{1}{15}$*. ergo numeri* $4\frac{2}{15}$ *&* $35\frac{2}{15}$*. Deniq; dentur duo numeri in ratione* $6\frac{2}{3}$*, ſeſcupla ſuperbipartiente tertias, interuallo 51. Termini 20 & 3. diſtantia 17. quotiens 3. numeri 60, & 9. deniq; 51 ad 9 (interuallum ad minorem) rationem habet* $5\frac{2}{3}$*. quod nomẽ fit, 1 de* $6\frac{2}{3}$ *ſubducta. Rurſus dẽtur duo numeri in ratione* $5\frac{4}{5}$*, quincupla ſuperquatripartiente quintas, interuallo 35. termini 29 & 5. differẽtia 24.* $\frac{35}{24}$ *(* $1\frac{11}{24}$ *quotiens. in terminos ductus, producit numeros* $7\frac{7}{24}$ *&* $42\frac{7}{24}$*. Hæc omnia ita habere, experiere ipſo opere. Denique πυθμὴν Scholiaſtæ eſt, quod fundum dixi, & quaſi fundamentum ſeu radicem. Nam ſeſquitertia à quatuor trientibus, ut ſeſquinona ab nouem octauis nomen ſortitur. Quid Pythagoreis fuerit πυθμὴν, alibi dictum.*

V. Datum numerum in duos partiri, ut horum utriuſq; aliqua, non tamen eiuſdẽ nominis, pars, ſi coniungantur, numerum qui poſcitur conficiant. Oportet autem hunc talem poſci, qui in medio ſit duorum numerorum, quibus partes totius propoſiti poſtulatis nomine eædem exprimuntur. Diuidatur ergo 100 in duos numeros ea lege, ut prioris triens cum poſterioris quinta parte ſi coniungatur, 30 fiant. Eſto poſterioris $\frac{1}{5}$, 1 N. ipſe ergo erit 5 N. proinde triens prioris erit 30 — 1 N, ipſe 90 — 3 N. Hi autem duo coniuncti, cùm facere debeant 100, conficiunt 90 + 2 N, quod æquale eſt 100. & ubi ab æqualib. ſubduxeris æqualia, relinquuntur 2 N. æquales 10. ergo 1 N, 5. Et quia poſuimus $\frac{1}{5}$ poſterioris eſſe 1 N, ipſe totus erit 25. Itẽ prioris $\frac{1}{3}$ erant 30 — 1 N, ſcilicet 25: ergo ipſe totus 75. Et quidem 75 ac 25, ſummam conficiunt 100. prioris autem triens 25, poſterioris quinta pars 5, ſummam 30.

SCHOLION.

Oportet autem hunc.) *Id eſt, oportet eum inter trientem de 100, qui eſt* $33\frac{1}{3}$*, & quintam partem eiuſdem 100, hoc eſt 20, incidere: cùm partium triens & quintans ſumatur. hoc eſt, debet is qui poſcitur numerus, neq; minor eſſe quam uiginti aut alij infra eum, neq; maior quam* $33\frac{1}{3}$ *aut alij ſupra eum: ſed omnino excedere 20, & ſuperari à* $33\frac{1}{3}$*: ac talis heic poſcitur 30, qui incidit inter 20 &* $33\frac{1}{3}$*. Sed quiuis etiam reliquorum qui inter hos ſunt, poſci poterat. Quod ſi uel 20, aut minor eo, uel* $33\frac{1}{3}$ *aut maior eo poſceretur, non conſiſteret quæſtio. Idq; primum de 20 oſtendamus. Eſto prioris trientem, & poſterioris quintantem componere 20. Eſto quintans poſterioris 1 N, ipſe erit 5 N. Eritq;* $\frac{1}{3}$ *prioris 20 — 1 N, ipſe 60 — 3 N. Hi duo compoſiti, conficiunt 60 + 2 N, æquales 100. & æqualia ubi ab æqualibus abſtuleris, fient 2 N æquales 40. & ſic 1 N erit 20. atq; ita poſterior numerus (5 N) efficiet 100: prior autem, 60 — 3 N, nihil erit, cùm 3 N de 60 auferendi, ipſa 60 conficiant. Ergo 100 non eſt diuiſus, quod flagitabatur: ſed quæſtio non conſiſtit, ob eam quam diximus, cauſam. Multo autem magis hoc uſu ueniet, ſi quis numerum quam 20 minorem poſtulet. Sic enim poſterior ipſis 100 præſtabit, pars toti. quod eſt abſurdum. Rurſum hoc oſtendatur de* $33\frac{1}{3}$*. Cùm poſterior ſit 5 N. erit prior 100 — 3 N. ſumma eorum 100 + 2 N, æqualis 100. Atq; heic ſi de æqualibus æqualia auferantur, ſuperſunt 2 N nihilo æquales. quod eſt abſurdum. Multo minus ſtabit quæſtio, ſi numerus poſcatur maior quam* $33\frac{1}{3}$*. heic enim 2 N & aliquot præterea unitates æquabũtur nihilo. Ergo alius numerus poſcẽdus eſt nullus, quam qui uigeſimũ ſuperet, & ſuperetur à* $33\frac{1}{3}$*. Prioris triens (inquit) erit 30 — 1 N. Nam cùm prioris triens & poſterioris quintans 30 faciant, hic quintans poſitus eſt 1 N. unde liquet, aliquot unitates & 1 N, 30 facere. Ergo 1 N ſubtracto de 30, remanſit 30 — 1 N. Non-*

dum enim liquet, quot unitatum ſit 1 N. infrà conſtabit, eſſe 5. ut idem ſit dicere triens primi eſt 30 —— 1 N, ac ſi dicas eſſe 25. Proinde totus prior erit tres triẽtes, id eſt 90 —— 3 N, ſeu 90 —— 15, hoc eſt 75. Hi duo (inquit) compoſiti, faciunt 90 † 2 N. Cùm enim poſterior ſit 5 N. poſterior 90 —— 3 N. aufer à 5 N poſterioris. 3 N quę deerant priori. cùm, ut docuimus, copia ſi penuriam ſuperet, quo illa hanc excedit, id eſt copia. Cum ergo poſterior ſit 25, & prior 90 —— 15, hoc eſt 75: hi duo iuncti 100 faciunt. & omnia 100 æquatur 100. Quod ſi ſic Diophantus dixiſſet: 100 de 100, ſimili de ſimili, ſubducto nihil fuiſſet reliquum. Nunc ille 2 N + 90, ait æquari 100. & abiectis utrinq; 90, relinquuntur 2 N æquales 10. ergo 1 N eſt 5. Non eſt autem, quod priorem poſteriore aut maiorem aut minorem ſemper fore exiſtimes: cùm utrunq; horum fieri poßit.

XYLANDRI.

DIOPHANTI OPERATIO.

$\frac{1}{5}$ poſterioris 1 N. ipſe 5 N.
$\frac{1}{3}$ prioris 30 —— 1 N. ipſe 90 —— 3 N.

Summa 90 † 2 N || 100.
abiectis utrinq; 90
2 N || 10
1 N || 5.
Ergo poſterior 25. prior 100 —— 25,
uel 90 —— 15. id eſt 75.

Obſeruabis autem in hac operatione, ſemper triplũ numeri qui poſcitur, & 2 N, equari 100. Quod facit ad reliqua etiam intelligenda. Nam ſi ponas, partes iſtas debere conficere 25. 75 † 2 N || 100. faciet 1 N 12 $\frac{1}{2}$. huius quincuplum erit poſterior ſiue B 62 $\frac{1}{2}$. Ergo prior A 37 $\frac{1}{2}$. huius $\frac{1}{3}$. eſt 12 $\frac{1}{2}$, illius $\frac{1}{5}$ itidem 12 $\frac{1}{2}$. ſumma 25. ſi 24 eſſet numerus imperatus, A 30, B 70 facerent. $\frac{1}{3}$ A 10, $\frac{1}{5}$ B 14. ſumma 24. Si 32, partes eſſent A 90, B 10. $\frac{1}{3}$ A 30. $\frac{1}{5}$ B, 2. ſumma 32. Atq; heic uides uerum eſſe, quod in fine ſcholiaſtes obſcurè dixit, & nos expreßimus, A aliquãdo maius, aliquando minus eſſe quàm B. Iam quod A & B non dentur, niſi numerus qui poſcitur minor ſit maiore totius ea parte, qualis de parte A poſcitur, maiore, ut 33 $\frac{1}{3}$ heic eſt $\frac{1}{3}$ de 100. & maior minore, qualis heic $\frac{1}{5}$ de 100 eſt, 20: facile ſenties. Ponas enim flagitari 20. Erit 60 † 2 N || 100. & porro factà detractione equalium 2 N || 40. ergo 1 N 20, quintans de B. ergo B erit 100. A autem 0. quod eſt abſurdum. Pone 18 poſci. erunt 54 † 2 N || 100. fit 1 N 23. ergo B erit 115, maior toto. quod eſt impoßibile. Rurſum pone flagitari 33 $\frac{1}{3}$. eius triplum 100. ergo 100 † 2 N || 100. & 100. utrinq; detractis, 2 N || 0. quod eſt abſurdum. Fac poſtulari 35. ergo 105 † 2 N || 100 utrinq; 100 reiectis 5 † 2 N || 0. quod eſt itidem abſurdum. Itaq; uel nulla fit uera equatio, uel pugnat cum hypoſtaſibus ſeu argumento problematis. Notabis & hoc, Diophantũ uitandarum minutiarum gratia, non ipſum B, ſed eis quintantem 1 N feciſſe. Quod ipſum de A licuit facere. ſit enim eius $\frac{1}{3}$, 1 N. ergo A eſt 3 N. Porrò 30 —— 1 N eſt $\frac{1}{5}$ de B. ergo 150 —— 5 N eſt B. adde A. ſumma 150 —— 2 N || 100. Adde utrobiq; 2 N, aufer utrinq; 100, fiũt 2 N || 50. ergo 1 N. 25. & 3 N. 75. A. Subieci autem alias etiam operationes.

I.

A 1 N. Ergo
30 —— $\frac{1}{3}$ N eſt $\frac{1}{5}$ ex B. ergo
5

150 —— $\frac{5}{3}$ N eſt. B
adde A. 1 N

Summa 150 —— $\frac{2}{3}$ N || 100
Adde utrobiq; $\frac{2}{3}$ N, & aufer utrinq; 100.
50 || $\frac{2}{3}$ N

150 || 2 N
A 75. 1 N.
B 25.

II.

Vel B 1 N. ergo
30 —— $\frac{1}{5}$ N eſt $\frac{1}{3}$ A
3

90 —— $\frac{3}{5}$ N A.
adde B. 1 N

90 † $\frac{2}{5}$ N || 100
Abijce 90 utrinq;
$\frac{2}{5}$ N || 100

2 N || 50
1 N || 25. B.
Heic eſt Diophantea proxima.

III.

Aliter.æquatione ad numerum qui poſcitur accommodata.

A.1 N. B.100 —— 1 N. Adde $\frac{1}{3}$ N.& 20 —— $\frac{1}{5}$ N.
Summa 20 + $\frac{2}{15}$ N || 30.& utrinq; abiectis
20 $\frac{2}{15}$ N || 30.multiplica utrunq; per 15

2 N || 150.ergo 1 N 75.A.25 B.
Vel B 1 N. A 100 —— 1 N. Adde $\frac{1}{5}$ N ad
$33\frac{1}{3}$ —— $\frac{1}{3}$ N.Summa $33\frac{1}{3}$ —— $\frac{2}{15}$ N || 30.
Adde utrobiq; $\frac{2}{15}$ N & aufer utrinq; 30.fiet
$\frac{2}{15}$ N || $3\frac{1}{3}$

2 $\begin{matrix}10\\5\end{matrix}$

2 N || 50. 1 N.25.B.&c.

Nota cùm $\frac{2}{15}$ per 15.$3\frac{1}{3}$ multiplicaueris, ut proportio maneat incolumis, 10 per 15, & 2 per 3 denominatores debuiſſent multiplicari. Sed cum 3 ad 15 ſint ut 1 ad 5, 10 per 5, 2 per 1 multiplicato idem rectiùs eſt effectum. Canonem heic nullum pono. cùm per regulam multo ſimplicius & breuius id genus quæſtiones ſoluantur, quam per canones, quos multiplices & perplexos formari oportebat.

VI. Datum numerum in duos partiri, ut prioris pars certa certam poſterioris partem ſuperet quanto iubebimur numero. Hunc autem minorem oportet eſſe eo, qui ad diuidēdum nobis propoſiti numeri partem eam, quæ alteri præſtare debet, exprimit. Partiamur ergo 100 in duos numeros, ita ut prioris quadrans poſterioris ſextantem 20 unitatibus ſuperet. Pono ſextantem poſterioris 1 N.ipſe ergo erit 6 N. Quadrans aūt prioris erit 1 N † 20, ipſe itaq; 4 N † 80. Summa amborū 10 N † 80, æqualis 100. Aufer ſimilia à ſimilibus, relinquuntur 10 N æquales 20. ergo 1 N eſt 2. Iā ad ea quæ poſuimus te confer. ſextantem poſterioris ſtatueramus 1 N, ipſe ergo eſt 12. prioris quadrās fuit 1 N † 20, ſcilicet 22, ergo ipſe 88. manetq; hoc, huius quadrantem ſextante illius maiorem eſſe 20 unitatibus. Ipſi autem coniuncti numeri, 100 propoſitum numerum reſtituunt.

SCHOLION.

Oportet utiq; interuallum partium, quadrantis ad ſextantem, quod datur 20, minus eſſe quadrante numeri 100: quem quadrantem ſi uel æquet uel excedat interuallum, non ſuccedet res. Id demonſtrabimus de 25. Ponamus quadrantem prioris ſextante poſterioris maiorem eſſe interuallo 25. Cum ſextans poſterioris ſit 1 N, & ipſe 6 N, ergo quadrans prioris erit iam 1 N † 25. ergo prior ipſe 4 N † 100. Summa numerorum 10 N † 100 æqualis 100. atqui ſi ab æqualibus æqualia aufero, ſuperſunt 10 N æquales nihilo. quod eſt abſurdum. Multo magis etiam incidet abſurdum, ſi interuallum 26 aut amplius ponatur. Nam ſi 26 ſit, 10 N † 4 æquabuntur nihilo. Notandum, quòd in præcedente theoremate poſtulatum numerum poſuit inter duas partes propoſiti: heic tantùm minorem eum maiore parte poſtulat eſſe, ut liceat etiam uſq; ad unitatem deſcendere.

XYLANDRI.

Vel æquet uel excedat.) *In Græco uerba ſunt māca, quæ ſic lego εἴτε γὰρ ἴσε ἔιη, εἴτε ἄλλος τίς. Cæterùm Diophātus heic, ut ſolet, minutias uitauit. & orſus eſt à poſteriore. Potuit etiā à priore. Cuius quadrans 1 N, ipſe 4 N. Et quia quadrans 20 unitatibus excedit ſextantem poſterioris, 20 demtis de 1 N, ſextans ille habebitur 1 N —— 20. ergo totus poſterior 6 N —— 120. Hic priori additus, conſtituit ſummam 10 N —— 120, æqualem 100. additis utrobiq; 120, fit æquatio 10 N || 220. ergo 1 N.22. & 4 N.88, prior numerus, &c. Adieci autem in tironum gratiā quatuor alios modos ſoluendæ quæſtionis, quorum bini in æquatione reſpiciunt ad totum diuidendū, bini ad æqualitatem quæſitarum portionum, ratione interualli.*

A 1 N. ergo *Vel* *B 1 N. itaq;*
$\frac{1}{4}$ N — 20 eſt $\frac{1}{6}$ B. *$\frac{1}{6}$ N + 20.eſt $\frac{1}{4}$ A.*

$1\frac{1}{2}$ N —— 120 B. *$\frac{2}{3}$ N † 80 eſt A.*

adde A. 1 N.

$2\frac{1}{2}$ N —— 120 || 100
omnia per 2 multipl.
5 N —— 240 || 200
adde utriq; 240.
5 N || 440
1 N ergo 88. A. ergo
B 12.

adde B. 1 N.

$1\frac{2}{3}$ N † 80 || 100
ſubtrahe utriq; 80.
$1\frac{2}{3}$ N || 20
per 3 multipl.
5 N || 60
1 N. 12. B. ergo A 88.
ſic ferè Diophantus.

ALITER.

A 1 N B 100 —— 1 N.
$\frac{1}{4}$ N. $16\frac{2}{3}$ —— $\frac{1}{6}$ N.
20 adde
|| —— $36\frac{2}{3}$ —— $\frac{4}{6}$ N
adde utriq; $\frac{1}{6}$ N
$4\frac{5}{12}$ N || $36\frac{2}{3}$

---

5 N 110
4
|| 440
1 N. 88. A. &c.

Vel. B 1 N A 100 —— 1 N
$\frac{1}{6}$ 25 —— $\frac{1}{4}$ N
aufer 20
5 —— $\frac{1}{4}$ N || $\frac{1}{6}$ N
adde utriq; $\frac{1}{4}$ N
5 || $\frac{5}{12}$ N
per 12 mult.

---

60 || 5 N
1 N *ergo 12. B. &c.*

Examen facile eſt, & in ipſa quæſtiõis tractatione incluſum. Quadrans ex 88 eſt 22. Sextãs de 12, 2. quæ à 22 detracta, relinquunt 20. ut poſtulabatur. Porrò quis neſcit, 88 & 12 eſſe 100. Itaque non miretur lector, me plerunq; comprobationis adſcriptioni ſuperſediſſe.

VII. Inuenire numerum, à quo ſi auferãtur duo dati numeri, reſidua eam ſeruẽt, quæ poſcitur, rationẽ. Iubemur ab eodem numero auferre 100, & 20, ut maius reſiduum minoris ſit triplum. Eſto is numerus 1 N. à quo ſi auferam 100, reſiduum eſt 1 N —— 100: ſi 20, reſtat 1 N —— 20. & cùm reſiduum maius minoris ſit triplum, hoc ter ſumtũ maiori erit æquale. minoris reſidui triplũ 3 N —— 300, æquale 1 N —— 20. defectus cõmunis utriq; addatur, fient 3 N æquales 1 N † 280. Auferãtur etiã utrinq; ſimilia, relinquũtur 2 N. æquales 280. & 1 N eſt 140. Iã ſecundũ poſita, numerũ quæſitũ ſtatuerã 1 N. is ergo eſt 140. ab hoc aufer 100, ſuperſunt 40: aufer 20, reſtant 120. quod reſiduum utiq; eſt alterius triplum.

SCHOLION.

Quia inuentus eſt numerus 140: quando dicit, reliquus numerus eſt 1 N —— 100: idẽ eſt ac ſi dicas, ſi ab 140 detexero 100, reſtãt 140 demtis 100, id eſt 40: ſi 20, reſtant 140 demtis 20, hoc eſt 120. & cum numerus demtis 20, id eſt 120, debeat triplum eſſe reſidui quod supereſt 100 de 140 ablatis, quod eſt 40: ergo ter ſumtus minor, qui erat 1 N —— 100, hoc eſt 40, æquatur 1 N —— 20 maiori, ſcilicet 120. ter enim 40, faciunt 120. At minor ter facit 3 N —— 300, hoc eſt 120. Sed quoniam nondum fuit expreſſum quot unitatib. conſtet 1 N, cũ 3 N —— 300 æquentur 1 N —— 20, communem defectum utrobiq; adijcit. ita & 3 N fiunt integri & ab altera parte 1 N † 280. nam de 300 quæ adduntur, 20 defectum implent, & reliquum abundat 280. Deinde utrinq; auferũtur æqualia: non unitates, ſed 1 N. cum ab una parte ſint 3 N integri, ab altera 1 N † 280. abijcitur utrinq; 1 N (cùm amplius non poßit) ſuperſunt 280 & 2 N æqualia.

XYLANDRI.

Obſeruabis id reſiduum eſſe maius, quod ſit minore: minus, quod maiore detracto numero de propoſito relinquitur. Cætera ſunt plana.

1 N. *quæſitus.*
1 N —— 100 *reſidua* 1 N —— 20
minus. *maius.*
3 N —— 300 || 1 N —— 20
triplum.
Addè utriq; 300

---

3 N || *1* N † *280.*
aufer utrinq; 1 N
2 N || *280.*
1 N. *140. hinc aufer* $\left\{\begin{matrix}100\\20\end{matrix}\right\}$ *reſtat* $\left\{\begin{matrix}40\\120\end{matrix}\right\}\frac{1}{3}$.

IIX. Datis duobus numeris, alium inuenire, qui ſi utriq; datorum adijciatur, collecti eam habeant, quæ poſcitur, rationem. Hanc uerò minorē eſſe oportet ipſa datorum numerorū ratione. Sit ad 100 & ad 20 adijciēdus numerus, ea lege ut maius collectu minoris ſit triplum. Ponatur is eſſe 1 N: qui ad 100 additus, facit 100 † 1 N, ad 20, 20 † 1 N. cumq; maior ſumma minoris eſſe debeat tripla, hęc ter ſumta maiorem æquabit, triplum minoris. eſt ergo 60 † 3 N. æquale 100 + 1 N. aufer ab æqualibus æqualia, relinquuntur 2 N æquales 40. & 1 N eſt 20. Ad propoſitum. 20 ad 100, fiunt 120. ad 20, 40. Eſt autem 120 triplum numeri 40.

SCHOLION.

Oportet, inquit, rationem datam, hoc eſt quam ſummæ inter ſe habebunt, ut hic tripla eſt, minorem eſſe ratione quæ eſt datorum initio numerorum, ut 100 ad 20. hæc enim eſt quincupla, illa tripla. Eſt autem tripla minor quam quincupla ratio, ut & 3 minus quam 5. Nam ſi res ita non habeat, non ſuccedet. Et quod muneris rationem quincuplam habentibus, 100 inquam ad 20, non poſſit eadem etiam collectorū eſſe ratio, ſic oſtendemus. Adijciendus utriq; eſt 1 N, ita fient 100 † 1 N, 20 † 1 N. cumq; maior ſumma debeat minoris quincupla eſſe, huius ergo quincuplum maiorem æquabit. Ergo 100 † 5 N æquantur 100 † 1 N. & abiectis utrinq; æqualibus, relinquentur 4 N æquales nihilo, quod eſt abſurdum. Augebitur hoc abſurdum, ſi non parem, ſed maiorem etiam rationem collectorum quam datorum ſtatuas: ut uerbi gratia ſeſcuplam. nam aliquot N & præterea eis adiunctæ unitates, æquabūtur nihilo. Notandum, in hac quæſtione duplicem fieri detractionem, numerorum ſcilicet & unitatum. Primum de 3 N † 60 & 1 N † 100 æqualibus, utrinq; 60 abijcimus: relinquuntur 3 N æquales 1 N † 40. deinde cūm nondum quantus ſit 1 N compertum habeatur, utrinq; 1 N auferimus. ita relinquuntur æqualia 2 N & 40.

XYLANDRI.

100 † 1 N. *20 † 1* N. *hoc ter. 60 † 3* N || *100 † 1* N. *aufer utrinq; 1* N † *60. reliqua æquatio 40* || *2* N. *Aliud. Detur numerus, qui ad 12 & 18 additus; duplos conſtituat. fient 2* N † *24* || *1* N † *18. aufer utrinq; 1* N † *18. reſtat 1* N † *6 æqualia nihilo. Id fit, quia dupla ratio maior eſt quam ſeſquialtera, quæ eſt ratio terminorum datorum. Si autē iuſsiſſes ſummas fieri ſeſquitertias, quæ eſt minor, numerus inueniretur 6. qui additus utriq; 18 & 24 conſtituit.*

12 † 1 N   *18 † 1* N
adde trientem ſuum
16 † $1\frac{1}{3}$ N || *18 † 1* N. *aufer utrinq; 1* N *& 16*
$\frac{1}{3}$ N || *2. facit 1* N *6. &c.*

IX. A' datis duobus numeris eundem auferre, ita ut reſiduorū ſit quam quis imperauerit ratio. maiorem tamen eam eſſe oportet ratione datorum numerorum maioris ad minorem. Sit & à 100, & à 20 auferendus idem numerus, ita ut reſiduum maius minoris ſit ſeſcuplum. Numerus ſubtrahendus ſit 1 N, reſidua 100 — 1 N & 20 — 1 N. Et cum reſiduum maius ſeſcuplum eſſe minoris debeat, huius ſeſcuplum ergo illi æquale eſt. ſexies 20 — 1 N ſunt 120 — 6 N æqualia 100 — 1 N. Adijciatur quod deerat, utriq;, & auferantur ſimilia utrinq;. tādem habebis 5 N æquales 20. & 1 N eſt 4. Ad rem. 4 ſi à 100 detrahas, 96 relinquuntur: ſi à 20, 16. Eſt autem 96 reſiduum maius, minoris 16 ſeſcuplum.

SCHOLION.

Oportet, inquit, rationem datā, qualis heic eſt ſeſculpa, maiorem eſſe ratione datorum maioris ad minorem, 100 ſcilicet ad 20, quæ eſt quincupla. Superat autem ſeſcupla quincuplam. Nam ſi uel æqualis uel minor ratio reſiduorū quam terminorum poneretur, quæſtio non conſtabit. Si enim (ne eadem inculcemus) æqualis ſiue quincupla ſtatuatur, conſequens erit 4 N æquari nihilo. quod abſurdum augebitur, ſi minorem quincupla rationem ponas. Quod de adijciendo utriq; defectu ait, cum æquentur 120. — 6 N & 100 — 1 N, quæritur de utro defectu ſit intelligendum Dicimus non heic modò, ſed ubiq; in tali caſu, maiorem defectum communiter addendum eſſe. Nam ſi minorem adijceremus, nondum aboleretur maior defectus: ſed hoc addito, etiam minor tollitur. Ita hic maiore defectu 6 N ad-

dito, fiunt 120 integrum: & 100 —— 1 N fiunt 100 † 5 N, cum 1 N ob defectum aboleatur, 5 ſuperſtitibus. Nam defectus ſi excedatur à copia, ei additus defectum creat.

XYLANDRI.

100 —— 1 N   20 —— 1 N
6
120 —— 6 N
adde utrinq; 6 N
100 † 5 N || 120
aufer 100 utrinq;
5 N || 20
1 N. 4.
100   20
4   4
96   16
6

Abſurdi exemplum.
100 —— 1 N.   20 —— 1 N
Ratio quincupla   quinquies.
reſiduorum.
100 —— 5 N
adde utrinq; 5 N
100 † 4 N || 100
aufer 100 utrinq;
4 N || 0.
Ponatur reſiduorum ratio tripla:
100 —— 1 N || 60 —— 3 N
&
100 † 2 N || 60
40 † 2 N. & || 0

Græca uerba de defectu adijciendo erant mutila.

X. Datis duobus numeris, eundem tertium maiori adimere, & minori addere, ut reſidui ad collectum ſit quæ poſcitur ratio. Sit idem numerus ad 20 addendus, & de 100 ſubtrahendus, ut maius minoris ſit quadruplum. Numerus iſte ſit 1 N, quo ad 20 addito, fiunt 1 N † 20: à 100 detracto, 100 —— 1 N. & cùm maius minoris ſit quadruplum, minus quater ſumtum maiori æquabitur. Minus autem quater ſumtum fit 400 —— 4 N. id æquabitur 1 N † 20. Addatur communiter defectus, & æqualia ab æqualibus auferantur, emergunt 5 N æquales 380, & fit 1 N, 76. Ad rem. Addendus & adimendus datis, 1 N erat, id eſt 76. qui ad 20 adiectus 96 facit: de 100 ſubtractus, 24 relinquit. manetq; ſumma reſidui quadrupla.

SCHOLION.

Heic, cùm dati initiò numeri 100 & 20 quincuplam rationem teneant, nihil intereſt æqualémne ei, an uerò uel maiorem uel minorem conſtituas rationem inter collectum & reſiduum futuram: ſi quidem ponas maiorem eſſe 20 † 1 N, minorem 100 — 1 N. Si uerò hunc contrà maiorem, illum minorem ponas, determinationem requiret quæſtio hanc, ut ratio collecti & reſidui data ſemper minor ponatur ratione datorum initio numerorum, neq; æqualis ei, neq; maior. Exemplum ſubijciamus. Sit minor 20 + 1 N, maior autem 100 — 1 N, ac maior minoris ponatur quincuplus. Ergo quincuplum minoris, 100 + 5 N æquatur 100 — 1 N. & impleto quod deerat erunt 100 æqualia 100 + 6 N. abiectisq; utrinq; æqualibus, 6 N æquantur nihilo, quod eſt abſurdum. Multo abſurdius eueniet, ſi maior quincupla ponatur. Hanc quæſtionem alio modo conſideremus. Datis duobus numeris eundem tertium & maiori addamus, & minori adimamus, ut ſummæ ad reſiduum ratio ſit quæ poſcitur. Numeri dati rurſum 100 & 20. huic adimatur, illi addatur idem numerus, & ſit collectum reſidui ſeptuplum. In tali enim caſu, ſemper poſterior ratio priore, quæ erat datorum maioris ad minorem (ut heic erat quincupla, 100 ad 20) maior ſit oportet: ſemperq; is minor cenſebitur, qui defectum habet adnotatum: nunquam, qui abundat. Proinde numeri erunt 20 — 1 N & 100 † 1 N. heic maior, & illius ſeptuplum. ſepties ergo 20 — 1 N, hoc eſt 140 — 7 N æquantur 100 † 1 N. Addatur communiter defectus, erunt 140 æqualia 100 † 8 N. auferantur æqualia utrinq;, erunt 8 N æquales 40, & 1 N erit 5. Is à 20 detractus, relinquit 15. additus ad 100, conficit 105, qui ſepties 15 continet. Cæterùm in Diophanti opere, cùm æquarentur 20 † 1 N & 400 — 4 N, defectus 4 N utrinq; adiectus, fecit 400 integrũ, & ab altera parte 20 + 5 N. Abiecta ſunt deinde de æqualibus æqualia, utrinq; 20: ita manſerunt 5 N æquales 380.

XYLANDRI.

In huiuſmodi quæſtionibus duplex datur ſolutio, quia tam reſiduum collecti, quam collectum ſummæ poteſt fieri (uerbi gratia) quadruplũ. quod uoluit monere ſcholiaſtes, & ſubiecta exempla monſtrant.

Multo abſurdius.) *Nam 20 + 7 N æquabuntur nihilo.*

Semperq; is minor cenſebitur.) *Hoc ipſa ratio dictat. Qui enim numerus per ſe maior altero erat, qui non ſuperet auctus eum deminutum?*

Cæterùm in Diophanti.) *Hæc adieci, quia in Græco quò pertinerent non erat expreſſum. Duplicẽ operationem Diophanti quæſtionis accipe.*

Minor

Maior. 20 † 1 *N.* *Minor.* 100 —— 1 *N*
4

400 —— 4 *N*
adde 4 N, & deme 20 utriq;
5 *N* || 380.
1 *N* || 76.
Collectum 96. reſiduũ 24. Collectum reſidui quadruplum.

Minor 20 † 1 *N* *Maior.* 200 —— 1 *N*
4

80 † 4 *N*
adde 1 N utriq;, & aufer 80
5 *N* || 20.
1 *N.* 4.
Collectum 24. reſiduum 96. Reſiduum collecti quadruplum.

Solutio quaeſtionis ab interptete poſitæ.

Minor. $\frac{20}{7}$ —— 1 *N.* *Maior* 100 † 1 *N*

140 —— 7 *N* ||
adde 7 N utriq;, & deme 100.
40 || 8 *N.* 1 *N ergo 5. de 20, 15. ad 100: 105. ratio ſeptupla.*

XI. Eidem numero duos alios, alterum addere, alterũ detrahere, ut collecti & reſidui ſit quæ poſcitur ratio. Addam eidem numero 20, & detraham 100, ut collectum ſit reſidui triplum. Sit numerus qui quæritur, 1 N, huic ſi addas 20, adimas 100, fiunt 1 N † 20 & 1 N —— 100. triplũ minoris 3 N —— 300 ęquantur maiori 1 N † 20. adijce utriq; quod deeſt, & abijce utrinque æqualia: relinquentur 320 æqualia 2 N: Eſt ergo numerus qui quæritur, 160. ac ſecundum propoſita, maior 180, minor 60. maior minoris triplus.

SCHOLION.

In decima quæſtione cum unitatib. idem numerus adderetur aut detraheretur: fiebat ut aliquando is cui additum erat, aliquando is cui detractum, maior eſſet altero. Heic ſemper is cui additum eſt, maior habetur. Cõuerſe enim heic res habet, quòd unitates certæ eidem numero uel adduntur uel adimuntur. Iſthic autem, cum non conſtaret quot unitatum eſſet numerus, non liquebat etiam uter utro maior eſſet. Verbi gratia ſint duo numeri 2 & 10. illi numerus quidã addatur, huic idẽ detrahatur: erit alter 1 N † 2: *alter* 10 — 1 N. *Si* 1 N *ſit 2, ille erit 4, hic 8. & maior is, cui detractum fuit. Si autem* 1 N *ſit 5, ille 7 erit, hic 5: & maior is, cui aliquid additum eſt. At uerò heic cum eidem numero & addatur minor, & detrahatur maior: manifeſtum eſt ſemper maiorem fieri eum cui acceſſio facta eſt. Sed ne hoc quidem definitione opus habet: neq; ſi ab eodem minorem auferamus, & eidem maiorem addamus, ut ſi fiat* 1 N —— 20 & 1 N † 100.

XYLANDRI.

Res nihil habet obſcuritatis: cum numerus quantulamcunq; paſſus deminutionem, neceſſariò ſit quàm antè minor, ne dum ſibi auctum æquare poſſit.

CANON. Si quidem multiplex ratio eſt propoſita, multiplica detrahendum per nomẽ rationis, adijce addendũ, ſummã diuide p̱ nomẽ rationis unitate deminutũ. *Detur numerus cui ſi 44 addas, & eidem detrahas 16, maius minoris ſit quadruplũ. 4 in 16 duc, fiunt 64, adde 44, ſumma 108. diuide per 3. (cum ratio poſcatur quadrupla.) habes 36 quæſitum numerum. Huiuſmodi canonum ratio eſt ipſe Algebræ proceſſus.*

1 *N* † 20. 1 *N* —— $\frac{100}{3}$.

3 *N* —— 300
adde *aufer* 1 *N utriq;*
2 || 320. 1 *N.* 160.

XII. Datum numerum in duos diuidere, idque bis: ita ut unus è priore diuiſione prouenientium, cum uno ex altera prouenientium rationem quæ requiritur cõſtituat: itemq; petitam aliquam rationẽ etiam alter ad alterum. Iniunctum ſit nobis, 100 diuidere in duos numeros, rurſumq́; eundem in alios duos: ita ut maior prioris diuiſionis, duplus ſit ad minorem poſterioris: ac uiciſsim maior è poſteriore diuiſione, triplus ad minorem prioris. Eſto minor poſterioris partitionis 1 N, ergo maior prioris 2 N, ac proinde huius minor 100——2. Cuius cum ſit triplus qui eſt in poſteriore partitione maior: is erit 300——6 N. Supereſt, ut huius quoq; partitiōis numeri 100 faciant collecti. At conficiunt 300——5 N, id ergo æquatur 100. Inuenies 1 N eſſe 40. Iam perſequamur præſcriptum. Maior prioris partitionis eſt 2 N. id eſt 80. ergo eiuſdē altera pars 20. ſcilicet 100——2 N. Maior poſterioris 300——6 N, nimirum 60. minor 1 N, id eſt 40. Et euidens eſt quæſiti commonſtratio.

SCHOLION.

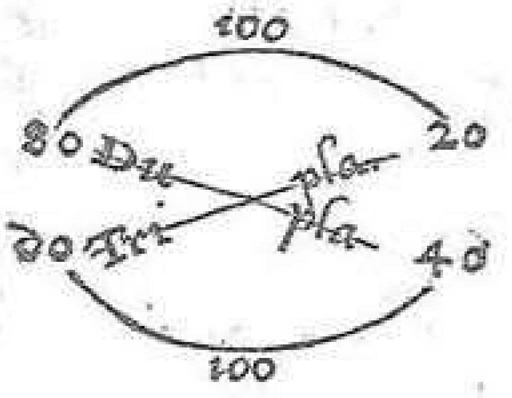
Diuiditur heic 100 bis: ſemel in 80 & 20: iterum in 60 & 40. Eſtq́; 80 duplus ad 40, & 60 triplus ad 20. numeris in quincuncem diſpoſitis. Duo partitionis poſterioris numeri 300——6 N & 1 N coniuncti, faciunt 300——5 N. cùm N unus, unius N defectum expleat 1 N. autem 40 ualet: ſic. Inuentum eſt 300——5 N ualere 100. adijce utriq; defectum. fient 300 integer, & 100 † 5 N. aufer à ſimilibus ſimilia, hoc eſt utrinq; 100. relinquuntur 5 N æquales 200. ſicq́; 1 N fit 40.

XYLANDRI.

Facilè apparet, 1 N uel maiori, uel minori, idq́, tam prioris quàm poſterioris partitionis numero poni. itaq́, quater uariari operationem poſſe. Ego nullam, præter uerbis Diophanti debitā ſcribam: ne diffidere de ſtudio lectoris uidear.

Maior. Minor.
2 N. 100——2 N. I partitio.
300——6 N 1 N. II
300——6 N
1 N adde.
300——5 N || 100.
adde utriq; 5 N, adime 100
200 || 5 N. 1 N ergo 40.

Χιασμὸς ſiue decuſſatio, cuius meminit ſcholiaſtes, hæc eſto.



XIII. Ter diuidemus numerum propoſitum in duos numeros: ita ut unus primæ partitionis ad unum ſecundæ rationem quæ præſcribitur habeat: reliquus ſecūdę ad unum tertiæ, & reliquus tertiæ ad reliquum primæ eam habeant bini, quæ poſtulabitur ſeorſim, rationem. Partiamur 100 in duos numeros ter, ut maior primæ partitionis ſit triplus ad minorem ſecundæ: maior ſecundę ad minorem tertiæ duplus: denique maior tertiæ ad minorem primæ, quadruplus. Ponamus minorē partitionis tertiæ 1 N, erit maior ſecundæ 2 N, & quia cum minore conficit 100, erit minor 100——2 N. Cuius triplus cùm ſit maior primæ: is erit 300——6 N. ergo minor primæ erit 6 N——200. Cuius quadruplus cum ſit maior tertiæ, erit is 24 N——800. Reliquum eſt, etiam tertiæ partitionis membra coniuncta facere 100. & 1 N eſt 36. Examinemus poſita. Minor tertię diuiſionis eſt 36. maior 64. Minor primæ 16, maior 84. Minor ſecundæ 28: maior 72. & manifeſtum eſt hos ſatisfacere propoſito.

SCHOLION.

Tertiùm diuidẽdus eſt datus numerus in duos inæquales. Sic 100 diuiſus eſt in 84 & 16, in 72 & 28, in 64 & 36. & eſt 84 ad 28 triplus: 72 ad 36 duplus: 64 ad 16 quadruplus. Cum autem maior primæ partitionis ſit 300—6 N: quomodo minor eiuſdem fiat 6 N—200, hinc ſciri poteſt. Cum ambos eſſe ſimul 100 oporteat, & maior ſit 300—6 N, oportet minorem haberet 6 N, ut horum defectum in maiore exſarciat. præterea minori deeſſe oportet 200, ut cùm 300 integer impleto defectu 6 N factus eſt: detracto ab eo 200 qui deerat, relinquantur adhuc præſentes 100 quanta eſt duarum partium ſumma. Porrò 25 N—800 æquantur eidem 100. & adiecto utrinq; quod deerat, 25 N integrum æquatur 900. & 1 N eſt 36. nam tantum exit, 900 per 25 diuiſo. Cum ergo maior primæ partitionis ſit 300—6 N, & 6 N faciant 216: ſi defectũ minoris partis, 200, huic ſubtrahas, minor erit 16. Maior ſecũdæ diuiſionis eſt 72, nimirũ 2 N. Minor 100—2 N. & cum 2 N ſint 72, hoc detractũ de 100. reſtat minor portio 28. Maior tertiæ eſt 24 N—800. & cum 24 N ſint 864, hinc ablatis 800, is erit 64. minor autem 1 N, ſcilicet 36. Obſeruandum, quòd ſi uelimus in decimatertia quæſtione expeditè numeros inuenire, ne quid nobis moleſtiæ à minutijs exhibeatur: eum qui ter diuiditur, ponere debemus aut æqualem aut multiplicem numeris qui oriuntur compoſitione maioris & minoris numerorum tertiæ partitionis. Sicut heic diuiſus eſt 100, numeri 25. at 100 ſunt quadruplum ad 25. Nam ſi non fiat hoc, ſuccedat quidem propoſitum, ſed unitatem in minutias frangi oportebit. Rationes etiam non per interualla diſsidentes nominum, ſed continuè ſuccedentes inuicem oportet ſumi: ut duplam, triplam, ac deinceps. ſi enim poſt duplam, non triplam, ſed quadruplã ponas: res non ſuccedet. Id quoque diſpiciendum eſt, ut ſemper à minima ratione ordiaris: id eſt ut maior ſecundæ partitionis minimam datarum rationum habeat ad minorem tertiæ, ſicut heic eſt dupla: deinde maior primæ ad minorem ſecũdæ, triplam ſcilicet. deniq; maior tertiæ, ad minorem primæ, maximam habeat rationem: utpote quadruplam. Nam ſi inuerſo ordine rationes ponantur, non ſuccedet negocium.

XYLANDRI.

In duos errores minimè diſsimulandos interpres heic lectorem deuocat. Quorum prior fugã minutiarum ſuadens, & ad eam compendium (ſi dijs placet) oſtendens, uim logiſticæ eneruat. Non enim ut formes elegantia & facilia exempla quæſtionum, ideò potiſsimùm logiſticẽ diſces, ſiquidem ſapis, aut bene monenti credere potes: ſed ut uel ſoluere, uel monſtrato abſurdo explodere poſsis problemata propoſita. Itaq; tribunum aliquẽ cenſeo adeat ſcholiaſtes: nam à me quidem exceptionem iſtam nunquam impetrabit, ut ille ait apud Tullium. neq; enim hoc agitur ut amuſsis ad lapidem, ſed ut lapis ad amuſsim dirigatur. & nemo peritus uel mediocriter harum rerum neſcit, quantum plerunq; in ipſis minutijs ſit compendij. Quod autẽ negat quæſtionẽ poſſe ueram & legitimã eſſe, niſi nomina rationum continuo ſe ordine ſubſequantur: & quod hinc colligit, in opere ſemper eſſe ordiendũ à minima ratione, &c. horum utrunq; eſt uanum ac ridiculũ. Neq; heic inſtituam diſputationem ſubtilem: ſed καθόλου hominis data unica pro ſexcentis inſtantia euertam. Priùs tamen Diophanti exemplum tractabo, hoc præfatus, cùm ſex fiant numeri, in quorum binos 100 diuidatur: licere tibi ſexies uariare operationẽ: tantùm abeſt ut 1 N cogaris minori tertiæ partitionis alligare: quòd qui ſcholiaſtæ in mentẽ uenire potuerit mirarer, niſi uiderẽ fugã minutiarũ eum præter caſam, quod aiunt, extuliſſe. Diophanteæ operationis hæc eſt ἔκθεσις.

	Maiores.	*Minores.*
Partitionis	*primæ 300—6 N*	*6 N——200*
	ſecundæ 2 N	*100——2 N*
	tertiæ 24 N——800	*1 N*

Aequatio 24 N——800 & 1 N, hoc eſt 25 N——800 || 100. nimirũ 25 N || 900. facit 1 N 36. &c. (In his elementis additionũ, detractionũ, æquationũ, immoratur ſcholiaſtes explicandis: uellẽ alibi operã locaſſet.) Cætera liquent ex ſubiecta tabella.

		Maior.	*Minor.*		
Diuiſio	I	*A.84.*	B.16.	*A ad D tripla*	*ratio.*
	II	C.72.	*D. 28.*	*C ad F dupla*	
	III	*E.64.*	*F.36.*	*E ad B quadrupla*	

de reliquis unam duntaxat ſubijcio, in qua B pono 1 N, & ſequor hypoſtaſes, dum ſingulos numeros inueniam.

		Maior.	Minor.
Partitio	I	24 N—300	1 N.
	II	200—8 N.	8 N—100.
	III	4 N.	100—4 N.

Tandem maiorem primæ diuiſionis compertum eſt eſſe 24 N—300. adde 1 N. ergo 25 N—300 æquantur 100. hoc eſt 25 N||400 ergo 1 N. 16. Cætera piget referre. Sed cenſeri me etiam ſic effugiſſe miuutias, in quas non incides, ſi à minorũ aliquo initium ſumas: ſi tamen hoc eſt operæpreciam? aut putas me iniuriam ſcholiaſtæ feciſſe? Sed uidemus etiam poſterioris reprehenſionis caput, hac adeò in quæſtione tractanda. Diuidatur 180 ter in duos numeros, ita ut primæ partitionis maior ad ſecundæ minorem ſit quincuplus: ſecundæ maior ad tertiæ minorem ſeſquiplus ſiue ſeſquialter: tertiæ maior ad primæ minorem, ſuperquadripartiens decimas quintas, id eſt ut 19 ad 15. Niſi fallor, hæ rationes non ſunt tales, quales noſter imperabat, quarũ nomina continuato unitatis incremento ſe ſubſequerentur. Et tamẽ profectò quæſtio ſex ad minimum operationibus conſtanter συσταθήσεται. Ordiamur à minore ſecundæ partitionis, ſeu D, quando ita libet, & hypoſtaſes, ut noſter autor uocat, quæſtionis perſequamur. Eſto D (ne quid obſcurum relinquat breuitas.) 1 N. ergo A 5 N. ergo B 180—5 N. C uerò dubium non eſt quin ſit 180—1 N. quod cum ſit ad F, ut 3. ad 2, F utique eſt $3\frac{60-2}{3}$ N. Iam reſtat E quærendus, qui ſibi inæqualis ipſi nunquam nimirum erit. Habebimus aũt duobus modis altero, ſi F ab 180 ſubtrahas, relinquitur E 180 $\frac{+2}{3}$ N. altero, per regulam proportionum. eſt enim E ad B ut 19 ad 15. Ergo ſi B per 19 multiplices, productum (uidelicet 3420—95 N.) per 15 partiare, quotiens E oſtendet. nempe $\frac{684-19}{3}$ N. heic ergo æquatur E ante inuentum 180 $\frac{+2}{3}$ N. & abiectis denominatoribus (quod eſt, utroq; per 3 multiplicato, ut alibi docuimus.) 180 † 2 N || 684—19 N. & tandem 504 || 21 N. Facit 1 N 24. quod eſt D. ergo A 120, &c.

Partitio	I	A 120.	B 60	A ad D 5.	
	II	C 156	D 24.	C ad F $\frac{1}{2}$	
	III	E 76.	F 104	E ad B $\frac{13}{15}$.	&c.
		Maior.	Minor.		

In hoc exemplo id quoq; dedita opera feci, ut æquationem alio quàm Diophantus quærerem artificio: tantoq; magis paterent diuitiæ huius artis, quas ſcholiaſtes circumſcribere, & in arctũ cogere tantas copias neſcio qui inſtituerat. Diligentibus credo me rem gratam feciſſe. eos qui minutiarum compendia & ignorant, neq; uolunt diſcere, ut ἀμυήτους planè hoc ex auditorio iubeo abeſſe. Abſtine ſus, tibi non ſpiro: dicebat amaracus.

XIV. Inueniantur duo numeri, quorum multiplicatio unius in alterum, producat numerum cuius ad ſummam ipſorum ſit quæ poſtulatur ratio. Oportet autem id quod ponitur pro multitudine unitatum unius numerorum, maius eſſe numero à quo ratio poſtulata nomen ſuum habet. Mandatũ ſit producti rationem ad ſummam debere eſſe triplam. Ponatur numerorum alter 1 N, alter (ut addita quæſtioni conditio præcipit) maior quàm 3. puta 12. multiplicatio 1 N in 12 producit 12 N. additio ſummam 1 N † 12. Et cum huius triplum ſit 12 N: ergo ter 1 N † 12, hoc eſt 3 N † 36 æquantur 12 N. & 1 N eſt 4. Proinde 4 & 12 numeri ſunt, qui quæſtioni ſatiſfaciunt.

SCHOLION.

Oportet alterum numerorum maiorem poni numero qui denominat rationem. Ita dantur heic numeri 4 & 12. quorum ſumma 16, productum 48, triplum ſummæ. nomen hæc ratio habet à ternario hoc itaq; maior eſt alter numerorum. Hoc ergo dicit, alterum numerorum maiorem debere poni quàm 3, ſi ratio tripla: quàm 4. ſi quadrupla poſcatur, ac deinceps. alioqui enim res non ſuccedet. Productum (inquit) eſt 12 N. nam N in ſe, Q facit, ut 4 gignit

gignit 16: in unitates, N. ut nunc 4 in 12, faciunt 48, duodecies ipſum 4. nam cùm unitas immutabilis ſit ac ſemper ſubſiſtat, ſpecies in eam ducta, ſuam retinet naturam. Ergo cùm 1 N in 12 multiplicetur, fiunt 12 N. nam ſi 1 N in 1 multiplicaretur, fieret 1 N; ſi in 2, 2 N. ſic in 12, 12 N. Iam minus ter ſumtum fiunt 3 N † 36, æqualia 12 N. auſer utrinq; 3 N, reſtant 9 N æquales 36, & 1 N 4.

XYLANDRI.

Huiuſmodi quæſtiones non unam, ſed complures ſolutiones admittunt, maximè in minutijs. & cùm alter numerorum 1 N ponitur, perinde eſt qualem numerum abſolutum alterius loco ponas, modò minor ne ſit nomine rationis poſtulatæ, néue æqualis ei. Nam ſi heic poſuiſſes numeros 1 N & 3 ſumma 1 N † 3. productum 3 N. huic æquabitur ſummæ triplum 3 N † 9. & abiectis utrinq; 3 N, 9 æquabuntur nihilo. Item ſi poſuiſſes 1 N & 2. ut alter nomine rationis minor eſſet, æquarentur 3 N † 6 & 2 N. & utrinque remotis 2 N, 1 N † 6 æquaretur nihilo. Poſuit ergo Diophantus 1 N, & 4. atque adeò generalem Canonem heic rationũ conſideratio & operis ſuggerunt, quem adſcribere non piget.

CANON. Si quærantur duo numeri, quorum producti ad ſummam detur ratio: unũ adde rationis nomini, & habebis alterũ. alter fit, nomine rationis in eũ ducto.

Verbi gratia, quæruntur duo numeri, quorum productum ſit undecuplum ad ſummam. adde 1 ad 11, habes 12, alterum, ſi 12 per 11 multiplices, ſcilicet 132. Summa eſt 144, productũ 1584, per eam diuiſum, quotiens 11. Quod non modò de multiplicibus intelligi uelim, ſed de alijs etiam quibuſuis tandem rationibus. Ponam exempla ſingularum, tu (ſi lubet) periculum facito. Sit ratio poſtulata $\frac{1}{5}$. *erunt numeri 1* $\frac{1}{5}$ *&* $\frac{6}{25}$. *productum* $\frac{36}{125}$. *tantundem fit ſi ſummam eorum per* $\frac{1}{5}$ *multiplices. Ratio* $\frac{2}{3}$. *numeri 1* $\frac{2}{3}$. *1* $\frac{1}{9}$. *productum* $\frac{50}{27}$. *tantundem fit ſumma 2* $\frac{7}{9}$ *per* $\frac{2}{3}$ *multiplicata. Ratio 1* $\frac{1}{3}$. *numeri 2* $\frac{1}{3}$ *3* $\frac{1}{9}$. *productum* $\frac{196}{27}$. *idem fit ſumma 5* $\frac{4}{9}$ *per 1* $\frac{1}{3}$ *multiplicata. Ratio 2* $\frac{1}{2}$. *numeri 3* $\frac{1}{2}$, *8* $\frac{3}{4}$. *productum 30* $\frac{5}{8}$. *tantum fit etiam ſumma 12* $\frac{1}{4}$ *in 2* $\frac{1}{2}$ *ducta. Verùm, ut dixi, eidem quæſtioni diuerſa numerorum paria poſſunt ſatisfacere. & ſi in Diophanteo exemplo nõ 4, ſed 6 poſuiſſes alterum numerum, inueniſſes 6 & 6. ſumma 12. ſexies autem ſex, 36. triplum. ſi 10, numeri fuiſſent 4* $\frac{2}{7}$ *& 10. ſumma 14* $\frac{2}{7}$, *triplum eius 42* $\frac{6}{7}$. *atqui tantundem fit ſi 4* $\frac{2}{7}$ *per 10 multiplices. Verùm de his ſatis.*

XV. Duos inuenire numeros, ut ſi uterque ab altero certum numerũ accipiat, collecti utrinque ad reſiduũ ſit ea, quæ poſcitur, ratio. Poſtuletur ut prior acceptis à poſteriore 30, duplus ſit ad id quod huic relinquitur. poſterior autem acceptis à priore 50, triplus ſit eius quod huic ſupereſt. Ponamus poſteriorem eſſe 1 N & præterea 30, quod debet priori dare. Ergo prior erit 2 N——30. ut 30 acceptis, duplum poſterioris habeat. Reſtat ut poſterior acceptis à priore 50, triplũ eius habeat, quod hic retinet. Prior, ſi à ſe det 50, erit 2 N——80, hæc 50 ſi poſteriori accedant, erit 1 N † 80. atque hoc eſt triplum ad 2 N—80. huius ergo, ut minoris, triplum 6 N—240, æquatur 1 N † 80. fit 1 N denique 64. erit ergo prior 98, poſterior 94: ijsq; ſoluitur propoſita quæſtio.

SCHOLION.

Ergo prior.) *Cùm poſterior ſit 1 N † 30. hæc 30 huic demta & addita primo, faciẽt ut reliqui poſterioris duplus ſit prior. reliquum 1 N. ergo prior erit 2 N. ergo antè defuerunt ei 30, quæ à poſteriore accepit: eſt ergo prior 2 N—30. hoc eſt, cùm poſterior ſit (ut in fine patefit) 94. erit prior 98, ut adſumtis 30, quibus demtis 94 fiunt 64, ipſe ſit 128, reſidui duplus. Rurſum prior (inquit) ſi poſteriori det 50, cùm iam antè ei 30 defuerint, iam alia 50 amittat, in reſiduo habebit 2 N—80. & poſterior ad 1 N † 30 adſumtis 50, erit 1 N † 80. reliqua ex deſcriptione liquent. Item prior dat poſteriori 50, retinet 48. & illum facit 144, ſui triplum reſidui.*

XYLANDRI.

Duo heic Diophantus tironi obſeruanda docet. alterum, non ſemper aut ubique nos ad 1 N ponendum adſtringi: alterum, quam uocant Quantitatis aut ſecundarum radicum regulam, interdum optimè diſſimulari. Ratiocinatio autoris eſt ſatis perſpicua, itemq; examen. Itaque unicã ſubijciam, exercitationis rudiorum cauſa. Eſto A 1 N. cui ſi accedant 30, fient 1 N † 30 duplum eius quod B retinet. retinet ergo $\frac{1}{2}$ *N † 15. at 30 amiſerat: ergo totus B eſt* $\frac{1}{2}$ *N † 45. Aufer ab A, 50. reſtant 1 N——50. huius triplum 3 N——150. huic æquatur quod fit 50 ad B addito, ſcilicet* $\frac{1}{2}$ *N † 95. adde utriq; 150, & adime* $\frac{1}{2}$ *N, æquantur 245 || 2* $\frac{1}{2}$ *N, ſeu 490 || 5 N. fit 1 N, 98, &c. Poteras ètiam pro B ponere 1 N, &c. id tibi mando. deſcriptionem nihil opus fuit margini adijcere, in re manifeſta.*

XVI. Inueniantur tres numeri, ita ut bini faciant eos quos poſceris numeros. Oportet autem ſummæ eorum qui poſcuntur ſemiſſem quouis trium iſtorum eſſe maiorem. Conficiant ergo primus & ſecundus 20. ſecundus & tertius 30. tertius cũ primo 40. Ponamus ſummam horum trium eſſe 1 N. cumq́; A & B cõficiant 20, hoc de ſumma omnium detractũ, relinquet C, 1 N—20. Ob hæc eadem, A erit 1 N—30, & B 1 N—40. Hi tres coniuncti reſtat ut conficiant 1 N. at faciunt 3 N—90, æquales 1 N. ergo 1 N eſt 45. Iam perſequere propoſitum. Erit A 15, B 5, C 25. & euidens eſt demonſtratio.

SCHOLION.

Oportet (inquit) trium qui poſcuntur numerorum ſummæ ſemiſſem maiorem eſſe quouis iſtorum. Summa triũ imperatorum in hoc propoſito eſt 90. ſemiſsis 45. eoq́; trium quiuis minor eſt. Si enim horum trium unum ponamus æqualem eſſe ſemiſsi eius ſummæ: non ſtabit argumentum. Ponamus c & a facere 50. erũt ergo tres ſimul 100, utpote 20, 30, 50. ſemiſsis de 100 eſt 50. & cum demonſtratio eodem procedat modo, ſecundum oportebit eſſe 1 N—50. quod eſt abſurdum. Multo etiam minùs congruet uero, ſi maior ſemiſſe aliquis illorum ſumatur. Nam ſi 1 N ponatur, uerbi gratia, 55: ſecũdus erit 1 N—60. Ob hęc eadẽ.) Id eſt, quia b & c faciunt 30, erit a 1 N—30. cumq́; c & a faciant 40, b erit 1 N—40. Ergo tres coniuncti, facient 3 N—90, quod æquatur 1 N. additoq́; utrique defectu, & ablatis æqualibus, 90 æquantur 2 N. fit 1 N, 45.

XYLANDRI.

Secundum oportebit.) nam cùm ſumma ſit 1 N. & C A facit 50 ex hypotheſi falſa, B erit 1 N—50. Tres ergo erunt, A 1 N—30. B 1 N—50. C 1 N—20. ſumma 3 N—100 aquales 1 N. fiet 1 N 50. ergo B erit nihil. In poſteriore abſurdo, ponamus C A eſſe 55, amplius ſemiſſe numerorum. Erunt A 1 N—30. B 1 N—55. C 1 N—20. ſumma 3 N—105 aquales 1 N. fiet 1 N $52\frac{1}{2}$. Ergo B erit $52\frac{1}{2}$—55. quod eſt abſurdum. Scholia heic ſunt deprauata. Cæterùm abſurditates propoſitorum ſemper ipſa arguit operatio. Ad rem quod attinet, neq; Algebram heic exempla, multo minùs regulam quantitatis requirunt: cùm euidens ſit ſi imperati numeri in unam colligantur ſummam, quemuis eorum qui quæruntur numerorum in ea bis, ſi tres: ter, ſi quatuor: quater, ſi quinq; de numeris agatur, & ſic deinceps, ineſſe. Summa ergo per hunc quotientem diuiſa, uera omnium ſumma prodit. à qua ſi ſubtrahatur quod alij coniuncti habent, quod ſupereſt reliqui quantitatem illicò monſtrat. Itaq; etſi per Algebram uariè ſoluuntur huiuſmodi problemata, & autoris methodus eſt ſatis elegans: tamen Diophanteum ego, aliudq́; noſtrum hoc fretus, quem deſcripſi, CANONE, expediam.

A & B 20 Vides duo A, duo B, duo C? ergo 90 eſt duplum ſummæ omnium. deinde per 2, ha-
B & C 30 bes ſummam omnium 45. Hinc aufer A & B 20, reſtat C 25. id à 40 (C A.) au-
C & A $\frac{40}{90}$ fer, reſtat A 15. quod à 20 (AB) detractum, B relinquit 5. Additione facilè deprehendes, abundè ſatisfactum quæſtioni. Aliud. Habent quinq; ſocij ſummam denariorũ A.B.C.D.E. Ita ut A.B.C.D, habeant 40. B C D E 43. C D E A 38. D E A B 39. E A B C 32. Quæritur quantum ſimul omnes, quantum ſinguli habeant. uides cuiuſq; numerum quatuor poni, uel litterarum indicio. Collige datos numeros. ſumma 192. in hac ergo. ſumma omnium quater ineſt. ergo denarios uniuerſi habent 48. aufer A B C D, habet E 8, ut uides ſubiectum oculis.

$$\text{À ſumma 48 aufer}\left\{\begin{matrix}ABCD\\ BCDE\\ BDEA\\ DEAB\\ EABC\end{matrix}\right\}\text{reſtat}\left\{\begin{matrix}E.\ 8.\\ A.\ 5.\\ B.\ 10.\\ C.\ 9.\\ D.\ 16.\end{matrix}\right.$$

Aliter. Quinq; ſunt numeri, A.B.C.D.E. Iuncti A B C faciunt 24. B C D 35. C D E 33. D E A 29. E A B 23. Quæritur idem quod antè. Vides unumquenq; numerum ter poſitũ eſſe. ergo omnium ſumma ter ineſt in ſumma datorum, quæ eſt 144. ſumma ergo omnium 48. & ijdẽ qui antè numeri. quod potes experiri an ſit uerum.

XVII. Quatuor numeros inuenire, quorum trini coniuncti conficiant quos quis poſtulauerit numeros. dummodò iſtorum quatuor numerorum triẽs quouis ipſorum ſit maior. Statutũ ſit ordine ijs expoſitis, primum & duos deinceps 20 cõficere: ſecundum & duos deinceps, 22. tertium & duos deinceps, 24. quartũ & duos deinceps, 27. Summa horum quatuor numerorum ſit 1 N. unde ſi auferas 20, puta tres primos, reſtat quartus 1 N—20. Atque eadem de cauſa primus erit 1 N—22.

ſecundus 1 N—24, tertius 1 N—27. horum quatuor ſumma debet eſſe æqualis 1 N. atqui eſt 4 N——93.id ergo æquat 1 N.isq́; eſt 31.Ergo iuxta propoſita primus 9. ſecundus 7.tertius 4.quartus 11.Atq; hi ſufficiunt quæſtionis explicationi.

SCHOLION.

Cùm de tribus ageretur numeris,trium datorum ſemiſſem aiebat quòcunq; illorum debere eſſe maiorem. Nunc quatuor propoſitis numeris,de triente hoc aſſerit.nam ut ibi 1 N erat ſemißis trium,ita hic 1 N eſt triens quatuor numerorum:& ſi quinq; eſſent numeri, 1 N eſſet quadrans eorum.ac ſic deinceps.hæc enim methodus in infinitum procedit.Heic ergo cùm de quatuor numeris ſit negocium;quemcunq; de his æqualem feceris trienti ſummæ datorũ: cùm ipſe 1 N ſit triens, & numerorum quemuis oporteat defectu certi numeri conſtitui: qui ſui ipſius totius defectu conſtituetur:(quòd hìc accidet) utiq; nihil erit:& nos numerum quærentes,nihil inuenerimus.

Atque eadem de cauſa.) *Hoc eſt,cùm B C D faciant 22,erit A 1 N——22.& cùm C D A faciant 24,erit B 1 N——24.& cùm D A B faciant 27,erit C 1 N——27. Ac tandem ſit 1 N,31.additis & detractis ijs,quæ ratio æqualitatis addenda aut detrahenda monſtrat.*

XYLANDRI.

Certè à noſtri uniuerſalis canonis (quem ſatis multis annis commenti ſumus ante quàm uel Diophanti uidendi ſpem ullam imaginari poſſemus,uel aliorum lucubrationes uidiſſemus) ab eius ergo inuentione parum,adeoq́; proximè abfuit ſcholiaſtes. Quorſum attineret heic ludere, & chartas implere Algebricis operationibus? ſic ergo nos quæſtionem explicamus.

A	*B*	*C*	*20*
B	*C*	*D*	*22*
C	*D*	*A*	*24*
D	*A*	*B.*	*27*
			93.

triplum ſummæ quæſitorũ. quod uel dinumeratis litteris ſentias. his enim perſpicuitatis gratia uti expedit uera ſumma. 31. aufer 20,habes D 11 aufer 22.habes A 9.&c. Omnia enim ſunt plana:& ſcholiaſtem uellem ſemper tam commodè ſcripſiſſe. Porrò autẽ huc cõfer, quæ ad propoſitionem quintam libri tertij infrà annotauimus, & ad decimamquintam quarti.

XIIX. Tres numeri ſunt inueniendi, quorum bini iuncti tertium quanto poſcitur numero ſuperent: Superent primus & ſecundus tertium numero 20. ſecundus & tertius primum 30.tertius & primus ſecundum 40. Ponamus iſtos tres numeros eſſe 2 N.Et cùm primus ac ſecundus tertium ſuperent 20, addito tertio ſumma omnium numerorum erunt bis tertius,ac pręterea 20. Ergo ſi à 2 N, ſumma omniũ, detrahas 20,reſtabit 2 N——20,quod eſt duplum tertij.Eſt ergo tertius 1 N——10. Has ipſas nimirum ob cauſas primus erit 1 N——15, & ſecundus 1 N——20.Reſtat ut horum trium ſumma ſit 2 N.atqui eſt 3 N——45.huic ergo ęquatur 2 N,fit 1 N 45. Ergo iuxta præſcriptum quæſtionis, primus eſt 30, ſecundus 25, tertius 35.& hi ſatiſfaciunt quæſtioni.

SCHOLION.

Theorema.

Addito tertio.) *Nam ſi ſint aliquot numeri,alio aliquo maiores:ſi is & eis adijciatur,& ſibijpſi: quantò numero ipſi coniuncti eum excedebant,tanto & ſumma ipſorum & eius qui adiectus eſt,duplum adiecti ſuperabũt. Sint tres numeri 3.4.5.quorum 3 & 4 iuncti,puta 7, binario excedunt 5.Hunc ſi illis,item ſibijpſi adijciam:fiunt 12 & 10.ac rurſum 12 binario plus eſt quàm 10.Quod ſi quinq; denuo utrinq; adijciantur, erunt 17 & 15, exceſſus 2. idq́; in infinitum procedit.atq; idem fit ſi primum reliqui, aut mediũ extremi ſuperent. Hoc ergo eſt quod de addito tertio dicebat. Verùm perſpicuitatis cauſa,in propoſita quæſtione idem oſtendamus. 1 N inuenitur 45, & ergo ſumma numerorum trium eſt 90. Sed & exceſſus dati,ſummam conficiunt 90. Et cùm primus ac ſecundus tertio præſtent 20;nam primus 30,& ſecundus 25 conficiunt 55,20 amplius quàm tertius 35. ſi hic addatur & ſibi & ad 55,fient 70 & 90.Iam hic quidem eſt ſumma trium numerorum: quæ quanto ſuperat tertij duplum 70,nimirum 20: tanto etiam excedebant duo priores tertium ſemel ſumtum. Et ſi à 2 N,puta 90 auferam 20.habebo duplum tertij 2 N——20,id eſt bis 35,ſeu 70.Nam 70,ſi ei adderentur 20,eſſet 90:eſtq́; 70 idem quod 2 N——20. Cùm autem tertium ſimplicem non potuiſſet inuenire:poſtquam eum duplicando inuenit, deinde ſimplicem ponit,qualem requiſierat.Ob eadem etiam primus duplus inuẽtus 2 N——30,ſimplus eſt 1 N—15, ſiue 30.Et ſecundus duplus 2 N——40,ſimplus 1 N——20,ſeu 25.Ex deſcriptione porrò euidens eſt,quibus interuallis numeri ſe ſuperent.*

XYLANDRI.

Diligenter conſiderandum eſt hoc theorema, cuius uſus etiam in difficiliorib. eſſe poteſt quæſtionibus. Vide decimamquintam quarti huius. Deinde ſuperſedere regulæ Quantitatis perplexitate ſæpe licet hæc conſideranti & uſurpanti. Alioqui enim ſic erat agendum, ſint A & B

Deſcriptiōes.

iuncti 1 N. ergò C erit 1 N —— 20. ex hypotheſi. Ponamus A eſſe 1 Q, erit B 1 N —— 1 Q. huic adde C, habebis 2 N —— 1 Q —— 20, cui æquetur 1 Q † 30. (nam 30 addi ad primum oportuit, ut ſumma ſecundi atq; tertij conficeretur.) Ergò communibus de addendis & ſubtrahendis quæ utrinq; par eſt noticijs adhibitis, 2 Q ſunt 2 N —— 50. & 1 Q, hoc eſt primus, erit 1 N —— 25. id ſi de 1 N. (ſumma A & B.) auferas, relinquitur 25. tantus eſt B. Cætera ſunt in promptu. Adde A & C, habes 2 N —— 45. tantũ eſſe oportet, ſi 40 ad B addas. ergo 65 æquantur 2 N — 45. ſiue 110 æquantur 2 N. ergò 1 N eſt 55. Itaq; A eſt 55 —— 25, ſcilicet 30. &c. Quod 2 N ſummam omnium poſuit autor, non 1 N, fecit fuga minutiarum. de qua alio diximus loco. Ad deſcriptiones quod attinet, quarum ſcholiaſtes meminit: ſunt ſanè in Græco ſcripto ſingulis problematis ſuæ quas uocamus operationes ordine expoſitæ atq; ad marginem adſcriptæ. uerùm has omiſi, nō modò quod operoſum admodum ſit tales typos formis æneis imitari: ſed multo magis, quod in ipſo contextu, ſcholijs, & noſtris adeò annotationibus abundè eæ, & perſpicuè repræſentantur. nam typos nos quoq; ſuis locis inſeruimus. De quo tamen monēdum lectorem duxi. ut & de hoc, 2 N poni, uitandarum cauſa minutiarum. alioqui licebat 1 N uti.

XIX. Idem alia uia & ratione. Cùm primus & ſecundus tertium ſuperent numero 20, ponamus tertium eſſe 1 N. ergo primus & ſecundus iuncti, faciēt 1 N † 20. Rurſus cum ſecundus & tertius primo amplius habeant 30. pono ſecundum 25, nempe ſemiſſem numerorum 20 & 30. cumq; primus & ſecundus ſint ſimul 1 N † 20, ſecundo ablato, primus reſtat 1 N —— 5. Reſtat ut tertij & primi ſumma medium contineat, & præterea 40. atqui ea ſumma eſt 2 N —— 5. hoc ergo æquatur 65. & adiecto utrinque defectu 2 N æquantur 70. & 1 N. 35. Et cum primus ſtatuatur 1 N —— 5, is utique erit 30. reliqui iam ſunt inuenti.

SCHOLION.

Theorema.

Aliud theorema.

Tot unitates ſecundo tribuit, quot unitatum eſt in medio ſitus duorum exceſſuum hoc loco. Si enim quotcunque numeri ordine exponantur, ita ut quocunq; eorum reliqui coniuncti ſummam maiorem conſtituant: ſumanturq; duo exceſſus, quibus ſeorſim reliqui unum aliquem ſuperauerunt: quod in medio eſt huiuſmodi duorum exceſſuum, ſemper numerum oſtendet, ad quem reliquorum exceſſus non eſt relatus. Exemplum. Sint 3 numeri 20, 30, 40: ac ſint quocunq; eorum reliqui coniuncti maiores. & ſit exceſſus 20 & 30 iunctorum ſupra 40, 10: exceſſus 30 & 40 iunctorum ſupra 20, 50: medium horum exceſſuum, puta 10 & 50, eſt 30, numerus ad quem reliquorum exceſſus non eſt comparatus. nam ad 20 & ad 40 æſtimatus fuit exceſſus cæterorum: ad hunc nequaquam. Rurſum exceſſus 30 & 40 ſupra 20, eſt 50. exceſſus 40 & 20 ſupra 30, eſt 30. Medium horũ exceſſuum eſt 40, ad quē reliquorum exceſſus non fuit collatus. Deniq; exceſſus 40 & 20 ſupra 30, eſt 30. exceſſus 20 & 30 ſupra 40, eſt 10. medium horum exceſſuum eſt 20. ad quem numerum exceſſus reliquorum relatus non fuit. Demonſtremus idem de quatuor numeris: hi ſint 20. 30. 40. 50. Exceſſus numerorum 20, 30, 40, ſupra 50, eſt 40. exceſſus 30, 40, 50, ſupra 20, eſt 100. medium inter exceſſus 100 & 40, puta 70, nimirum coniuncti duo 30 & 40, ad quos reliquorum exceſſus æſtimati non fuerunt. Similiter eueniet ſi medium exceſſuum qui ſunt 30, 40, 50 ſupra 20, & 40, 50, 20, ſupra 30. ſumatur. ac deinceps. quater enim hoc in quatuor numeris deprehenditur, ſicut ter in tribus: & in quinq;, quinquies, ac ſic deinceps. Sic etiam proponi poteſt. Datis duobus quibuſcunq; numeris, interuallum eorum idem eſt cum ſemiſſe ſummæ ipſorum. Numeri 4 & 10, ſumma 14, ſemiſsis 7. dico hunc eſſe medio loco inter 40 & 10. quot enim unitatibus 4 à 7, totidem 7 à 10 abeſt. Et quidem expoſitis quotcunq; numeris arithmetica progreſsione, ſummam omnium exprimens numerus partem aliquotam habebit cognominem numero terminorum iſtius progreſsionis: hoc eſt, ſi tres fuerint numeri, trientem: ſi quatuor, quadrantem, ac deinceps. Et pars iſta, medius erit terminorum. Sint ita expoſiti numeri quinq;, 2, 4, 6, 8, 10. Summa omnium 30: cumq; ſint quinq;, 30 habebit quintãtem, qui eſt 6. isq; eſt terminorum in ordine medio loco ſitus. Ita enim duo quoque numeri coniuncti, ut ſuprà demonſtratum fuit, 4 & 10, ſummam componunt 14, quæ partem aliquotam habet à terminorum numero, qui eſt 2, denominatam $\frac{1}{2}$. ac 7 is eſt, qui in medio duorum ſtabat, etiam ſi id nondum ſentiretur: quia binarius medio caret. His ita conſtitutis, denuò exponantur tres numeri, in quibus oſtendamus, ſi duo exceſſus coniungantur, ſemiſſem ſummæ numerum eſſe inter eos ſitum medio loco, & eum, ad quem exceſſus nō ſit comparatus: quod fuit demonſtratum. Sint numeri 20, 30, 40, exceſſus 20 & 30 iunctorũ ſupra 40, eſt 10, exceſſus 30 & 40 ſupra 20, & 50. Duo numeri 10 & 50 coniuncti ſunt 60: is ergo partem à binario denominatam habet, quæ eſt ſemiſsis, 30 ſcilicet, medius inter 10 & 50. Enimuerò iſti tres numeri arithmetica progreſsione expoſiti, cùm ſummam 90 conſtituant: is trientem habebit, uidelicet 30, medio loco poſitum in ſerie trium. Ergo propter iſthæc omnia, arithmeticæ ſcientiſsimus Diophantus pronunciauit; Quando primus & ſecundus tertium ſuperant numero 20: ſecundus & tertius primum numero 30: cùm ſint duo exceſſus 20 & 30; euidens eſt, ſecundũ (ad quem nulla facta eſt exceſſus reliquorum cõparatio, & qui medius ſit inter 20 & 30, ſeu ſemiſsis ſummæ eorum quæ eſt 50, & habet ſemiſſem; nimirum 25.) eſſe 25. Ergo cùm ait, ſe tot unitates ſecundo aſsignare, quot unitatibus ſemiſsis ſummæ 20 & 30 conſtat: non temere hoc aut utcunq; facit: neq; enim heic eadem, quæ in N poſitione, licentia locum habet. Hunc enim, cùm quot unitatum ſit N ignoretur, ſuo arbitratu haud abs re ponit. At ubi expreſſa eſt unitatum alicuius numeri congeries: non ut ſors obtulit, ſed ut arithmetici ordinis ratio flagitat, talem numerum ſtatuit. Nos autem hinc ducto ratiocinandi argumento, per abſolutos numeros, nihil ad hoc opus habentes Algebricis ſeu denominatis, quæſtionem explicabimus. Cùm primus & ſecundus tertium excedant numero 20: ſecundus autem & tertius primum 30: erit ergo ſecundus horum exceſſuum dimidium, hoc eſt 25. Rurſus cùm ſecundus & tertius primum excedant in 30; tertius & primus ſecundum in 40: erit ergo tertius horum exceſſuũ ſemiſsis, utpote 35. Deniq; cùm tertius & primus ſecundo habeant amplius 40; primus & ſecundus tertio 20: ſemiſsis horum exceſſuum erit primus, nimirum 30. Diophantus autem hoc ſic conſtruit. Tertium quæſitorum ponit 1 N. & cùm primus ac ſecundus eum numero 20 excedant, iuncti hi erunt 1 N † 20. Quorum cùm alter inuentus ſit, ſecundus nempe, 25: (ea quam demonſtrauimus ratione) à ſumma detractus hic, primum relinquit 1 N —— 5. Nam ſi ab 1 N † 20, auferendum ſit 25, hoc eſt 20 & 5. 1 N manebit, ſed cui deſint 5. Et cùm ſumma tertij ac primi debeat ſecundum, ac præterea 40 continere: duoq; illi conficiant 2 N — 5: hoc ergo æquatur 65. Cùm enim demonſtratum ſit ſecundum eſſe 25, & tertium ac primum eo amplius 40. conſtat eos præſtare totum ſecundum & 40 inſuper. ſunt autem 25 & 40 uidelicet 65. Quæ porrò propoſita ſunt, addendo & diuidendo inuenies.

XYLANDRI.

Huiuſmodi quæſtiones, qualis eſt decimaoctaua, in ſequente aliter tractata, oſtendunt quid rei ſit logiſticen uelle profiteri, ignarum arithmeticæ ſubtilitatis. Vulgus logiſtarum per regulã quantitatis ea abſolueret, non nullo labore, ut oſtendimus. Diophantus admodum ſubtili, fretus numerorum progreſsionem arithmeticam habentib. proprietatis conſideratione: modico negocio rem planam fecit. Hypotheſes aũt eius ſcholiaſtes fideliſsimè & copioſè eſt demonſtrando perſecutus: boniq́ interpretis perfunctus munere mihi probiſsimè uidetur: uellemq́ mihi hanc ipſius collaudandi facultatẽ ſemper obtuliſſet. Nolo heic uarijs operationib. expoſitis morari lectorem: hoc moneo, in ijs pulcrè theoremata interpretis in conſpectum uenire. quod ſtudio & induſtriæ lectorum cõmendo explorãdum. Enimuerò quod omiſſum eſt & à Diophanto, & à ſcholiaſte: à nobis autem & inductione, & rationib. pridẽ compertum, quas cũ theorematis ſcholiaſtæ eaſdem eſſe nunc demum animaduertimus: commodè uideor ſubiecturus. In huiuſmodi quæſtionibus ſemper eadẽ eſt exceſſuũ, quæ ipſorum qui quæruntur numerorum ſumma. Neq́ id tantũ intelligere debes de ijs, in quibus exceſſus progreſsionem arithmeticam conſtituunt, quod fit in Diophanteo caſu, ſed etiam de quibuſuis alijs, citra exceptionem. Itaq́ multo eſt amplior noſter Canon: & quo modo ſcholiaſtes autoris propoſitum extra Algebram ſoluit, eo fretus quem demonſtrauit canone, Quod nimirũ exceſſuum duorum ſemiſsis, eum numerũ exhibeat, ad quem nullus reliquorum exceſſus eſt cõparatus: eodem nos omnia ſoluemus. Sint uerbi gratia tres numeri A, B, C. A & B ſimul, 21 amplius quã C. B & C ſimul, 45 amplius q̃ A. C & A iuncti, 9 amplius q̃ B. Exceſſus 21, 45, 9. (quod ſciã) arithmeticam progreſsionem conſtituũt nullam: ſummã uerò 75. quanta etiã erit ipſorum numerorum. quo poſito, citius etiam quæſtio explicabitur. Nã ſi (ut Diophãti rationem priorem ſequar) 21 de 75 auferas, duplũ tertij habebis 54. ergo tertius 27. Si 45 de 75 auferas, duplum primi habebis, qui eſt 15, cũ reſiduum fuerit 30. Aufer de ſumma omniũ ſummã primi & tertij, 27 & 15, hoc eſt 42 de 75, relinquitur 33, ſecundus. Idẽ inuenitur 9 de 75 ſubtractis, cùm reſiduum 66 ſit ſecundi duplum. Idẽ etiam per exceſſuũ binorum ſemiſſẽ omnino fiet, etſi exceſſus iſti neutiquã arithmetica progreſsione cohæreant. Quod (ne putes ad unũ exemplum adſtringi canones) alio breuiter exẽplo mõſtrabimus. Tres mercatores ſocietatem inierunt: neq́ mihi ſignificatũ eſt uel ſors uniuſcuiuſq́, uel omniũ etiã caput quantũ eſſet. tamen id accepi, A & B ſortes, 50 amplius fuiſſe librarum q̃ C. at B ac C ſortes, 230 amplius q̃ A. C & A ſortes, ſorte B ampliores fuiſſe 150. Certè hi exceſſus 50, 230, 150, arithmeticã progreſsionem nullam unquam cõſtituent. ſumma eſt 430. eademq́ etiam numerorum qui quæruntur. Atq́ hoc quidẽ patebit: tametſi nõ ad ſummã, ut antè, ſed ad medios binorũ exceſſuũ referatur ratiocinatio. Etenim (nihilo ſeciùs, q̃ ſi arithmetica progreſsio ipſorũ exceſſuũ fuiſſet) exceſſus 230 & 150 ſummã faciũt 380: cuius ſemiſsis numerũ C oſtẽdit, ad quẽ neuter exceſſuũ referebatur. Et eadẽ ratione exceſſus 150 & 50 iũcti, ſuo ſemiſſe A repræſentabũt: 50 & 230 itidẽ B. eſt aũt A 100, B 140, C 190. ꝙ uerũ eſſe, dephẽdes ubi uoles. Obſeruabit igitur hoc loco harũ rerũ nõ ſocors mirabilẽ quandã & occultã uim progreſsionis arithmeticæ. de qua alibi quicquã traditũ legere non memini.

CANON
alius noſter.

XX. Quatuor numeri ſunt inueniendi, quorum terni iuncti reliquum ſuperent eo qui requiritur numero. Oportet autem datorum quatuor numerorum interualla habere ſemiſſem, maiorem quouis ipſorum numerorum. Poſtuletur, ut primi, ſecundi, ac tertij ſumma quartum excedat numero 20. Secundi tertij, ac quarti, primū 20. Tertij, quarti, ac primi ſecundum 40. Quarti, primi, ac ſecundi tertium 50. Ponatur ſumma quatuor numerorum 2 N. & cùm primus, ſecundus, ac tertius quartum ſuperent numero 20: & eodem numero quatuor iuncti ſuperent duplum quarti: quatuor autem iuncti conficiant 2 N: ergo 2 N duplum quarti ſuperāt numero 20. & duplum quarti eſt 2 N —— 20. ergo quartus, 1 N —— 10. His ipſis de cauſis etiam primus eſt 1 N —— 15: ſecundus 1 N —— 20: tertius 1 N —— 25. Reſtat ut horum quatuor ſumma ſit 2 N. atqui eſt 4 N —— 70. Ei ergo ęquatur 2 N. & 1 N eſt 35. Ergo iuxta præſcriptum quæſtionis numeri ſunt primus 20, ſecundus 15, tertius 10, quartus 25. ijq; reſpondent conditionibus quæſtionis.

SCHOLION.

Haud abs re conditio hæc adiecta eſt. Nam ſi qua de quatuor exceſsio, earum omnium ſummæ ſemiſſem æquet: locus propoſito nullus erit. Numerus enim is, quo reliqui æquales ſemiſsi quatuor exceſſuum numerum ſuperabunt: is ergo tantus emerget, quantus etiam erit 1 N —— *eo numero, qui ipſi* 1 N *debebitur. Verbi gratia,* 1 N *erit* 50. *& idem hoc pacto fiet* 1 N —— 50. *atqui is quidem nihil erit: hoc enim relinquitur, ubi totum de toto aufertur. Augebitur autem abſurdum hoc, ſi maior etiam ſemiſſe omnium exceſſuū aliquis eorum ponatur. Ductus huius quæſtionis tractandæ, idē eſt qui duodeuigeſimæ. Hoc obſeruandum eſt, Quod ut in xix propoſitione, ubi de trib. numeris & exceſsibus agitur, nulla ſit opus conditionis præſcriptione: ita cum de quatuor agitur, neceſſe eſt ſummæ exceſſuum ſemiſſem, quouis illorum eſſe maiorem: ſi de quinq;, trientem: ſi de ſex, quadrantem. ac ſic deinceps, ut ſemper binario abſit nomen partis de ſumma excerptæ, à numero terminorum. Sicut nomen quadrantis binario excedit binarium, quintantis ternarium, ſextantis quaternionem. Cùm autem tractatio huius quæſtionis eadem ſit, quæ eſt propoſitionis undeuigeſimæ, ſicut illam, ita hanc quoq; conabimur nudis numeris demonſtrare. Cùm primus, ſecundus, & tertius quartum numero 20 ſuperent: quartus autem, primus, & ſecundus tertium 50: erunt coniuncti primus & ſecundus 35. Rurſus cùm ſecundus, tertius, quartus iuncti ultra primum habeant 30. tertius autem, quartus & primus ultra ſecundum habeant 40; erunt tertius & quartus iuncti 35. His ita conſtitutis, cùm primus & ſecūdus, ac rurſum ſecundus & tertius (id eſt primus ac tertius ſemel, & ſecundus bis) conficiant 60: ac primus & tertius ſint 30: ergo duplum ſecundi eſt 30. ipſe ergo eſt 15. Rurſus cùm primus & ſecundus ſint 35, & ſecundus 15: ergo primus eſt 20. Item cum ſecundus & tertius ſint 25, & ſecundus 15: ergo tertius eſt 10. Deniq; cùm tertius & quartus ſint 35, ac tertius ſit 10: utiq; quartus eſt 25.*

Conditio.

XYLANDRI.

Quod attinet ad abſurdum, quod accidit neglecta cōditione quæ quæſtionem circumſcribit, quiuis poteſt ſupputando experiri: & hactenus ſatis multa exempla ſunt propoſita. Porrò ſicut tribus hoc modo propoſitis numeris, exceſſuum ſumma ſemper eadem eſt quæ numerorum, ſiue exceſſus arithmeticam habeant, ſiue non habeant progreſsionem: ita ſi de quatuor agatur, prorſus exceſſuum ſumma ad numerorum ſummam dupla eſt: ſi de quinq;, tripla: & ſic deinceps. Et quod eſt in textu μέιζον εἶναι ἑκάςȣ *(ſic enim legendū, non* μέιζονα & ἕκαςον ἕκαςον*)* αὐτ͂, *ad numeros uel differentias referas, nihil intereſt: interpres de numeris accepit: autoris uerba ego reddidi. In eius exemplo exceſſus planè arithmeticam condunt progreſsionem. Sed ſint A 2, B 5, C 7, D 13. A B C ſupra D excedit 1. B C D ſupra A 23. C D A ſupra B 17. D A B ſupra C 13. nimirū heic nulla eſt interuallorum æqualitas: nihilominus ſumma exceſſuum 54. ſummæ numerorum 27 dupla eſt. Ratio aūt ſoluēdæ citra Algebram quæſtionis, ſatis eſt commodè expoſita à ſcholiaſte. Sed ſi ad ſummam omniū referatur ratiocinatio, multo omnia erunt planiora & expeditiora.* CANON. Quorumcunq; trium exceſſum ſupra quartum à ſumma numerorum ſubtraxeris, reſiduum quarti eſt duplum. *Cætera typus te docet.*

$$\begin{array}{ll} A & 20 \\ B & 15 \\ C & 10 \\ D & 25 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} A\ B\ C\ \textit{ſupra}\ D,20 \\ B\ C\ D\ \textit{ſupra}\ A,30 \\ C\ D\ A\ \textit{ſupra}\ B,40 \\ D\ A\ B\ \textit{ſupra}\ C,50 \end{array}\right\} \textit{de 70. relinquit} \left\{\begin{array}{l} 50. \\ 40. \\ 30. \\ 20. \end{array}\right\} \textit{ergo} \left\{\begin{array}{ll} D & 25. \\ A & 20. \\ B & 15. \\ C & 10. \end{array}\right.$$

Summa numerorum 70 exceſſuum ſumma 140

Eadem eſt ratio ſi plures ſiut numeri. neq; neceſſe poni exempla.

IDEM ALITER.

XXI. Cùm primus, ſecundus, ac tertius iuncti quartũ excedant numero 20, eſto quartus 1 N. ergo reliqui 1 N † 20. Rurſus cùm ſecundus, tertius, & quartus iuncti primo amplius habeant 30: ponantur ſecundus & tertius iuncti tot unitatum, quot eſt ſemiſsis duorum exceſſuum 20 & 30. nimirum ſint ambo 25. Et quia primus, ſecundus, ac tertius ſunt ſimul 1 N † 20, hinc 25, utpote ſecũdo ac tertio ſubtracto, primus relinquetur 1 N —— 5. Iam cum ſecundus, tertius & quartus iuncti primum ſuperẽt numero 30: ac tertius, quartus, & primus iuncti, tertio amplius ſint 40: ergo tertius & quartus iuncti ſunt 35. Et cùm quartus ſit 1 N, erit tertius 35 —— 1 N. at ſecundus & tertius iuncti erant 25: inde aufer tertium, reſtat ſecundus 1 N —— 10. Reliquum iam eſt, ut quartus, primus, & ſecundus iuncti, 50 amplius ſint quàm tertius. At coniuncti hi tres faciunt 3 N —— 15, & tertius 35 —— 1 N. Ergo 3 N —— 15 ſunt 50 amplius quàm 35 — 1 N. Ergo 85 — 1 N æquantur 3 N — 15. fit 1 N 25. reliqua ex præſcripto quæſtionis abſolue. Primus, 1 N — 5, erit 20: ſecundus 15: tertius 10: quartus 25.

SCHOLION.

Additio defectus heic fit bifariam, hoc modo. Cùm quartus, primus, & ſecundus iuncti faciant 3 N —— 15: & tertius ſit 35 —— 1 N; cum 50: is erit 85 —— 1 N. adijcitur huic 3 N —— 15, non modo defectus 15, ſed & defectus 1 N in altero. ita fiunt 4 N integri, cum defectus ad defectum, copiam gignat. & ad 85 —— 1 N nõ modò ſuus defectus 1 N accedit, ſed etiam 15, ut fiat 100 integrum. itaq; 1 N fit 25.

XYLANDRI.

Rurſum heic eadem, quæ ſuprà, annotanda erant: quod non placuit. Vides autem quàm expedita ſit hæc operandi ratio. quàm contrà impedita & lubrica Quantitatis regula in hoc genere quæſtionum. Ac libet quàm fieri poteſt ſcitiſsimè hoc problema per illã ſoluere: ut intelligat Lector non contemni tamen à nobis, quod poſtponitur potiori. Sit A 1 N, erunt B C D in ſumma ex hypotheſi 1 N † 30. Ponamus iam B, 1 Q. ergo C D erunt 1 N † 30 —— 1 Q. Et cùm C D A ſint 40 amplius quàm B, A ad C D adijce, 40 ad B. habebis æquationem inter 1 Q † 40 & 2 N † 30 —— 1 Q. ergo 1 Q utrobiq; adiecto 2 Q † 40 æquantur 2 N † 30. & 40 utrinq; abiectis 2 Q æquantur 2 N —— 10. ergo 1 Q eſt 1 N — 5. Habes B. id aufer de 1 N † 30, quæ eſt ſumma B C D 1 N † 30, relinquitur C D 35. Hoc repetendum eſt. Sit C, 1 R, erit D, 35 — 1 N. Adde A B D, & 50 ad C (nam tantum ei deeſt ad ſummã A B D implendam) fiet æquatio inter 1 R † 50 & 2 N † 30 — 1 R. deniq; 1 R inuenies eſſe 1 N — 10. id aufer de 35, ſupereſt D, ſcilicet 45 — 1 N. eſt ergo poſitionum hæc forma. A, 1 N. B, 1 N — 5. C, 1 N — 10. D, 45 — 1 N. Adde A B C, & 20 adde ad D ut illorum ſummam impleat, habes æquationem inter 3 N — 15 & 65 — 1 N. hoc eſt additis utrobique defectib. 80 æquantur 4 N. ergo 1 N eſt 20, A. proinde B quinario minus, &c. Non inelegans eſt hic ductus, fateor. ſed nihil ad ſubtilitatem Diophanteam, aut ad canonis noſtri breuitatem.

XXII. Propoſitum numerum in tres alios partiri: ut uteruis extremorum adiuncto medio, ad reliquum extremum habeat quę poſtulatur rationem. Partiamur 100 in tres numeros, ut primus cum ſecundo tertij triplum: tertius cum ſecundo primi quadruplum conſtituant. Ponatur tertius 1 N. cuius cum triplum conficiant primus & ſecundus: hi ergo ſint 3 N. Ergo tres iuncti facient 4 N. qui æquantur 100. & eſt 1 N 25. Ad præſcriptum ergo tertius erit 25. primus & ſecundus iuncti 75. Rurſum quia primi quadruplum faciunt ſecundus & tertius, pono primum 1 N, erunt ſecundus & tertius iuncti 4 N. ſumma omnium 5 N, æqualis 100. ergo 1 N 20 primus. At ſecundus & tertius, 80. atqui tertius eſt 25, ergo ſecundus 55. Hi ſatisfaciunt quæſtioni.

XYLANDRI.

Duabus poſitionibus autor exemplum abſoluit, ſanè quã eleganter, & ad regulam ſecundarum radicum declinandum accommodatè. Nam ex binorum ad reliquũ ratione, utriq; poſitiones ſumuntur, quæ toti æquentur diuidendo.

$\left.\begin{array}{l}A\\B\end{array}\right\}$ 3 N *rurſum* *A 1 N*
C 1 N *$\left.\begin{array}{l}B\\C\end{array}\right\}$ 4 N*

Summa 4 N||100. *Summa 5 N||100*
ergo C 25. *ergo A 20.adde C,45.de 100,relinquunt 55 B.*

Poterat etiam aliter hoc fieri.nam cùm C ſit 25. A & B erunt 75. Pone A 1 N. B 75—1 N. C.25. Summa B C 100—1 N æquatur 4 N,ut quadruplo A. &c. Si libuiſſet per regulam Quantitatis ſoluere,poſuiſſes A 1 N.B 1 Q. C 100—1 N—1 Q.& inueniſſes quid 1 Q.eſſet,&c. Hoc aūt quod heic traditur,ſcitius multo eſt ac breuius. Scholiaſtes nihil heic habet.

XXIII. Inueniantur tres numeri, quorum maximus mediū excedat minimi certa aliqua parte:medius minorem maximi data parte : minimus datam medij partē certo aliquo numero. Oportet autem medium tanta parte maximi præſtare minimo,ut numero qui eam partem denominat in id quo medius minimo præſtat multiplicato maior Numerorum exſiſtat multitudo quàm in medio. Conſtitutum ſit, maximum medio præſtare triente minimi:medium minimo maximi triente : minimum denario præſtare trienti medij. Statuatur minimus 1 N,& præterea 10. quo ſcilicet numero medij trientem excedit. ut ſcilicet minimus compoſitus ſit ex medij triente & 10. Vel ſic,Statuatur medius 3 N. & cùm minimus debeat trientem huius excedere denario,is ergo minimus erit 1 N † 10. Reſtat,ut minimum medius ſuperet triente maximi.ſuperat autē eum 2 N——10 quantitate.hic ergo eſt maximi triens, & ipſe maximus 6 N—— 30. Oportet autem maximum medio præſtare triente minimi.at quo ei præſtat,eſt 3 N—— 30.atque hoc eſſe debet triens minimi : ergo minimus eſt 9 N——90.idemq́; erat 1 N † 100.eſt ergo 1 N, 12 $\frac{1}{2}$. Ergo minimus eſt 22 $\frac{1}{2}$. maximus 45,medius 37 $\frac{1}{2}$.atq; hi ſufficiunt explicandæ quæſtioni.

SCHOLION.

Conditio adiecta exemplo declaretur. Pars maximi de qua agitur, eſt triens. Exceſſus *medij ſupra minimum* 2 N—10. *in hunc* 3 *multiplicatus,unde dictæ parti nomen:* 6 N—30 *producit, qui ſunt plures* N *quā medij,qui eſt duntaxat* 3 N. *Idq́; puto aliter fieri non poſſe.*

XYLANDRI.

Et in ipſis numeris medij ſuper minorem exceſſus eſt 15.cuius triplum 45,plus quā 37 $\frac{1}{2}$. Vitare potuit autor minutias,ſi cæteris omnibus ſaluis pro 10 poſuiſſet 20.Numeri enim fuiſſent poſitorum dupli 90.75.45. Opus totum eſt Algebricum,& compendio institutū. Eſto aliud propoſitum: Inuenire tres numeros quorum maximus ſemiſſe minimi medium ſuperet : hic minimū quadrante maximi:minimus medij trientem numero 8. Sit minimus 1 N † 8.ergo medius 3 N. aufer minimum,reſtat 2 N—8,quadrans ſcilicet maximi.ergo maximus 8 N —— 32. Adde ſemiſſem minimi ($\frac{1}{2}$ N † 4) medio:habes 3 $\frac{1}{2}$ N † 4 æquale 8 N ——32. Facit 1 N.8. numeri 32. 24.16. Heic 4 (nomen $\frac{1}{4}$ maximi, quo medius minorem ſuperat) in medij ſupra minimum exceſſionem ductus,2 N —— 8 gignit 8 N——32.& Numerorum unitates plures ſunt quàm in medio.Cæterùm conditionis latæ cauſam ipſe ductus Algebricæ huius operationis abunde explicat.Vtq́; uideas non eſſe ocioſam hanc conditionem, eſto hoc problema. Dētur tres numeri, quorum maximus medium ſuperet ſemiſſe minimi:medius minimū ſemiſſe maximi: minimus ſit ſemiſsis medij auctus binario. Eſto minimus 1 N † 2, ut medius ſit 2 N. hinc aufer minimum, ſupereſt 1 N——2, ſemiſsis maximi. Eſt ergo maximus 2 N——4, quod eſt abſurdum, cùm medius fuerit 2 N integri. Quod ſi poſitum fuiſſet, medium triente maximi præſtare minimo,locum habuiſſet quæſtio.fieret enim maximus 3 N——6,quod amplius eſſe poteſt quā 2 N,ſi ualor numeri ſenarium excedat.Nam ſi ſit (uerbi gratia)8, erunt 2 N,16.at 3 N——6 erunt 18,&c. Abſoluamus ſic correctā quæſtionem. Aufer 2 N medium de maximo 3 N——6,reſtat 1 N——6, ſemiſsis minimi.Is ergo 2 N——12. at erat 1 N † 2. fit 1 N, 14. Numeri quæſiti 36. 28. 16. Quod experiri facilè eſt. Nam 8, quibus maximus medium excedit,ſemiſsis ſunt de 16,minimo.Et 12,quibus minimū medius ſuperat, triens ſunt ex 36,maximo. & minimus eſt 14,ſemiſsis medij † 2.

XXIV. Inueniantur tres numeri,ut maximus medium ſuperet data minimi parte;medius minimū data maximi parte : minimus datam partē medij dato numero.

Oportet

Oportet autem maximi partem eam dari, quæ adiecta minimo, Numeros pauciores conficiat ijs, qui pro medio numero ab initio ponebãtur. Eſto rurſum minimus 1 N † 10. medius 3 N: ut huius trientem minimus ſuperet denario. Iã cùm uolo maximum medio præſtare triente minimi, qui triens eſt $\frac{1}{3}$ N † $3\frac{1}{3}$: hunc ad mediũ addo, erit maximus $3\frac{1}{3}$ N † $3\frac{1}{3}$. Reſtat, ut medius quoq; minori, & trienti maximi iunctis ſit æqualis. ij autem cõficiunt $2\frac{1}{9}$ N † $11\frac{1}{9}$, quod æquatur 3 N, medio uidelicet. & reiectis utrinq; æqualibus, $\frac{8}{9}$ N æquantur $11\frac{1}{9}$ N. Vtrunq; per 9 multiplicetur. Erunt 8 N æquales 100. & fit 1 N, $12\frac{1}{2}$. Eodẽ cum ſuperiore hoc redit.

SCHOLION.

Et quod heic addita conditio exprimit, exiſtimo non poſſe aliter fieri: Sic autem heic fit. Triens maximi, & minimus, ſummam conſtant $2\frac{1}{9}$ N † $11\frac{1}{9}$ at $2\frac{1}{9}$ N minus ſunt quàm 3 N, qui medio tribuuntur. Iam $2\frac{1}{9}$ N † $11\frac{1}{9}$ ait æquari 3 N. auferantur ergo utrinq; $2\frac{1}{9}$ N, reſtant ab una parte $11\frac{1}{9}$: ab altera 1 N minus nona ſui parte, nimirum reſiduum eſt $\frac{8}{9}$ N, quod æquatur iſtis $11\frac{1}{9}$. Quia autem non per integros N & unitates integras progreſſa eſt demonſtratio, ſed per nonas partes utrinq;: ideò per nouem utrunq; multiplicat, ut fiant integri N & unitates integræ. Nouem enim nonantes (ſic dixerim) cuiuſcunq; tandem ſpeciei, totam eius conſtituunt ſpeciei unitatem. Sic 1 N minus nonante per nouem multiplicatus, fit 9 N —— $\frac{9}{9}$. at nouem nonantes ſunt unum. ergo multiplicando effectum eſt 8 N. Sed & $11\frac{1}{9}$ nouies ſumpta, fiunt 99 & $\frac{9}{9}$: ſcilicet 100. unitate (quam $\frac{9}{9}$ faciunt) ad 99. adiecta. Atque ſic 100 æquatur 8 N: & 1 N eſt $12\frac{1}{2}$. Quoniam autem nona pars inuenitur & in Algebricis, & in abſolutis numeris: ſi minimum ſuijpſius nouencuplum faciamus, id eſt 9 N † 90. erit medius 27 N, maximus 30 N † 30. Ac rurſus minimus & maximi triens 19 N † 100. atq; hoc æquabitur 27 N. & 8 N. æquabuntur 100. & 1 N erit $22\frac{1}{2}$. Neq; ulla eſt pars demonſtrationis, quæ non integris numeris, ſiue Algebricis, ſiue liberis, abſoluatur.

XYLANDRI.

Sic autem heic fit.) Legi pro ὅμως, οὕτως. cùm planiſsimè Diophanteis hypotheſibus reſpondeat, quòd heic repetitur. Atque hinc apparet ad Algebricos numeros eos, qui N nomen gerunt, reſpici: non ad ſolutionis numeros quæſitos. Quis enim neget $2\frac{1}{9}$ N minus eſſe, quàm 3 N. ſed illi additur $11\frac{1}{9}$, quæ ſi adderentur æquanti aut ſuperanti huncce 3 N, abſurdum ſequeretur. Nimis autem ſolicitè heic quoque fugit minutias ſcholiaſtes: alioquin ſiue ante finem, ſiue in ipſo fine fracta per denominatorem communem multiplices: idem eſt. ſemper enim & ubique locum habent decimaſeptima & decimaoctaua ſeptimi, aliaq; huc pertinẽtes & adſimilia Euclidea propoſitiones. Operationem (quia impingere poſſent rudiores) ſubieci.

C 1 N † 10.   ergo medius 3 N. Triens de C, $\frac{1}{3}$ N † $3\frac{1}{3}$, additus ad B, ſummã facit $3\frac{1}{3}$ N †
B 3 N $3\frac{1}{3}$. ac tantus eſt ex quæſtionis præſcripto A. Huius adeò triens $1\frac{1}{9}$ N † $1\frac{1}{9}$ ad
A $3\frac{1}{3}$ N † $3\frac{1}{3}$.   C, qui eſt 1 N † 10, adiectus, B conſtituet. ſumma $2\frac{1}{9}$ N † $11\frac{1}{9}$. Eaq; æquatur
3 N, quantus eſt B. Si placet ſcholiaſtem ſequi, iam nunc omnia per 9 multiplicabimus. fient 19 N † 100 || 27. & utrinq; reiectis 19 N: 100 || 8 N. & 1 N $22\frac{1}{2}$. Si ad finem pertendimus, utrinq; $2\frac{1}{9}$ N abijcimus. æquantur $\frac{8}{9}$ N || $11\frac{1}{9}$. hæc demum per 9 multiplicata, reddunt 8 N || 100 &c. Quod oſtendendum duxi, ut lector uideret, utrum compẽdioſius eſſet. De cætero liquet, quæſtionem huius propoſitionis cum ſuperiore eandem eſſe: conditionis dumtaxat expreſsione, & uia conficiendæ rei differre.

XXV. Tres numeri ſunt inueniendi, quorum ſi quiſq; proximè ipſum ſequenti ſui partem, quæ mandatur, dederit, inter eos qui dederunt & acceperunt æqualitas conſtituatur. Impertiat ſui triente primus ſecundum: ſui quadrante ſecundus tertium: ſui quintante tertius primum: ut poſt hanc contributionem mutuam inter omnes ſit æqualitas. Ponamus primum, concretum numerum talem, quia trientem debet dare, qui habeat trientem, puta 3 N. Secundum, quia quadrantem, 4 unitatum ponatur. Is ſi dederit, acceperitq; imperata, manet 3 † 1 N. ſequitur etiam primum, ubi dederit acceperitq; ea quæ mandantur, fore 3 † 1 N. At hic, ſi ſui trientẽ dederit, & deinde acceperit 3 —— 1 N, æqualis demũ erit 3 † 1 N. Vnde liquet 3 — 1 N eſſe quintã tertij partẽ. eſt ergo tertius 15 —— 5 N. qui & ipſe ſuam quintã partẽ ſi dederit primo, & ipſe acceperit 1, utpote quadrantem ſecũdi, erit 3 † 1 N. at ſi ab eo auferas 3 —— 1 N, quintantem ipſius, reſtant 12 —— 4 N. & ſi addas huic reſiduo 1, puta quadrantẽ ſecundi, fient 13 — 4 N æquale 1 N † 3. eritq; 1 N, 2. Ergo iuxta propoſitum primus erit 6, ſecundus 4, tertius 5. & conſtat propoſitum.

SCHOLION.

Trientem ſui primus amittens 1 N, ac deinde recipiens 3 —— 1 N fit 1 N † 3, hoc pacto. Cùm amiſit 1 N, habet adhuc 2 N. quibus ſi accedant 3 —— 1 N, erit 1 N † 3. nam —— 1 N abolet unum N de duob. N. nam defectus copiam accedens, facit defectum.

XYLANDRI.

Scholion hoc nō eſt integrū: nō magno cū diſpēdio ſciētiæ. In Diophanto aūt ipſo eſt mēdum, quod totā rē obſcurat. ubi enim legitur μονάδων γ΄. μονάδες, *&c legendū eſt* μονάδων, ἔσαι ἀριθμȣ̃ ά. ϗ μονάδων γ΄. μονάδες ἄρα τρεῖς, *&c. In hoc & ſimilib. exemplis ſemper memineris additioni anteire deminutionē. ſecus enim ſicubi facias, nō ſuccedet negociū. Sic enim res habet.*

$$\left.\begin{matrix} A & 6 \text{——} 2 \\ B & 4 \text{——} 1 \\ C & 5 \text{——} 1 \end{matrix}\right\} \textit{eſt} \left\{\begin{matrix} 4. \\ 3. \\ 4. \end{matrix}\right\} \textit{adde} \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right\} \textit{erit} \left\{\begin{matrix} 5 \\ 5 \\ 5. \end{matrix}\right.$$

Quod ſcholiaſtes uoluit interpretari, tale eſt. Ponit Diophātus A eſſe 3 N. B. 4. Iā B amiſſo ſui quadrante, unitate puta, fit 3. & addito triente primi, qui eſt 1 N, colligitur 3 † 1 N. Ergo tantundē fiet, ſi 1 N, ut trientē ſui, adimas primo, & quintantem tertij reſiduo addas. 3 N detracto 1 N, ſunt 2 N. hoc de 3 N † 1 ſublatū, ſcilicet oſtēdet tertij quintātem 3 —— 1 N, qui ad 2 N additus, 3 N † 1 fecerat: notum eſt enim quæ ſit inter additionem & ſubtractionem reciprocatio. cætera ſunt plana. Porrò uel ex ſecundi poſitione facilè intelliges, arbitrio tuo poſſe te quotuis ſolutiones talium problematū fabricari, uel in integris uel in fractis numeris. Nihil enim impedit, quin primum ponas 1 N, aut 12 N, aut quotuis. Et ſecundum ſi ponas 16, primum 3, ſolutionis numeri erunt ad noſtros quatrupli. Sed induſtriæ Lectoris id comperiendū relinquere malo, quàm in re facilima exponenda immorari.

XXVI. Inuenito quatuor numeros, ea lege, ut cū quiuis eorū ſe cōtinuò inſequēti certā ſui partē dederit: hac ultro citroq; facta detractione & additione, ſummarū æqualitas exſiſtat. Primus ſecūdo ſui trientē, tertio ſecundus ſui quadrantē, tertius quarto ſui quintantē, primo quartus ſui ſextantē tribuat: & cōtributione hac confecta, æqualitas exſtet. Statuatur primus 3 N, ut triens eius haberi poſſit. Secundus 4 unitatū, ut haberi quadrās poſſit. Atq; hic, ubi quadrantē ſuū abiecit, & primi triente poſtmodo eſt auctus, fit 1 N † 3. Ergo etiā primus ſuo triente amiſſo, adeptus deinde ſextantē quarti, erit 1 N † 3. At amiſſo 1 N manēt 2 N. Ergo ſexta quarti pars, qua accepta fiat 1 N † 3, eſt 3 —— 1 N: quartus ergo 18 —— 6 N. Supereſt, ut quartus amiſſo ſui ſextante, ubi adſciuerit quintantē tertij, fiat 1 N † 3. at ſextāte ſuo 3 —— 1 N ſpoliatus, retinet 15 —— 5 N. quod ſi ei addantur iā 6 N —— 12, fiet 1 N † 3. ergo 6 N —— 12 eſt quinta pars tertij. Tertius ergo 30 N —— 60. Tandē reliquum eſt, ut tertius abiecto ſui quintante, deinde quadrāte ſecūdi auctus, faciat 1 N † 3. At quintante abiecto fit 24 N —— 48, quib. ſi iungatur quadrans ſecundi, erunt 24 N —— 47, æqualia 1 N —— 3. Eſt ergo 1 N, $\frac{50}{23}$. & iuxta præſcriptū, primus erit $\frac{150}{23}$, ſecundus $\frac{92}{23}$. tertius $\frac{120}{23}$. quartus $\frac{114}{23}$. Abijciatur denominatio partiū, erūt integri primus 150, ſecundus 92, tertius 120, quartus 114. qui & legib. quæſtionis ſatisfaciunt.

SCHOLION.

1 N fit $\frac{50}{23}$, ſic. Deprehenſum eſt 23 N æquari 50. ergo 50 diuido per 23, fiunt 2$\frac{4}{23}$. nā 2 in 23, fit 46: quatuor ſuperſunt, quæ per 23 diuiſa, ut in methodo partiendi oſtenſum eſt, fiunt $\frac{4}{23}$. Quia autem non ex diuerſis forma Numerū uult habere, puta ex unitatib. & minutijs: duas quoq; unitates inuētas reſoluit in uigeſimasterrias particulas, nimirum in $\frac{46}{23}$, quibus adiectæ $\frac{4}{23}$, conficiunt $\frac{50}{123}$. Idem enim eſt dicere, 1 N eſſe $\frac{50}{23}$, uel eſſe cum 2 $\frac{4}{23}$. Partibus autem propoſiti ſic ſatis fit. Ter 50, ſunt 150. ergo cùm primum poſuerimus 3 N, erit is $\frac{150}{23}$. Et cum ſecundus ſit 4, erit $\frac{92}{23}$. nam quater 23 ſunt 92. Tertius cum ſit 30 N —— 60. quod ad 30 N attinet, erit $\frac{1500}{23}$. ſed propter 60 ſubtrahendo, inde auferentur $\frac{1380}{23}$. nam ſexagies 23, ſunt 1380. ſuperſunt $\frac{120}{23}$. tantus eſt tertius. Quartus ponebatur 18 — 6 N. Is propter 18, fit $\frac{414}{23}$. nam 18 in 23 faciunt 414. ſed ob defectum 6 N auferre oportet

De diuiſionē ſeu partitiōe. *$\frac{300}{23}$ (nā ſexies $\frac{50}{23}$ tātum faciunt.) Eſt ergo quartus $\frac{114}{23}$. Vt aūt intelligas quomodo 1 N fiat $\frac{50}{23}$, id quoq; tenendū eſt; ſiue maior numerus minorē, ſiue minor maiorē diuidat, numerum partium partiendo inuentarum ſemper cū diuiſo eundē fore: nomen aūt à partiente ſumere. Verbi gratia, diuidamus 4 per 12, minorē per maiorē: dico cōpetere in quamuis unciam quatuor duodecima, qui eſt $\frac{1}{3}$ unitatis. & numerus quidem 4 idē eſt cum diuiſo; nomen autem à partiente, duodecimarū ſcilicet. Rurſum partiamur 12 per 4, maiorē in minorē. proinde cōtingūt unicuiq; unitati qua-*

ti quaternarij, duodecim quadrãtes, id eſt 3. & heic 12 eſt numerus partium, idẽ cum diuiſo. nomẽ autẽ quadrãtum à partiente 4 ducitur. Ergo in hac quoq; propoſita quæſtione cum partiamur 50 maiorẽ numerum per 23 minorẽ; (maiorẽ dico. nã tametſi 50 & 23 N æqualia ſunt, tamẽ abſolutè 50 quàm 23 maior eſt numerus) unicuilibet unitati de 23 partes 50 attribuuntur uigeſimætertiæ. & 50 numerus eſt partium, idẽ cum diuiſo: nomen aũt à 23 partiente deductum. Quod ſi 23 per 50 diuiſiſſet, cuiuis unitati ex 50, 23 quinquageſimæ obtigiſſent, numero partium 23, eodem cum diuiſo: nomine deducto à partiente. Iam cùm unitas in 23 particulas ſit diſtributa: quia ſecundus eſt poſitus 4: hunc in 23 duxit, & 92 inde orta pro ſecundo poſuit: ac ſi numerus non $\frac{50}{23}$, ſed 50 eſſet inuentus, quod idem in partib. quoq; reliquis propoſitis fecit. Cùm enim non ſoleat multis uti numeris in ſuis exemplis: ita etiã heic egit. & inuentis unitatis partibus, abijciatur, inquit, partiũ denominatio: id eſt, cũ 1 N ſit $\frac{50}{23}$ inuentus, 50 illa iam non ùt partes unitatum, ſed ut integras unitates quinquaginta uſurpa. Porrò æqualitas numerorũ hæc eſt. Primus 150 amiſſo quem ſecundo dat ſuo triente 50, retinet 100. & acceptis 19, ſextante quarti, fit 119 Secundus 92 amiſſo quadrante 23, quem tertio dat, retinet 69. & triente primi, 50 acceptis, fit 119 : Tertius 120 quintantem ſuum 24 dans quarto, retinet 96, & acceptis 23 quadrante ſecundi fit 119. Quartus 114 ſextantem ſuum 19 dans primo, retinet 95: & quintante tertij, id eſt 24 accepto, fit 119.

XYLANDRI.

Satis omnia ſunt explicata. & uides ùt euitandarum ſecundarum radicum gratia poſitio primi & ſecundi inſtitutæ ſunt, quas, itemq́; ſolutionem quæſtionis infinities uariari poſſe, ſuperiori propoſitione monui. Cæterùm quòd multiplicibus integris, loco partium fractarum utitur abiecta omnium communi denominatione, id iure facit, ut doctrina proportionum teſtatur. Quæ enim partium cognominum, eadem totorum inter ſe, ac uiciſſim eſt ratio Vide quintũ Euclidis.

XXVII. Inueniantur tres numeri, quorum quiuis ſi certam partem reliquorum cõiunctorũ accipiat, omnium exſiſtat æqualitas. Accipiat primus reliquorũ ſummę trientem: ſecundus ſummæ reliquorũ quadrantem: tertius ſummæ reliquorũ quintãtem: itaq; fiant omnes æquales. Eſto primus numerus 1 N : reliquis aliquot unitatum multitudo tribuatur, compendij gratia, trientem habens. Sintq́; ſecũdus & tertius coniuncti 3. Et quoniam primus triente reliquorum auctus fit 1 N † 1. ſumantur omnia quater. Quater ergo ſecũdus cũ reliquis, eſt ter ſecũdus cũ tribus uniuerſis. Atqui ter ſecundus adiunctis tribus fit 4 N † 4. unde ſi auferas 1 N † 3, relinquetur 3 N † 1, triplum ſecundi. Ergo ſecundus eſt 1 N † $\frac{1}{3}$. Oportet porrò tertiũ adſumto reliquorum tanquam unius quintante, fieri 1 N † 1. Omnia ſumantur quinquies, & eadem ratione inuenietur tertius 1 N † $\frac{1}{2}$. Reſtat ut hi tres coniũcti faciant 1 N † 3. Inuenitur 1 N, $\frac{13}{12}$. & omiſſa denominatione partis, fit primus 13, ſecundus 17, tertius 19. & implent conditiones quæſtionis.

SCHOLION.

Theorema ſcitum.

Expoſitis quotcunq; numeris, ſi unus eorum aliquoties ſumatur, reliqui omnes ſemel: rurſumq́; omnes unà cum ipſo ſemel ſumantur, ipſe autem ſemel minùs quã priùs ſumebatur: ſummæ utriuſq; ſeriei erunt æquales. Sint numeri 2, 3, 4. ſumantur 2 & 4 ſemel, & ternarius quater: fient 18. rurſum 2. 3. 4. & ternarius ter, 18. ſummæ æquales. His ita cõſtitutis, Omnia, *inquit, fiant quadrupla: nimirũ ubi loquitur de quadrãte, quincupla, ubi de quintãte. ac ſic deinceps. Omnia, inquit: id eſt, & ſecũdus, & reliquorũ duorũ quadrans, quẽ adſumit: Et cùm reliquorũ duorum quadrãs ipſos duos numeros reſtituat: idẽ dicit, ac ſi dixiſſet, Sumatur ſecũdus quater, reliqui duo ſemel. Quãdo aũt, ut ſuprà demõſtrauimus, unus quater, & reliquorũ quiſq; ſemel poſiti, æquãtur ter illi, & omnib. ſemel ſumtis: Ergo, ter ſecũdus, inquit, cũ trib. adſcitis, erit 4 N † 4. Quod uerò dicit, tale eſt. Cùm primus reliquorũ duorũ triente adſcito factus ſit 1 N † 1, neceſſe eſt etiã ſecũdũ reliquorũ duorũ adſumto quadrãte, fieri 1 N † 1. Cæterùm quia ignoramus quãtus ſit reliquorũ quadrãs: & tamẽ hoc adiecto ſecũdus ſit futurus 1 N † 1: quadruplicetur ergo & ipſe, & reliquorũ quadrãs: id eſt, ipſe quater ſumatur, reliquorũ uterq; ſemel: fient omnia 4 N † 4. cũ quidẽ ſecũdus ſemel, & reliquorũ quadrãs, 1 N † 1 cõficiant. Iã cũ idẽ ſit ſecũdus quater & reliqui ſemel: atq; ſecũdus ter & tres ſinguli ſemel: ſi auferã tres numeros, hoc eſt, 1 N † 3 à 4 N † 4: (quod eſt ter ſecũdus, & tres ſemel) reſiduũ erit triplũ ſecundi, ſcilicet 3 N † 1. ergo ipſe erit ſecundus 1 N † $\frac{1}{3}$. Idem ſpectemus in eo quod dicit,* Omnia ſumantur quinquies. *Nam & heic ſimiliter dicemus; Quinquies tertius adiunctis duobus, quater erit tertius unà cum tribus numeris propoſitis. Fient autem 5 N † 5. Vnde ſi auferas ſummam trium 1 N † 3, reſtat quadruplum tertij, 4 N † 2, ergo tertius 1 N † $\frac{1}{2}$. Primus porrò 1 N, ſecundus 1 N † $\frac{1}{3}$, tertius 1 N † $\frac{1}{2}$. coniuncti faciunt 1 N † $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$. (id eſt 1 N † $\frac{5}{6}$.) atq; hoc æquatur 1 N † 3. Auſero utrinq; 1 N & $\frac{5}{6}$. relinquuntur æqualia 2 N & 2 $\frac{1}{6}$. & fit 1 N, 1 $\frac{1}{12}$. Cùm autem heic duodecima pars inueniatur: liquet in duodecim uncias ſecari unitatem: & 1 $\frac{1}{12}$ ſunt $\frac{13}{12}$. ſcilicet unitate in uncias ſecta, & uncia addita. Erit ergo unitas 12 unciarum, 1 N*

autem

autem 13 unciarum: & uncia ſuperabit unitatem. Iam cùm emerſerit $\frac{1}{12}$, eam in ternarium ab initio poſitum multiplicauit: ut fieret 36, atq; ita 1 N procedet nō per partes unitatis, ſed per unitates. Enimuerò ſic abiecta partiū denominatione, ut pro $\frac{13}{12}$ uſurpemus 13, idem poteris de canone, Omnia quater, &c. *experiri: ita ſanè, ut ſimul poſtulata quæſtionis perſequamur. Poſito primo 13 unitatum, is reliquorum, qui ſunt 17 & 19, iunctorū trientem accipiens, puta 12: fit 25. Oportet aūt ſecundū, 17, quadrante reliquorū iunctorū adſumpto, fieri 25. id ſic fiet. Sumes 17 quater, id eſt 68: itē quadrantē reliquorū, 8, quater, habebis heic 32. hæc cōiuncta faciūt 100. Quod ſi 17 ter accipias, id eſt 51: & ſummā ipſorum trium, quæ eſt 49, detrahas à 100: relinquētur 51, ſcilicet triplum ſecundi. is ergo eſt 17. Eritq; 17 idē quod 1 N † $\frac{1}{3}$. ſcilicet 13 & 4. nam 4 eſt triens unitatis in 12 diuiſæ.*

XYLANDRI.

Diligenter heic quoq; interpres id explicat, quod perobſcurè à Diophanto fuit indicatū, & pro demōſtrato uſurpatū. Sed in Græco ipſe canō mutilus eſt, quadā alia uitioſa. noſtra trāslatio lectorē facilè expediet. Cauſa cur 13 ꝑ $\frac{13}{12}$ uti liceat, ſuperiore propoſitiōe eſt à nobis allata. Quod aūt interpres ait de numero 36. ſic eſt intelligendum. Numeri a 1 N, b 1 N † $\frac{1}{3}$, c 1 N + $\frac{1}{2}$ ſunt ex operatiōne Diophantea. quos ſi uelles interpretari (ſeu, ut loquuntur, reſoluere,) poſito 1 N eſſe 13. & ſtatuere a eſſe 13, b 13 $\frac{1}{3}$, c 13 $\frac{1}{2}$, tota errares uia. reſolui enim debent, per inuentū radicis ualorem, ác reſoluti demum denominationem fractionis abijcere, ut pro integris habeantur. Ergo cum 1 N fit $\frac{13}{12}$, a. & unitas faciat $\frac{12}{12}$: triens unitatis faciet $\frac{4}{12}$, & 1 N † $\frac{1}{3}$, erit $\frac{13}{12}$ & $\frac{4}{12}$, hoc eſt $\frac{17}{12}$. & ſemiſsis unitatis $\frac{6}{12}$ ad $\frac{13}{12}$ adiectus, c conficiet $\frac{19}{12}$. Iam $\frac{1}{3}$ ex $\frac{17}{12}$ fieret $\frac{17}{36}$, ex $\frac{19}{12}$ triens eſſet $\frac{19}{36}$, &c. ſed denominatione abiecta duodenæ partis, numeri ſunt 13. 17. 19. & 17 ac 19 faciunt 36, quorum triens 12 ad 13 additus, facit 25. rurſum 13 & 19 ſunt 32, quorum quadrans 8 medio additus, reddit 25. Item 13 & 17 ſunt 30, quorum quintans 6 ad 19 adiunctus, præſtat 25. Non pigebit aliā huius exempli cōfectionē ſubijcere: qua utereris, ſi theorema illud Omnia quater, *non eſſet in mente aut in promptu. Ponamus a eſſe 1 N, & b cū c ſimul 3. ut expeditè primæ parti quæſtionis ſatisfaciamus, & primus cum reliquorū triente habeat 1 N † 1. Iam ſi b ponamus eſſe 1 q (ſic enim nunc radicem ſecundam ſeu quantitatem ignotam libet notare) erit c nimirū 3 —— 1 q. huius, & a trientem ſi adiungamus ad 1 q, erunt $\frac{3}{2}$ q † $\frac{1}{4}$ N † $\frac{3}{4}$ || 1 N † 1. & ſi omnia quadruplices, 3 q † 1 N † 3 æquabuntur 4 N † 4. ergo æqualibus utrinq; abiectis 3 q || 3 N † 1. & 1 q facit 1 N † $\frac{1}{3}$. hoc eſt ſecūdus, quem ſi à 3 aufers, erit is 2 $\frac{2}{3}$ —— 1 N. Huic quintam partē a & b, puta $\frac{2}{5}$ N † $\frac{1}{15}$ N adde, fiet 2 $\frac{11}{15}$ —— $\frac{3}{5}$ N, æquale 1 N † 1. Omnia ſi per 15 multiplices, habebis 41 —— 9 N || 15 N † 15. fiet 1 N $\frac{13}{12}$. & poſitiones numerorum reductæ, demum communē abijcient denominationem, eruntq; pro fractis integri. Variari ſolutionem poſſe huius problematis, ſatis conſtat ex ſuprà annotatis.*

XXIIX. Inueniantur quatuor numeri, ut cùm quiſq; horum à reliquis trib. in unā ſummā collectis pręſcriptā partē acceperit, omniū æqualitas exſiſtat. Primus accipiat trientē reliquorū: ſecundus quadrantē: tertius quintantē: quintus ſextantē. Eoq; cōfecto negocio, oēs numeri ſint æquales. Statuamus primū 1 N. tres reliquos aliquot unitatū numerū, qui trientē habeat, ſitq; 3. Ergo primus, ubi à reliquis in unū collectis numerū trientē acceperit, eſt 1 N † 1. Oportebit ergo etiā ſecundū, ſi à trib. cæteris in unā coactis quadrantē acceperit, fieri 1 N † 1. Rurſum omnia quadruplicabimus: utemurq; methodo quā in præcedēte adhibuimus quæſtione. Ita inueniemus ſecūdū 1 N † $\frac{1}{3}$. tertiū 1 N † $\frac{1}{2}$. quartū 1 N † $\frac{3}{5}$. At quatuor numerorū ſumma debet eſſe 1 N † 3. Omnib. cōfectis, 1 N fit $\frac{47}{90}$. Eritq; primus 47. ſecundus 77. tertius 92. quartus 101. Hi præſtant ea, quæ requirit propoſitum.

SCHOLION.

Quod 1 N depræhenditur eſſe $\frac{47}{90}$, id ſic euenit. Quatuor inuentorum numerorum ſumma eſt 4 N, & $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{5}$: hæc æquantur 1 N † 3, quam omnium eſſe ſummam, ab initio fuit poſitum. Aufer utrinq; 1 N † $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{5}$. relinquuntur ab una parte 3 N, ab altera 1 & $\frac{2}{5}$ & $\frac{1}{6}$. Nam cùm ſint tres unitates: ab harum una aufero $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{2}$, relinquitur $\frac{1}{6}$. Ab alia $\frac{3}{5}$ ſubtraho, relinquuntur $\frac{2}{5}$. Ergo tres Numeri æquantur 1 $\frac{1}{6}$. & $\frac{2}{5}$, & 1 N fit $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{18}$. $\frac{2}{15}$ (ſcilicet $\frac{2}{3}$ ex $\frac{1}{5}$.) cū ſingularum partiū denominationes per 3 multiplicari ratio iubeat. Enimuerò cùm quantus ſit 1 N, non in integris, ſed in fractis eſt inuentum unitatibus: fundum quæro horum numerorum, quib. fracta denominantur. id eſt, numerū qui omnes huiuſmodi nominum partes habeat. Is autem eſt 90. Nam huius triens eſt 30 $\frac{2}{15}$ (ſcilicet quintantis bes.) eſt 12. cùm quintās ſit 18. Pars decimaoctaua eſt 5. Iam 30. 12. & 5, ſunt 47. & ſcinditur unitas in 47, eſtq; numerus $\frac{47}{90}$ unitatis, minor ſcilicet unitate: maior fit, abiecta denominatione. Quomodo aūt inueniatur fundus partes habēs requiſitas, hinc intelligi poteſt. Exponātur numeri, à quib. partiū nomina ſumūtur, & cōſidera primū & ſecundū:

Inuētio numeri q partes habeat propoſitas.

qui

qui ſi primi inuicem ſunt, duc alterum in alterum, productum appellabis fundum numerorum qui partes habent primo & ſecundo cognomines. Si uerò compoſiti ſunt, productum diuide per communem eorum menſuram, quotiens fundus erit. Porrò hunc ita inuentum fundum cum tertio compara, & eodem prorſus omnia modo confice. Exemplum. Fundum, ſiue numerum inuenire uolo qui habeat partes, ſemiſſem, trientem, quadrantem, quintantem. Expono numeros partiũ cognomines 2,3,4,5. Et cùm 2 ad 3 primus ſit, multiplicatis ijs produco 6. quem fundum appello habentium ſemiſſem ac trientem: neq; alius minor ipſo iſtas partes habebit. Iam 6 & 4 compoſiti inuicẽ, cõmuni mẽſura, binario diuiduntur. multiplicatio eorum gignit 24: huius producti ſemiſſem, puta cognominem menſuræ communi, accipio 12. is eſt fundus habentium $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$. Rurſus 12 per 5 multiplico, fiunt 60. qui, cum 12 & 5 primi inuicẽ ſint, fundus dicetur habentiũ partes $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$. Alia ratio. ubi primi inuicem ſint numeri, ages ut priùs. Si uerò cõpoſiti occurrent, uterq; nimirũ partẽ habebit cõmuni menſuræ cognominẽ. hanc alterius partẽ in alterũ ducito, producetur fundus. rurſumq; hunc cũ tertio cõpara, ac deinceps ita perge. Quæratur fundus habentiũ partes $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$. Expono numeros his partib. cognomines 3,4,5,6. & cũ 3 ac 4 primi ſint, productũ eorũ 12 aio fundũ eſſe habentium $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. Rurſus quia 12 & 5 primi ſunt, ex ijs procreatum 60 dico fundũ eſſe habentiũ $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$. Porrò cùm 60 & 6 cõpoſiti ſint, & eorũ cõmunis menſura ipſe 6: uterq; eorũ ſextantẽ habebit, maior 10, minor 1. utrius ergo ſextantẽ in totũ alterũ multiplicauero, (ſiue 1 in 60, ſiue 10 in 6) rurſum 60 fient. pronũcio itaq; 60 eſſe fundũ habentiũ $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$. ac ſic deinceps. Ac tenendũ eſt, duntaxat eos numeros qui ſic inueniuntur, et eorũ multiplices, nullũ omnino aliũ partes requiſitas habere. Heic ergo cũ agatur de $\frac{1}{3},\frac{1}{5}$, & $\frac{1}{18}$. expono numeros, 3,5,18. Et cũ 3 ad 5 ſit primus, productus ex ijs 15, fundus eſt habentiũ $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$. Rurſus 15 & 18 cõpoſiti, cõmunem menſuram habent 3, & uterq; itaq; trientẽ: 15 ſcilicet 5, 18 aũt 6. Siue ergo 5 in 18, ſiue 6 in 15 ducas, 90 exſiſtet. & ob id unitas ſecatur in nonageſimas partes. Deniq; primus numerus, qui eſt 1 N, eſt 47. Secũdus 1 N † $\frac{1}{3}$, id eſt 47 & 30 (hic enim eſt triens è 90) fit 77. Tertius 1 N † $\frac{1}{2}$, id eſt 47 & 45 (qui eſt ſemiſsis de 90) fit 92. Quartus 1 N † $\frac{3}{5}$, eſt 47 & 54 (ſunt aũt 54 de 90, $\frac{3}{5}$) ſcilicet 101. Et primus 47, cũ 90, ut reliquorũ triente, facit 137. Secundus 77, cum 60 quadrante reliquorũ, facit 137. Tertius 92 cũ 45 quintante reliquorum facit 137. Quartus 101 cum 36 ſextante reliquorum, facit 137.

XYLANDRI.

Huius exempli tractatio tota pẽdet à ſuperiori, & eſt ſatis fideliter à ſcholiaſte explicata, niſi quod ſcholion ſæpe eſt mutilũ, & uitiatũ: quod ex mea uerſione reſtitui poterit, & rectius etiam intelligi. Maior fit, abiecta denominatione.) *ἐν δ' ἐν ἄλλας μείζων eſt in Græco: nulla ſentẽtia. Ego rẽ ſecutus ſum. Fundum, πυθμένα, uocat minimum numerum, qui citra minutias habeat partes omnes quarum nomina proponuntur.*

XXIX. Datis duob. numeris inuenire tertiũ, qui ductus in priorũ utrũq;, alterum quadratũ efficiat, alterũ latus eius quadrati. Sint dati numeri 200 & 5. is aũt qui quęritur, 1 N. qui in 200 ductus, gignit 200 N: in 5, 5 N. Et cũ alter horũ quadratũ, alter eius quadrati latus debeat eſſe, 5 N in ſe multiplicati fient 25 q: æquales 200 N. Iã utrinq; Numeri charactere nomina deminuantur, erũt 25 N æquales 200, & 1 N fit 8. ac quæſtioni is ſatis facit.

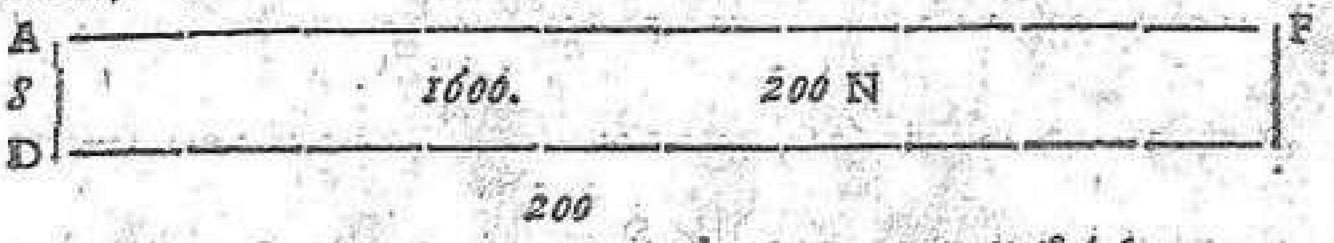
SCHOLION.

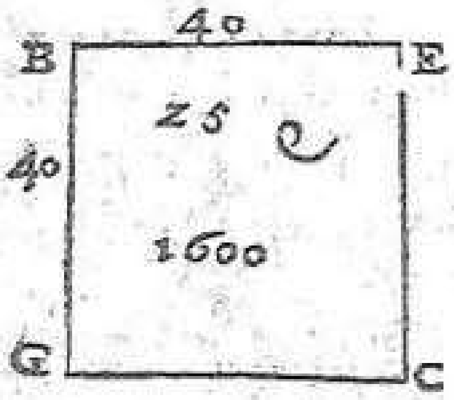
Quadrati 25 æquantur 200, ſic. Si tres ſint numeri, quorũ ſecũdi in tertiũ multiplicatione numerus fiat idẽ gerens nomen cũ ratione quæ eſt primi ad tertiũ: quod fit ductu primi in ſecundũ, æquale erit quadrato eius quod ex ſecũdo in tertiũ fiebat: atq; hoc rurſum in tertiũ ducto, producetur æquale primo. Sint tres numeri, 36. 4. 3. 4 in 3 faciunt 12. & 36 ad 3 eſt duodecuplus, à 12 habẽte nomẽ ratione. Ergo quod fit ex primo in ſecundũ, 36 in 4, utpote 144, æquale eſt quadrato eius quod fiebat ſecundo in tertiũ ducto. & quod è tertio ducto in id quod è ſecundo in tertiũ fiebat producitur, 3 in 12, nimirũ 36, æquale eſt primi. Ergo ſi numerus ad numerũ habet aliquã rationẽ, & numerus utiq; erit aliquis qui in minorẽ ductus numerũ gignat, denominantẽ maioris rationẽ ad minorem. Idq; exercitationis cauſa plenioris demonſtremus in numeris fractis. Sint duo numeri 13 & 2, eſtq; ratio maioris ad minorẽ ſeſcuplaſeſquialtera. erit ergo numerus, qui in 2 multiplicatus 6 $\frac{1}{2}$ (id enim rationis dictæ eſt nomẽ) producat. diuidatur 6 $\frac{1}{2}$ per minorẽ, 2 inquã, exſiſtent 3 $\frac{1}{4}$. hic eſt, qui in 2 ductus, 6 $\frac{1}{2}$ producat. Ac ſunt tres numeri, 13. 3 $\frac{1}{4}$. 2. in quib. idẽ quod in prioribus liceat ſpectare. Primus in ſecundũ producit 42 $\frac{1}{4}$ (nã ter 13, ſunt 39. quib. additur 3 $\frac{1}{4}$, 13 quadrãtes) ſecũdus in tertiũ, gignit 6 $\frac{1}{2}$, cuius quadratũ itidẽ 42 $\frac{1}{4}$. (Sexies 6, ſunt 36. ſexies $\frac{1}{2}$, 3. ſemiſsis de 6, 3. ſemiſsis de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Summa particularũ 42 $\frac{1}{4}$) Et denuò 6 $\frac{1}{2}$ per tertium 2, multiplicatũ gignit 13. Itaq; heic etiam cùm 200 ad 5 rationem habeant quadragintuplam, erit aliquis numerus, qui in 5 multiplicatus, 40 producat, unde rationi nomen eſt. Deinde 40 per 5, habes 8. Is multiplicatus in 200, producet 1600, quos uocat 200 N, quia 1600 hunc 8, ducenties continet. Idem 8 in 5 multiplicatus 40 gignit, quos uocat 5 N. nam 40 numerum 8 quinquies continet. Rurſum 5 N, ſeu 40, in ſe ducti, faciunt q 25, id eſt 1600.

Nam cum q de 8 ſit 64, & 1600 uicies quinquies hunc 64 comprehendat: utiq; 25 q ſunt 1600, quadratum à 5 N. id eſt, 40, procreatum: & æquantur 200 N, qui & ipſi ſunt 1600. Cùm hoc modo demonſtrauiſſet 25 q æquari 200 N: ſubijcit deinde,

Deminutio ſeu depreſsio characterũ.

Iã utrinq; Numeri charactere nomina denũciantur. *Sicut enim prius à ſimilibus ſimilia iuſſerat auferri, ita nunc alia uia utitur, uno numero iubens omnia deminui: id eſt, deduci q in N, & N in unitates nomine carentes: ut fiant de 25 q, iam 25 N: & de 200 N, 200. diuiſoq́; hoc numero per priorem, inuenitur 1 N eſſe 8. Is in 200 multiplicatus, 1600 quadratum, in 5 multiplicatus, 40 eius quadrati latus gignit.* Demonſtratur autem etiam 14 propoſitione ſexti elementorum, æqualium, & angulo alterius æqualem angulum habentium parallelogrammorum latera eſſe reciproca, quæ angulos æquales conficiunt. *Deſcribantur duo parallelogrãma a b & b c, æqualibus ad b angulis, utriuſq; area 1600. & alterum ſit, nempe a b, 200 N. alterum b c, 25 q. Latus d b eſt quincuplum ad b e, & uiciſsim b e quincuplum ad b f. & 1 N inuenitur 8.*





Canõ de Quadrato & latere in numeris.

Aliter, ad illud, Iam utrinque Numeri charactere. *Cùm inuenerimus 25 q æquari 200 N, ergo in unum q, competunt 8 N. At quadratum 8 Numeros continens eſſe poteſt nullum, niſi quod ſit 8 unitatibus in ſe ductis confectũ: ut 1 N ſcilicet ſit 8. Ergo cùm q ſit 8 N, 1 N erit 8 unitates. In uniuerſum enim, quot Numerorum erit Quadratum, tot unitatũ erit Numerus. Nam N ſeipſum ducens in ſuas quibus conſtat unitates, facit q. ut ſi N ſit 2, q fiat 2 N: ſi N 3, q 3 N: & ſic deinceps. Hæc expoſitio præſtat priori.*

XYLANDRI.

Canon.

Non nemini etiam nimius fortaſſe uidebitur ſcholiaſtes heic fuiſſe, in re minimè obſcura. ſed inutilia non ſunt, quæ tradit. Locus de parallelogrammis in Græco eſt lacer: ego totũ poſui. Quod attinet ad iſtum ὑποβιβασμὸν, cùm q æquantur N, quod minoris nota utrinq; aufertur: Eſt in Algebrula noſtra explicatum. Depreſsionem hanc characterum nonnulli uocant. Id quoq; principium heic uſurpatur, Numeri quadratum omnis, numeri ipſius eſſe multiplex. id enim uerum eſt in integris, & integris quibus fractio eſt adiecta. in ſolis minutijs contrà ſemper quadratum minus eſto latere. de quo alibi. Hæc autem exempla, & ſimilia, ab artificibus ponuntur, ut eorum occaſione præceptiones declarentur. Alioqui tales quæſtiones nullam requirunt Algebram. ſemper enim minoris quadrato ſi diuidatur maior numerus, prodetur is qui quæritur: Et duo propoſiti numeri, ſi quidem in numeris non ſurdis & integris quæſtio conſiſtit, ſemper ſunt quadratorum ſimiles. Ita datis 72 & 2, ea lege ut tertius eos multiplicãs, quadratum & latus eius producat: quadratum minoris 4, ergo numerus qui quæritur, 18. producti 1296 & 36: hic latus illius quadrati. De fractis. Dentur 80 & 16, eadem lege. Quadratum minoris 256, ſi diuidat maiorem 80, fient $\frac{5}{16}$, is qui quæritur. ductus in utrunq;, conficit 25 & 5. Propoſitiones elementorum quæ citantur, Euclideæ ſunt.

XXX. Inueniantur duo numeri, quorum ſumma & ex multiplicatione unius in alterum productus tanti ſint, quantos poſcimur. Oportet autẽ numerorum inuentorum ſummæ quadratum, quadrato ſuperare numerum qui ex ipſorum fit multiplicatione. Hoc autem eſt effictum aliunde. Eſto ſumma numerorum 20, productum multiplicationis 96. Ponamus eorum interuallum 2 N. & cum ſumma ipſorũ ſit 20, ſi huius ſemiſſem accepero 10, & differẽtiæ ſemiſſem 1 N, & adiecero & detraxero ſemiſſi ſummæ: rurſum ſumma erit 20, partium interuallum 2 N. Ponatur ergo maior numerorum 10 † 1 N, erit minor 10 —— 1 N. manetq́; & ſumma eadem, & idẽ interuallum. Reſtat ut uno in alterum multiplicato producatur 96. At producitur 100 —— 1 q. quod æquatur 96. & 1 N, fit 2. Ergo maior eſt 12, minor 8. & implent propoſitæ quæſtionis leges.

SCHOLION.

Eſt adiecta huic quæſtioni conditio quædam, nec non & aliquot ſequentibus. Eas Diophantus uocat (mea quidem opinione) aliunde effictas. quia huiuſmodi conditiones non quoſdam numeros habent obnoxios, quoſdam ſecus: ſed omnes in uniuerſum numeri ijs deuinciuntur, neq; ulli ſunt, in quos eæ non cõpetant. itaq; huius generis clauſulæ non rectè conditiones aut limitationes appellantur. Nihil autem aliud conditio præſenti quæſtioni adiecta dicit, quàm *cit, quàm quod habet quinta propoſitio libri Elementorum ſecundi. Eſt autem hæc.* Si recta linea in partes ſecetur æquales, itemq; inæquales: rectangulum ab inæqualibus totius portionibus compræhenſum cum quadrato differentiæ portionum, æquale eſt ſemiſſis lineæ quadrato. *ſ Tamen quæſtio limitatione quadam indiget, quam ſic explicabimus. Neceſſe eſt ut quadratū ſemiſſis ſummæ maius ſit producto partium unius in alteram. Vt hîc. Summæ (20) ſemiſſis 10, eius quadratum 100, amplius quam 96. (neq; enim hoc loco defectum Quadrati unius conſideramus.) Cæterùm 10 † 1 N in 10 —— 1 N, fiunt 100 —— 1 q iuxta Indicam methodum ſic. Defectus 1 N in 10, facit defectum 10 N defectus 1 N in copiam 1 N, & 10 in 10, faciunt 100 —— 1 q. & 1 N in 10, facit 10 N. Ita conficiuntur 10 N † 100 —— 1 q —— 10 N. & cum defectus 10 N eorum præſentiam uiciſſim oblitteret, relinquuntur 100 —— 1 q. Quod ſi unitates æquarentur unitatibus ab altera parte, aut etiam eas excederent: non ſtaret res. fierent enim 1 q & aliquot unitates, æquales nihilo. Iam quod fit à 10 † 1 N in 10 —— 1 N, ait fieri 100 —— 1 q: rectè. Cùm enim defectus in copiam ductus, defectum gignat, & N in N, procreet quadratum: rectè etiam heic defectus 1 N in eius præſentiam ductus, abſentiā 1 Quadrati produxit. Deniq; cùm latus Quadrati inueniatur 2, erit 1 q 4. & 100 —— 1 q æquantur 96, additoq; defectu utrobiq; 100 æquantur 1 q † 96. & ab æqualibus ſi æqualia abijciantur, 1 q erit 4, & 1 N eſt 2.*

Aliter. Hoc autem eſt aliunde effictum.) *Id limitationis gratia dicit: nempe ne æquales ſint quos quærimus numeri, ſed inæquales. alioqui enim neq; demonſtratio ſuccedet, neq; conditioni ſtabitur. Neq; uerò inæquales tantum eſſe oportebit, ſed præter etiam ſeruanda eſt altera, quam expoſuimus, conditio.*

XYLANDRI.

Cardanus, Stifelius, aliiq́; oſtenderunt hanc, quam heic tradit Diophantus, ſummæ in duas partes ſeu poſitiones diuidendi rationem, quarum altera tanto excedat ſemiſſem, quanto altera exceditur ab eo (ut heic 20 in 10, † 1 N & 10 —— 1 N.) ſæpenumero conducere ad explicandas quæſtiones, alioqui inſolubiles. quod ſuo loco oſtendimus quale ſit. Certè heic ut abſq; hoc compendio, ſicut uidebis, explicari res poſsit: tamen incidet opus in connexam æquationem, ubi diuerſæ duæ ſpecies uni comparantur. at Diophantea oppidò ſimplex manet. Quod autem ad πλασματικὸν *illud ſeu (ut nos uertimus) aliunde effictum attinet: ideò ſic appellari non dubito, quia etſi hanc conditionem non feras: tamen omnino & inuenti numeri inæquales erunt, & productum ipſorum quadrato numero ſuperabitur à ſummæ ſemiſsis quadrato. Id demonſtrat quinta ſecundi Euclidis, eruditè huc à ſcholiaſte ad partes uocata. nam diuiſio hæc ſummæ in duas partes, ad diuiſionem rectæ lineæ eſt accommodata, atq; adeò inde effictа. ut & nos ſuo loco monuimus, & Campanus ad decimamſextam noni. Sed & inductione experiri libet. & ſubijciam tria exempla. Sint numeri 6 & 22. ſumma 28. productum 132. ſemiſsis ſummæ 14, quadratum 196. aufer 132, reſiduum 64 quadratus. Item numeri 14 & 21. ſumma 35. productum 294. Semiſsis ſummæ* $17\frac{1}{2}$, *quadratum* $306\frac{1}{4}$, *aufer 294, reſtat* $12\frac{1}{4}$, *qui habet radicem quadratam* $3\frac{1}{2}$. *Deniq; numeri* $2\frac{2}{3}$ *&* $7\frac{5}{6}$. *Summa* $10\frac{1}{2}$. *productum* $20\frac{8}{9}$. *Summæ dimidium* $5\frac{1}{4}$, *quadratum* $\frac{441}{16}$. *inde aufer productum, reſtat* $\frac{961}{144}$ *quadratus. Quod ſi numerorum in propoſita quæſtione ſtatuiſſes alterum 1 N, alter erat 20 —— 1 N. cum ſumma ſit 20. duc 1 N in 20 —— 1 N, habes 20 N —— 1 Z || 96. id eſt facta traiectione, quam ſuo loco docuimus, 1 Z || 20 N —— 96. fit 1 N 12 uel 8. quæ eſt ſexta Chriſtiferi Rodolphi regula. Quod idem aliter etiam eueniſſet. Nam altero poſito 1 N, per hūc diuiſus 96, alterum exhibebit* $\frac{96}{1}$ *N. quo addito ad priorē, ſumma* $\frac{1Z + 96}{1N}$ *æquabitur 20. id eſt facta reductione & traiectione, 1 Z || 20 N —— 96. ut antè. Enimuerò Canon à me ad quintā ſecundi traditus, huc etiā poteſt accommodari, & citra Algebram quæſtioni ſatis fieri. Nam 8. √96. & 12. ſunt continuè proportionales: & producti quod heic quæritur radix quadrata ſemper medio loco inter partes ſummæ ſtabit. Ergo ſummæ ſemiſſem ſemper in ſeſe duc, à quadrato* Canon. *ſic facto ipſum productū aufer; reſidui radix quadrata addita & detracta ſemiſsi ſummæ, partes oſtendet. Dentur ergo duo numeri, quorum ſumma 76, productum 1120. Semiſsis ſummæ, 38, quadratum eſt 1444: unde ſi 1120 auferas, relinquitur 324. cuius radix quadrata 18 additur & adimitur dicto ſemiſsi, fiunt partes 56 & 20. Propoſitionem hanc ſcholiaſtes uigeſimamſeptimam facit, quia tria problemata fuerunt binis propoſitionibus tractata. ſic ſequentem, uocat uigeſimamoctauam, quæ nobis eſt trigeſimaprima. Ita ultimam huius libri trigeſimamnonam appellat, cum ſit 43. quia quadrageſimaſecunda tantùm poriſma fuit ſuperiorum. Quæ mendoſa ſunt, tuo Marte facilè corriges in Græco, noſtræ ductu uerſionis.*

XXXI. Dare duos numeros, quorū ſumma, & ſumma itē quadratorū ab ipſis qui fiunt, exprimat mādatos numeros. Oportet autem duplum ſummæ quadratorum utriuſque, quadrato numero præſtare & quadrato, quod eſt ſummæ ipſorum. Hoc quoq; aliunde effictum eſt. Statuamus ſummam numerorum eſſe 20, quadratorum 208. Statuamus etiam, interuallum eorum 2 N eſſe. Erit ergo maior 1 N † 10. minor 10 —— 1 N, alter ſummę ſemiſſe maior Numero, alter eodem minor: differentia ipſorum, 2 N, manente ſumma 20. Supereſt, ut etiam quadratorum ab ijs ortorũ ſumma ſit 208. atqui hæc inuenitur 2 Q † 200. id ergo æquatur 208. & fit 1 N, 2. Ad rem. maior ergo 12, minor 8. & ſoluitur quæſtio.

SCHOLION.

Hæc quoq; conditio plaſmatica eſt, & uidetur abundare: niſi fortè id dicit, quòd indicatum eſt, numeros inæquales debere eſſe. Nos autem heic limitationem hancce proponimus. Duplum quadrati de ſemiſſe ſummæ oportet minus eſſe ſumma quadratorum. Nam & heic duplum quadrati à 10, qui eſt ſemiſsis ſummæ, ſcilicet 200, minus eſt ſumma quadratorum 208. nam ſi æquarentur heic, aut illud hoc maius fieret: res non conſtaret. Quod autem numerorum quadrata faciunt 200 † 2 Q, id ſic euenit. Quadratum de 10 † 1 N eſt 100 † 1 Q † 20 N. quadratũ de 10 —— 1 N fit 100 † 1 Q —— 20 N, ob canones alibi explicatos. Hæc ubi colligũtur, —— 20 N & † 20 N ſe mutuò perimunt, & relinquitur ſumma quadratorum 200 † 2 Q. reliqua ſunt manifeſta.

XYLANDRI.

CANON.

Ex eo typo, quem ad æquationem Algebricam expediendam adieci quinta prop. libri ſecundi Elementorum: facilè intelliges cur hanc quoq; conditionem plaſma uocarit Diophantus. nam ſcholiaſtis limitatio eòdem recidit. Sed & inductione idem poſsis deprehendere in alijs exemplis. Numeri 6 & 13. ſumma 19. quadratorum 36 & 169. ſumma 205. duplum 410. ſumma quadratum 361 inde ablatum, relinquit 49 quadratum, &c. Vis compendij heic eadem eluceſcit. Quadratum autem illud, quo duplum ſummæ quadratorum partium præſtat quadrato ſummæ, ſemper eſt quadratum differentiæ numerorum. Ergo CANON *ſic condetur.* Duplica ſummam quadratorum à partibus profectorum, inde quadratum ſummæ quam numeri quæſtionis debent conficere, aufer: reſiduæ radix partium diſcrimen oſtendit. ergo eius ſemiſsis ſi addatur adimaturq; ſemiſsi ſummæ numerorum, ipſi ſe prodent. *Hæc omnia ſuam habent demonſtrationẽ in ijs, quæ ad quintam ſecundi pertinent. Exemplum unicum proponemus. Quæremus duos numeros, quorum ſumma 19, quadratorum 205. Duplico 205, fiunt 410. ſummæ quadratum 361. inde detractum, relinquit 49. (omnino, & ſemper quadratum) eius radix 7. differentia partium. ſemiſsis ſummæ numerorum $9\frac{1}{2}$. ſemiſsis differentiæ $3\frac{1}{2}$: ad $9\frac{1}{2}$. Ergo maior 13. Ergo minor 6, quia $3\frac{1}{2}$ de $9\frac{1}{2}$: aut 13 de 19 tantum relinquunt. Si lubet experiri per uulgatam uiam, ut ponas in autoris exemplo numeros 1 N & 20 —— 1 N, per me licet. & heic ignoſcendum eſt diſcentibus. Sed certè Diophantea ſubtilitas eſt laudibus uehenda.*

XXXII. Inueniendi ſunt duo numeri quorum ſumma, itemq; alterius quadrati ſupra quadratum alterius exceſſus eam, quam poſtulamur, quantitatẽ utrumq; habeat. Eſto ſumma numerorum 20, quadrati unius ſupra alterum exceſſus 80. Statuamus differentiam ipſorum 2 N, ut maior ſit 10 † 1 N, minor 10 —— 1 N. ſumma 20, differentia 2 N. Supereſt ut quadratorum etiam ab ipſis ortorum interuallum ſit 80. eſt autem 40 N: atq; hi æquantur 80. fit rurſum maior 12, minor 8, & quæſtio ſoluitur.

SCHOLION.

Hæc quæſtio nullam requirit limitationem. procedit enim in quibuſuis numeris, etiam ſi ſummã numerorum & interuallum quadratorum ponamus idem. Quod autem quadratorum interuallum in hac quæſtione ſit 40 N: id ſic habet. Quadratum alterum eſt 100 † 1 Q † 20 N: alterum 100 † 1 Q —— 20 N. hæc ſi coniungenda eſſent, tolleret —— 20 N alterorum 20 N præſentiam. Nunc cum tantùm exceſſus conſideretur, † 20 N ſupra —— 20 N eſt amplius 20 N & ſeipſo: & coniunctis copia ac penuria, fit exceſſus 40 N.

XYLANDRI.

Si poneres ſummã numerorum 5, & tantundem quadratorum interuallum, numeri 2 & 3 propoſito quadrarent: immò quiuis duo unitate differentes, quod ex quadratorum natura oſtendi poteſt. nam quadratum de 16 (uerbi gratia) fit, ſi quadrato de 15 adijcias 31, id eſt 16 & 15, &c. Si uoles per Algebram experiri. pone alterum 1, alterum 1 N. Summa 2 N † 1. Quadrata 1 Z & 1 Z † 2 N † 1. aufer utrinq; 1 Z reſtant 2 N, † 1 æqualia 2 N, † 1, idem eidem. ergo quiuis numerus & proximè maior uno ſatisfacient. In autoris exemplo diuiſio 20 in 10 † 1 N & 10 —— 1 N nullo labore nos leuat aliquo. Ponamus partes eſſe 1 N & 20 —— 1 N, erunt quadrata 1 Z & 1 Z † 400 —— 40 N. ab hoc illud aufer, reſtat 400 —— 40 N || 80. hoc eſt 40 N || 320.

320. 1 N 8. huius quadratum 64. altera pars 12, quadratum 144, 80 amplius priore. Cæterùm quadratorum interuallum cur ſit 40 N, obſcurius quidem, uerùm doctè interpres oſtendit. Simpliciſsimũ eſt è canone ſubtractionis id animaduertere. Nam de quadrato 100 † 1 q † 20 N. maiore, ſi minus detrahatur 100 † 1 q —— 20 N, unitatibus & Q ſe abolentibus, ſignũ —— ad —— 20 N oſtendit amplius fuiſſe ſubtractum quàm debuit, ſcilicet 20 N. adduntur ergo ad maioris 20 N, & interuallum perhibetur 40 N.

XXXIII. Inueniantur duo numeri, quorum interuallum & qui fit altero, in alterũ multiplicato, exhibeant eos qui præſcribuntur numeros. Neceſſe eſt autẽ quadruplum producti multiplicatione eorum cum quadrato interualli iunctum, conficere quadratum. Quod & ipſum effictum aliunde eſt. Sit interuallũ 4, productus 96. Ponamus ſummam eorum 2 N, & cùm interuallum ſit nobis dictum 4, erit maior 1 N † 2, minor 1 N —— 2: manente & ſumma eorum 2 N, & interuallo 4. Reſtat ut multiplicatio eorum producat 96. at gignit 1 q —— 4. hæc æquantur 96. fit rurſus maior 12, minor 8, & implent poſtulata quæſtionis.

SCHOLION.

Ne hoc quidem limitatione opus habet. Quod autem 1 N † 2 in 1 N —— 2, 1 q —— 4 producit, ſic habet. 1 N in 1 N, facit 1 q. in —— 2, —— 2 N gignit. rurſus 2 in 1 N, 2 N producit, & in —— 2, —— 4. Etiam —— 2 N abolito præſentia 2 N, supereſt 1 q —— 4, &c.

XYLANDRI.

Certè limitationem hanc non modo experientia confirmat, ſed palàm demonſtratur octaua propoſitione ſecundi. Et quidem quadratus qui ſic conficitur, ſemper eſt quadratũ ſummæ ipſorum numèrorum. Numeri 8 & 21. interuallum 13, productum 168. hoc quater, 672, adde 169 quadratum interualli, ſumma 841, radix 29, ſumma numerorum. Numeri 10 & 25, productũ 250. id quater, 1000: adde 225, ſumma 1225, radix 35, ſumma numerorum. Canon *quoq; hinc extruetur.* Datũ productũ *quadruplica, adde quadratum interualli, radix ſummæ quadrata, ſummam numerorum monſtrabit. Ei ſi addas & adimas interuallum, ſemiſsis ſummæ & reſidui exhibebunt numeros. Ita heic 96 quadruplicato, 384, adde 16, quadratum interualli, ſumma 400. radix 20. ergo ½ de 24 & 16 numeri. Ponamus interuallum 12, productum 200. Huius quadruplum 800, adde 144, quadratum interualli, ſumma 944. Hic numerus eſt ſurdus: & in ueris ergo numeris non datur ſolutio huius quæſtionis. Idẽ etiã Algebrica operatio monſtrabit, ubi rurſus Diophantea eſt breuior & ſubtilior quam uulgata. numeri 1 N † 6 & 1 N —— 6. fit 1 Z —— 36 æquale 200. hoc eſt 1 Z || 236. √ 236 ergo eſt 1 N. & numeri √ 236 † 6, ac √ 236 —— 6. quorum interuallum 12, productum (binomij in reſiduum) 200. ſumma √ 944. id eſt, bis √ 236. nam † 6 & —— 6 ſe abolent. Quod demonſtrandum duxi: neſcio qui præteritum à ſcholiaſta.*

XXXIV. Dentur duo numeri certa quadam ratione, ita ut eorum quadratorum ſumma ad numerorum ſummam eam teneat quæ poſcitur rationem. Sit maior numerus minoris triplus. ſumma quadratorum ad ipſorum ſummam quincupla. Eſto minor 1 N, maior ergo 3 N. ſumma 4 N. Summa quadratorum 10 q, quincuplum ad 4 N. ergo 20 N æquantur 10 q. fit 1 N, 2. & eſt minor 2, maior 6: ac poſtulatis quęſtionis ſatisfaciunt.

SCHOLION.

Fit 1 N 2.) *id ſic inuenitur. Cum 10 q æquentur 20 N: competunt in unumquemq; quadratũ 2. Numeri. Non eſt autẽ alius quadratus qui 2 N poſsit, demto cuius latus eſt 2. ſicut nullus qui 3 N ualeat, demto cuius latus 3. Quot enim Numerorum eſt Quadratus, tot unitatum eſt Numerus: ac uice uerſa. atq; hoc pertinet ad deminutionem illam notarum ſiue characterũ. Numeri iuncti 8, quadratorum ſumma 40, quod eſt quincuplum ad 8.*

XXXV. Dentur duo numeri ratione certa, ita ut ſumma quadratorum ab ijs creatorum, ad ipſorum numerorum interſtitium certam habeat rationem. Statuamus maiorem minoris triplum eſſe: ſummam autem quadratorum ad interſtitium numerorũ decuplã. Sit minor 1 N, maior erit 3 N. Summa quadratorum decupla eſſe debet ad interuallum numerorum. Eſt autem illa 10 q, hoc 2 N, ergo illud huius decuplum, Ergo 10 q æquantur 20 N. Vnitate utrinq; deminuto charactere, 10 N æquales 20. Ergo minor 2, maior 6. & fit, quod poſtulabatur.

SCHOLION.

Numerus 6 ad 2 eſt triplus. quadratum à 6, eſt 36, & à 2 quadratum 4: ſumma 40. Interſtitium inter 2 & 6, eſt 4. 40 autem huius decuplum.

XXXVI. Inueniantur duo numeri datæ rationis, ut interuallum quadratorum quæ ab ijs fiunt ad ſummam numerorum certam habeat rationem. Eſto maior minoris triplus: interuallum quadratorum ab ipſis ortorum ſeſcuplum ſummæ numerorum. Statuatur minor 1 N. erit maior 3 N. reſtat ut etiam quadratorum interuallũ ſeſcuplum ſit ſummæ numerorum. Quadratorum interuallum eſt 8 Q, numerorũ ſumma 4 N. Ergo 8 Q ſeſcuplum ſunt ad 4 N. itaq; 24 N. æquales 8 Q. Fit 1 N 3, & ſoluitur quæſtio.

SCHOLION.

Triplus eſt 9 ad 3. quadratus illius 81, huius 9: interſtitium 72. eius ſextans eſt 12, ſumma numerorum 3 & 9.

XXXVII. Inueniantur duo numeri in data ratione, ut etiam quadratorum quæ ab ijs fiunt interuallum ad interuallum ipſorum numerorum rationem habeat quæ petitur. Eſto maior minoris triplus, quadratorum interuallum ad numerorum interuallum duodecuplæ rationis. Statuamus minorem 1 N, erit maior 3 N. Supereſt, ut etiam quadratorum interuallum ad numerorum interuallum ſit duodecuplum. Atqui hoc eſt 2 N, illud 8 q. itaq; hoc illius eſt duodecuplũ: & proinde 24 N æquantur 8 q. Fitq; rurſum 1 N 3. & aperta eſt demonſtratio. Similiter hac ipſa ratione inuenientur duo numeri rationis propoſitæ, ut ex multiplicatione eorum productus ad ſummam eorum rationem habeat præſcriptam. Et rurſum duo numeri certæ rationis, ut ex multiplicatione eorum productus ad ipſorum interuallum rationem eam habeat, quæ mandatur.

SCHOLION.

Numeri 3 triplus eſt 9, & eum ſuperat numero 6. Quadratum maioris 81, quadrato minoris 9, præſtat numero 72. qui ad 6 eſt duodecuplus. Poriſma *autem illud, ſeu additamentum, ſic habet. Sit maior minoris triplus: productum multiplicationis ad ſummam numerorum dupla ſeſquiquarta. Sit minor 1 N, erit maior 3 N. producunt autem alterum in alterum multiplicatus 3 Q. hoc debet eſſe $2\frac{1}{4}$ ſummæ ipſorum quæ eſt 4 N. ergo 9 N (bis 4 N, & quadrans è 4 N) æquantur 3 Q. ergo 1 Q eſt 3 N; & 1 N eſt 3. Erit ergo maior 9, minor 3. productum 27. ſumma 12, cuius duplum & quadrans eſt 27. Sit rurſum maior ad minorem triplus, & productus ex ipſis quater contineat ipſorum interuallum, eiusq; ſemiſſem. Erunt rurſum numeri 3 & 9. Arbitror autem Diophantum propterea iſthæc non expoſuiſſe: quia in multiplicibus numeris hæc demonſtrari non poſſunt, ut priora: ſed dumtaxat in multiplicibus ſuperparticularibus.*

XYLANDRI.

Breuitatis potius cauſa, quàm fuga minutiarũ puto Diophantũ iſtis indicatis potiùs quàm prolixè explicatis acquieuiſſe. Ne rudis quicquã iure deſideret: duo proponam problemata. Dentur duo in quincupla ratione numeri, quorum productum ad ſummam ſit duplum. Ii ergo ſunt $2\frac{2}{5}$ & 12. Item ſit numerorum ratio $3\frac{2}{3}$. producti ad interuallum $2\frac{1}{2}$. Erunt numeri $\frac{20}{11}$ & $\frac{20}{3}$. interuallum $\frac{160}{33}$, per $2\frac{1}{2}$ multiplicatum $\frac{400}{33}$ tantũ fit etiã $\frac{20}{11}$ in $\frac{20}{3}$ multiplicatis. Adderem formas operationum, ſi ignauis ſcriberem. In Græco autoris fœdum erat mendum inculcatum ἀπ' αὐτῶν pro ὑπ' αὐτῶν. cum hoc productũ numeri in alterũ, illud quadratum utriuſq; notet. Sed res, & ſcholij integritas nos facilè expediuerunt.

ὑπ' αὐτῶν, ἀπ' αὐτῶν.

XXXIIX. Inueniantur duo numeri datæ rationis, ita ut minoris quadratus ad maiorem habeat quæ requiritur rationem. Statuamus maiorem minoris triplum: quadratum minoris ad maiorem numerum eſſe rationis ſeſcuplæ. Eſto minor iterũ 1 N, utiq; maior erit 3 N. Quadratum minoris 1 Q debet ſeſcuplum eſſe ad numerũ maiorem. Ergo 1 Q ſeſcuplum eſt ad 3 N. proinde 18 N æquantur 1 Q. & 1 N eſt 18: minor ſcilicet: ac maior 54. qui ſatisfaciunt propoſito.

SCHOLION.

Proinde 18 N.) *id eſt minus ſumtum ſexies, æquabitur maiori. nam ſexies 3 N fiunt 18 N. & Q de 1 N, eſt 1 Q. æqualis nimirum 18 N. omnium nomina unitate deprimantur, erunt 18 æquales 1 N. ergo minor,*

nor, 1 N, eſt 18: & maior, 3 N, eſt 54. & eſt 324, quadratus minoris, ſeſcuplus ad 54, puta maiorem.

XXXIX. Da duos numeros rationis quæ imperatur, ut minoris quadratum ad ipſum minorem habeat eam quæ poſcitur rationem. Eſto maior minoris triplus: & quadratus minoris ad minorem, ſeſcuplus. Erit rurſum maior 3 N, minor 1 N, manente quæ imperatur ratione: reſtat ut minoris quadratum, 1 Q, ſit ſeſcuplum minoris, qui eſt 1 N. ergo 6 N æquantur 1 Q. eſt minor 6, maior 18. & ſatisfit propoſito.

SCHOLION.

Maior 18. minor 6: ratio tripla. quadratus minoris ad ipſum minorem, ſeſcuplus: 36 ad 6.

XYLANDRI.

Canones fabricari heic eſt faciliùs, quàm ut me monitorem res poſcat. plura etiam exempla quiuis ſuo Marte facilimè finget. quæ etiam de ſequentibus uolo accipi propoſitionibus.

XL. Poſtulantur duo numeri certam habentes rationem, ut minoris quadratus ad ſummam numerorum, datam rationem habeat. Eſto maior minoris triplus: & quadratus minoris ad ſummam numerorum duplus. Erunt denuò maior 3 N, minor 1 N. Minoris quadratus, 1 Q, duplus debet eſſe ſummæ, quæ eſt 4 N. proinde 8 N æquantur 1 Q. & 1 N eſt 8. minor ſcilicet: ergo maior 24. Ii ſoluunt quæſtionem.

SCHOLION.

Maior 24. minor 8. ratio tripla. 64 eſt quadratus minoris, duplus ſummæ numerorum 32.

XLI. Inuenire duos numeros certæ rationis, quorum minoris quadratus ad numerorum interuallum ſit in data ratione. Maior ſit minoris triplus: quadratus minoris ad numerorum interuallum rationem obtineat ſeſcuplā. Erit maior 3 N, minor 1 N. reſtat ut 1 Q, minoris quadratus, ad interuallum numerorū, quod eſt 2 N, ſit ſeſcuplus. ergo 1 Q. ſeſcuplus ad 2 N, æquabitur 12 N. & 1 N eſt 12, minor: maior 36. & ſatisfit propoſito.

SCHOLION.

Numeri 36 & 12, triplus maior minoris, ipſorum interuallum 24. & 144, quadratus minoris, ad hoc ſeſcuplus.

XLII. Iiſdē rationibus inuenientur duo numeri datæ rationis, ita ut maioris quadratus ad minorem numerum ea ſit, quæ petitur, ratione, rurſumq; duo numeri datæ rationis, ut quadratus maioris ad ipſum maiorem ſit ea quam lubet ratione. itē duo numeri datæ rationis, ut maioris quadratus ad ſummam numerorum rationē obtineat datam. deniq; duo numeri datæ rationis, ut maioris quadratus ad numerorum interuallum datam habeat rationem.

SCHOLION.

Poriſmatis ſeu appendicis huius partes ita habent. Maior 6, minor 2: ratio tripla. quadratus maioris 36 ad minorem octodecuplus, Rurſum maior 6, minor 2: ratio tripla. 36. quadratus maioris ad ipſum 6 ſeſcuplus. Item maior 12, minor 4: ratio tripla. Maioris quadratus 144, ſummæ numerorum, quæ eſt 16, nouencuplus. Deniq; maior 6, minor 2, ratio tripla. quadratus maioris 36, ad 4 interuallum numerorum nouencuplus.

XLIII. Datis duobus numeris, tertius eſt inueniendus, ut de his porrò tribus binis in unum conflatis, & in reliquum multiplicatis, tres producantur numeri, æqualibus ſe incrementis ſuperantes. Duo numeri ſunto 3 & 5: & quæratur tertius, ut deinde bini loco unius in reliquum multiplicati, producant numeros quorum æqualia ſint interualla. Qui quæritur, eſto 1 N. Is adiunctus ad 5, fit 1 N † 5. ſic deinde multiplicatus in reliquum, qui eſt 3, facit 3 N † 15. Rurſus 1 N & 3, ſunt 1 N † 3. quod in reliquum, puta 5, multiplicatum, facit 5 N † 15. Deniq; ſi coniungantur 3 & 5, conficitur 8. hic in 1 N ductus, facit 8 N. Enimuerò 3 N † 15 non eſſe trium productorum maximum, liquet. omnino enim eum ſuperat hic, 5 N † 15. Ergo 3 N † 15 aut minimus eſt productorum, aut medius. ac 5 N † 15 aut maximus eſt productorum, aut medius. Maximus, medius, aut minimus eſſe poteſt 8 N: quia nondum conſtat quot unitates conficant 1 N. Ponamus primò maximum eſſe 5 N † 15; minimum 3 N † 15. mediū 8 N. Iam ſi tres numeri ſeſe æqualibus ſuperent interuallis, duplum medij faciunt coniuncti maximus & minimus. Hic uerò ſumma extremorum eſt 8 N † 30. medius 8 N. ergo 8 N † 30 æquantur 16 N. & fit 1 N, $\frac{15}{4}$ unitatis, ſeu 3 & dodrans. Tantus eſt qui quæritur, & ſatisfacit poſtulatis propoſiti. Iam uerò ſtatuamus maximum eſſe 5 N † 15, medium 3 N † 15, minimum 8 N. Atqui ſi tres numeri æqualibus ſe interuallis ſubſequantur: quanto ſuperat maximus medium, tãto & medius minimum. Sed heic maximi ſupra medium exceſſus eſt 2 N: medij ſupra minimum 15 —— 5 N. hæc ergo ſunt æqualia. & 1 N erit $\frac{15}{7}$, ſeu $2\frac{1}{7}$ tantus eſt quæſitus, & quæſtioni ſatisfacit. Deniq; maximum ſtatuamus 8 N, medium 5 N † 15, minimum 3 N † 15. Rurſus cum extremorum ſumma ſit duplum medij; 11 N † 15 æquabunt 10 N † 30. & 1 N eſt 15. Ergo 15 eſt numerus qui quæritur, & implet poſtulata.

SCHOLION.

Variæ ſolutiones, inuēta æquatione.

Tripliciter hoc demonſtrat propter 8 N; quia cùm nondum liqueat quantus ſit Numerus; 8 Numeri maximus, minimus, aut medius quæſitorum eſſe poteſt: ideò diuerſum ei in ſingulis locum adſignat demonſtrationibus, mediū in prima, minimum in ſecunda, maximum in tertia faciens. Ita autem inuenitur eius quantitas. Cum 8 N & 30 æquentur 16 N: ſi de ſimilibus abijciantur ſimilia, relinquuntur 8 N & 30 æqualia. Partire 30 per 8, inuenies $3\frac{3}{4}$. aut, ſi etiam 3 in quadrantes ſoluas, ut omnia ſub eandem reducantur ſpeciem, fient $\frac{15}{4}$. & abiecta denominatione partium, 15 integra. Cùm ergo maximus ſit 5 N † 15, hoc eſt $33\frac{3}{4}$: hæc in quadrantes reſoluta, fiunt 135. Medius, 8 N, id eſt 30, reſolutus in quadrantes, fit 120. eademq; ratione minimus 105. horum eſt idem interuallū, ſcilicet 15. In ſecunda demonſtratione fit 1 N ualor $\frac{15}{7}$: hac de cauſa. Cùm 15 —— 5 N æquentur 2 N: adiecto utrinq; defectu, erunt 15 æquales 7 N. & partitio oſtendet 1 N eſſe $2\frac{1}{7}$. Hoc totum, etiam 2 in ſeptimas reſolutis, & nomine fractionis abiecto, fit 15. Maximus ergo erit $25\frac{5}{7}$, uel omnibus in ſeptimas partes reſolutis 180 ſeptimarum. Medius $21\frac{3}{7}$, hoc eſt 150 ſeptimarum. Minimus $17\frac{1}{7}$, hoc eſt 120 ſeptimarum. In tertia 1 N eſt 15. Nam cùm 15 N † 15 æquētur 30 N. undiq; abiectis æqualibus, 1 N fit 15. reliqua manifeſta ſunt.

XYLANDRI.

Nam maximus fit 120, medius, 90, minimus ſex. De cauſa fracta in integros uertendi ſuprà monuimus. Ceterùm hæc quæſtio tripliciter ſoluitur, ut multa alia. cuius rei cauſa eſt, quod non exprimitur tertius ille, quem quærere iuberis, maior ne, an minor datis extremis, an uerò medio loco ijs interuenire debeat, itemq; producta eorū. In textu quæ margini erant allita, in contextum retuli. De arithmeticæ progreſſionis proprietate. cui hic innititur autor, nihil attinet monere hoc loco.

DIOPHANTI RERVM ARITHMETICARVM LIBER SECVNDVS.

Guilielmo Xylandro interprete.

Propoſitio 1.

DEntur duo numeri, quorum ſumma ad ſummam quadratorum ab ijs procreatorum habeat eam quæ poſcitur rationem. Sit quadratorum ſumma ad numerorum ſummam decupla. Statuatur minor 1 N maior 2 N. ſumma 3 N. quadratorũ ſumma 5 Q. horum decima pars ſunt 3 N. ergo 30 N æquantur 5 Q. erit 1 N, 6. minor quæſitorum. maior 12. hiq; poſtulatis ſatisfaciunt.

II. Inueniendi ſunt duo numeri, quorum interuallum ad quadratorũ interuallũ ab ipſis ortorum ſit in ea quæ præcipitur ratione. Sit numerorũ interuallũ ſextans interualli quadratorum. Ponemus minorem 1 N, maiorem 2 N. interuallum numerorum 1 N, quadratorum 3 Q. ergo 1 N ſextans eſt de 3 Q. itaq; 6 N æquantur 3 Q. & 1 N fit 2. ergo minor eſt 2, maior 4. & faciunt id quod iubemur.

III. Dentur duo numeri, ut ex multiplicatiõe alterutrius in alterũ productus ad ſummam uel interuallum numerorum habeat rationem præſcriptam. Eſto productus ſummæ ſeſcuplus. Ponamus eos qui quæruntur 1 N & 2 N. (Cæterùm poſſunt etiam in quauis data proportione poni) erit productus 2 Q, ſumma numerorum 3 N. Ergo 2 Q ſeſcuplum ſunt ad 3 N. itaq; 18 N æquantur 2 Q. deprimantur notæ unitate, 18 æquabuntur 2 N. ergo 1 N 9. duo ergo quæſiti numeri, & ſatisfacientes poſtulatis, 9 & 18. Quod ſi productũ interualli ſeſcuplum eſſe præſcribatur, erat rurſum productus 2 Q, interuallum 1 N. & 6 N æquales 2 Q, & 1 N 3. Ergo 3 & 6 numeri ſunt qui quærebantur.

IV. Poſtulantur duo numeri, quorũ interualli ad ſummam ab ipſis ortorũ quadratorum ſit quæ præſcribitur ratio. Eſto ſumma quadratorum ad interuallum numerorum decupla. Statuamus alterum 1 N, alterum 2 N. ſumma quadratorũ 5 Q, interuallũ 1 N. Oportet 5 Q decuplum eſſe ad 1 N. ergo 10 N æquantur 5 Q. eſt 1 N, 2. & quæſiti ſunt 2 ac 4.

V. Petuntur duo numeri ea conditione, ut quadratorũ ex ipſis natorũ interuallum ad ſummam numerorum ea ſit, quæ præſcribitur, ratione. Sit interuallum quadratorũ ad ſummam numerorũ ſeſcuplũ. Rurſum quæſiti ponantur 1 N & 2 N. quadratorum interuallum 3 Q, ſumma numerorum 3 N. Oportebit 3 Q eſſe ſeſcuplum ad 3 N. ergo 18 N æquantur 3 Q. fit 1 N, 6. alter 12. Euidensq; eſt demonſtratio.

SCHOLION.

Quinq; hæ quæſtiones uidentur eædem eſſe cum quinq; priore libro expoſitis. prima ſcilicet eadem cum trigeſimaprima primi: ſecunda cũ eiuſdem XXXIV, tertia cum XXVIJ, & XXX, (eſt enim duplex) quarta cum XXXIJ, quinta cũ XXXIIJ. Sunt aũt hæ illis imperfectiores. nam in illis idem, quod heic, quærebatur: & præterea etiam ratio numerorum qui quærebantur: quod heic nequaquã fit. & ex illis hæ ſunt notæ. Ponit in his omnib. 1 N & 2 N: idq; nihil intereſt, quacunq; ratione numeri, modò inæquales, conſtituantur. Semper enim ſatisfit quæſtioni.

XYLANDRI.

Latiùs ergo patent hæ quæſtiones; & quæuis innumeras admittit ſolutiones: ꝙ in tertia quæſtione autor non diſſimulauit. & depreſſio characterũ eis accidit, ꝙ & ipſum ibi indicauit. Exẽplis facilius eſt hæc illuſtrare, q̃ ut noſtra requiratur heic opera. Semel admonitus, ſemper intelligas uelim, me mẽda Græci textus oĩa nõ ſuſtuliſſe: ſed id tibi ex uerſiõe noſtra faciẽdũ mãdaſſe.

VI. Quæruntur duo numeri, dato eorum interuallo, quorũ quadrati quod habẽt interuallũ, ſuperet numerorũ interuallũ quãto poſtulatur numero. Oportet aũt interualli numerorũ quadratũ minorẽ eſſe ſumma quę colligitur ex ipſo hoc interuallo, & numero poſtulato. Eſto numerorũ interuallũ 2, & numerus quo quadratorũ interuallũ interuallo numerorũ præſtat, 20. Sit minor 1 N, maior erit 1 N † 2, manẽte interuallo 2. Quadratorũ interuallũ 4 N † 4. atq; hoc 20 eſt ultra interuallũ 2. ergo æqualia 4 N † 4 & 22. & fit 1 N, 4 $\frac{1}{2}$ minor quæſitorũ: maior 6 $\frac{1}{2}$. & ſatisfaciunt q̃ſtioni.

VII. Habẽdi ſunt duo numeri, ea lege, ut interuallũ quadratorũ ab ijs ꝑcreatorũ, pręſtet interuallo numerorũ numero eo ꝗ rationẽ interuallorũ explicat, & inſup dato numero. Ponamus interuallorũ rationẽ eſſe triplã, ac pręterea habere 10. Heic oportet quadratū interualli numerorū, minorē eſſe ſumma quæ ex triplo huius interualli, & ex unitatibus decem colligitur, quæ dantur. Detur autem numerorum ipſorum interuallum 2. Erit itaq; minor 1 N, maior 1 N † 2. Ergo 4 N † 4 (quadratorū interuallū) triplū erit ad 2, & habebit præterea 10. Ergo ter 2, & 10, hoc eſt 16, ęquantur 4 N † 4. fit 1 N, 3. hic eſt minor, maior 5. & faciunt, quæ poſtulabantur.

SCHOLION.

Determinationes ſextæ & ſeptimæ quæſtionis rectè habent. In ſexta interualli 2 quadratus (4) minor debet eſſe ſumma quæ colligitur ex hoc interuallo & poſtulato numero 20. ſumma 22. quibus minor eſt 4. In ſeptima quadratus interualli numerorum (4) minor debet eſſe coniunctis triplo interualli (6) & dato numero 10. ſumma 16. Si æqualis ponatur quadratus ille ſummæ dictæ utrauis in quæſtione: non ſtabit res: ut ſæpe iam diximus. multo minus, ſi maior.

XYLANDRI.

Aliud exemplum ſextæ. Dentur duo numeri, alter alteri numero 4 præſtans, ita ut quadratorum interuallum numerorum iam dictum interuallum ſuperet 68. Numeri erunt 1 N & 1 N † 4. quadrati 1 Q & 1 Q † 8 N † 16. ergo horū interuallum 8 N † 16. Hinc ſi numerorum interuallum, ſcilicet 4, auferatur, ſupererūt 8 N † 12, quod æquale eſt 68. & utrinq; reiectis 12, 8 N || 56. ergo 1 N, minor, 7. maior 11. Quod ad conditionem ſeu limitationem attinet, 2 (interuallum numerorum) & 68 numerus poſtulatus, ſummam conficiunt 70. at interualli dicti quadratus 16, multo eſt minor quam 70. Vt autem neceſſitatem conditionis intelligas, Quære duos numeros, 5 differentes: ut quadratorum interuallum ſit 25, hoc eſt 20 amplius quam 5. Inuenies 25 † 10 N || 25. quod eſt abſurdum. Pone numerorum interuallum 10, & quadratorum interuallum hoc amplius 30. inuenies 100 † 20 N || 40. quod eſt fermè abſurdius. Idem de ſeptima quæſtione tuo Marte experiaris licet. Græca & Diophanti & ſcholiaſtæ ſunt ualdè confuſa.

IIX. Quadratus numerus propoſitus, diuidatur in numeros duos quadratos. iſque ſit 16. Ponatur prior numerus 1 Q: ergo alter erit 16 —— 1 Q. & hunc oportebit numerum æquari uni quadrato. Fingo quadratum latus habentem Numeros quotquot uolo, deficientibus tot unitatibus, quot conſtat latus quadrati 16. ac ſit latus quadrati 2 N —— 4, (nam latus 16, eſt 4.) quadratus erit 4 Q —— 16 N † 16. hoc æquabitur 16 —— 1 Q. Adijciatur utrobique defectus, & ab æqualibus æqualia auferantur, 5 Q æquabuntur 16 N. & 1 N erit $\frac{16}{5}$. Ita fiet quadratus $\frac{256}{25}$ unus. ergo alter $\frac{144}{25}$. qui coniuncti faciunt $\frac{400}{25}$. hoc eſt 16. cuius partes utraque eſt quadratus numerus.

SCHOLION.

Iubet hac propoſitione quadratum numerum 16 diuidere in duos quadratos: cùm quidem id natura eius nō ferat. Quidam enim quadrati diuiduntur in quadratos. alij neutiquam. Et qui diuiduntur, alij in duos, ut 25 in 16 & 9: alij in tres, ut 49 in 4, 9, 36: alij in quatuor, ut 225 in 4, 9, 16, 196. ac ſic deinceps in infinitū. Non ergo hoc dicit, 16 in duos quadratos eſſe partiendum, manēte ſectionis experte unitate: id enim eſt impoſſibile. & ſi hoc egiſſet, poterat quadrato 25 adſcito, inq; duos quadratos diuiſo, quæſtionem demonſtrare. Nunc autem ſua fretus alacritate quemuis quadratum diuidere intendit in duos quadratos: quod, niſi in partes ſecta unitate, fieri nequit. Ita heic partitus eſt quadratum numerum 16 in duos quadratos. quorum alter 10 $\frac{1}{5}.\frac{1}{25}$, latus habet 3 $\frac{1}{5}$, alter 5 $\frac{3}{5}.\frac{4}{25}$, latus habet 2 $\frac{2}{5}$. qui quadrati coniuncti, 16 conficiunt. Et prior horum quia $\frac{1}{25}$ in eo exſiſtit, totus in uigeſimas quintas reſolutus, fit $\frac{256}{25}$: & latus eius in quintantes reſolutum, fit $\frac{16}{5}$. Poſterior eadem de cauſa fit $\frac{144}{25}$, latus eius $\frac{12}{5}$. Hoc enim uniuerſè ſciendum eſt, quod quadrati qui à partibus unitatis fiunt, partibus conſtant cognominibus partium, à quibus fiunt, quadratorum. Sicut in propoſita quæſtione. cum latus ſit $\frac{16}{5}$, & à 5, quod eſt nomen partium, fiat quadratus 25: conuenienter etiam quadratus lateris eſt $\frac{256}{25}$. & ſi latus fuiſſet triens, nonarum partium exſtitiſſet: ſi quadrans, ſedecimarum: ac ſic deinceps. Atq; hoc eſt illud, Numeri aliquota pars in numeri eiuſdem eandem aliquotam partem multiplicata, aliquotam quadrati de eo numero gignit partem. eſt enim $\frac{1}{5}$ aliquota numeri, $\frac{1}{25}$ aliquota quadrati pars. Mirari autem nihil attinet, quòd quamuis quadratis cōiunctis rurſus 16 conficiuntur: tamen latera quadratorum coniuncta maiorem conſtant numerum quàm ſit 4, puta latus numeri 16. ſumma enim laterū eſt 5 $\frac{3}{5}$. Omniū enim quadratorū in duos quadratos diuiſorū latera ex diuiſione ortorū quadratorū cōiuncta plus cōficiunt quā ſit latus diuiſi: quātumuis quadrati iūcti diuiſum quadratū reſtituant. Ita latus quadrati 25 eſt 5: quadrati ipſum cōficiētes 16 & 9: latera 4 & 3, quorū ſumma 7, amplius aliquid q̃ 5. Enimuerò Diophātus omnia ſub unā reducere ſpeciē intēdēs, nō ab unitatib. & partib. quadratos facit. Sed cū fieri nequeat ut pars ipſa ꝑ ſe in unitatē cōuertatur, unitas aūt in partes ſecari poſſit: numerorū unitates ſecat in partes cognomines partium

Quadrati minutiarū quales.

Quadratorū, in quos quadratus diuiſus eſt, laterū ſumma maior quadrati latere.

partiū in ijs inuectarū. cumq; $\frac{1}{25}$ & $\frac{1}{5}$ ſeſe exſeruerint in numeris: tota diuidit iuxta rationē numeri q primus ab unitate partes eas habet, eſtq; 25 atque ſic quadratorum uigeſimæquintæ fiunt alterius 256, alterius 144, quorum ſumma 400. quem numerum etiam 16 facit in uigeſimasquintas ſectus: cum uiciesquinquies ſedecim fiant 400. Cùm ergo iubet quadratum 16 diuidere in duos quadratos: nihil aliud eſt, ac ſi diceret, 400 (quadratum numeri 20 factum 16 in 25 quadratum ductis) diuide in duos quadratos: & diuideret in 256 & 144. Vel ſic. Detur numerus, in quem ductus 16, quadratum procreet, qui in duos quadratos ſecari poſit, unitate heic nullam admittente diuiſionem, atque is inuenitur 25: in quem multiplicatus 16, gignit 400, quadratum numeri 20: qui 400 diuiditur in 256 quadratum lateris 16, & in 144, quadratū lateris 12. Rectè etiam hoc dicit. Fingo quadratum latus habentem, &c. Nam ſi poſitis ijſdem, fingamus quadratū fieri à 4N —— 4. fient 17 Q æquales 32 N, & 1 N, erit $1\frac{15}{17}$. uel $\frac{32}{17}$. Erit ergo prior quadratus, cuius latus $1\frac{15}{17}$ ſit, $2\frac{13}{17}$ & $\frac{225}{289}$. Nam 17 in ſe ductus 289 facit, & $\frac{32}{17}$ in ſe ductus, gignit $\frac{1024}{289}$. Alter quadratus ſic inuenietur. cum ponatur 4 N —— 4 latus eius, & 1 N ſit $1\frac{15}{17}$. 4 N facient $7\frac{9}{17}$. unde ſi 4 auferas, relinquetur latus $\frac{60}{17}$ ſeu $3\frac{9}{17}$. huius quadratus ergo $\frac{3600}{289}$, ſi $\frac{60}{17}$ in ſe ducas. uel $12\frac{3}{17}$. $\frac{81}{286}$. ſi $3\frac{9}{17}$ in ſe multiplices. Hi compoſiti quadrati, puta $2\frac{13}{17}$. $\frac{225}{189}$. & $12\frac{3}{17}$. $\frac{81}{289}$, conficiunt 16 propoſitum quadratum. Partium porrò quadrati 1024 & 3600 conficiunt ſummam $\frac{4624}{259}$. cuius latus, utpote quadrati, eſt $\frac{68}{17}$. Fit autem 4624 ſi 16 multiplices per 289, aut numeri 16 unam quamlibet unitatem in 289 partes ſeces. Eſt ergo iam 16 diuiſus in alios duos quadratos numeros. Hoc autem ſcire oportet, quod heic loci nunquam debet quadratus effingi ex aliquo uno Numero, ſed ex Numero & parte quotacunque, aut duobus, ac deinceps. Nam ſi ab uno numero quadratus creetur, non ſuccedet res. rurſus enim fiet numerus tantus, quantum & latus eſt propoſiti quadrati. atque ita prior quadratus idem erit cum eo qui ad diuidēdum eſt propoſitus, & ſecundus nuſquam exiſtet: itaq; manebit quadratus noſter indiuiſus: quod minimè uolebamus. Præterea quod dicit de quadrato conficiendo è latere, quod ſit quotcunq; tandem numerorum, demtis tot unitatibus quot habet latus numeri 16. Statutum ſit 25 quadratum diuidere in duos quadratos. Is cum è 16 & 9 conficiatur: ubi ab 25 abſtulero 1 Q (puta 16.) relinquuntur 9: nimirum 25 —— 1 Q. Porrò 3, latus quadrati 9, id erit, quod ſe ait fingere 2 N —— tot unitatibus, quot conſtat latus quadrati ad diuidendum propoſiti, latus huius 5. ergo latus quod fingitur, 2N —— 5. Quadratum ergo ſic conficietur. Cum numerus, qui 16 quadrati latus eſt, ſit 4: utique duo numeri erunt 8. ab his ſi auferas latus ~~quadrati~~ 25, quod eſt 5; omnino relinquūtur 3, quod eſt latus quadrati 9. & 3 eſt 8 — 5. Rurſum ſi auferam à 25 numerum quadratum, 9: reſtat 16. Huius latus non iam amplius dicemus fingi 2 N —— tot unitatibus, quot latere quadrati 25 continentur. Nam cum impar ſit 3, unde 9 naſcitur: ergo tres numeri, erunt 9. unde ſi latus quadrati 25, ſcilicet 5, ſubduxeris: ſupereſt 4, latus de 16: & eſt latus 16, nimirum 4, 3 N —— 5. id eſt, 9 —— 5. Vniuerſe enim in omnib. quadratis, qui in duos quadratos diuiduntur: latus diuiſi, cum latere alterutrius in quos facta eſt diuiſio, rationem quandam habet ad alterius latus, & ſubtracto alterutro quadratorum qui è diuiſione emergunt: latus reliqui tot erit unitatum, quot erat demto diuiſi latere latus totiplex, quotuplex erat ratio: & reliqui latus cum latere diuiſi ad latus ablati. Verbi gratia. È 16 & 9 conſtat 25, quadratus è quadratis, inq; hos diuiditur. & latus totius, puta 5, cum 3, ut latere quadrati 9; duplum fit lateri totius 16, quòd eſt 4. Et ſi auferam 16 à 25, erit latus de 9. ob duplam rationem bis latus de 16, minus latere de 25. Erit ergo 8 —— 5: quippe 3. Rurſus cùm latus de 25, uidelicet 5, cum 4 ut latere de 16 triplum ſint 3, qui eſt latus 9: ſi auferam 9, erit latus de 16 ob triplam rationem, ter latus de 9, —— latere de 25: ſcilicet erit 9 — 5, id eſt 4. Similiter cùm quadratus 169 diuidatur in 144 & 25 quadratos: & 13 latus de 169, cum 5 latere de 25, ſeſquiplū ſit ad 12, quod eſt latus quadrati 144. Ergo ſi 144 de 169 ſubtraham: erit latus de 25, puta 5, ob ſeſquiplā rationem, ſeſquiplum lateris de 144, quod eſt 12, uidelicet 18 — latere 169, quod eſt 13. erit ergo quinq;. Et rurſus, quandoquidem 13, latus de 169, cum 12 latere de 144, quincuplum eſt lateris de 25, quod eſt 5: ſi auferā 25 de 169: propter quincuplam rationem 12, ut latus de 144, erit quincuplum lateris de 25, — latere de 169, quod eſt 13. erit ergo 25 —— 13. id eſt, 12. Proinde cum quæuis laterū inuicem detur ratio, ſemper tamē cū defectu lateris quod habet quadratus, diuidendus: ideo dixit, Numeros quotquot uolo, deficiētibus, &c. Ergo in exēplo de 169, ſicut diximus, ſublato 25, relinquitur 144 quadrati latus, quinquies tantum quantū latus 25: demto ſcilicet ab illo 13, qui eſt latus 169. Ac Diophantus quidē dixiſſet, Eſto latus de 144, 5N — latere de 169. nam 1 N eſt latus quadrati ablati, cui quadrato adſignaueramus 1 Q. Quod ſi dixiſſet diuidendum eſſe 169, & ab eo auferendum 1 Q: ac deinde dixiſſet: Eſto reliqui latus, Numeri 6, 7, aut quotcunq; tandem, —— latere de 169: non iam partes fuiſſent 144 & 25, ſed aliæ. ſicut ſuprà demonſtrauimus. Quomodo autem dicit Diophantus, ſecundum quadratum fore 144? quia latus eius poſuit 2 N —— 4: ergo 2 N erunt $6\frac{2}{5}$: unde ablatis 4, reſtant $2\frac{2}{5}$. & unitatibus in quintantes diſſolutis, erunt hæc 12, quod eſt latus 144.

Cautio de latere fingendi quadrati

XYLANDRI.

Præclarum eſt hoc problema, & raræ ſubtilitatis. Sed in Græco Diophanti contextu fœdum eſt men-

eſt mendum, cum poſt δυνάμεων δ μονάδων ς *exciderint hæc,* λείψει ἀριθμῶν ις. *Sic enim fit iſtud quadratum.*

2 N —— 4
2 N —— 4

—— 8 N † 16
4 Q —— 8 N

4 Q —— 16 N † 16.

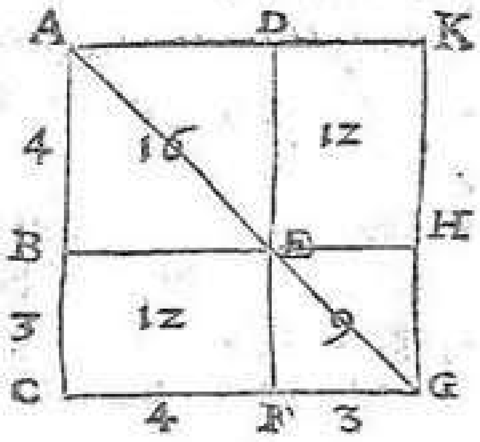
De quadratorum incrementis & compoſitione.

& ſic demum cohærent quæ de æquatione ſcribuntur. Nam cum huic quadrato æquentur 16 —— 1 Q. addito utrobiq; 1 Q fit 5 Q —— 16 N † 16 || 16. & rurſum additis utrobiq; 16 N. fit 5 Q † 16 || 16 † 16 N. deniq; abĳciũtur utrinq; 16. manet æquatio inter 5 Q & 16 N. ſeu characteribus deminutis, inter 5 N & 16. In poſteriore propoſitione id mendi non eſt. Interpres porrò ſatis accuratè expoſuit rem, oſtenditq; plurimis modis diuerſis ſatisfieri quæſtioni poſſe. Mirificè conducit hæc propoſitio ad diametralium (quos uocant) numerorum inuentionem, quorũ ſcilicet quadrati coniuncti, quadratum conſtituant: & eorum ſuus eſt in arithmetica & geodæſia uſus. Sed & ſcholia ipſa nonnihil explanare operæprecium eſt. Quod ait quadratorum alios in 2, alios in 3, alios in quatuor diuidi quadratos: rectè eſt accipiendũ. nam profectò is, quẽ ipſe in quatuor diuidit quadratos, 225: etiam in duos diuidi poteſt, 81 & 144. Etſi cõmentarios non ſcribo, attingere tamen hoc theorema lubet. Omnis quadratus numerus proximè minorem quadratum duplo radicis huius & unitate ſuperat. Conſtat enim omnes quadratos colligi ex progreſſione numerorum imparium naturali. Sic 15 ad quadratum de 7 (49) additum, 64 facit, quadratum numeri 8. & bis 12, plus uno, id eſt 25, ad quadratum numeri 12, ſcilicet 144, adiectum, quadratum proximè maioris numeri, 13, nimirũ 169 conficit. & uice uerſa, quadratum de 15 eſt 225. duplum 15, eſt 30: inde aufer 1, reſtat 29. quod de 225 detractum, relinquit 196, proximè minoris numeri, qui eſt 14, quadratum. Reliqua typus explicat. ſemper enim quadratus ſumma eſt omnium ſuperiorum imparium progreſſionis. ſemperq; additur ei impar, qui duplũ eſt radicis eius & 1 amplius, ut fiat proximè maior quadratus. quod inuerſè de ſubtractione intelligere in promptu eſt. Scire iam uelim cui nam quadrato numero quadrati aliquot propoſiti ita poſſint adĳci, ut quadratus fiat qui colligitur. Summa quadratorum aut par eſt, aut impar. Si hoc, unitatem ei adime, reliqui ſemiſſis quadrato addes iſtos quadratos, habebis aliũ, ſcilicet proximè maiorem. Sint quadrati 81 & 196. quæro alium, cui additi, quadratum conficiunt. Summa datorum 277. uno demto, 276. ſemiſſis 138. huius quadrato 19044 adĳce 277. fiet 19321 quadratus, radix 137. eſt ergo proximè maior. Sic 1.4.9.16.25. ſummam conſtituũt 55. & ſi iſti quadrati omnes ad 729, qui eſt quadratus lateris 27, adĳciantur, fiet quadratus 784 proximi maior, radicis nimirum 28. Si ſumma erit par, huius item ſemiſſis par. Aufer ab hoc 1, reliqui ſemiſſis quadrato ſi addas propoſitum, quadratum habebis numeri binario ſemiſſem hunc excedentis. Quadrati 16 & 36. ſumma 52. ſemiſſis 26, uno demto 25. Hinc aufer 1, relinquuntur 24, ſemiſſis 12. huius quadratus 144. Ei adde 52; habebis 196, quadratum numeri 16, qui 12 excedit binario. Rurſum, quadrati ſint 4, 16, 36, 64. ſumma 120. ſemiſſis 60. aufer 2, bis unum: reliqui 58 ſemiſſis 29. Eius quadratum 841. huic adde iſtos quadratos omnes, ſeu ſummam eorum 120, habes quadratum 961, cuius radix 31, 2 amplius quàm 29. At ſi paris ſummæ ſemiſſis fuerit impar, aliter res habebit. Non enim niſi 1 adſcita, aut (ſi id uelis) abiecta iſti quadrati alĳ quadrato adiungentur in numeris integris. Si unitatem ſumma adſciſcat: quadratus numeri unitate, quàm eſt ſummæ ſemiſſis, maioris, tota illa ſumma ſibi ademta quadratus erit ipſius ſemiſſis. Sin amittat: quadratus unitate, quàm eſt ſemiſſis, minoris numeri, hoc reſiduo adſcito, quadratus erit ipſius item

1	1	1
3	4	2
5	9	3
7	16	4
9	25	5
11	36	6
13	49	7
15	64	8
17	81	9
19	100	10
21	121	11
23	144	12
25	169	13
27	196	14
29	225	15
31	256	16
33	289	17
35	324	18
37	361	19
39	400	20
Impariũ ꝓgreſſio.	*Quadrati.*	*Radices.*

item ſemiſsis. Quadrati 4.16.25.36.49. Summa 130. ſemiſsis impar, 65. Quadratū de 64, 4096, huic ſi addas 129, habebis quadratum 4225, cuius radix 65. Si quadrato 4356. cuius radix 66, adimas 131, rurſum habebis quadratum ſemiſsis. Atq; hæc hîc hactenus. reliqua uide infrà ad undecimam huius, & duodecimam tertij. Iam illa minutiarum in partes diuerſarum denominationum diuulſio, qua Græci utuntur, & qualis ab interprete proponitur 5 $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{25}$. ut habet aliquid rationis, ita plurimum obſcuritatis, & multo ſimplicius eſt, adq́; uſum accommodatius dicere, 5 $\frac{19}{25}$. quod rectè factum eſt, & contra deprauationū anſas cautè in Ptolemaicis utriſq; numeris à noſtri ſeculi hominibus. Et in hac ipſa propoſitione ſcholiaſtes ineptè pro 3 $\frac{157}{289}$, poſuit ſuo more 2 $\frac{13}{17}$. $\frac{225}{289}$. quæ enim elegantia eſt, aut quod compendium, partes totis ſubijcere quæ amplius toto ſint? nam $\frac{13}{17}$ quidem & $\frac{225}{289}$, ſunt $\frac{446}{289}$, quod eſt totum & eius partes $\frac{157}{289}$. Porrò qui attentè ſecundi Euclidei libri propoſitiones quartam & ſeptimam cognouerit: næ is facilè intelliget, mirum non eſſe, quod duo numeri coniuncti maiorem ſummam conſtant, quàm ſit latus quadratorum utriuſque in unum conflatorum. non enim modò mirum hoc non eſt, ſed fieri aliter non poteſt: cùm complementa adhuc duo præter duo iſta quadrata requirantur ad conficiendum quadratum lineæ ex utroq; latere compoſitæ. Quod in gratiam rudiorum etiam oculis ſubieci. A B eſt 4, B C, 3. horum quadrata A B D E 16, & E F G H 9. per quæ diameter tranſit A E G, ut ratio geometrica poſtulat. Quadratorū ſumma 25. At tota A C eſt 7. & quadratum eius A C G K, 49. ſcilicet maior quàm 25. quid ita? quia ad implendum ipſum adhuc deſiderant ultra 25, duo complementa B C F E & D E H K, utrunq; 12. & 24 denique atq; 25, quadratum totius A C conficiunt. Cætera ſatis ingenioſè ſcholiaſtes, de mutanda quæſtionis enūciatione: de latere quadrati rectè inſtituendo. Pro 12 $\frac{3}{17}$. $\frac{82}{289}$, nos uſurpamus 12 $\frac{133}{289}$. is numerus in Græco erat mutilatus. alterum iam antè expoſuimus. Cæterorum fundamentum iam eſt propoſitum. & ſi qua obſcurius dixit ſcholiaſtes, ea exemplorum tractatio euoluit.

Minutiarum Græcanica diuulſio.



IX. Rurſum quadratus numerus 16 diuidendus ſit in duos quadratos numeros. Eſto latus alterius 1 N, alterius quotcunq; Numerorum, demtis tot unitatibus, quot unitatibus latus diuidendi conſtat, ac eſto 2 N —— 4. Erunt quadrati 1 Q, & 4 Q † 16 —— 16 N. Horum quadratorum ſummam oportet eſſe 16. Ergo 5 Q † 16 —— 16 N æquantur 16. fit 1 N, $\frac{16}{5}$. Ergo prioris latus erit $\frac{16}{5}$, ipſe quadratus $\frac{256}{25}$: poſterioris latus $\frac{12}{5}$, ipſe quadratus $\frac{144}{25}$: & conſtat demonſtratio.

XYLANDRI.

Ad hanc nihil annotauit ſcholiaſtes, cùm idem problema paululum modò mutata operatione tractetur, cuiuſmodi exempla ſupra non ſemel tractauimus. Facit autem ad expediendum eo faciliùs ſequentem. Vide infrà uſum lib. 4 propoſ. 31. & 32. Aliud exemplum ſubijcere libuit. Numerus 676 quadratus eſt, & in duobus è quibus conflatus fuit quadratos diuidendus. Hi ſint 1 Q & 676 — 1 Q. Si latus ponas huius 2 N, aut 3, 4, &c. N —— 26, omnino ſatisfiet quæſito. Sed uidendum an in integris res poſsit expediri. Obſeruabis ex operationibus harum duarum propoſitionum, quæ eòdem recidunt, eius numeri, quem N notas, quadratum unitate auctum, diuiſorem fore numeri, qui omnino multiplex eſt ad totius quadrati latus. Ergo ſi 1 de latere hoc demto quadratus reſtet, eius latus erit numerus Numerorum, de quibus latere totius pro — ſubtracto, effingatur latus poſterioris quadrati. Heic ergo latus fingens 5 N — 26. æquabuntur tandem 26 Q & 260 N, ac latus erit 10. cuius quadratus 100. ergo alter 576, cuius latus 24. Rurſum diuidatur 225 in duos quadratos. Pono latus 2 N — 15. nam bis duo & 1 ſunt 5, per quæ utiq; diuidi integrè poterit 15 & eius multiplex 60. fiunt quadrati 144 & 81. Denique 169 diuidam in duos quadratos. Latus unius 2 N — 13 in fractis rem expediet, item 3 N — 13. At ſi 5 N — 13 ponas (nam 13 multiplicabitur bis per numerū Numerorum, ergo diuidi poterit per 26, qui fit quadrato quinarij unitate aucto.) 26 Q æquabuntur 130 N. & quadrata erunt 25 ac 144. Cætera diligens Lector facilè æſtimabit.

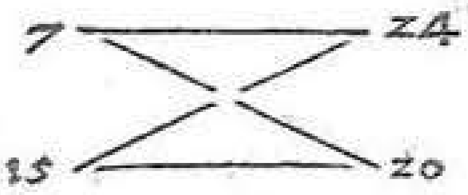
X. Datum numerum, qui eſt ex duob. compoſitus quadratis, in duos alios quadratos numeros partiri. Numerus 13 cōflatus eſt è quadratis duob. 4 & 9. denuò in alios cū quadratos diuidā. Latera priorū quadratorū ſumanẽ 2 & 3. Ponãẽ iã quadratorum,

torum, quos quærimus, latera 1 N † 2, & N quotlubebit, minus tot unitatibus quot unitatum fuit alterius latus, & ſit poſterius latus 2 N —— 3. Quadrata horum laterũ, 1 Q † 4 N † 4, & 4 Q † 9 —— 12 N. Horũ ſumma debuit eſſe 13. at eſt 5 Q † 13 — 8 N: id ergo æquatur 13. & fit 1 N, $\frac{8}{5}$. Iam ad poſtulata. Prioris latus poſui 1 N † 2, id ergo eſt $\frac{18}{5}$. Poſterioris latus 2 N, ſeu $\frac{16}{5}$ minus 3, quæ faciunt $\frac{15}{5}$. ergo hoc latus eſt $\frac{1}{5}$. Horum quadrati ſunt, prioris $\frac{324}{25}$, poſterioris $\frac{1}{25}$: & horum quadratorum ſumma $\frac{325}{25}$, quæ & conficiunt numerum 13.

SCHOLION.

Quadrati in quadratos diuiſio gemina ſine minutijs.

Quod ad octauam diximus propoſitionem, idem nunc repetimus, non omnes numeros qui ex duobus quadratis componuntur, eſſe ipſos etiam quadratos. & qui ſunt quadrati, non ſtatim in duos quadratos etiam ſecari, non diuiſa unitate: exceptis paucis. Sanè 625 quadratus, latera 25, in 400 & 225 quadratos diuiditur, quorum latera 20 & 15: & alio modo in 576 & 49, quorum quadratorum latera 24 & 7. & poſt 625 qui ſunt à latere multipliciũ, lateris 25, ut à 50, 75, & 100: & deinceps. At Diophantus, præſtantiſsimus arithmeticus, in omnes numeros quadratos & ex quadratis compoſitos, ſiue diuiſioni obnoxia ſiat, ſiue non ſiat unitas, tractationem extendere cupiens, hanc quæſtionem propoſuit. Atq; heic quoq; iubet latera quadratorum qui quæruntur poni, alterum 1 N † 2, alterum numerorum quotquot libeat, —— tot unitatibus, quot unitatum eſt latus alterius. Quid uerò eum impulerit, ut ſic ageret; conabimur demonſtrare quàm poſſumus planiſsimè, idq; in numero, cuius tractatio unitatem relinquat integram. Propoſitum eſt quadratum 625, conflatum ex quadratis 400 & 225, denuò diuidere in quadratos 49 & 576. Horum omnium latera exponantur, ut uides: priore ſerie minora latera, poſteriore maiora. Iam ſi ſciam, quadratum numeri 25 conflari ex quadratis numerorum 15 & 20. ac uelim illud totum quadratum denuò diuidere in alios quadratos duos. Sic ergo ratiocinor. Eſto latus alterius eorum qui quæruntur 1 N † 15 (quia 15 notus eſt) alterius 3 N—20, (quia etiam 20 notus erat) fiet tandem 1 N 9. & erit 1 N † 15, latus alterum 24. alterum 3 N—20 erit 7. Sic autem depræhendes 1 N eſſe 9. Sume mihi latera quadratorum decuſſatim. & quando 20 (cuius defectu latus alterum ſumebatur) & 7 iuncti, conſtituunt 27, & 27 maximam mẽſuram habet 9, ideò 1 N fit 9. Et rurſum quia 9 menſura illa ter ineſt in 27: ideò etiam 3 N, alterum latus ſumebatur 3 N. ſunt aũt ter 9, 27. & cùm aufertur 20, relinquuntur 7. & latera quadratorum, in quos 625 denuò diuiditur, ſunt 7 & 24. Rurſum ſi mihi conſtet de hoc, quadratum numeri 25 conflari è quadratis numerorum 7 & 24: uelim autem eum denuò in alios partiri quadratos. Sic dico. Quadratorum, qui quæruntur, alterius latus ſit 1 N † 7 (quia 7 eſt notus) alterius 3 N —— 24. nam & hic eſt notus. Rurſum latera accipio decuſſatim poſita. 24, cuius defectu ſumitur unum latus, & ei oppoſitus 15, conſtant 39. huius maxima menſura eſt 13. ergo 1 N erit 13. & quia 13 in 39 ineſt 3: alterum latus & prius latus eſt 1 N † 7: hoc eſt 20. alterum 3 N —— 24, erit 39 —— 24, id eſt 15. Ergo quæſitorum quadratorum latera ſunt 20 & 15. Conſentaneum ergo eſt, quod ob has cauſas quod latus prioris quæſitorum quadratorum 1 N ponit & tot unitatum, quot continentur minoris lateris noti numero: poſterioris totidem numerorũ, quot & in ſuperiore quæſtione, minus tot unitatibus, quot inſunt in maioris lateris numero. Fitq; id latus, quod numerũ lateris minoris adſciſcit, maius: à quo aufertur maioris, minus. Quod autem $\frac{325}{25}$ cõficiunt 13, id ſic fit. Quando 1 N fit $\frac{8}{5}$ ſeu 1 $\frac{3}{5}$: & latus prioris ponebatur 1 N † 2, erit ergo 3 $\frac{3}{5}$ uel $\frac{18}{5}$. quadratus eius (ut à 3 $\frac{3}{5}$) 12. $\frac{3}{5}$. $\frac{9}{25}$. uel (ut ab $\frac{18}{5}$) $\frac{324}{25}$. Porrò cùm alterius latus poſuerimus 2 N—3; id erit 3 $\frac{1}{5}$—3, hoc eſt $\frac{1}{5}$: & quadratus eius $\frac{1}{25}$. qui ad alterum adiectus, conficit $\frac{325}{25}$, quæ ad numeros reducta, 13 reſtituunt, numerum ab initio propoſitum. Is ergo 13 conſtabat è quadratis 4 & 9, & diuiſus eſt denuò in alios quadratos 12. $\frac{3}{5}$. $\frac{9}{25}$. (12 $\frac{24}{25}$.) & $\frac{1}{25}$. Et 325 cõpoſitus 100, quod eſt quater 25, ac 225, quod eſt nouies 25: denuò diuiſus eſt in $\frac{324}{25}$ & $\frac{1}{25}$, maiore etiam quadrato in partes uigeſimo quintas diuiſo.



XYLANDRI.

Quod de multiplicibus dicit ſcholiaſtes, ſic habet. 50 eſt ad 25 duplus. ab eius quadrato, 2500, auferto quadratum de 40. quod eſt duplum ad 20, reſtat 900, quadratum de 30, qui eſt duplus ad 15. Sed ponam rem ſub oculos, eo lubentius, quia deprauata ſunt codicis Græci uocabula.

2500.	50.	25.	5625	75.	10000	100.
1600.	40.	20	3600	60.	6400	80
900	30	15	2025	45	3600	60
Dupla.			tripla.		quadrupla.	

Et de altera item diuiſione in 49 & 576. latera 7 & 24.

2500	50	25	5625	75	10000	100
196	14	7	441	21	784	28
2304	48	24	5184	48	9216	96
	dupla.			*tripla.*		*quadrupla.*

Cæterùm in reliquo ſcholiaſten probare non poſſum: qui utitur τῇ κύκλῳ δείξει, quæ nihil abeſt à petitione principij circulatio, ut in analytica doctrina utraq; commonſtrauit Ariſtoteles. Certè enim niſi aliũde ſcias longiſſimum latus triãguli maximo angulo ſubduci, quàm quia angulus maximus lõgiſſimo opponitur lateri: neutrum quidem ſcis. Quin & hoc mali accedit, quod longè aliud eſt ſoluta quæſtione experiri ut omnia poſtulatis ſatisfaciant: & aliud quæſtione propoſita ſoluendi rationem indagare. neq; enim omniũ per omnia quæſtionum ſimilis eſt ſtatim tractatio, etiam in argumento non diſſimili. atq; adeò in hac ipſa re. Fateor enim cognitis te omnib. numeris potuiſſe cogitare pro inueniendis quadratis poſteriorib. latera ponenda fuiſſe 1 N † 15 & 3 N —— 20. Sed quid ſi 625 in 400 & 225 ſcio quadratos diuidi: alteros 49 & 576 quæro, penitus ignotos? ubi erit ille χιασμὸς ad quem prouocatur? niſi fortè artis eſt ex ignoto notum demonſtrare, & calceus non ad pedem, ſed ad calceum pes eſt concinnandus. Heic ergo ſcholiaſtæ acumen deſidero, & lapſum eum credo ἀναλυτικῶν ἀπαιδευσίᾳ, quod alicubi de ueterib. philoſophis uerè pronunciauit Ariſtoteles. Nam huiuſmodi δείξεις non lapidem ad normã, ſed normam ad lapidem exigunt; ſecus quã res flagitat, & uetus prouerbium ſapienter monet. Atq; adeò in promtu eſt hæc omnia refellere. nam ſi poſterioris quadrati latus (quærens numeros, non præſcriptos ante os recognoſcens) poſuiſſem non 3 N — 20: ſed (uerbi gratia) 4 N — 20. certè 1 N non eſſet proditus 9, ſed $8\frac{2}{3}$. Atq; & hoc licere, & innumeras talium quæſtionũ eſſe ſolutiones, in præcedente quæſtione ab ipſo eſt ſcholiaſta demonſtratum. ſicut & hoc, omiſſo partium nomine, quæſtionem ſic potuiſſe proponi. Numerus 325 cõflatus eſt è quadratis 100 & 225, quorum latera 10 & 15. eumdem partiamur in alios duos quadratos. erunt hi 324 & 1. quorum latera 18 & 1. Qui uolet, alias etiam ſolutiones facilè inueniet. ſatis eſt monuiſſe. Scholiaſten autem reprehendendum duxi, ut monerem ſui officij lectores. nam ſine philoſophia & analytica doctrina multi mathematica tractauerunt, ita ut & ſeipſos, & alios ab eorum ore pendentes deceperint. Porrò itaq; dubium non eſt, quin tantùm non infinitæ, aut etiam infinitæ ſolutiones huiuſmodi problematum dari poſſint. Vera autem hypotheſeon in hoc argumento cauſa eſt, quod hoc pacto fit, ut propoſitus numerus † ad —— comparato elidatur, nullo Algebrico charactere inſignis, ſed planè liber & abſolutus: tandemq; in æquatione Q & N comparentur. ſicut ipſa operatio abundè docet. Loco autem illius præpoſteri chiaſmi ſi uſurpes quæ ad præcedentem annotauimus propoſitionem, facilè intelliges pro ſecundi lateri quadrati quot N ponendi ſint. Vide porrò xxij tertij infrà à nobis explicatam. ubi canonem trademus, rei ab hac quaſi deriuatæ. Vide & exempla uſumq; lib iv. propoſ. xxxi. & xxxij.

β πρετ. ἀναλ. γ.
1. Euclid. 18. & 19.

Scholiaſtes repræhenſus.

XI. Duos inuenire quadratos numeros quantocunq; iubeamur interuallo diſtantes. Sit iniunctum interuallum 60. Ponatur alterius latus 1 N: alterius 1 N & unitates quotuis, dummodò harum quadratarum non ſuperet aut æquet interuallum datum. quod ideò præcipitur, ut una ſpecie uni ſpeciei ad extremum æquata, expediri quæſtio poſsit. ſit ergo alterius latus 1 N † 3. Erunt quadrata 1 Q & 1 Q † 6 N † 9. interuallum 6 N † 9 æquale 60. fit 1 N, $8\frac{1}{2}$. Ergo latus unius erit $8\frac{1}{2}$, alterius $11\frac{1}{2}$. Quadrata $72\frac{1}{4}$ & $132\frac{1}{4}$. & manifeſtum eſt ſatisfactum eſſe propoſito.

XYLANDRI.

Scholiaſtes heic mutus eſt. numeri in Græco erant uitiati. Sciendum eſt autem hoc quoq; problema uarias ſolutiones admittere pro ſecundi lateris poſitione. uerbi gratia, dētur duo quadrati quorũ interuallũ ſit 100. Sint latera 1 N & 1 N † 2. quadrati 1 Q & 1 Q † 4 N † 4. interuallum 4 N † 4 || 100. fit 1 N 24. ergo latera ſunt 24 & 26, quadrati 576 & 676. At ſi alterius latus poſuiſſes 1 N † 1, aut 1 N † 3, 1 N † 4, 1 N † 9, &c. ſemper alios atq; alios inueniſſes quadratos in fractis, optimè quidem eos propoſito ſatisfacientes, ſanè quàm iucunda uarietate quadratorum & admirabili, quod facilius eſt experiri, quàm ut à me exponi oporteat. Ita 25 & 625 quadrati, necnõ 361 & 961, differunt 600. Finge latus 1 N —— 10, 1 N —— 20, 1 N —— 12, &c. Si ponas 1 N —— 24, habebis quadratos $\frac{1}{4}$ & $\frac{2401}{4}$, interuallo 60 differentes. Quod ad limita-

tionem attinet, cùm in autoris exemplo 60 non ſit quadratus numerus, neq; huc aduocari ſurdos attineat: mutemus exemplum, & ponamus interuallum debere eſſe 81. & ſint latera 1 N. ac 1 N † 9. fient quadrata 1 Q ac 1 Q † 18 N † 81. interuallum 18 N † 81 || 81. ergo 18 N aquabitur nihilo. In autoris porrò exemplo, ſi maius latus poſuiſſemus 1 N † 8, inuenta fuiſſet aquatio 16 N † 64 || 60. id eſt 16 N † 4 || 0. quod etiam abſurdius priore erat futurum. At ſi poſuiſſes alterum latus 1 N † 2, ſolutio integros numeros tibi exhibuiſſet. erat enim quadratorū interuallum 4 N † 4 || 60. & 1 N 14. Latera itaq; 14 & 16, quorum quadrati 196 & 256 omnino differunt numero 60. Caterùm hac ſolui citra Algebram poſſunt paullo negocio, ſi intellexiſti qua ad oct auã huius commentati ſumus. è quibus hunc tibi canonem depromſimus.

CANON. Ab interuallo quadratorum dato 1 ſubtrahe, ſi impar eſt, reliqui ſemiſſis quadratus alter eſt eorum qui quæruntur: alter fit interuallo ad hunc adiecto.

Dentur enim quadrati, quorum interuallum 57. aufer 1, reſidui ſemiſsis 28. quadratū 784, adde 57, fit 841. alter quadratus, cuius latus 29. Si par ſit interualli numerus, & ſemiſſem parem habeat: ab hoc unitas aufertur, reſiduo impari reſpondens in ordine quadratus eſt alter eorum qui quaruntur, alter fit interualli numero adiecto. Ita in propoſito, interuallum 60, ſemiſsis 30. quadratus impari 29 in ordine quadratorum ſuprà expoſito reſpondens, id eſt cum eo iunctus proximè maiorem qui faciat, eſt 196. ergo alter 256. Quomodo inueniatur quadratus impari in ſerie reſpondens, ex ſuprà dictis & ipſa ſerie expoſita liquet. Interuallo autem dato, cuius ſemiſſis ſit impar, ad algebram recurrendum eſt, & in integris numeris ſolutio non inuenietur. neque canonem fabricari attinet: cùm innumeri numeri quaſtioni ſatisfaciant. Quarantur duo numeri quadrati, interuallo 42. Sint latera 1 N & 1 N † 6. Quadrati 1 Q & 1 Q † 12 N † 36. ergo 12 N † 36 || 42. hoc eſt 12 N aquantur 6. facit 1 N $\frac{1}{2}$. Latera itaque $\frac{1}{2}$ & $6\frac{1}{2}$. Quadrati $\frac{1}{4}$ & $\frac{169}{4}$. interuallum $\frac{168}{4}$. id eſt 42. Quodſi alterum latus poſuiſſem 1 N † 3, aquatio fuiſſet 6 N † 9 || 42. id eſt 6 N || 33. ergo 1 N eſt $5\frac{1}{2}$ alterum latus, & alterum $8\frac{1}{2}$. quadrata $\frac{121}{4}$ ac $\frac{289}{4}$. interuallum $\frac{168}{4}$, id eſt 42. &c. Quodſi ſcholiaſtam imitari, & ex poſteriore prius ratiocinari uelles, cū iam ſcias in Dio. quadratorum quaſitorum latera eſſe 14 & 16. ſcilicet alterum laterum poſuiſſes 1 N † 2, ut aquatio fieret 4 N † 4 || 60. hoc eſt 4 N || 56. & latus minus 14 fieret, maius 16. Sed hoc cuius artis ſit, liquet. hoc tamē obſeruabis, Ex operationis ductu te moueri, ut circūſpicias quot unitates ad 1 N adÿcias pro altero latere, ſiquidē integros deſideres numeros, & haberi ÿ poßint. alioqui ad rem nihil refert. Vſum uide huius propoſitionis lib. iÿ. propoſ. xÿ. ac xiv. & libro v. propoſ. 1. 2.

XII. Datis duobus numeris, unum eundemq; numerum addere, itaq; utrunq; quadratum efficere. Sint numeri 2 & 3, & qui addendus eſt 1 N. Erit ergo alter 1 N † 2, alter 1 N † 3, uterque æqualis quadrato numero alicui. Hoc genus uocatur duplicata æqualitas. æquatur autem ſic. Interuallo conſpecto, quære duos numeros quorū unius in alterum multiplicatio iſtud interuallum producat. Sunt autem heic 4 & $\frac{1}{4}$. horum uel interualli ſemiſsis in ſe ductus minori æquatur, uel ſummæ ſemiſsis in ſe ductus æquatur maiori. Semiſsis exceſſus in ſeipſum, facit $\frac{225}{64}$. huic ęquatur minor, 1 N † 2. fit 1 N, $\frac{97}{64}$. Summæ ſemiſsis in ſe, eſt $\frac{289}{64}$: huic æquatur maior 1 N † 3. fitque rurſum numerus $\frac{97}{64}$. ergo numerus qui additur, eſt $\frac{97}{64}$. & manifeſtū propoſitum. Ne autem in hanc duplicatam æqualitatem incidamus, ſic agendum. Inueniendus eſt numerus qui & ad 2, & ad 3 adiectus, quadratum faciat utrumq;. Quæro priùs numerum, qui ad 2 adiunctus, quadratum faciat: aut quis numerus adſumpto 3 fiat quadratus. Id autem quiuis faciet quadratus, à quo 2 aut 3 ſubtraxeris. Agamus de 2. is auferatur ab 1 Q. ſupereſt 1 Q —— 2: eſtq; euidens, huic ſi adijciatur 2, fore quadratum. reſtat ut etiam 3 adiecto fiat quadratus. at 3 ad 1 Q —— 2 adiecto, fit 1 Q † 1. hoc ergo æquatur quadrato. Hoc quadratum fingo ab 1 N —— tot unitatibus, ut ſubſtātia quadrati earum ſuperet ipſas antè poſitas defectus unitates, ut heic ſunt 2. Sic enim rurſum ab utraque parte una ſpecies uni ſpeciei æqualis relinquetur. Sit latus 1 N —— 4. Ergo quadratum 1 Q † 16 —— 8 N. æquatur autem huic 1 Q † 1, addito utrique defectu, & demtis æqualibus, 8 N æquantur 15. & fit 1 N, $\frac{15}{8}$. ergo iuxta præſcriptū propoſiti pergentibus, numerus qui datorum utrique additus eum facit quadratum, eſt $\frac{97}{64}$.

SCHOLION.

SCHOLION.

Duplicata æqualitas.

Hoc genus uocatur duplicata ęqualitas.] Nam in reliquis quæſtionibus ſimplex ſuit æqualitas, per quam Numeri quantitas inueniretur. hic autem duplex eſt. Priùs enim interualli ſemißis, quo interuallo alter alterum excedebat numerorum ſic poſitorum, in ſe multiplicatus, minori æquatur : & ſummæ deinde numerorum ſemißis in ſe ductus, maiori æquatur. Id quomodo fiat, hinc ſciri poteſt. Si duo ſint inæquales numeri: ſummæ ipſorum ſemißis quadratum tanto numero ſuperabit quadratum ſemißis interualli ipſorum : quantus eſt is qui uno in alterũ ducto numero producitur. Sint pro exemplo numeri duo 8 & 4. quorum ſumma 12, eius ſemißis 6, atq; huius quadratum 36. Interuallum 4, ſemißis 2. huius quadratum 4. At 36 quã 4 amplius eſt unitatib. 32. quantum fit ex ipſorum numerorum alterius in alterum multiplicatione. Hoc eſt idipſum, quod propoſitio quinta libri ſecundi elementorum demonſtrat. Hoc nunc inuerſè uſurpans Diophantus : Quando (inquit) interuallũ inter 1 N † 3 & 1 N † 2 eſt unitas: & hanc conficiunt 4 & $\frac{1}{4}$ alterius in alterum multiplicatione: ergo quadratus ſemißis de eo, quod 4 præſtat quadranti, æquatur minori: & de ſemißi ſummæ numerorum natus quadratus æquatur maiori. Quod perinde habet, ac ſi nos inuerſo ordine ſuprà à nobis propoſiti exempli dixiſſemus. Cùm 36 præſtent 4 unitatib. 32: & 32 fiat 8 in 4 ducto: ergo ſemißis interualli quẽ gignit quadratum, puta 4, æquatur minori. Rurſus ſemißis ſummæ datorum numerorũ quem dat quadratũ, nimirũ 36, eius latus & ſemißis interualli, æquãtur maiori. Enimuerò interuallum inter 4 & $\frac{1}{4}$ eſt 3 $\frac{3}{4}$, ſeu $\frac{15}{4}$, unitatibus in quadrantes diſſolutis. horũ ſemißis $\frac{7}{4}$ & $\frac{1}{8}$, hoc eſt $\frac{15}{8}$. huius quadratum $\frac{225}{64}$. atq; hoc æquatur 1 N † 2. Deinde ſummæ quæ cõſit ex 4 & $\frac{1}{4}$, puta 2 $\frac{1}{8}$, ſemißis eſt $\frac{8}{4}$·$\frac{1}{8}$. ſcilicet $\frac{17}{8}$. hinc fit quadratus $\frac{289}{64}$: is æquatur maiori, qui eſt 1 N † 3. Quod autem 1 N ſit $\frac{97}{64}$, ſic habet. Cùm 1 in ſexageſimasquartas dißipetur partes: ſi à $\frac{225}{64}$ auferas, utpote æqualib. 1 N † 2, 2 integra, quippe $\frac{128}{64}$: relinquentur $\frac{97}{64}$. Itidem ſi à $\frac{289}{64}$, quibus 1 N † 3 æquatur, auferas 3 integra, hoc eſt $\frac{192}{64}$. relinquuntur iterum $\frac{97}{64}$. Hæc ergo 97 addita ad 128, quadratum 225 conficiunt: ad 192 addita, quadratum 289. 128 numerum 2, 192 numerum 3 repræſentantibus. Hoc loco quæritur, cùm interuallum inter datos numeros 2 & 3 fuerit unitas : cur eos quorum multiplicatione 1 fiat, potißimùm ſumſerit 4 & $\frac{1}{4}$. cùm quidem licuerit idem dare effectum ſumtis 3 & $\frac{1}{3}$, uel 2 & $\frac{1}{2}$, &c. nam & iſtorum è multiplicatione oriri unitatem in aperto eſt. Reſpondeo. Si alios ſumſiſſet numeros minores 4: interualli ſemißis quadratus minor erat futurus non modò quã 1 N † 2, ſed etiam quã ipſe 2. itemq; quadratus ſemißis ſummæ non modò non adæquaſſet 1 N † 3: ſed ne ſolum 3 quidem. Quod ſi euenißet: non poterat à minori auferri maius, tantum abeſt ut ſperandum etiam fuerit aliquid reſidui, quod ipſius numeri quantitatem expreſſiſſet. Hoc abſurdi euenturum, ſi 3 & $\frac{1}{3}$ ponerẽtur, è quorũ multiplicatione exſiſteret 1, ſic docebimus. Interuallum inter 3 & $\frac{1}{3}$ eſt duntaxat $\frac{8}{3}$. ſemißis $\frac{4}{3}$. huius quadratum $\frac{16}{9}$ æquabitur 1 N † 2. Rurſum 3 & $\frac{1}{3}$ ſunt $\frac{10}{3}$, ſemißis $\frac{5}{3}$. huius quadratum $\frac{25}{9}$ æquabitur 1 N † 3. Et quia ob 9 heic unitas in nouantes diuiditur: oportebit auferre à quadrato ſemißis interualli binarium, hoc eſt $\frac{18}{9}$: & à quadrato ſemißis ſummæ 3, hoc eſt $\frac{27}{9}$: ita ut relinquatur utrobiq; aliquid, quod quantitatem Numeri explicet. At quadrata iſta inueneramus $\frac{16}{9}$ & $\frac{25}{9}$. & neq; ab illo $\frac{18}{9}$, neq; ab hoc $\frac{27}{9}$ detrahi poſſunt, maius de minore, nedum ad noticiam numeri perueniri. Quod etiam multo minùs locum erat habiturum, ſi 2 & $\frac{1}{2}$ poſuiſſemus, quorum multiplicatione interuallum 1 crearetur. Cæterùm poſitis 4 & $\frac{1}{4}$, atq; ulteriùs, demonſtratio procedit. Enimuerò non illicò innoteſcit qui numeri ſint ſumendi, quorum multiplicatio creet interualli numerũ: (alioq Diophãtus eius rei cõditionẽ aliquã definiuiſſet) ſed ſola id experiẽtia docet. ut heic, reiectis 3 & $\frac{1}{3}$, 4 & $\frac{1}{4}$ adſciuit. Idem etiam in poſteriore demonſtratione fecit, inquiens. Fingo quadratũ ab 1 N— tot unitatibus, ut ſubſtantia quadrati ſuperet ipſas antè poſitas defectus unitates. ac fingit eum ab 1 N—— 4. In priore quidem demonſtratione cùm 2 adeſſet, quadratum quoq; adfirmatiuè è ſemiſſe exceſſus 4 ſupra $\frac{1}{4}$ fecit. In poſteriore autem, cum deſit 2, quadratum quoq; à defectu 4 ducit. non autem 3. nam hinc factum quadratum, rurſum erat minus futurum quàm defectus duarum unitatum. Quadratus enim ab 1 N—— 3 eſt 1 Q † 9 —— 6 N. additoq; in æquatione utriq; quod deerat, & æqualibus abiectis, inuenitur 1 N eſſe $\frac{4}{3}$. cuius quadratus $\frac{16}{9}$ non eſt amplius quàm 2: cùm hoc ſit $\frac{18}{9}$. itaq; non procedet hac uia demonſtratio. Si aũt ab 1 N—— 4 fingatur quadratus, tùm inuento 1 N $\frac{25}{8}$, quadratus eius $\frac{225}{64}$ ſuperabit binarium, cùm hic ſit $\frac{128}{64}$: ille maior. Niſi enim binarium hic quadratus ſuperabit, ut eo detracto aliquid ſuperſit : quid erit, quæſo, quod adiectum ad ſecundum, quadratum conficiat?

XYLANDRI.

Elegans eſt hæc quæſitio, & duplicem eius explicandæ uiam argutè commonſtrauit Diophantus, fideliter & perſpicuè interpretante ſcholiaſta, cuius uerba miſerè mutilata & deprauata ex re ipſa nos correximus. uel hinc ſciri poteſt quàm miſeri ſint ἀγεωμέτρητοι *Logiſtæ, & quantum uſum Euclideæ habeant propoſitiones. Cæterùm in numeris integris hoc exemplum tractare poterat autor, poſitis 128 & 192, quorum utriq; additus 97, qui quærendus erat, quadratos 225 & 289 efficeret. Libet etiam heic canonem ponere, ut eo pleniùs intelligãtur quæ ſcholiaſtes eruditè poſuit, in eo dumtaxat allucinatus, quòd negauit certam eſſe legem numeros quorum* *multiplicatione interuallum exſiſtat deligendi; cùm quinta ſecundi Euclidis rectè conſiderata eam dictet.*

CANON. Datorum numerorum interuallum uide è quib. numeris conficiatur, alterius in alterum multiplicatione, ea quidem lege, ut quadratū ſemiſsis ſummæ horum, maius ſit maiore propoſitorum: uel, quod idem eſt, quadratum ſemiſsis interualli horum maius ſit minore propoſitorum.

Ab horum quadratorum priore ſi maiorem, uel à poſteriore minorem propoſitorū ſi auferas: relinquetur utroq; modo is qui quæritur numerus. Verbi gratia. Quæritur numerus qui ad 6 & 30 adiectus, quadratos eos faciat. Interuallum 24. quod componitur ex 12 & 2 item ex 3 & 8. item ex 6 & 4. Primùm 12 & 2 ſunt 14, ſemiſsis quadratum 49. rurſum 2 à 12 relinquuntur 10, cuius ſemiſsis quadratum 25. Aufer ſiue 30 de 49, ſiue 6 de 25, inuenies 19 eſſe numerū quæſitum. Nam 6 & 19 ſunt 25; 30 & 19 ſunt 49, quadratus uterq;. Rurſum 3 & 8 ſunt 11. ſemiſsis quadratum $\frac{121}{4}$. hinc aufer 30, relinquitur $\frac{1}{4}$. ipſe quoq; ſatisfaciens propoſito (quem inueniſſes etiam ſi 3 ab 8 ſubduxiſſes, reſidui ſemiſsis quadrato $\frac{25}{4}$, 6 ademiſſes.) nam 6 $\frac{1}{4}$ & 30 $\frac{1}{4}$. quadrati ſunt. At ſi in 6 & 4 expertus fuiſſes, nō ſucceſsiſſet res. Nam 6 & 4 ſunt 10. ſemiſsis quadratus 25, minus eſt maiore propoſitorum. & 4 de 6 ſubtractis relinquuntur 2, cuius dimidij quadratū 1, minus eſt minore propoſitorum. Ergo duo hæc ſi obſerues, facilè quoduis exemplum conficies. alterum, uariè idem ſolui propoſitum, pro commoda partium interuallum diuerſis modis componentium diuerſus modis inuentione: alterum, heic nullum numerum primum, omnes compoſitos æſtimari. & 20 non modo ex 4 in 5, uel 2 in 10, ſed etiam ex 7 $\frac{1}{2}$ in 2 $\frac{1}{3}$, aut 140 in $\frac{1}{7}$, &c. componi, prout uel nobis commodum uidebitur & colludebit, uel canonis lex requiret. Exempla alia habes lib. 3. propoſ. 18. 19. 20, &c. iv. propoſ. 14. 24. 35. & lib. v. propoſ. 1. 2. 3. & alibi. Sanè 3. & 4. quinti huius, theoremati hinc tracto innituntur, ut iſthic uidere licet. Quod ad poſteriorem attinet operationem, uerba hæc Diophanti mendo non carent: ut ſubſtantia quadrati earum, &c. Non enim defectum modò ſuperare debet hic quadratus, ſed omnino etiam numerum illū qui quadrato abſolutus annectitur, cuius connexo æquale quadratum quæritur. Eſto uerbi gratia quærendus numerus qui ad 3 & ad 30 additus, quadratos faciat. Pono eum eſſe 1 Q — 3. ut 3 addito, quadratus fiat 1 Q. Sed ſi 30 ad 1 Q —— 3 addas, fiunt 1 Q † 27. quod æquatur quadrato. Eius ergo latus fingo 1 N —— aliquot unitatibus quarū numeri quadratus ſi excedat numerum 27, fiet ut utrinq; 1 Q ſublato, æquatio inter N & unitates conſtet, abſoluiq; poſsit. Sin uerò, nihil ſuccedet. Ponamus enim ei latus 1 N —— 5. erit quadratus eius 1 Q † 25 —— 10 N æqualis 1 Q † 27. Abijce utrinq; 1 Q & 25, & adde utrobiq; 10 N. erit ergo 10 N † 2 æqualis nihilo. Quod ſi poſuiſſes latus 1 N —— 6, quadratus 1 Q † 36 —— 12 N æquaretur 1 Q † 27. & 1 N fieret $\frac{3}{4}$. & rurſus non ſuccedit res. nam à quadrato eius $\frac{9}{16}$ non poſſum auferre 3, quod eſſet $\frac{48}{16}$. ergo 1 Q —— 3, numerus quæſitus, nondum habetur. Plures ergo oportet poni unitates quæ deſint 1 Numero ad latus ſtatuendū. Heic ſolertia regnat. Fingo latus 1 N —— 9 (quia 27 huius eſt multiplex) fit 1 Q † 81 —— 18 N æqualis 1 Q † 27. Abiecto 1 Q utrinq;, & additis 18 N, fit æquatio inter 54 & 18 N. ergo 1 N eſt 3. & 1 Q eſt 9. Ergo quæſitus numerus eſt 1 Q —— 3, hoc eſt 6. qui ſatisfacit poſtulatis. Aliud. Detur numerus, cui ſi aut 14, aut 38 addas, fiat quadratus. Is eſto 1 Q —— 14. Adde 38, erit 1 Q † 24 æqualis quadrato. Huius latus ſi fingo 1 N —— 5, inuenies 1 N eſſe $\frac{1}{10}$. Sit latus 1 N —— 6, inuenies 1 N eſſe 1. at de neutrius horum quadrato ſubtrahi poſſunt 14. itaq; nihil dū actum eſt. Sit latus 1 N —— 10, erit 1 N 3 $\frac{4}{5}$. & 1 Q 14 $\frac{11}{25}$. ergo $\frac{11}{25}$ eſt qui quæritur. Nam ad 14 adiectus, quadratū 14 $\frac{11}{25}$ facit, $\frac{361}{25}$. ad 38 autem, $\frac{961}{25}$ ſeu 38 $\frac{11}{25}$. utrunq; quadratum. Quod ſi latus poſuiſſes 1 N —— 12, tunc 1 N eſſet 5. 1 Q 25. ergo is qui quæritur 25 —— 14, hoc eſt 11. qui ad 14 additus, 25, ad 38, 49 facit, quadratos.

XIII. Datis duobus numeris, ab utroq; eorum auferam unum eundemq; numerum, ut reſiduum utrunque ſit quadratus numerus. Sint dati numeri 9 & 21. Qualemcunque uerò quadratum aufero de altero ipſorum, ſtatuetur is quem quæritur hoc defectu. ablatus enim à numero, relinquet quadratum. Auferam ergo à 9 quadratum, ſcilicet 1 Q. reſtat 9 —— 1 Q. Reliquum eſt, ut à 21 etiam ſi auferam 9 —— 1 Q, quadratus ſuperſit. at relinquitur 12 † 1 Q. hoc ergo æquale eſt alicui quadrato. Fingo quadratum ab 1 N —— tot unitatibus, ut quadratum earū amplius ſit quā 12. Sic enim rurſum utrinque una ſpecies uni ſpeciei æquabitur. Sit ergo latus 1 N — 4, erit

erit quadratum 1 Q † 16 —— 8 N. idq; æquabitur 12 † 1 Q. fiet 1 N, $\frac{4}{8}$. Sunt autem 9, ſi reſoluas, $\frac{72}{8}$, ſiue $\frac{576}{64}$. unde defectus 1 Q, ſcilicet $\frac{16}{64}$, auferatur. & ſatisfit propoſito.

SCHOLION.

Qualemcunq; uerò quadratum.] *Res ita habet. Quando & 9 & 21, uterq; quadrato numero cõſtat, ac 1 N. hunc ſi ab illis ſubduxero, utiq; ſupererunt nudi quadrati. unde liquet, ſi 1 Q ab altero ipſorum ſubtraham, ipſum qui quæritur numerum fore reliquum. Proinde cum inuenerimus 1 N eſſe* $\frac{4}{8}$*: & huius quadratum ſit* $\frac{16}{64}$*: ſatis liquet ipſos etiam numeros debere in partes ſexageſimasquartas reſolui. Ergo 9 faciet* $\frac{576}{64}$*. & 21 faciet* $\frac{1344}{64}$*. Iam ſi à 9 aufero 1 Q, hoc eſt à* $\frac{576}{64}$ *aufero* $\frac{16}{64}$*: ſuperſunt* $\frac{560}{64}$*, qui eſt quæſitus numerus. Rurſum ſi aufero 560 à 1344, relinquuntur 784, quadratus: cuius latus 28. tantum enim eſt 1 Q † 12.*

XYLANDRI.

Obſcurè & Diophãtus eſt locutus, & interpres. Ideò, cùm quæſtio ſit elegans, eius faciamus aliquanto planiorem expoſitionem. Numerus qui quæritur, detractus de propoſitorum alterutro, ut heic de 9, quadratum relinquet: ſequitur ſi quadratus, puta 1 Q, ab eodem propoſito detrahatur, ipſum quæſitum numerum relictum iri. ſicut ſi aliquis numerus ab 11 detractus dicatur relinquere 4: ſi 4 ab 11 aufero, 7 reliqua ſunt, ipſe qui deſiderabatur numerus. Ergo ſi 1 Q à 9 aufero, reſiduum 9 —— 1 Q eſt is qui quæritur numerus: & is à 9 ſubtractus, relinquit utique 1 Q. Idem ſubtractus ab 21, relinquit 12 † 1 Q, quadratum. cuius latus ponitur 1 N —— 4. Cauſa ſatis eſt explicata in præcedentibus. (Et ſi latus poſuiſſet 1 N —— 3, æquata fuiſſent 1 Q † 9 —— 6 N, & 12 † 1 Q. æqualibusq; reiectis —— 6 N || 3. uel 3 † 6 N || 0. quod eſt abſurdũ.) fit ergo 1 N, ut autor poſuit $\frac{4}{8}$*, hoc eſt* $\frac{1}{2}$ *neque enim neceſſe eſt ad ſexageſimasquartas partes rem deuolui. Cùm autem 1 N ſit* $\frac{1}{2}$*, & eius quadratũ ſit* $\frac{1}{4}$*, erit 9 —— 1 N, numerus quæſitus 9 ——* $\frac{1}{4}$*, hoc eſt 8* $\frac{3}{4}$ *ſeu* $\frac{35}{4}$ *(ſiue* $\frac{560}{64}$*, ut habet Diophantus.) Is detractus de 9, relinquit* $\frac{1}{4}$*. de 21, 12* $\frac{1}{4}$*. ſunt autem* $\frac{1}{4}$ *&* $\frac{49}{4}$ *quadrati. Si omiſſo partium nomine libeat in integris quæſtionem proponere: Dantur numeri 36 & 84, à quorum utroq; aliquis ſubtractus, quadratos relinquat. Is erit 35. reſidua 1 & 49. Sed & manente quæſtione, ſolutio inuenietur in integris. Nam 5 eſt numerus quæſitus, qui de 9 ſubductus, relinquit 4: de 21, 16. numeros quadratos. Hæc ſolutio proditur, ſi latus poſterius ponatur 1 N —— 6. nam æquatio fit inter 1 Q † 36 —— 12 N & 12 † 1 Q. & tandem 24 || 12 N, fit 1 N, 2. quadratum 4, ergo ipſe numerus 9 —— 4, hoc eſt 5. Perſequi alias ſolutiones nihil attinet. ſed & hic Canonem ponemus, cuius fundamenta ſuperiore propoſitione ſunt iacta.*

CANON. Differentiam numerorum qui ſua multiplicatione conficiant numeri, uide horum ſummæ itemque interualli ipſorum ſemiſſes, uterque in ſe multiplicentur: quadrata de datis ſubducta, numerum quæſitum oſtendent.

Atq; heic cauendum eſt, ne ita conſtituantur numeri interuallum cõponentes, ut hæc quadrata maiora propoſitis exſiſtant numeris. Documentum. In quæſtione à Diophanto propoſita, numerorum interuallum 12. id fit ex 2 in 6. ſumma 8. ſemiſſis quadratum 16, de maiore aufer, relinquitur numerus quæſitus 5. idem inuenitur, ſi 2 à 6 ſubtrahas, reſidui ſemiſſem in ſe ducas, & hoc quadratum de minore auferas. Si 3 & 4 ſtatuiſſes, itidem 8 $\frac{3}{4}$ *numerum quæſitum repeririſſes. Aliud. Dati numeri 206 & 26. interuallum 180. Id ſi componas ex 2 in 90, aut 6 in 30, quadrata exſiſtent maiora datis, & res non ſuccedet. ſi in 10 & 18, quadrata inuenies 196 & 16: & quæſitus numerus erit 10. Sic à 4 & 9 aufero eundem, ut maneant quadrati* $\frac{4}{9}$ *&* $\frac{49}{91}$ *auferetur enim 3* $\frac{5}{9}$*. Atque hoc pacto nos duplicatæ æquationis rationes etiam ad hanc propoſitionem extendimus. quod à Diophanto. & ipſo etiam ſcholiaſta prætermiſſum fuiſſe (ſi quidem librarius nihil interuertit) miror. Nam poſito qui quæritur 1 N, hypoſtaſes erant 9 —— 1 N & 21 —— 1 N. interuallum 12. reliqua patent.*

XIV. Ab eodem numero duos datos auferemus, ita ut reſiduum utrunque ſit numerus quadratus. Sint auferendi 6 & 7. Qui quæritur, ſit 1 N. ab hoc aufero 6, reſtat 1 N —— 6, æqualis quadrato. Ab eodem ſi aufero 7, reſtat 1 N —— 7, æqualis quadrato. In hoc caſu rurſum duplicata æqualitas exſiſtit. Ergo cùm horum interuallum 1 componatur 2 in $\frac{1}{2}$ multiplicato, numerus tandem inuenitur $\frac{121}{16}$, qui ſatisfacit poſtulato. Ne uerò in duplicatam excidamus æqualitatem, ſic indagabimus. Quæremus initiò numerum, à quo 6 ſubtractus ubi fuerit, relinquatur quadratus.

dratus. is nimirum eſt quadratus aliquis, ſi ei adijciatur 6. nimirum ergo is quem uolumus, eſt 1 Q † 6. nam hinc ablatis 6, relinquitur 1 Q. Neceſſariò autem etiam 7 detracto de 1 Q † 6 relinquetur quadratus. at relinquitur 1 Q —— 1: quod æquetur alicui quadrato. Fingamus quadratum à latere 1 N —— 2. is erit 1 Q † 4 —— 4 N, qui æquatur 1 Q —— 1. fit 1 N, $\frac{5}{4}$. Ergo is quem quærebamus, eſt $\frac{121}{16}$: & ſatisfacit propoſito.

SCHOLION.

Eadem eſt huius, quæ fuit duodecimæ propoſitionis methodus. Cæterùm $\frac{121}{16}$, numerus à quo ſubtracti cùm 6 tum 7, relinquant uterq; quadratum, ſic inuenitur. 1 N —— 7 una unitate ſuperatur ab 1 N —— 6. Hoc interuallum fit numeri in alterum multiplicatione, ut dicta propoſitione eſt explicatum. numeri hi ſunt 2 & $\frac{1}{2}$. horũ interuallum $\frac{3}{2}$. ſemiſsis huius $\frac{3}{4}$: quadratum $\frac{9}{16}$ æquale minori, ſcilicet 1 N —— 7. Summa eorum $\frac{5}{2}$. ſemiſsis $\frac{5}{4}$. huius quadratum $\frac{25}{16}$, æquatur maiori, qui eſt 1 N —— 6. Quando igitur in ſedecimas partes unitas ſcinditur: ſi ad $\frac{9}{16}$ adijcio defectum 7 unitatum, fient $\frac{121}{16}$. unde ſi auferam $\frac{112}{16}$, relinquuntur $\frac{9}{16}$, numerus quadratus. Si uero ad $\frac{25}{16}$ adijcio defectum 6 unitatum, rurſum fient $\frac{121}{16}$, unde ſi auferam $\frac{96}{16}$, relinquentur $\frac{25}{16}$ quadratus. Ita ergo inuentus eſt numerus 121, unde ſi demas 112, relinquitur 9 quadratus: ſi 96, ſupereſt 25 quadratus & ipſe. Numeros autem qui ſua multiplicatione 1 conficerẽt, ſumſit heic 2 & $\frac{1}{2}$, non (ut in duodecima) 4 & $\frac{1}{4}$: nam & iſtis, & deinceps maioribus res procedit: in minoribus autem non poteſt demonſtrari: uerbi gratia, ſi ſemel 1 poſuiſſet. nam & ſic 1 conficitur: & exceſſus 1 ſupra 1 inueniri non poteſt. Porrò, inquit, ſi 6 adijcio alicui quadrato: liquet reliquum rurſus futurum quadratum, ſi de hac ſumma ſex abijcio. Atqui neceſſe eſt ut præterea ab 1 Q † 6 ſi auferam 7, relinquatur quadratus. relinquitur autem 1 Q —— 1. quod oporteat eſſe quadratum. Eius ergo latus fingit 1 N —— 2, quia progreditur ab unitate. fit quadratus 1 Q † 4 —— 4 N, quod æquetur 1 Q —— 1. addito utriq; defectu fiunt 1 Q † 5 æquale 1 Q † 4 N. & abiectis utrinq; æqualibus, 5 æquatur 4 N. fit 1 N $\frac{5}{4}$, & 1 Q $\frac{25}{16}$. & quem quærebamus $\frac{121}{16}$. Nam ſi ab 121 auferas 96, reſtat quadratus 25. ſi uerò ab 121, ut 1 Q † 6, auferas 7, id eſt ſepties 16, ſeu 112, reſtat 9 quadratus.

XYLANDRI.

Idem hoc in integris potuit proponi. Detur numerus, à quo ſi 96, & 112 auferas, reſidui ſint quadrati. Is numerus inuenietur 121. In Diophanteo $\frac{121}{16}$. quia erat 1 N † 6. & 1 N, $\frac{25}{16}$, ad quem ſi 6 addas, ſcilicet $\frac{96}{16}$, fiunt $\frac{121}{16}$. Autor duplicem ſolutionis rationem propoſuit. nos canonem adijciemus, in quo memineris ualere cautionẽ canonis ad duodecimã propoſiti. Quæratur numerus, à quo ſi 41 & 65 auferam, relinquantur duo quadrati.

CANON. Interuallum numerorum multiplicatione ſua alterius in alterum numeros conficientes quære. horum numerorum ſummę ſemiſſem, ſemiſſem item interualli ipſorum, utrunque in ſe multiplica. Minus quadratum maiori datorum, maius minori adijce, res erit confecta.

Heic interuallum eſt 24. quod componunt 3 in 8, uel 4 in 6, uel 2 in 12. ſed priores bini rem nõ expedient, quod expediendo ſenties. Cæterùm 2. & 12, ſunt 14, ſemiſsis 7, quadratus 49. hunc adde minori datorum, utpote maiorem, ac quadratum ſemiſsis ſummæ, inuenies 90, numerum quæſitum. Eundem inuenies, ſi ſemiſſem interualli inter 12 & 2, utpote 5, in ſe ducas, & quadratum 25 maiori 65 adijcias. Per Algebram ſic. Ponamus quæſitum eſſe 1 Q † 41. nam utique quadratus erit ſi 41 abijciat. Aufer ab eo 65, reſtat 1 Q —— 24. æqualis quadrato. Latus huius fingo 1 N —— quotcunque unitatibus. nam utrobique 1 Q abijcietur, & N æquabuntur liberæ unitates ſemper, quod ex operatione animaduerti. Sit 1 N —— 2. quadratus 1 Q † 4 —— 4 N. æquantur 4 N & 28. fit 1 N 7. 1 Q, 49. ergo quæſitus 49 † 41, hoc eſt 90. Si latus poſuiſſes 1 N —— 6, inueniſſes quæſitum 66, qui & ipſe & infiniti alij ſatisfaciunt quæſito, de quo admonendum te duxi. Sic ſi 100 & 60 uelis ſubducere ab aliquo eadem conditione, inuenies eum eſſe uel 109 uel 181. interuallo datorum 40 in componentes ipſum 4 per 10, & 2 per 20, diuiſo. nam ſi 5 & 8 adſumas, fruſtraberis. Vides amplitudinis quintæ ſecundi ſpecimen. Per Algebram licet plures ſolutiones ipſe conquiras.

XV. Datum numerum in duos partire, & inueni præterea quadratum, qui iſtarum cum partium utraque quadratum conficiat. Diuidendus ſit 20 in duos numeros, qui ſic ponendi ſunt, ut quadrati eorum non excedant diuidendum, ac ſint 2 & 3. Quorum utrique ſi adijcias 1 N, erunt quadrata eorum 1 Q † 4 N † 4 & 1 Q † 6 N † 9.

N † 9. Vnde ſi utrinq; quadratum abijciam, ſcilicet 1 Q, relinquentur 4 N † 4 & 6 N † 9: qui ſunt partes quas quærimus: ac nimirum utraque adſcito quadrato, quadratam ſummam conficit. Proinde 4 N † 4, & 6 N † 9 ſummam cùm conficiant 10 N † 13, ea æquabitur 20. aufer utrinque æqualia: erit 1 N, $\frac{7}{10}$. Ergo partes diuiſi erunt $\frac{68}{10}$, & $\frac{132}{10}$, & ſufficiunt quæſtioni explicandæ.

SCHOLION.

Ergo partes diuiſi erũt $\frac{68}{10}$ *&* $\frac{132}{10}$.) *Hoc eſt* $\frac{680}{100}$ *&* $\frac{1320}{100}$. *quæ & ſic fiunt. Cùm 1 N ſit* $\frac{7}{10}$, *erit 1 Q,* $\frac{49}{100}$. *diuiditur ergo unitas in centeſimas particulas. Et cùm poſt detractionem quadrati prior ſit factus 4 N + 4, hoc eſt* $\frac{28}{10}$ *&* $\frac{40}{10}$, *ſeu in uniuerſum* $\frac{68}{10}$ * *etiam* $\frac{132}{10}$ *in centeſimas mutari oportebit: quod fit, decimis decuplatis. ita* * *ergo fiunt* $\frac{680}{100}$ *&* $\frac{1320}{100}$: *quorum utriq; adiectus* $\frac{49}{100}$, *facit* $\frac{729}{100}$, *&* $\frac{1369}{100}$ *quadratos. latus illius* $\frac{27}{10}$, *huius* $\frac{37}{10}$. *Sed* $\frac{680}{100}$ *&* $\frac{1320}{100}$ *ſummam conficiunt 20, ſcilicet* $\frac{2000}{100}$, *quauis unitate ſciſſa in centeſimas. Datus ergo eſt numerus 2000, in duos diuiſus 680 & 1320, quorum uterq; adſcito quadrato 49 fit quadratus, ille 729, hic 1369. Sed & latera quadratorum ſunt ficticia illa, 1 N + 2, id eſt* $\frac{27}{10}$, *& 1 N + 3, id eſt* $\frac{37}{10}$. *è quibus dicti quadrati fiunt.*

XYLANDRI.

Qui ſic ponendi ſunt, ut quadrati eorum.) *Hoc fit propter æquationis inuentionem. Nam ſi poſuiſſes 4 & 5. quadrata obtigiſſent 1 Q † 8 N † 16 & 1 Q † 10 N † 25. & utrinq; abiecto 1 Q, 8 N † 16 & 10 N † 25, fieret horum ſumma 18 N † 41 æqualis 20. quod eſt abſurdum admodum. Scholion autem heic eſt mutilum, ubi aſteriſcum alleui. operatio ipſa ſubtilis admodũ, & Diophanto digna: quam analyſi explicare poßis, hoc ferè modo. Quadratus partibus numeri diuiſi adiungendus optimè ponitur 1 Q, cuius latus ſit 1 N. Is quadratus, ſi aliter inſtitueres poſitiones, quàm heic inſtituuntur, utrinq; ſubduci ita, ut ad æquationem explicabilem perueniretur, non poteſt. itaq; argutè factum eſt, quod ex tali multiplicatione procreatæ ſunt partes propoſiti numeri, ut 1 Q (cuius rei cauſa 1 N ad 2 & ad 3 eſt adiectus, & ex iſtorum utriuſq; in ſe multiplicatione omnino quadratus erat exſtiturus, cuius utrinq; pars eſſet 1 Q.) de utroque tolli poſſet, itaq; duæ tantùm, ut noſter uocat, ſpecies committerentur, N uidelicet & abſolutæ unitates. Hinc diſcere poſſunt ſtudioſi, quid exercitatio faciat: utq; ſibi mathematici cauſas non effectuum ſed ſcientiæ ipſi fabricentur. Ergo cùm 1 N ſit* $\frac{7}{10}$: *& nos poſuerimus numerum quadratum partibus addẽdum, eſſe 1 Q. is erit* $\frac{49}{100}$. *Iam cur partes ſint* $\frac{68}{10}$ *&* $\frac{132}{10}$, *quarum ſumma* $\frac{200}{10}$, *id eſt 20: ſic diſces. prior fuit 4 N † 4. at 4 N conficiunt* $\frac{28}{10}$, *& 4 ſunt* $\frac{40}{10}$, *ſumma* $\frac{68}{10}$. *eodem modo inuenitur poſterior. Sed in centeſimas reſolui oportet, ſi ueritatem ſolutionis perſpicere cupias. Addi enim* $\frac{49}{100}$, *quadratus quem opus nobis ſuggeßit, ad* $\frac{68}{10}$ *aut* $\frac{132}{10}$ *non poteſt, niſi his quoque in centeſimas mutatis. quod fit denominatore per 10 (cum 10 decies ſint 100) multiplicato. Reliqua ſunt manifeſta: & in integris hoc ut tractetur & proponatur numeris, ſcholiaſtes indicauit. Niſi partes initio operis ponas in integris, ut heic 3 & 2, in magnos labyrinthos minutiarum incides. itaq; hæc quidem quæſtio plures una ſolutiones admittet: ſed commodè duas tantum, 1 & 3, uel 1 & 2 poſitis partibus. quod moneo, quia ad multos tales numeros inueniendos conducit. nam quanto maior eſt propoſitus numerus, tanto plures partibus conſtituendis poſitiones ſumere licet, quarum quadratorum ſumma numerum ipſum non æquet, ut ſi eſſet 84 diuidendus hac conditione, poni poſſent 9 & 1, 8 & 3, 8 & 4, 7 & 5, 7 & 4. &c. Quæ omnia exemplis docere uelle, eſt abutentis ſuo ocio, & de lectorum induſtria diffidentis.*

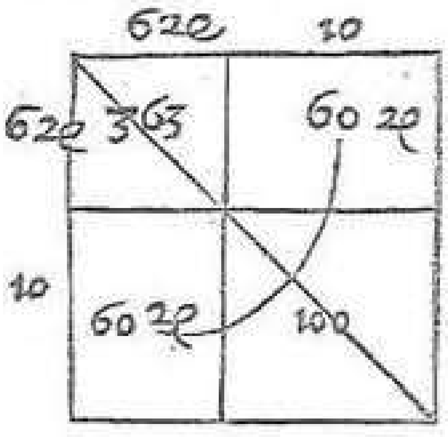
XVI. Datum numerum diuidemus in duos numeros, ac porrò exhibebimus quadratum, à quo uterque horum detractus, reſiduos faciant quadratos. Numerus diuidendus iterum eſto 20. & quadratus à nobis exhibendus fiat à latere 1 N ac tot unitatibus, quarum quadratus non ſuperet 20. Sit ergo latus hoc 1 N + 2, erit Quadratus 1 Q + 4 N + 4. Eſt autẽ euidens, quod hinc abiectis 4 N † 4, remanebit 1 Q, quadratus: & ſi auferres ab eodem 2 N † 3, relinquetur 1 Q † 2 N † 1, quadratus & ipſe. Quæ cùm ſint: pono alterum numerorum, in quos propoſitus diuiditur, eſſe 4 N † 4. & alterum 2 N † 3. quadratum autem quem quærimus, 1 Q † 4 N † 4: à quo utrum partium diuidendi ſubtraxeris, relinquetur quadratus. Reſtat ut hi duo diuiſum æquent. at ſumma ipſorum eſt 6 N † 7, cui æquatur 20. & utrinq; ſublatis æqualibus, fit 1 N, $\frac{13}{6}$. Erit ergo altera partium $\frac{76}{6}$, altera $\frac{44}{6}$. quadratus ipſe $\frac{625}{36}$. & ſatisfit poſtulatis quæſtionis.

SCHOLION.

Omnis quadratus à Numeris quotcunq; & unitatibus quotcunq; ortus: ſiue omnes qui ſunt Numeros, omnesq́; natas unitates amittat, quadratus ipſe remanet: ſiue abijciat cognominem unitatibus Numerorum ab initio poſitorum partem, & totidem unitates, quot continentur numero cognomine partis quæ eſt de Numeris ſubtractorum ad reliquum: & unitatib. inſuper ijs quæ ab initio fuerant poſitæ. Clarius hoc erit ex hac expoſitione. Sit latus hoc, 2 N † 2. ſtatuamusq́; 1 N eſſe 2. erit ergo Quadratus, 4 Q, hoc eſt 16: & 8. N, hoc eſt itidem 16, & 4. ſumma omnium 36. haud aliter quàm ſi ſummã 2 N & 2, ſcilicet 6, in ſe multiplicaſſes. Iſte ergo quadratus, ſi ei 8 N, id eſt 16, & 4 inſuper detrahas, manebit 16, quadratus. Quod ſi idem 36, amiſiſſet 4 N, ſcilicet 8, & 3, hoc eſt 11; retinuiſſet ſane 25, quadratum. Sunt autem 4 N ex 8 N pars eiuſdem nominis cum 2 ab initio poſitis, ſcilicet ſemiſsis. At 3 æquantur cognomini numero partis quanta eſt Numerorum ſubtractorum ad reliquum. (ſunt autem æqualia, quod unitate notatur.) & inſuper 2 quod ab initio ponebatur. nam 2 & 1 ſunt 3. Rurſum latus ſit 3 N † 5, & 1 N ſit 2. Quadratus ſit 9 Q † 30 N † 25, hoc eſt 36, 60, 25. ſimul in ſumma 121. Heic ſi uniuerſos 30 N, ſeu 60, & 25 inſuper abijciam, relinquentur 36 quadratus. Quod ſi partem 5 unitatibus cognominem de 30 N, ſcilicet quintantem, ſeu 6 N, qui faciunt 12, auferam: & præterea tot unitates, quot ſunt in cognomine numero partium numerorum ablatorum ad eos qui relicti ſunt, ac tot inſuper unitates quot initio poſitæ fuerant: (cæterùm Numeri ſubducti ad reliquos quadrans ſunt: & initio ponebantur 5 unitates.) ergo ſi auferam 12, 4, & 5 de 121: rurſum ſupereſt quadratus 100. Sic ergo etiam heic egit Diophantus. Cùm enim poſuerit quadratum qui quæritur eſſe 1 Q † 4 N † 4, à latere 1 N † 2. & inuentus ſit 1 N eſſe $\frac{13}{6}$: erit utiq; latus 1 N † 2, ſcilicet $\frac{25}{6}$, & eius quadratus $\frac{625}{36}$. atq; huius ſumma colligitur ex 1 Q, quod eſt $\frac{169}{36}$, & 4 N, quod eſt $\frac{312}{36}$, & 4, quod eſt $\frac{144}{36}$. Horum ſumma 625. Vnde ſi auferas 4 N † 4, hoc eſt 312 & 144. ſcilicet 456: relinquitur 169 quadratus, latus habens 13. Quod ſi à 625 ſubducas 2 N † 3, ſcilicet 156, & 108, ſummam 264: ſupereſt 361 quadratus, latus habens 19. Porrò 264 & 456 ſunt in ſumma 720, nimirum 20, unitate quauis in 36 particulas diuulſa. Ergo 720 diuiſus eſt in duos 264 & 456, qui ſi uterq; à 625 ſubducantur, relinquunt quadratum.

XYLANDRI.

Adſine eſt hoc ſuperiori problema, & limitationis adiectæ cauſa, & poſitionũ, inde repetatur. Theorema aũt ſcholiaſtæ & mendoſum eſt in Græco, & perplexè propoſitũ. Ad priorẽ partẽ quod attinet, nihil eſt obſcuritatis. Nã poſito latere 6 N † 10, quadratus ſit 36 Q † 120 N † 100 neq; dubium eſt, quin huius quadrati cõſtitutio ſi exigatur ad quartam ſecundi, 120 N † 100 ſint gnomon, duob. cõſtans cõplementis & quadrato: ut ex adiecto ſchemate cernere licet. Altera pars ita habet. À 10 denominatur pars decima, $\frac{1}{10}$. Ea de 120 N, eſt 12 N, quib. ablatis reſtãt 108 N. ratio ablati ad reliquũ eſt nouencupla: nomẽ 9. unitates initio poſitæ 10. Ergo ſi auferã à dicto quadrato 12 N † 19. relinquetur quadratus 36 Q † 108 N † 81. Quod nõ modò radice pro arbitrio æſtimata experiri licet, ſed etiam inuentione radicis quadrati huius. eſt autem ea, 6 N † 9. Vt uides.



$$ra\text{-}\ \begin{array}{c} 36\,Q \;+\; 108\,N \;+\; 81 \\ \hline 6\,N \;+\; 9 \\ \hline 12\,N \end{array}\ dix.$$

Eſto, propter rudiores, 1 N 10. Erit latus 6 N † 10, 70. quadratus inde factus 4900. Et tantundem eſt etiam 36 Q. 120 N, 100. ſcilicet 3600. 1200. 100. ſumma 4900. At 12 N ſunt 120; quæ & 19, id eſt 139, ſi auferas de 4900, relinquuntur 4761 quadratus, à radice 69. ſed & 36 Q. (3600) cùm 108 N (1080.) & 81, ſummã faciunt 4761. & 6 N, ſunt 60: quib. addita nouẽ, 69 planiſsimè reddunt. Enimuerò ut ſubtile eſt hoc theorema, ideoq; à nobis demonſtratũ ἐκθέσει hac: ita alia cauſa eſt cur 2 N † 3 poni poſsint. Nã Cardanus & Stifelius ſagaciter peruiderũt hos numeros 1 Q † 2 N † 1, 1 Q Q † 2 C † 3 Q † 2 N † 1 quadratos eſſe non minus, quàm hos, 121, 12321, & ſimiles ſicut etiã quadrati ſunt 10404, 90601, 10609, 40401, & alij id genus. Vide etiã lib. 3. prop. 16. Ergo ſicut 1 Q † 4 N † 4 abiecto toto gnomone ſit 1 Q, nimirũ quadratus: ita etiã 2 N † 3 abiectis ſit 1 Q † 2 N † 1, qui & ipſe quadratus eſt. quod ſilẽtio prætereundũ minimè duxi. Reliqua è ſuperiore propoſitiõe poſſunt intelligi. Id uerò minimè diſsimulandũ eſt, uariè ſolui hoc quoq; genus quæſtionis poſſe. Nam latus quadrati licuit etiam 1 N † 3 ponere. etiam 1 N † 4. ne de infinitis minutijs mentionem faciam, quæ inter 2 & 5 intercidunt. (Nota 1 N † 5 nõ potuiſſe poni, quia quadratus de 5, puta 25, maior eſſet 20, diuidendo numero. Quadratus fieret 1 Q † 10 N † 25. & ſi iam pro altera partium poneres 10 N † 25, maior ea ipſo toto diuidendo perabſurdè ſtatueretur.)

retur.) Rurſus quadrati latera poſito 1 N † 3, quadratus ſit 1 Q † 6 N † 9. Si pro altera parte ſtatuamus 6 N † 9. pro reliqua 4 N † 8, aut 2 N † 5, perinde eſt utrum ponas. quod multo adhuc magis uariabitur, ſi 1 N † 4 quadrati latus ponas. Multo magis ſi diuidendus numerus maior ſit, & plures lateris poſitiones admittat. Quæ ego indicanda duxi, non etiam ſtylo perſequenda, quod exercitationis anſam dediſſe in tanta fecunditate ſatis haberem.

XVII. Inueniantur duo numeri quorum ſit quæ præcipitur inter ſe ratio: & uterque cum quadrato qui proponitur coniunctus, quadratum numerum conficiat. Eſto maior triplus minoris, & uterque adiecto nouem fiat quadratus. Heic à quocunque quadrato, cuius latus ſit 1 N † aliquot unitates, 9 aufero; is numerus alter quæſitorum erit. Eſto minor 1 Q † 6 N, erit maior 3 Q † 18 N. reſtat ut ad hunc quoque adiecto 9, fiat quadratus. At ſit 3 Q † 18 N † 9. hoc ergo æquale eſt quadrato. Fingo quadrati latus 2 N —— 3. erit 1 N, 30. Ergo minor numerus eſt 1080. maior 3240. quorum uterq;, ſi addas ei 9, eſt quadratus.

SCHOLION.

Quòd quadratum effingit à latere, in quo eſt defectus, hanc habet rationem. 3 Q † 18 N † 9 non naſcitur ab uno Numero: alioqui enim eſſet 1 Q duntaxat, cùm ſint heic tria: ideò latus ponit 2 N cum defectu tali, ut Quadrati ſuperent, Numeri autem deficiant, & unitates æquentur quantitate. ſic enim unitates uniuerſæ hinc ſubmotæ, uniuerſas illinc ſubmouebunt: & Quadrati de Quadratis auferentur, ut Quadratus ſuperſit certæ Numerorum multitudini æqualis. Ergo addito utrobiq; defectu, & æqualibus amputatis, deminuentur notæ numerorum, fietq; 1 N, 30, 1 Q autem 900. Ergo minor, cum ſit 1 Q & 6 N, erit 1080. maior 3 Q † 18 N, 3240. Et 9 ad 1080 adiecta, quadratum faciunt 1089, cuius latus 33. ad 3240, quadratum 3249, cuius latus 57. Et 33 ſunt 1 N † 3, latus quadrati 1 Q † 6 N † 9. 57 autem ſunt 2 N —— 3, latus quadrati 4 Q † 9 —— 12 N Sunt autem 4 Q † 9, 3609. unde ſi auferas 12 N, hoc eſt 360. relinquentur 3249.

XYLANDRI.

In poſitione hoc obſeruabis facilè, inueniri poſſe numerum qui cum 9 ſit quadratus: idq; quadratū habere pro latere 1 N, & tot unitates, quot unitatibus radix quadrati propoſiti conſtat. heic 3, cùm quadratum ſit 9: Ergo 1 N † 3 in ſe ductum facit 1 Q † 6 N † 9. Ergo alter numerorum eſt 1 Q † 6 N. ad quem 9 ſi addas, utique quadratum habebis. Hunc minorem eſſe, placuit autori. nam ſi maiorem ſtatuiſſet, minor $\frac{1}{3}$ *Q † 2 N fuiſſet (ſuperſedere autem minutijs interdum licet, cùm ſcilicet non plus compendij in ijs eſt quam in integris.) Nunc maior eſt 3 Q † 18 N. & 3 Q † 18 N † 9, quadratus. Heic cum uideas tres ſpecies, Q, N, & abſolutum numerum 9, elegantis eſt induſtriæ ita inſtituere ratiocinationem, ut in æquatione harum una prorſus eliſa, reliquæ comparentur. quo facit —— 3, qui 9 procreat, quæ 9 ab altera parte aboleant. & quia defuturæ ſunt radices in nouo quadrato, quod multiplicationis doctrina patefit: ideo ponuntur radices in latere tot, ut in quadrato recens efficto ſint plures Q quam 3 Q, qui erant in priore. Quia conciſe hæc ſunt ab autore dicta, æquationem ſic ſubijciamus in gratiam diſcentium.*

Fictio lateris pro quadrato.

2 N —— 3 latus effingendi quadrati.
2 N —— 3

—— 6 N † 9
4 Q —— 6 N

4 Q —— 12 N † 9 quadratum, æquale quadrato 3 Q † 18 N † 9. Primùm ab utraq; parte abijcio 9. deinde 12 N utriq; parti addo, & utriq; 1 Q adimo. fiunt 30 N æquales 1 Q, hoc eſt, nominum facta, ut monuit interpres, deminutione, 1 N eſt 30. Cætera habes in ſcholio. Sed obiter memineris, heic quoq; uarias ſolutiones dari. nam quotquot ultra 2 poſueris radices —— 3. res aliter atq; aliter ſuccedet. quod unico exemplo docere ſatis eſt. Sit latus effingendi quadrati 3 N —— 3. erit quadratus 9 Q —— 18 N † 9. æqualis 3 Q † 18 N † 9. æquatione cōpoſita, 1 N eſt 6. numeri 72 & 216. utriq; additus 9 facit 81 & 225. quos quadratos eſſe nemo ignorat. Ita ſi quæras duos duplæ proportionis numeros, quorū utriq; 25 additus quadratos faciat: cū alios inuenies, tum 600 & 1200, latere poſito 2 N —— 5, &c. Per duplicationem æquationem hæc non niſi perplexitate magna ſe obijciente fieri poſſe, experiendo ſenties.

XIIX. Dentur tres numeri, quorum ſi quiſq; proximè ipſum inſequenti portionem ſui quanta imperatur tribuat, & præterea aliquot ex præſcripto unitates: omnes illi ultro citroq; datis & acceptis quæ mandatum fuerat, æquales exſiſtant. Eſto hæc lex problematis, ut primus ſui quintantē & 6 ſecundo: ſecundus ſui ſextantem & 7 tertio: tertius ſui ſeptantem & octo tribuat primo. Ponamus primum numerum eſſe 5 N, ſecundum 6 N. Dat primus ſecundo 1 N † 6. ita ſecundus erit 7 N † 6. Iam ſi ſecundus eius quod ante acceſsionem hanc habebat ſextantem, & 7, ſcilicet 1 N † 7, dederit tertio: iam nunc habebit hac facta acceſſione 6 N —— 1. Cæterùm primus retinuerat dato ſui quintante & 6, adhuc 4 N —— 6. Ergo primus, ſi à tertio accipiat huius ſeptantem & 8, habere debet 6 N —— 1. ad hoc autem ei deſunt 2 N † 5. Ergo 2 N † 5 ſunt ſeptans tertij, & inſuper 8. ergo ſi eis 8 adimas: 2 N —— 3 erunt ſeptans tertij. is ergo eſt 14 N —— 21. Reſtat ut hic quoq;, ſi primo dederit ſeptantem ſui & 8, ac deinde à ſecundo receperit ſextantem eius & 7, fiat 6 N —— 1. Atqui tertius amiſſo ſui ſeptante & 8, retinet 12 N —— 26. & ubi à ſecundo ei acceſſerint 1 N (ſextans huius) ac 7, habebit 13 N —— 19. quod æquatur 6 N —— 1. fit ergo 1 N, $\frac{18}{7}$. Ergo primus erit $\frac{90}{7}$, ſecundus $\frac{108}{7}$, tertius $\frac{105}{7}$. Atque hi implent conditiones propoſiti.

SCHOLION.

De tertio inquit, Amiſſo ſui ſeptante, & octo, reliquam ei eſt 12 N —— 26.) *id ſic fit. Septans eius 14 N —— 21. Erat 2 N —— 3. quem ubi primo dedit, retinet 12 N —— 18. ſed & 8 præterea dedit. Ergo ſuperſunt ei 12 N —— 26. nam —— 8 ad —— 18 accedens, defectum fecit 26. Tertius porrò $\frac{105}{7}$ fit hoc pacto 14 N ſunt $\frac{252}{7}$. hinc aufer quod illis deerat, ſcilicet 21, ſeu $\frac{147}{7}$: relinquuntur $\frac{105}{7}$. Primus ergo dans ſecundo ſui quintantem, hoc eſt $\frac{18}{7}$, & præterea 6, ſeu $\frac{42}{7}$. retinet adhuc $\frac{30}{7}$. idem à tertio eius ſeptantem $\frac{15}{7}$, & 8 ſeu $\frac{56}{7}$ recipiens, conſit $\frac{101}{7}$. Secundus ubi ſui ſextantem $\frac{18}{7}$ & porrò 7 ſeu $\frac{49}{7}$ tertio dedit, retinet $\frac{41}{7}$. Poſt ubi à primo recepit eius quintantem $\frac{18}{7}$ & 6, id eſt $\frac{42}{7}$, ſummam habet $\frac{101}{7}$. ſed & tertius dans primo ſui ſeptantem $\frac{15}{7}$ & 8, ſeu $\frac{56}{7}$, retinet $\frac{34}{7}$. ubi uerò à ſecundo eius ſextantem $\frac{18}{7}$ & 7 ſeu $\frac{49}{7}$ recepit, $\frac{101}{7}$ ſummam habet.*

XYLANDRI.

Ipſa quæſtio monet, cur primo 5 N, ſecũdo 6 N tribuatur, quia ſcilicet tota eorũ partes requiruntur. & hæ poſitiones cùm ad minutias, tum ad ſecundas radices euitandas ſunt accommodatæ. Memineris autem quæ de dando & accipiendo poſtulantur, ad ſortes numerorum, non ad ſummas quæ ex additamentis fiunt, referri. ut etiam in ſequenti. In Græco confuſe quæ dicebantur, meliore ordine & planius expoſui, mendis expunctis.

XIX. Datus numerus in tres diuidatur, quorum quiſq; proximè ſequenti ubi dederit ſui partem quæ imperatur, & aliquot item unitates: datis acceptisq; ut mandatum fuit omnibus, æquales diuiſi partes exſiſtant. Hoc pacto diuidendus ſit numerus 80, in tres alios, ut primus ſui quintatem ac 6 ſecundo: ſecundus ſui ſextantem & 7 tertio: tertius ſui ſeptantem & 8 primo det: itaq; ultro citroq; datis & acceptis ex præſcripto omnibus, æqualitas exſiſtat. Statuemus primum 5 N, ſecundum 12. Ergo ſecundus, ubi quintantem primi ac 6 acceperit, erit 1 N † 18. Verùm hic ſecundus, puta 12, ubi ſui ſextantem 2, & præterea 7, id eſt in ſumma 9 amiſerit, dum ijs tertium impertit: retinet 3. & à primo donatus deinde 1 N † 6, habet ſummam 1 N † 9. Tantundem ergo reliqui etiam dato receptoq; quod imperabatur habebunt. At primo ijs quæ iam diximus expenſis, reſtabant 4 N —— 6. Vt ergo habeat 1 N † 9, deſunt ei adhuc 15 —— 3 N. hoc ergo eſt ſeptãs tertij & præterea 8. quare 8 hinc ſublatis, quod reſtat 7 —— 3 N ſeptans erit tertij. Eſt ergo tertius 49 —— 21 N. Reſtat ut is det & recipiat quæ iubetur. Atqui re peracta habet ſummam 43 —— 18 N, quæ æquatur 1 N † 9. Fit 1 N $\frac{34}{19}$. Eſt ergo primus $\frac{170}{19}$, ſecundus $\frac{228}{19}$, tertius $\frac{217}{19}$.

SCHOLION.

Tertius 49 —— 21 N, cùm ſecundi ſextantem, 2, & ad hæc 7, id eſt omnino 9 accepit, fit 58 —— 21 N. Iam ſeptans tertij 7 —— 3 N & præterea 8, ſunt 15 —— 3 N, quæ ſi inde auferas, reſtãt 43 —— 18 N. adiectio &

detractio partium in æquatione euidens eſt. Cæterùm primus $\frac{170}{19}$, ſui quintantem $\frac{34}{19}$, & 6 ſeu $\frac{114}{19}$, in ſumma $\frac{148}{19}$, ſecundo dans, retinet $\frac{22}{19}$. ad quæ à tertio recipiens eius ſeptantem $\frac{31}{19}$, & 8 ſeu $\frac{152}{19}$, ſummam $\frac{183}{19}$ habet in ſumma $\frac{205}{19}$. Secundus ubi ſui ſextantem $\frac{38}{19}$, & 7 hoc eſt $\frac{133}{19}$ (ſummam $\frac{171}{39}$.) tertio dedit, ſibi reſeruauit $\frac{57}{19}$. Ad hæc nactus à primo iſta $\frac{148}{19}$, habet & ipſe $\frac{205}{19}$. Tertius poſtquam ſui ſeptantem & 8, hoc eſt $\frac{183}{19}$ dedit primo, retinuit $\frac{54}{19}$. quibus ubi à ſecundo data acceſſerunt iſta $\frac{171}{39}$, ſumma heic quoq; fit $\frac{205}{19}$.

XYLANDRI.

Valdè ingenioſæ ſunt heic poſitiones 5 N, 12, pro primo & ſecundo. & omninò 12 eſt ſecundus, $\frac{228}{19}$. Cæterùm in Diophanto eſt, numerorum qui ſic diuidi debeat, eſſe 80. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν π′ διελεῖν. *Sed profectò hi tres numeri qui ſic inueniuntur, ſummam 80 non conſtant, qui propoſitus fuit ad diuidendum: ſed conficiunt omnino $32\frac{7}{19}$. Itaq; heic quid dicam nõ habeo: niſi quod 80 illud ſubrepticium puto. & quidem tertius, ſi ſumma trium debuit eſſe 80, poni debuit 80 —— 12 —— 5 N, hoc eſt 68 —— 5 N, & examinari iuxta poſtulata quæſtionũ, quas noſter uocat hypoſtaſes. uel tertius ſic, ut eſt, inuentus 49 —— 21 N, debuit alteri tertio 68 —— 5 N æquari: quod in magnum incidiſſet abſurdum. qui enim poteſt maior numerus cum minori defectu, æquari minori numero cum maiori eiuſdem generis defectu? & fierent ſic reducta æquatione 16 N † 68 æqualia 49. Quin & hoc oſtendit non 80 numerum proponi, ſed ſimul & numerum & partes quæſtioni congruentes quæri, quod 12 abſolutas unitates ponit pro ſecũda parte, quaſi uerò neceſſe ſit ſecundum eſſe hanc, & hoc modo diuinare licuerit, certo numero ad diuidendum propoſito. Certè enim ſi numeri 80 ſic diuidendi, ſecunda pars eſt 12: eadem 12 non erit, manentibus legibus quæſtionis ijſdem, & alio ad diuidendum propoſito. Itaq; illa 80 planè non agnoſco. Et tamen niſi datur numerus diuidendus, à ſuperiore hoc problema diuerſum non erit, & diſertè ſit mentio dati numeri, qui ſit diuidendus. Itaq; ſuſpicari licet alio modo fuiſſe repetitum ſuperius exemplum, deinde de 80 ſic diuidendo propoſitũ problema, cuius ſolutio exciderit, & propoſitio repetitionis. Certè quiduis potiùs ſuſpicor, quam Diophantum à ſcopo aberraſſe. Non ſolent autem dedita opera ad tractationem problematum deligi tales numeri, qualis eſt $32\frac{7}{19}$ ſed integri. alias ſi pro* π′ *legeres* κϛ, ζ ιθα. *omnia conuenirent. ſed quàm inſolens uel deprauatio hæc fuiſſet, uel correctio? Nos, ne quid deſit tractationi, quæſtionem ut in Græco eſt propoſita, explicemus: id eſt, Datum numerum 80 diuidemus in tres alios, qui poſtulata quæſtionis impleant. Principio, cùm ſumma numerorum non præſcriberetur, noſtro arbitratu licebat primum & ſecundum ponere qua uellemus ratione. Sicut in præcedente propoſitione autor primũ 5 N, ſecundum 6 N poſuit, ratione ſeſquiquinta. & in ſolutione $\frac{90}{7}$ & $\frac{108}{7}$ hanc habent rationem. At in hac propoſitione ſecundus ad primum $\frac{228}{19}$ ad $\frac{170}{19}$ nequaquam eſt ſeſquiquintus, manentibus ijſdem omnino legibus quæſtionis. neq; 5 N ad 12 ſtatim habent eandem quam ad 6 N rationem: & heic quidem nequaquam habet. Quid ita? quia trium numerorum ſumma non eſt eadem, aliusq; adeò numerus diuidendus in tres partes his cõditionibus ijſdem. nam decimaoctaua quæſtionis numeri faciunt $41\frac{6}{7}$, heic $32\frac{7}{19}$. ſed cum nulla præſcribitur ſumma, libertas iſta permittitur. Heic à propoſito pendemus numero. Difficulter hæc per ſecundas radices ſeu regulam Quantitatis fiunt. Si ſapis, habes eius declinandæ occaſionem. Nam cùm tres numeri qui quæruntur, 80 ſummam conficiant: neq; dum eorum partes adduntur detrahunturq;, huic ſummæ quicquam decedat; cùm quod uni aufertur, alteri adijciatur, nihil excidat amittatur ue. intelligere licet, æqualitatem trium numerorum ultimo exſiſtentem eam fore, ut quiuis ſit triens ex 80, hoc eſt $26\frac{2}{3}$. Hoc animaduerſo ponamus primum eſſe 1 N. ab eoq; auferamus quæ dat ſecundo, $\frac{1}{5}$ N † 6: relinquitur $\frac{4}{5}$ N —— 6. hoc cum ſeptante tertij & 8, æquabitur $26\frac{2}{3}$. Ergo à $26\frac{2}{3}$ auferas $\frac{4}{5}$ N —— 6, relinquuntur $32\frac{2}{3}$ —— $\frac{4}{5}$ N, quod eſt 8 & ſeptans tertij. aufer 8, relinquitur ſeptans tertij $24\frac{2}{3}$ —— $\frac{4}{5}$ N. ergo tertius eſt $172\frac{2}{3}$ —— $5\frac{3}{5}$ N. Huius & primi ſumma $172\frac{2}{3}$ —— $4\frac{3}{5}$ detracta ab 80, utpote ſumma trium numerorum, relinquet ſcilicet ſecundum $4\frac{3}{5}$ N —— $92\frac{2}{3}$. Huic ſextantem ſuum & 7 adimemus, nimirum $\frac{23}{30}$ N —— $7\frac{4}{9}$. relinquentur $\frac{23}{6}$ N —— $85\frac{2}{9}$. His ſi addamus $\frac{1}{5}$ N † 6, quod ei à primo accedebat, fient $\frac{121}{30}$ N —— $79\frac{2}{9}$ æqualia $16\frac{2}{3}$: ob cauſam ſuprà demonſtratam. adde utrobique $79\frac{2}{9}$, erunt $\frac{121}{30}$ N || $\frac{863}{9}$ hoc eſt 363 N || 8630. (alterum per 30, alterum per 9 erat multiplicandum.) pro his ſumo minimos 10 & 3, ut alibi docui. Fit 1 N $\frac{8630}{363}$ primus. ſecundus $\frac{6060}{363}$. tertius ergo $\frac{14350}{363}$. quorum ſumma $\frac{29040}{363}$, id eſt 80. Cætera omnia congruere ad poſtulata quæſtionis, experiendo deprahendes. & hoc ratiocinandi genus minimè eſt uulgo notum.*

Compẽdium obſeruandũ.

Addam aliud in numeris integris, ut demerear lectorem etiam rudiorem. Diuidatur 330 in tres numeros, ita ut ſi primus ſui ſemiſſem & 10 ſecundo det, ac recipiat tertij quadrantem & 30: ſecundus ſui quintantem & 6 tertio tribuat, ipſe quod iam diximus à primo recipiat: tertius primo det, & à ſecundo recipiat quantum indicauimus: omnes ſic facti numeri ſint æquales. Ii ſunt 100. 70. & 160. quod licet experiaris. Quo conſilio duæ hæ propoſitiones quadratorum tractationi interſertæ ſint, non diſputo. Certè deprauationis nomine ſuſpectum codicem aut potiùs librarios ſi cui faciant, non mirer, non diſſentiam ab eo.

XX. Inueniendi ſunt quadrati tres numeri, ut maximi ſupra medium, & medij ſupra minimum abundantiæ ea ſit quæ præſcribitur ratio. Eſto ea tripla. Statuamus minimum 1 Q. medium 1 Q † 2 N † 1, nimirum à latere 1 N † 1. Erit ergo maximus 1 Q † 8 N † 4. hoc ergo quadrato æquale eſt. Eum effingo ab 1 N. ut 1 Q conficiatur latere in ſe ducto, & tot unitates, ad 1 N adijcio: ut quæ porrò ſpecies fiunt in conſtituendo quadrato, non utraq; multitudine ſua ſuperet 8 N & 4, ſed altera deficiat, alterum excellat. ſit ergo latus 1 N † 3, erit quadratum 1 Q † 6 N † 9, æquale 1 Q † 8 N † 4. fit 1 N, 2 $\frac{1}{2}$. & quadrati quæſiti, maximus 30 $\frac{1}{4}$. minimus 6 $\frac{1}{4}$, medius 12 $\frac{1}{4}$. qui ſatisfaciunt quæſtioni.

SCHOLION.

Non minor modò, ſed & medius poni debet quadratus: nimirum cuius latus ſit 1 N, & quotquot tandem unitates. Tertium non eſt neceſſe poni quadratum, dummodo interuallum eius ſupra medium, rationem præſcriptam habeat ad interuallum medij ſupra minimum. Ergo cùm medius quadratus poſitus ſit 1 Q † 2 N † 1; rectè maximus ponitur 1 Q † 8 N † 4. Eſt enim interuallum medij ſupra minimum 2 N † 1. cuius triplum 6 N † 3 additur medio, ut maximus quadratus conſtituatur, triplo interuallo ad medium eius, quod eſt medij ad minimum. Porrò ſiue in maximo numerus N maior ſit numero unitatum, ſiue minor, ſiue æquales ſint: ſemper quadratum quod fingitur ita eſt inſtituendum, ut numeri Numerorum qui fiunt & unitatum, alter excedat ſpeciem alteram, alter ab ea ſuperetur. ac perinde eſt, utrum horum fiat. non enim ſemper idem fit.

XYLANDRI.

Non inuenies temerè exemplum, ubi pauciores unitates, plures N quadratum ſit ſuggeſturum. Sed cur nō 1 Q. 4 Q. potius poſuerit autor, quā 1 Q. 1 Q † 2 N † 1. in promtu eſt cauſa. illa enim uia ad æquationem explicabilem non perducit. Cæterùm hæ quoq; quæſtiones complures admittunt ſolutiones. Nam ſi minimum poſuiſſem 1 Q, medium 1 Q † 6 N † 9, à latere 1 N † 3. (minutias enim prudens diſſimulo.) horum differentia 6 N † 9. triplum eius ad medium adiectum, 18 N † 27, maximum quadratis facit 1 Q † 24 N † 36. Hæc uarietas theſium ſecundæ, eſt innumera. Latus quoq; unde maximo æquale quadratum ſit effingēdum, uariè poteſt poni. nam ſi id poſuiſſes 1 N † 10, quadratum eius 1 Q † 20 N † 100 æquaretur 1 Q † 24 N † 36, hoc eſt 4 N || 64. Facit 1 N 16. numeri ergo ſunt 16, 19, 26. quadrata 256. 361. 676. interualla 105 & 315. eorum ratio tripla. Si latus 1 N † 8 poſuiſſes, inueniſſes numeros $\frac{7}{2}$. $\frac{13}{2}$. $\frac{23}{2}$. quadrato omiſſis denominatoribus 49. 169. 529. interualla 120 & 360, tripla, &c.

XXI. Quæruntur duo numeri, ita ut quadratus alterius altero numero adiecto, utrinq; fiant quadrati. Pono priorem 1 N: poſteriorem 2 N † 1, ut prioris quadratus hoc numero adiuncto fiat quadratus. Iam poſterioris quadratum eſt 4 Q † 4 N † 1. & addito priore fit 4 Q † 5 N † 1, æquale quadrato. Hunc fingo à latere 2 N —— 2, & erit quadratus 4 Q † 4 —— 8 N. fit 1 N $\frac{3}{13}$, isq; eſt prior quæſitorum, poſterior $\frac{19}{13}$: & facimus quod poſtulatur.

SCHOLION.

Fingit quadratum à latere 2 N —— 2, ut à 2 N exſiſtant alij 4 Q: per —— 2 autem efficiat reliquas duas ſpecies, quarum altera maior, altera minor ſit ſpecie ſimili in quadrato ad quem æquatio inſtituitur. nam 4 quæ fiunt, amplius ſunt quam 1: & uiciſſim —— 8 N eſt minus quam 5 N. Propoſito porrò ſic ſatiſfit. Prior numerus cū ſit $\frac{3}{13}$, quadratū gignit $\frac{9}{169}$ unitate in centeſimas ſexageſimasnonas ſciſſa. adde huic quadrato alterum numerum $\frac{19}{13}$, ſcilicet (quod fit multiplicatis 19 in 13.) $\frac{247}{169}$. fiunt $\frac{256}{169}$, quadratus à latere $\frac{16}{13}$. Rurſum poſterior $\frac{19}{13}$, quadratum procreat $\frac{361}{169}$, cui adde $\frac{3}{13}$, id eſt $\frac{39}{169}$, fiunt $\frac{400}{169}$, quadratus à latere $\frac{20}{13}$.

XYLANDRI.

Primæ poſitionis ratio pendet à quadrato 1 Q † 2 N † 1. Huius pars 1 Q cum habeat radicē, ea pro primo ſtatuitur, reliquum pro ſecundo. quod ad primi quadratum adiectum, quadratum initio adſumtum reſtituit. Vnde liquet innumeris modis uariari poſſe. Verbi gratia, quadrati *ſunt etiam hi 1 Q † 6 N † 9, & 4 Q † 24 N † 36 latera 1 N † 3 & 2 N † 4. Ergo pro priore 1 N, pro altero 6 N † 9 ponere licet: uel pro priore 2 N, pro altero 24 N † 36, &c. Reliqua interpres ſatis commodè explicauit: neq; inſtituti mei eſt, rem ſatis indicatam ubiq; ſubiecto opere perſequi.*

XXII. Inueniantur duo numeri, ut utriuſq; quadratus altero numero ſibi ademto, relinquat quadratum. Ponamus minorem 1 N & quot libuerit unitatum, ſitq; adeò 1 N † 1. Maior quadratus ſit minoris, demto 1 Q: nimirum ut minoris quadratus maiore iſto demto, maneat quadratus. Ergo cùm quadratus minoris ſit 1 Q † 2 N † 1: maior erit 2 N † 1. ac ſi à quadrato minoris hunc auferes, relinquitur 1 Q, quadratus utique. Iam maioris quadratus 4 Q † 4 N † 1, ſi auferas ab eo minorem numerum, fit 4 Q † 3 N, quod nimirum ſit æquale quadrato reſiduum. Hunc quadratum fingo à latere 3 N. fitq; 1 N $\frac{3}{5}$. Ergo minor eſt $\frac{8}{5}$, maior $\frac{11}{5}$. & ſoluunt quæſtionem.

SCHOLION.

Quadrati latus fingit 3 N, ut qui procreantur inde 9 Q amplius ſint quàm 4 Q. Nã ſi latus poſuiſſet 2, produxiſſet hoc quadratum 4 Q: & reiectis æqualibus, 3 N æquarentur nihilo, quod eſt abſurdum. Quòd latus tantum N ponit, non adiectis unitatibus: ideò fit, quia ſublato quadrato minore de maiore, relinquuntur duæ ſpecies, Q & N. nam ſi etiam unitates ab altera parte fuiſſent, etiam has heic adhibuiſſet. quod hoc loco neceſſe non fuit. Cum autem minor ſit $\frac{8}{5}$, quadratus eius fit $\frac{64}{25}$, unitate in uigeſimasquintas ſciſſa. ergo maior $\frac{11}{5}$ fit $\frac{55}{25}$, quæ à $\frac{64}{25}$ ſubducta, relinquunt $\frac{9}{25}$ quadratum. Rurſus cùm maior ſit $\frac{11}{5}$, eius quadratus eſt $\frac{121}{25}$. minor $\frac{40}{25}$ inde ablatus, quadratum relinquit $\frac{81}{25}$.

XYLANDRI.

In Græco ſcholia ſunt mutila. Has quoq; quæſtiones eandem cum ſuperioribus uarietatem poſitionum & ſolutionum admittere, ſatis ex dictis potes animaduertere.

XXIII. Inueniantur duo numeri, ut utriuſq; ipſorum quadratus, cum numerorum ipſorum ſumma, faciat quadratum. Sit minor 1 N. maior 1 N + 1: ut quadratus minoris 1 Q, cum ſumma amborum, quæ eſt 2 N + 1, faciat quadratum. Reſtat ut etiam maioris quadratus cum hac ſumma, quadratum conſtituat. Quadratum maioris (1 Q + 2 N + 1) cum ſumma numerorum (2 N + 1) fit 1 Q + 4 N + 2. hoc eſt æquale quadrato. Fingo hunc quadratum ab 1 N —— 2 latere. ipſe ergo eſt 1 Q —— 4 N + 4. fit 1 N, $\frac{2}{8}$, minor. maior ergo $\frac{10}{8}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

SCHOLION.

Præclarè ſtatuit maiorem 2 N † 1. ut quadratus minoris, 1 Q, utroq; numero adiuncto, faciat quadratum, ſcilicet 1 Q † 2 N † 1, cuius latus 1 N † 1. Sed & quadratum fingit è latere 1 N —— 2, ut reſtituatur in illo 1 Q, & ſpecies N atq; abſoluti numeri quæ in altero ſuperat, in altero ſuperetur. Porrò cùm minor ſit $\frac{2}{8}$, quadratum eius eſt $\frac{4}{64}$, unitate in ſexageſimaſquartas diſſoluta. & ſumma numerorum, $\frac{12}{8}$, in eaſdem reſoluta partes, quod fit 8 eos multiplicante, fit $\frac{96}{64}$. hæc ad minoris quadratum $\frac{4}{64}$, addita, $\frac{100}{64}$ facit. Rurſum quadratũ maioris eſt $\frac{100}{64}$: ad quem ſumma addita, fit $\frac{196}{64}$. utrinq; quadratus.

XYLANDRI.

Præſtat uti minimis $\frac{1}{4}$ & $\frac{5}{4}$ quod ipſe facilè uides. Quæ de uarietate dixi, ubi locum habeant, etiam me tacente ſenties, uerbi gratia, maiorem potuiſſe poni 4 N † 4, 6 N † 9, &c.

XXIV. Poſtulantur numeri duo quorum utriuſq; quadrato ſi ſummam ipſorum numerorum adimas, reſidui ſint quadrati. Sit minor heic quoq; 1 N, maior 1 N + 1, ut uiciſſim quadratus maioris ſumma numerorum detracta, maneat quadratus. Ergo ſupereſt, ut etiam minoris quadratus amborum ſumma multatus, quadratũ relinquat. Id ergo quadratum 1 Q, demtis 2 N + 1, eſt 1 Q —— 2 N —— 1, æquale quadrato. Id quadratũ fingo à latere 1 N —— 3. Ergo 1 Q —— 6 N + 9 æquatur 1 Q —— 2 N —— 1. fit 1 N, $2\frac{1}{2}$ minor, maior $3\frac{1}{2}$. qui poſtulabantur.

SCHOLION.

Summa numerorum detracta maneat quadratus.) *Nimirum enim 1 Q. Cæterùm quadratum etiam à latere 1 N —— 2 poterat fingi. Porrò minoris quadratus eſt $6\frac{1}{4}$. unde ſi 6, ſummam numerorum, auferas, $\frac{1}{4}$ reſtat, quadratus lateris $\frac{1}{2}$ quadratus maioris $12\frac{1}{4}$. hinc itidem 6 ablatis, $6\frac{1}{4}$ quadratus relinquitur.*

XYLANDRI.

Etiam à latere 1 N —— 2.) τὸ αὐτὸ πάλιν ἐγίνετο, *ambiguè. Sed res ita habet. Fieret enim qua-*

dratum 1 Q † 4 —— 4 N æquale 1 Q —— 2 N —— 1. & abiectis utrinq; 1 Q, additis utriq; 4 N & 1,5 æquantur 2 N. Ergo 1 N $2\frac{1}{2}$. *Variabis poſitiones & ſolutiones, ſi lubet.*

XXV. Duos numeros inueniamus, quorum ſummæ quadratus cum utroque iunctus, quadratum conficiat. Heic cùm 1 Q, ſiue ei 3 Q, ſiue 8 Q adijcias, quadratũ præſtet: eorum qui quæruntur alterum pono 3 Q, alterum 8 Q, & quadratum ſummæ, 1 Q. Et manet ſummæ quadratus, utrique iunctus, quadratus. Cùm autem ſumma numerorum ſit 11 Q, quadratus ſummæ huius erit 121 QQ. Eſt autem etiã 1 Q. ergo 121 QQ æquantur 1 Q. erit itaque etiam latus lateri æquale, hoc eſt, 1 N æquabitur 11 Q. & deminuto utroque nomine, 11 N æquabuntur 1, fitq; 1 N $\frac{1}{11}$. Iam hoc ad propoſitum ſi accommodes, fit alter $\frac{3}{121}$, alter $\frac{8}{121}$. ſummæ autẽ quadratus $\frac{1}{14641}$, & ſatisfit quæſtioni.

SCHOLION.

Quia 1 N inuenitur $\frac{1}{11}$, *ergo 1 Q erit* $\frac{1}{121}$, *& 1 QQ erit* $\frac{1}{14641}$. *Eodem modo inuenies quantitatem 3 Q & 8 Q. At 1 Q de 11 Q erit 121 QQ. hoc eſt* $\frac{121}{14641}$. *In tales partes reſoluantur etiam* $\frac{3}{121}$, *fiunt* $\frac{363}{14641}$. *&* $\frac{8}{121}$ *fiunt* $\frac{968}{14641}$. *qualium partium quadratus ſummæ eſt 121. Cui ſi addas 363, fit 464 quadratus à 22 latere. Si 968, fit 1089, quadratus lateris 33.*

XYLANDRI.

Conſtat 1 ſiue ad 3, ſiue ad 8 adijciatur, quadratum gignere. Hæc autor ſubtili induſtria ad propoſitum aptauit, 3 Q & 8 Q pro numeris ponens, & 1 Q pro ſummæ quadrato, ut ad æquationem res deduci poſſet. Nam ſi numeros 3 & 8 poſuiſſet: quanquam 1 quadratus eſt 1, & 1 ad 3 & ad 8 adiectus facit 4 & 9 quadratos: tamen res non ſinit 1, ut ſummæ quadratum, æquari 121, itidem quadrato ſummæ. Ergo abſoluti numeri ob ambiguitatem unitatis excluduntur. Radices poni non potuerunt: quia 1 N & 3 N non faciunt quadratum. Optimè ergo poſitiones autoris habent. Latus lateri.) *Hoc eſt principium, æqualium numerorum æquales eſſe radices ſiue latera. Latus quadrati 121 QQ eſt 11 Q. latus 1 Q, eſt 1 N. Deminutio characterum ſeu nominum alibi eſt explicata. Numeri in Diophanto corrupti erant. ſunt autem qui quæruntur, quos poſuimus. Nam cum 1 N ſit* $\frac{1}{11}$. *fit 1 Q* $\frac{1}{121}$. *& cum minor ſit poſitus 3 Q, erit ergo is* $\frac{3}{121}$. *maior 8 Q, id eſt* $\frac{8}{121}$. *horum ſumma eſt* $\frac{11}{121}$. *quod in ſe multiplicatum, quadratum facit* $\frac{121}{14641}$. *Vt autem intelligas poſtulata fieri,* $\frac{3}{121}$ *&* $\frac{8}{121}$ *etiam reducantur ad partes 14641, fient* $\frac{363}{14641}$ *&* $\frac{968}{14641}$. *omiſſo aliquantiſper denominatore, qui utique eſt quadratus, cum ſit 1 QQ de 11, ut ipſa operatio commonſtrat: adde 363 ad 121 eius numeratorem, fit quadratus 484. ad 968 ad eius numeratorem, fit 1089 quadratus. Verùm hoc obſeruandum eſt, propter uerba Diophanti nos ſic quæſtionem abſoluiſſe. alioqui nihil attinet ſummam numerorum, puta* $\frac{11}{121}$, *in ſe multiplicare, & reliqua ita, ut ego & interpres fecimus, peragere. Eſt enim* $\frac{11}{121}$, *nihil aliud quàm* $\frac{1}{11}$. *huius ergo quadratus* $\frac{1}{121}$ *ad ipſos numeros* $\frac{3}{121}$ *&* $\frac{8}{121}$ *ſeorſim additus,* $\frac{4}{121}$ *&* $\frac{9}{121}$ *facit, utrũq; quadratum, laterum* $\frac{2}{11}$ *&* $\frac{3}{11}$. *Ergo ſic abundè ſatisfecimus poſtulatis.*

XXVI. Inueniantur duo numeri, ut de quadrato ſummæ ipſorum, detracto utroque relinquatur quadratus. Primùm heic numerum aliquem quadratum deligo, à quo duo numeri poſſint auferri, ita ut quadratus utrobique ſuperſit. Is heic ſit 16. nam ſiue 12, ſiue 7 ei auferas, relinquitur quadratus. Rurſum in quadratis ſtatuo numerorum alterum 12 Q, alterum 7 Q, & ſummæ quadratum, 16 Q. à quo utrum ſubduxeris, quadratum relinquetur. Reſtat ut ſummæ quadratus æquetur 16 Q, & latus lateri, hoc eſt, ut æqualia ſint 19 Q & 4 N. Ita 1 N fit $\frac{4}{19}$ Erit prior $\frac{192}{361}$, alter $\frac{112}{361}$. & ſatisfit propoſito.

SCHOLION.

Cùm ſummæ quadratus 361 QQ æquetur 16 Q: etiam latus lateri, 19 Q ſcilicet & 4 N, æquabuntur. & deminutis appellationibus, 19 N & 4 æquantur. Ergo 1 N eſt $\frac{4}{19}$. *Erit alter numerorum, qui ponebatur 12 Q,* $\frac{192}{361}$, *cum 1 Q ſit* $\frac{16}{361}$. *Alter, qui erat 7 Q,* $\frac{112}{361}$. *ſumma horum* $\frac{304}{361}$. *cuius quadratus* $\frac{92416}{130321}$. *In tales itaq; partes etiam inuenti numeri ſunt reſoluendi. erit maior* $\frac{69312}{130321}$, *minor* $\frac{40432}{130321}$. *Iam ſi à 92416 aufero 69312, relinquitur quadratus 23104, cuius latus 152. Si 40432, reſtat 51984, quadratus lateris 228.*

XYLANDRI.

Numerum aliquem quadratum.) *Eſt hoc cuiuſuis quadrati. nam ſi à 9 uel 8 uel 5 auferas, reſtant quadrati 1 aut 4. ſi à 25 uel 9 uel 16, à 36 uel 11 uel 20, &c. Itaq; uides uariandi copiã* *eſſe in promtu. Sed unitatem rectè uitauit autor, & minimum quadratum delegit. Aequationem ſcholiaſtes rectè interpretatus eſt. ubi nos ſcripſimus,* Cùm 1 Q *ſit* $\frac{16}{361}$, *in Græco eſt* ἢ τδ α̅ δ̄ τῶν ὁμοίων ἐστὶ μορίων ξι 6 *perperàm, ut paſsim. Ceterũ heic quoq; in examine propoſiti nihil attinebat* $\frac{304}{361}$ *ſummam numerorum in ſe multiplicando tam uaſtas excitare minutias. nã* $\frac{304}{361}$ *nihil eſt aliud quàm* $\frac{16}{19}$. *Cuius quadratus* $\frac{256}{361}$. *Et ſiue 192, ſiue 112 de 256 auferas, relinquetur quadratus: 64 puta aut 144. Eſt autem notum, per primos numeros & facilius & rectius inſtitui ac perfici ratiocinationes. Quod ubi à me alibi annotatum non inuenies, re tamen ita ferente, ſcito me uoluiſſe meo labore alienam fouere oſcitantiam.*

XXVII. Duo numeri deſiderantur, ut qui fit altero in alterum multiplicato, adſcito alterutro, fiat quadratus. ſumma autem duorum laterum, à quibus ſunt quadrata iſta, numerus ſit qui præſcribitur. Atque hic quidem ſit 6. Iam cùm duo ſunt numeri, quorum uni ad quadruplum maioris deſit unitas: altero in alterum multiplicato, ſi producto minor adijciatur, fit quadratum. Hoc cùm ſit, minorem ſtatuo 1 N, maiorem 4 N —— 1: ita multiplicato minore in maiorem, & addito minore, fit quadratus. Reſtat, ut producto unius in alterum ſi addatur maior, quadratus exſiſtat, cuius latus ſit 6, —— eo quòd eſt minoris quadrati latus: ut ſumma laterum coniunctorum fiat 6, quod requirit quæſtio. Productus cum maiore coniunctus facit 4 Q † 3 N —— 1. At quadratus lateris 6 —— 2 N facit 4 Q † 36 —— 24 N, fit 1 N, $\frac{37}{27}$, minor: maior, 4 N —— 1, $\frac{121}{27}$. & ſtat propoſitum.

SCHOLION.

Theorema de quadratis.

Lemma, quo autor utitur, tale eſt. Si numerus numerum toties contineat, quot ſunt unitates in latere cuiuſcunq; quadrati: horum numerorum alterius in alterum multiplicatio quadratum gignit. hoc eſt, ſiue ſint æquales, propter 1 quæ eſt quadratus, hoc fiet. ut bis 2, 4: ter tria, 9. ſiue ſint ratione quadrupla, propter 4 quadratum, ut 2 in 8, 16. 3 in 12, 36. ſiue ſit ratio nouencupla, propter 9 quadratum. Vnde ſequitur, ſi numerus ad numerum ſit quadruplus, nouencuplus, ſedecuplus, & ſic deinceps, unitate tantùm deficiente una: ad id quod fit illorum multiplicatione, ſemel adſcito minore, quadratum confici. ut bis 7, 14, cum 2, ſunt 16: duabus autem deficientibus unitatibus, minore bis aſſumto ad productum, quadratum fiet, ut 2 in 6, 12 ſunt: quibus adde bis 2, habes 16. ſi tres deſint unitates, minor ter eſt adſciſcendus, ac ſic deinceps. Quod ſi numerus numeri ſit quadruplus, nouencuplus, &c. & unitate amplius: minore ſemel ſubtracto de producto, quadratus habebitur. ut 2 in 9, ſunt 18, deme 2, reſtat 16. ſi binario amplius, minor bis auferatur. ut bis 10 ſunt 20 hinc 2 bis aufer, habebis 16. Si ternario, minor ter adimetur, ac ſic deinceps. Cæterùm numerus, quem multiplicatio poſitorum ab autore producit, eſt 4 Q —— 1 N. cui ſi 1 N, utpote minor, addatur, fit 4 Q, quadratus uerè. cuius latus 2 N. Si autem maior adiungatur, fiunt 4 Q † 3 N —— 1. Porrò cùm minoris quadrati, ſcilicet 4 Q, latus ſit 2 N: conuenienter latus maioris poſuit 6 —— 2 N, ut laterum ſumma fieret 6. rectè etiam quadratum quod hinc fit, æquat maiori quadrato. Cùm autem 1 N inuenerimus eſſe $\frac{37}{27}$, *quantus eſt minor: & maior erit* $\frac{121}{27}$. *(nam 4 N faciunt* $\frac{148}{27}$, *unde ſi 1, hoc eſt* $\frac{27}{27}$ *auferas, relinquentur* $\frac{121}{27}$.*) Præterea maior in minorem ductus, procreat* $\frac{4477}{729}$. *in tales partes etiam ipſi reſoluantur numeri, erunt* $\frac{999}{729}$ *&* $\frac{3267}{729}$. *Si ergo addas 4477 & 999 (nam denominator, quem ſatis cõſtat eſſe quadratum, omittitur heic, ſuo loco repetendus,) fit quadratus 5476, lateris 74. Si addas 4477 & 3267, fit quadratus 7744, lateris 88. ſumma laterum 74 & 88 eſt, denominatore ſubſcripto* $\frac{162}{27}$, *hoc eſt 6.*

XYLANDRI.

Nihil heic aliud annoto, quàm quòd diligentiam ſcholiaſtæ exoſculor. quædam inſerui perſpicuitatis cauſa. ut & in ſequentibus. ἐκ τῶτ' ἐς ἀδίκημ', ἀδικῶ, *dicebat ille.*

XXIIX. Duo numeri dentur, quorum unius in alterum multiplicatione qui producitur, utroq; detracto eorum, quadratus fiat. latera autem quadratorũ ſummam faciant, quanta imperatur. ea ſit 5. Quoniam quidem, ſi duo ſint numeri alter alterius quadruplum unitate excedens; horum unius in alterum multiplicatione productus, detracto minore quadratus fit: ideò maiorem pono 4 N † 1, minorem 1 N. productus enim ſubtracto minore fit quadratus. Reſtat ut etiam maiore de producto ſublato, relinquatur quadratus: & quadratorũ latera ſummam conficiant 5. At productus reciſo maiore fit 4 Q —— 3 N —— 1. hoc dico æquari quadrato lateris 5 —— 2 N, qui eſt 4 Q † 25 —— 20 N, fit 1 N, $\frac{26}{17}$. tãtus eſt minor: maior $\frac{121}{17}$. & reſpõdẽt poſtulatis.

SCHOLION.

Eadem huius, quæ præcedentis, eſt demonſtratio. Et cùm 1 N ſit $\frac{26}{17}$. *tantus eſt & minor. maior 4 N † 1, id eſt* $\frac{21}{17}$. *nã quater* $\frac{26}{17}$ *faciunt* $\frac{104}{17}$, *quibus* $\frac{17}{17}$, *ſcilicet 1, adiecta,* $\frac{121}{17}$ *conficiunt. Altero in alterum multiplicato naſcuntur*

tur $\frac{3146}{289}$. in tales particulas reſoluti etiam inuenti numeri, ſiunt $\frac{442}{289}$ & $\frac{2057}{289}$. Ergo ſiue 442 aufero à 3146, relinquitur quadratus 2704, cuius latus 52. ſiue 2057 à 3146 detraho, ſupereſt 1089 quadratus, lateris 33. Laterum deniq; $\frac{52}{17}$ & $\frac{33}{17}$ ſumma eſt $\frac{85}{17}$, ſcilicet 5.

XXIX. Numeri duo quadrati quæruntur, quorū è multiplicatione alterius in alterū productus utroq; adſcito quadratum conſtituat. Horum quadratorū, qui quæruntur, alter ſit 1 Q, alter 1, utpote quadratus. Horū multiplicatio producit 1 Q. Is ergo adſcito utroq; quadratus eſſe debet. resq; eò deducta eſt, ut quæratur quis quadratus unitate adſcita fiat quadratus. Statuatur quadratus, quē quæro, eſſe productus ipſorū, 1 Q. cui ſi adijciatur 1, fit 1 Q † 1, æqualis utiq; quadrato. Fingo quadratū à latere 1 N —— 2. Is (puta 1 Q † 4 —— 4 N.) æquatur 1 Q † 1. Fit 1 N, $\frac{3}{4}$ & numeri $\frac{9}{16}$ ac $\frac{16}{16}$. à quibus productus alter in alterum, adſcita unitate fit quadratus. Huic aūt producto ſi alter etiā addatur, oportet quadratum confici. Qui productus cū ſit $\frac{9}{16}$, nūc in quadrato omnia proponantur, id eſt omnia ſedecupla, 9 Q † 9. hoc ergo æquatur quadrato Fingo quadratū à latere 3 N —— 4, isq; eſt 9 Q † 16 —— 24 N. Fit 1 N, $\frac{7}{24}$. Ergo alter erit $\frac{124}{576}$. alter $\frac{49}{576}$. & faciunt quæ requiruntur.

SCHOLION.

Latera ſumuntur, ut & in XXVII, fingendis quadratis, alterum 1 N —— 2, alterū 3 N —— 4. ut Quadrati utrinq; ijdē inueniātur, & reliquarū ſpecierū altera ſuperet, altera ſuperetur. Cùm aūt 1 N inueniatur $\frac{3}{4}$, erit 1 Q $\frac{9}{16}$, & 1 erit $\frac{16}{16}$. producitur aūt ab ijs $\frac{144}{256}$, cui ſi 1 addas, nimirū $\frac{256}{256}$, fient $\frac{400}{256}$ quadratus, à latere $\frac{20}{16}$. His ita conſtitutis, omnia iubet ſedecies ſumi. hoc eſt & productū $\frac{144}{256}$, quod idē eſt cū $\frac{9}{16}$, & quadratū $\frac{9}{16}$: ſic enim ſiūt 9 Q † 9, cùm quiuis quadratus ſit 1 unitas. Rurſus cùm 1 N fiat $\frac{7}{24}$. utiq; quadratus erit $\frac{49}{576}$. & cùm alter quadratorum fuerit 9, quia omnia ſedecies ſumebantur, à latere $\frac{3}{4}$. hic quoq; alterius latus erit $\frac{3}{4}$ de $\frac{24}{24}$, hoc eſt, erit $\frac{18}{24}$ qui in ſe multiplicatus, gignit $\frac{324}{576}$. Iam hic in $\frac{49}{576}$ ductus, procreat $\frac{15876}{331776}$. Reſoluantur in tales particulas etiam inuenti numeri. fient $\frac{28224}{331776}$ & $\frac{186624}{331776}$. Omiſſo pauliſper denominatore, adde 28224 ad 15876, fiet 44100 quadratus, à latere 210. Adde 186624 ad 15876, fit quadratus 202500, cuius latus 450.

XYLANDRI.

Et 1 erit $\frac{16}{16}$.) uel 1. nā in 256 particulas reſolui nihil attinet: cùm ſi relinquas productū $\frac{9}{16}$, et 1, id eſt $\frac{16}{16}$ adiecta, non minùs quadratum conſtituant $\frac{25}{16}$, quàm ſit $\frac{200}{256}$. Quadrato etiā in quadratum ducto, ſemper fieri quadratum, notiſſimum eſt, uel ex ijs, quæ ſunt apud Campanū initio noni Euclidis. quod obiter innuit autor.

XXX. Dentur duo numeri quadrati, ut productus ex alterius in alterum multiplicatione natus, utroq; illorum detracto quadratus relinquatur. Heic ſi rurſus ſtatuā alterum 1 Q, alterum 1, productus ex multiplicatione alterius in alterum erit 1 Q. Oportebat autem etiam 1 ſubtracta, hunc eſſe quadratū. Eò itaq; loci res eſt deducta, ut quærendum ſit quis quadratus demta unitate maneat quadratus. Is eſt $\frac{25}{16}$ unde ſi unitatem, ſcilicet $\frac{16}{16}$ auferas, quadratus $\frac{9}{16}$ relinquitur. Omnia deciesſexies. Statuo itaq; alterum 1 Q, alterum 25. quorum alter in alterum, facit quadratū. Sed is 25 Q, detractis 25, fit 25 Q —— 25. quod æquatur quadrato. Fingo quadratum lateris 1 N —— 4, qui quadratus eſt 1 Q † 16 —— 8 N, & æquatur 25 Q —— 25. fit numerus $\frac{17}{8}$. erit ergo alter $\frac{289}{94}$, alter $\frac{100}{64}$. & ſatisfit poſtulatis.

SCHOLION.

Cùm $\frac{16}{16}$ ſubtractis à $\frac{25}{16}$, quadratus $\frac{9}{16}$ relinquatur: rite ponuntur numeri 25 & 1 Q. qui Quadratus $\frac{1}{16}$ debet eſſe, à latere $\frac{1}{4}$. ſic enim conficient $\frac{25}{16}$, ut unitate, hoc eſt $\frac{16}{16}$ detractis, relinquatur quadratū. Quod autē iubet omnia ſedecuplari, id tale eſt. unitatum 25 unaquaque reſoluta in $\frac{16}{16}$: ac ſingulis multiplicatis in $\frac{1}{16}$, qui erat Quadratus: ſiunt 25 Q, ita ut unus quiuis horū ſit $\frac{16}{16}$. Iam in oblata æquatione inter 1 Q † 16 —— 8 N & 25 Q —— 15: utrinq; addantur defectus. 25 Q † 8 N æquabuntur 1 Q † 41. & utrinq; 1 Q abiecto, relinquuntur 24 Q † 8 N æquales 41. Cum autem unumquemq; Q depræhenſum ſit eſſe $\frac{16}{16}$, erunt hi 24 Q, idem quod 24. ita rurſum 24 ab utraq; parte amputato, æqualitas conſiſtet inter 17 & 8 N. & fit 1 N, $\frac{17}{8}$. Ergo quadratorum alter eſt $\frac{286}{8}$. & alter, ſecundum ea quæ ſuperiore propoſitione dicta ſunt $\frac{100}{64}$: à latere $\frac{10}{5}$. Cùm enim 25 Quadrati, quorū quiſq; erat $\frac{16}{16}$, latus fuerit $\frac{5}{4}$. cum iam inuētus ſit numerus $\frac{17}{8}$: oportet reliquū quoq; eſſe $\frac{5}{4}$ ex 8. id eſt $\frac{10}{5}$. Cæterùm quod producitur $\frac{289}{64}$ in $\frac{100}{64}$ multiplicato, eſt $\frac{28900}{4096}$. In tales partes reducti quos inuenimus, ſunt $\frac{18496}{4096}$ & $\frac{6400}{4096}$. Aufer 18496 de 28900, relinquetur 10404 quadratus, cuius latus 102. Aufer 6400 à 28900, relinquitur quadratus 22500, à latere 150.

XYLANDRI.

Mirifica hæc eſt ratio inueniendæ ſimplicis æquationis, quã imitari per occaſionẽ poſſis. Mendæ in autoris & ſcholiaſtæ Græcis uerbis inhærentes, probè me exercuerunt.

XXXI. Inueniendi ſunt duo numeri, ut qui procreatur altero eorũ in alterũ multiplicato, ſiue ei ſumma numerorum addatur, ſiue ea ab ipſo detrahatur, utroq; modo quadratus exſiſtat. Duo quicunq; tandem numeri ſint: eorũ quadratorũ ſummę ſi uel addas uel adimas duplũ eius quod producitur numerorũ ipſorũ altero in alterum multiplicato; ſemper naſcetur quadratus. Eapropter numeros exponemus 2 & 3. liquet aũt ſi ſummæ quadratorum ab ijs ortorũ, quæ eſt 13, addã 12, (duplum eius quod fit 2 in 3 ducto) cõfici quadratũ 25. Et rurſum, ſi à ſumma quadratorũ idẽ producti duplũ auferã: relinqui 1, quadratũ. His hoc modo conſideratis, productũ ab ijs ſtatuo 13 Q. Ipſos aũt, alterũ 1 N, alterum 13 N. quorum alterius in alterũ multiplicatione producũtur 13 Q. Huic ſiue addas 12 Q, ſiue adimas: exſtabit quadratus. Proinde hoc requiritur, ut 12 Q æquentur ſummæ numerorũ, quæ eſt 14 N. fit 1 N, $\frac{14}{12}$, hoc eſt $\frac{7}{6}$, tantus eſt minor. maior, 13 N eſt $\frac{91}{6}$. & ſatisfit quæſtioni.

SCHOLION.

Cùm pro exemplo aſſumat 2 & 3. ſint 2, 2 N, & 3, 3 N. horum quadratus alterius 4 Q, alterius 9 Q. & horum ſumma 13 Q. Multiplicato 2 N in 3 N, fiunt 6 Q, quorũ duplum 12 Q. id ſi addas ad 13 Q, fit 25 Q, quadratus: ſi ſubtrahas de 13 Q, relinquitur 1 Q, quadratus. Itaq; ergo eum qui multiplicatione quæſitorum producitur, ponit 13 Q; ut ſiue addas ei, ſiue adimas 12 Q, quadratus in prõptu ſit. Cæterùm cùm numeros inuenerimus $\frac{7}{6}$ & $\frac{91}{6}$, productus ab ijs eſt $\frac{637}{36}$. ſumma ipſorũ $\frac{98}{6}$, hoc eſt, $\frac{588}{36}$. Ergo ſiue ad 637 addas 588, quadratus fiet 1225, cuius latus 35: ſiue auferas 588 de 637, quadratus fiet 49, cuius latus 7.

XYLANDRI.

Satis planè omnia ſcholiaſtes interpretatus eſt. Cæterùm hoc de numeris theorema, cui innititur tota operatio, demonſtratum eſt ad quartam & ſeptimam ſecundi elementorum Euclidis. Quod idem de ſequenti intellige. Vides aũt uariè ſolui poſſe, & autorem ſuo conſilio minimos 2 & 3 delegiſſe. uide etiam XVII *tertij infrà.*

XXXII. Inueniendi ſunt duo numeri quadrato æquales, quorum unius in alterũ multiplicatione qui producitur, ipſorũ numerorũ uel adiecta uel detracta ſumma fiat quadratus. Datis duob. numeris in dupla ratione: ſi duplũ eius quod ex uno eorum in alterũ fit, uel addatur ad ſummã quadratorũ ab ipſis ortorũ, uel ab ea detrahatur: quadratus exſiſtet. Ponamus ergo 2 & 4, ſed ita ut eorũ multiplicatione Q fiat. Ergo altero in alterũ ducto, 8 Q habebimus, utroq; in ſe, 4 Q & 16 Q, hoc eſt 20 Q. Ergo ipſos numeros ſtatuemus 2 N, & 10 N. ſumma 12 N. atqui erat etiam 16 Q. hoc ergo æquatur 12 N. fit 1 N, $\frac{3}{4}$. Erit ergo alter $\frac{6}{4}$, alter $\frac{30}{4}$. & quæſtio ijs explicatur.

SCHOLION.

Simile eſt hoc problema priori. Sic autem res geritur. Cùm quadratus à 2 N, ſit 4 Q: & quadratus à 4 N, ſit 16 Q: horũ ſumma eſt 20 Q. Vnde ſi auferamus duplum eius quod fit è 2 N in 4 N (8 Q.) nimirũ 16 Q. relinquentur 4 Q, quadratus. & ſi hoc duplum ad 20 Q addidiſſes, confeciſſes 36 Q, quadratũ itidẽ. Hac de cauſa productũ ex quæſitis ponit 20 Q, ut ſiue addatur ei, ſiue adimatur dictus numerus, quadratus exſiſtat. Et cum 20 etiã aliorum numerorũ, puta 2 & 10, alterius in alterũ multiplicatione cõponatur; pro numeris quæſitis ponit 2 N & 10 N. quorũ ſumma ſit 12 N, cum quidem 16 Q eſſe debuerit. æquantur ergo 16 Q & 12 N, ac deminutis nominibus, 16 N & 12. fit 1 N $\frac{12}{16}$, id eſt $\frac{3}{4}$. & cùm alter ſit 2 N, erit $\frac{6}{4}$. alter 10 N, erit $\frac{30}{4}$: quorum etiã ſumma æquat quadratũ $\frac{36}{4}$. Inuentorum altero in alterum multiplicato, fiunt $\frac{180}{16}$. ſumma ad eaſdẽ partes redacta, $\frac{144}{16}$. quadratus & ipſe. Ergo ſiue addis 144 ad 180, quadratũ habes 324, cuius latus 18. ſiue 144 de 180 auferas, quadratũ habes 36, lateris 6. Poterat etiam alterum 4 N, alterũ 5 N ponere: qui 20 Q ipſi quoq; procreaſſent. inueniſſes 1 N, $\frac{9}{16}$ ergo alter fuiſſet $\frac{36}{16}$, alter $\frac{45}{16}$. productus $\frac{1620}{256}$. Summa $\frac{1296}{256}$. Si 1296 addas ad 1620, quadratum habebis 2916, à latere 54. Si 1296 auferas à 1620, quadratus reſtat 324, lateris 18.

XYLANDRI.

Summa ponitur inueniendorum numerorum 16 Q; & productus multiplicatione unius in alterum, 20 Q. &c. Cur hoc? Cauſam uoluit uideri ſcholiaſtes ſe explicaſſe. quid præſtiterit, periti facilè iudicabunt. Adfert Diophantus theorema, ſeu (ut noſter ſcholiaſtes nuncupat) lemma. ſed ad hypoſtaſes demonſtrandas in eo nihil eſt adiumẽti. neq; dubito culpa uacare autorem: ſed loquor de codice qui in meas incidit manus. Vbi enim eſt in iſtis hypoſtaſibus duplus ille pro-

ducti, quod uno in alterū multiplicato fiebat: ubi cætera: Deinde, qui ſunt quadrato æquales numeri qui ponuntur: aut quis ſtatim concedet 6 N, aut etiam 12 N conficere quadratum, ſi alter alteri addatur: puta 2 N & 4 N, aut 2 N & 10 N: nam quod interpres de 4 N & 5 N dicit, nō eſt Diophanteum, utcūq; prima fronte uideatur ſatisfacere poſtulatis. Iam ἴσȣς τετραγώνῳ ſignificare, quorum ſumma quadratum faciat, non modò ſolutiones quæſtionis, altera ab autore, altera à ſcholiaſte propoſita, docent: ſed apertè admodum teſtatur quinta propoſitio ſequentis libri & duodeuigeſima quarti. Contra has difficultates uideamus enitine poſsimus analyſeos beneficio, & locum deprehendere, qui præteritus eſt negligentia, nolo enim dicere inſcitia, ſcholiaſtæ. Theorema Diophanteum nihil habet, quod non ſit in quarta & ſeptima ſecundi elementorum Euclideorum: modò binarij naturam & conditiones in recenti habeas memoria. Periculum fiat in 2 N & 4 N, horum multiplicatione producitur 8 Q, cuius duplū 16 Q. quod additū aut detractum ſummæ quadratorum, quæ eſt 20 Q, quadratum exhibet: ut probè annotauit ſcholiaſtes. Sed hoc iam eſt ad propoſitionem accommodandum. Fingimus ergo ipſorum numerorum, quos quærimus, ſummam eſſe 16. Q, quia conditionem hanc implet, ut 20 Q eo uel addito uel demto, exſiſtat quadratus, puta 36 Q aut 4 Q. Ergo 20 Q erit productus unius quæſitorum in alterum multiplicatione factus. Reſtat, ut quæramus qui duo numeri unius in alterum multiplicatione 20 Q producant. Id quidem præſtant 2 N & 10 N. Sed tamen horum ſumma 12 N (ut monui) an ſit quadratus, non liquet ſtatim. & certè ſi 1 N fieret 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c. tunc 12 N conditionem præſcriptam non implerent. itaq; cautiùs fecit ſcholiaſtes (diceres) qui 4 N & 5 N poſuit, ex quibus multiplicando componatur 20 Q. Sed Diophantus reſpexit ad uim demonſtrationis, & Euclidearum, quas nominaui, propoſitionum naturam: qua perſpecta intelligere datur, quicunq; ſic 20 Q conficient Numeri, ſummam eorum fore quadratam. Quod de alijs etiam poſitionibus (infinities enim uariari rem poſſe quiuis uiderit) accipiendum eſt. ut ſi in dupli 3 & 6, aut 5 & 10, &c. feciſſes periculum. Deniq; ſumma Numerorū 20 Q producentium (ſiue 2 N & 20 N ſint, ſiue 4 N & 5, aut $2\frac{1}{2}$ N & 16, &c.) æquabitur prius poſitæ ex hypotheſi ſummæ, ut heic 12 N æquantur 20 Q. In uerbis autoris, Ponamus ergo 2 & 4, ſed ita ut eorum multiplicatione Q fiat: *obſcuritas eſt. hoc dicit, ad characterū N poſitiones debere accommodari. idq; eo fit conſilio, ut inter Q & N æquatio conſtituatur. Cætera non ſunt obſcura. problema ſubtile, & quod acumen diligentis ingenij ad alia ſimilia æmulatione quadam excogitanda ualeat excitare.*

XXXIII. Inueniantur tres numeri, ut cuiuſuis horū quadratus adſcito proximè ſubſequente numero, ſit quadratus. Statuatur primus 1 N. Et quoniā quiuis numerus alterius duplum unitate ſuperans, ſi ad quadratum minoris adijciatur, quadratū conficit: ergo ſecundū faciamus duplū prioris † 1. hoc eſt, ſecundus eſto 2 N † 1. Rurſumq; tertius unitate excedat duplū ſecundi, & ſit uidelicet 4 N † 3. Ergo primi quadratus cū ſecundo numero, quadratus fit, puta 1 Q † 2 N † 1. Itemq; ſecundi quadratus tertio adiecto, quadratus fit, nimirū 4 Q † 8 N † 4. Supereſt, ut quadratus etiam tertij, primo adiūcto ipſi, fiat quadratus. At fit hoc modo 16 Q † 25 N † 9. æquale ſcilicet quadrato. Fingo quadratū à latere 4 N —— 4. is erit 16 Q † 16 — 32 N. ac fit 1 N, $\frac{7}{57}$. tātus ergo eſt primus: ſecūdus $\frac{71}{57}$: tertius $\frac{199}{57}$. Hi ſunt, q implēt cōditiōes ꝓpoſitis.

SCHOLION.

Et in uniuerſum de quibuſcunq; numeris hoc conceditur. Sint 2 & 5. hic unitate duplum illius ſuperat. minoris quadratus 4 ad 5 adiectus, quadratum 9 cōficit. Porrò noſter quadratum finxit à latere 4 N —— 4, ut N in ſe ductu Quadratos æquati Quadrati compenſare poſſet: defectu aūt hoc cōſequeretur, ut multiplicando exorientium ſpecierū N & unitates, altera ſuperaret, ut heic 16 amplius ſunt quam 9: altera ſuperaretur, ut heic —— 32 N minus eſt quàm 25 N. Et paucioribus quidem unitatibus res geri non potuit, defectu nōtatis omnino: pluribus, pro arbitrio. Enimuerò additis & ſubtractis quæ canon iubet, fit 1 N tandem $\frac{7}{57}$. Ergo primus quadratū habet $\frac{49}{3249}$. ſecundus $\frac{5041}{3249}$. tertius $\frac{39601}{3249}$. Ergo quadratus primi (omiſſo denominatore). 49 cum 4047 ſecundo (hoc enim fit in partes partium quadratorū ſimiles facta reſolutione, hoc eſt numeratorib. per 57 multiplicatis) coniunctus, facit quadratū 4096, lateris 64. Et ſecūdi quadratus 5041 eodē modo cū tertio cōiūctus cū tertio 11343, facit quadratū 16384, cuius latus 128. Et tertij quadratus 39601 cū primo 399 cōiunctus, quadratū facit 40000, cuius latus 200.

XYLANDRI.

Vel hinc uſus theorematū diligentibus illuceſcere poſsit. Eſt autem huius operationis fundamentum, quadratorum per impares procreatio, de qua aliquantulum ad huius libri octauam

propoſitionem

propoſitionem diximus. Verba ſcholiaſtæ ſunt mutila. & uidetur nõ de theoremate, ſed de problemate uoluiſſe dicere, Non tres modo, ſed omnino quotuis numeros his conditionib. ſtantes dari poſſe, quadratorum hac proprietate ad uſum accommodata. Quod de 2 in 5 multiplicandis commemoratur: aliunde eſt inculcatum.

XXXIV. Inueniendi ſunt tres numeri, ut uniuſcuiuſque quadratus proximè inſequenti numero detracto, quadratum relinquat. Si numerus duplo alterius unitate minor ſit: quadratus minoris maiore numero ſubtracto, quadratũ relinquit. Eo cõſiderato, primũ pono 1 N † 1. ſecundũ 2 N † 1. tertiũ 4 N † 1. ita fit, ut quadratus primi detracto 2: itẽq; ſecundi detracto tertio, quadratos relinquant. Supereſt, ut tertij quoq; quadratus primo detracto, quadratum relinquat. At relinquuntur 16 Q † 7 N: æqualia quadrato. Hunc fingo à latere 5 N. fiunt æqualia 25 Q & 16 Q † 7 N. fit 1 N, $\frac{7}{9}$. Eſt ergo primus $\frac{16}{9}$. ſecundus $\frac{23}{9}$. tertius $\frac{37}{9}$. ac ſatisfit propoſito.

SCHOLION.

Quadratum fingit à latere 5 N, ut natis 25 Q ubi 16 Q detraxerit, relinquatur æquatio inter Q & N. Quod ſi ad 16 Q † 7 N adiectæ fuiſſent unitates, latus quoq; finxiſſet N † unitatibus. Quod ſi heic latus feciſſet 6 N, aut etiã amplius, ſucceßiſſet negocium. Cæterùm primi quadratus $\frac{256}{81}$ detracto ſecundo numero, qui ad idem redactus nomen fit $\frac{207}{81}$, relinquit quadratum $\frac{49}{81}$. Et ſecundi quadratus $\frac{529}{81}$, detracto $\frac{333}{81}$ ſecundo, relinquit quadratum $\frac{196}{81}$. Et tertij quadratus $\frac{1369}{81}$, primo $\frac{144}{81}$ detracto, relinquit $\frac{1225}{81}$ quadratum, lateris $\frac{35}{9}$.

XYLANDRI.

Theorema hoc quoq;, cui innititur ſolutio quæſtionis, è conſtitutione quadratorũ eſt deſumtum, de qua ad octauam huius aliquid diximus. Porrò ſi latus minus quã 5 N poſuiſſet autor, ad æquationem non perueniſſet. Facilè autem uides uariari & poſitiones & æquationes & ſolutiones innumeris poſſe modis huius generis problematum.

XXXV. Da tres numeros, quorum uniuſcuiuſque quadratus cum ſumma omnium, conſtituat quadratum. Si numerus aliquem numerum metitur: metientem de quotiente, id eſt horum duorum minorem à maiore ubi abſtuleris, & ſemiſsis eius quod reſtat quadratum ad numerum ipſum cuius menſura erat propoſita adieceris: quadratus conficitur. Hoc intellecto, ſummam trium quos quæro numerorũ pono aliquot Quadratorum, quorum numerus habeat tres ipſum metientes, qualis eſt 12. quem & 1 metitur, quotiente 12: & 2 quotiente 6: & 3 quotiente 4. Aufero metientes à quotientibus: & reſiduorum pono ſemiſſes, primum $5\frac{1}{2}$, ſecundum 2, tertium $\frac{1}{2}$. Liquet autem horum uniuſcuiuſque quadratum cum 12 quadratum confecturũ, ſcilicet ij erunt quadrati $42\frac{1}{4}$. 16. $12\frac{1}{4}$. Ergo has partes pono Numeris in primum $5\frac{1}{2}$ N. ſecundum 2 N. tertium $\frac{1}{2}$ N. Nihil iam reſtat, quàm ut horum ſumma ſit 12 Q. atqui eſt 8 N. Hæc ergo æquantur. & 1 N eſt $\frac{8}{12}$. Ergo primus $\frac{22}{6}$. ſecundus $\frac{8}{6}$. tertius $\frac{2}{6}$. & ſatisfit poſtulatis.

SCHOLION.

Lemma tale eſt. Si numerum aliquem alius metitur, & accipiamus etiam eum quo ipſum metitur: & ab horum maiore minorem auferamus: reſidui ſemißis quadratus ſi adijciatur ei quem iſti metiebantur, quadratum conficit. Verbi gratia, 6 eſt numerus quem 3 binario metitur: uel contra binarius ternario. minore itaq; à maiore detracto, 2 à 3, relinquitur 1. huius ſemißis $\frac{1}{2}$, quadratus eius $\frac{1}{4}$ ad 6 adiectus, quadratũ conficit $6\frac{1}{4}$. cuius latus $2\frac{1}{2}$. Cæterùm numerum 12 autor ideò ſumſit, quod is primus eſt ab unitate, quem tres metiuntur. Solet autem nos ſemper in minimis exercere numeris. Oportere autem ait ſummam trium quos poſuit numerorum æquari 12 Quadratis. quia aſſumto 12, quadrati iſti fiunt, & aſſumtis in ſumma tribus illis. Fit autem 1 N $\frac{8}{12}$, ſeu $\frac{4}{6}$. poterat etiam dicere $\frac{2}{3}$. ſed noluit, hoc agens ut ſimilia eſſent utrinq;. Primus ergo in 36 partes reſolutus fit $\frac{132}{36}$, ſecundus $\frac{48}{6}$, tertius $\frac{12}{36}$. ſumma omnium $\frac{192}{36}$. Quadratus primi 484, cum 192, facit quadratum 676, cuius latus 26. Quadratus ſecundi 64, cum 192, quadratum 256, lateris 16. tertij 4, cum 192, quadratum 196, lateris 14.

Quadrati inuẽtio, qui additus numero dato, quadratum conſtet.

XYLANDRI.

Nihil attinebat ipſos numeros ad trigeſimasſextas partes reducere. à quibus cum eorum quadrati denominentur, ſummam omnium $\frac{32}{6}$ ſatis fuit $\frac{192}{36}$ appellari. Simplicißimè hi numeri ſunt $\frac{11}{3}$. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{3}$. ſumma $\frac{16}{3}$. hoc eſt $\frac{48}{9}$. quia quadrata per nonas partes exprimentur. Omiſſo denominatore, 121 & 48 ſunt 169, 16 & 48 ſunt 64, 1 & 48, ſunt 49: omnes quadrati. Canonem *heic fabricari ipſæ poſitionum rationes te docent, neq; attinet ea in re inculcanda occupari. Poterat autem loco 12, quiuis alius ſumi, qui tribus alijs præciſè diuideretur, hoc eſt integris numeris integrè. ſic enim 6 metitur 12, & 2 quotiens, eſt quo eum metitur. Verbi gratia. Sūmamus 48, quem metiuntur cùm alij, tum heic 24.12.8. reliqua oculis ſubieci.*

48. metiendus.	*24*	*12*	*8*	*metientes.*
	2	*4*	*6*	*quotientes.*
	22	*8*	*2*	*reſidua.*
	11	*4*	*1*	*ſemiſſes.*

Horum ſingulorum quadratos cum 48 facere quadratos, paulò antè expoſuimus. ſemiſſium horum ſumma eſt 16. Ergo, ut antè, minimus $\frac{1}{3}$, &c. Quo pacto inueniantur numeri, quot & quas uolumus menſuras admittentes, neq; ignotum eſt, & alibi dictum. Lemmatum horum demonſtrationem breuitatis cauſa omitto, cùm alium habeant ſuum iſta locum: & ex ſecundi libri Euclidis quarta, quinta, ſeptimaq; propoſitionibus demanauerint. Vſus eſt etiam infrà libro quarto, propoſ. ſexta, & decimaſeptima, &c. Certè ad Diametralium inuentionem, unde trianguli orthogonij fiant, numerorum, hic canon mirificè conducit. Verbi gratia, quæro quadratum, qui ad 49 quadratum adiectus, quadratum conſtet. 1 & 49 ſumo. $\frac{1}{2}$ & 48 eſt 24. Ergo 576 additus ad 49, quadratum facit 625. Sunt ergo diametrales 7 & 24. & cum 25 orthogoniū faciunt. Ita 8.15.17. & 9.40.41. ex 81 in 1 & 80 diuiſo, alijq; innumeri.

Diametralium & orthogoniorum inuentio.

XXXVI. Inueniendi ſunt tres numeri, quorum uniuſcuiuſque quadratus, multatus ſumma omnium, quadratus remaneat. Itidem numerum aliquem ſtatuo, qui tres ipſum metientes habet. ſitq; rurſus 12. additisque ſingulatim metiente ad eum quo metitur, harum ſummarum ſemiſſes ſtatuo, primum $6\frac{1}{2}$ N, ſecundum 4 N, tertium $3\frac{1}{2}$ N, quorum ſingulorum quadrati, ſi 12 amittant, manent quadrati. Supereſt ut hi tres numeri æquent 12 Q. ſumma autem eorum eſt 14 N. hi ergo æquantur 12 Q. fit 1 N, $\frac{7}{6}$. Erunt ergo primus $\frac{45\frac{1}{2}}{6}$, ſecundus $\frac{28}{6}$, tertius $\frac{24\frac{1}{2}}{6}$. atq; hi præſtant id quod flagitabatur.

SCHOLION.

Hæc etiam ſuo tali lemmate opus habet. Si numerus menſuram habet, componaturq; menſura & quotiens, ſummæ ſemiſſis quadratus, detracto ipſo quem metiuntur reliqui numero, manet quadratus. Exemplum. 6 habet menſuram 2 uel 3, alter enim altero eum uiciſſim metitur. 2 & 3 faciunt 5, cuius ſemiſſis $\frac{5}{2}$, quadratus eius $\frac{25}{4}$. hinc ſi ipſum 6 auferamus, relinquitur $\frac{1}{4}$ quadratus, cuius latus $\frac{1}{2}$. Huius ergo lemmatis methodo poſitiones, ut & in ſuperiori, inſtituit. Cùm autem 1 N ſit $\frac{7}{6}$, primus erit $\frac{273}{36}$, ſecundus $\frac{168}{36}$, tertius $\frac{147}{36}$. ſumma omnium $\frac{588}{36}$. Quadratus primi $2070\frac{1}{4}$, ſubtractis 588, relinquit quadratum $1482\frac{1}{4}$, cuius latus $38\frac{1}{2}$. Quadratus ſecundi 784, ſubtractis 588, relinquit quadratum 196, cuius latus 14. Quadratus tertij $600\frac{1}{4}$, detractis 588, relinquit quadratum $12\frac{1}{4}$, à latere $3\frac{1}{2}$. Si ſemiſſes iſtos euitare uoles, omnia per 2 multiplica, ut fiat primus 91, ſecundus 56, tertius 49, omnes unciæ ſeu duodecimæ partes, ipſo 1 N poſito $\frac{14}{12}$. ita quæſtionem citra minutias abſoluet.

XYLANDRI.

Græca imitatione ſcripſi $\frac{45\frac{1}{2}}{6}$ pro $\frac{91}{12}$, & $\frac{24\frac{1}{2}}{0}$ pro $\frac{49}{6}$. & conſilium interpretis eſt commodum. quod autē oēs numeros ad trigeſimasſextas partes reuocauit, ocioſum eſt. Summa omniū, ſi ſtatuas numeros $\frac{91}{12}$, $\frac{28}{6}$, & $\frac{49}{12}$, eſt $\frac{196}{12}$. Quadratus primi $\frac{8281}{144}$. hinc aufer $\frac{196}{12}$, hoc eſt $\frac{2352}{144}$. relinquitur quadratus $\frac{5929}{144}$, cuius latus eſt $\frac{77}{12}$: Quadratus ſecundi $\frac{784}{36}$. hinc aufer $\frac{196}{12}$, hoc eſt $\frac{588}{36}$. ſuperſunt $\frac{196}{36}$, quadratus lateris $\frac{14}{6}$. Tertij quadratus $\frac{2401}{144}$. aufer $\frac{196}{12}$, id eſt $\frac{2352}{144}$, reſtat quadratus $\frac{49}{144}$, lateris $\frac{7}{12}$. Hæc eſt ſimpliciſſima ratio atq; expeditiſſima.

DIOPHANTI ALEXANDRINI RERVM ARITHMETICARVM LIBER TERTIVS.

Guilielmo Xylandro Auguſtano interprete.

I. Tres numeri poſtulantur, ut uniuſcuiuſq; eorum quadratus à ſumma omnium numerorum detractus, relinquat quadratum. Pone duos quadratos, alterum ab 1 N, alterum à 2 N: ſumma quadratorum quos creant, 5 Q. Hoc ipſum 5 Q pono pro ſumma numerorum: & numerorum qui quæruntur primum 1 N, ſecundum 2 N. ita duabus propoſiti partibus eſt ſatisfactum. Iam cùm 5 diuiſus ſit in duos quadratos, 1 ſcilicet & 4: ſubdiuidere eum licet, ut ſuprà demonſtratum eſt, in duos alios quadratos, qui ſunt $\frac{121}{25}$ & $\frac{4}{25}$. Pono rurſus tertium quæſitorum latus alterius horum, ac ſit $\frac{2}{5}$ N, cuius quadratum detractum de ſumma omnium, ſeu $\frac{125}{25}$ Q, relinquit quadratum $\frac{121}{25}$ Q. Reſtat, ut hi tres numeri ſummam conſlent 5 Q. at faciunt $3\frac{2}{5}$ N. ergo 1 N eſt 85. & primus eſt 85. ſecundus 170. tertius 34. qui poſtulabantur.

XYLANDRI.

Quidquid ſequitur, id uel non eſt interpretatus ſcholiaſtes, uel ad nos eius lucubratio non peruenit. Nuda enim duntaxat Diophanti uerba accepimus: atque utinam uerè nuda, non mēdis cooperta. Faciemus tamen officium, ne uideamur deſtituiſſe lectorem imperitiorem, & ſub cultro (quod dicitur) reliquiſſe. Hæc quæſtio plurimis potuit diuerſis modis ſolui: & pro ſumma omnium quæuis duorum quadratorum ſumma ſtatui. ſed autor in minimis, ut rectè ſuprà monuit ſcholiaſtes, exercere nos ſatis habuit. ſubdiuiſio autem tradita eſt ſuperioris libri propoſitione decima: quam deſcribere placuit. 5, conflatur è quadratis 4 & 1, quorum radices ſeu latera 2 & 1. Vt denuò in alios quadratos diuidamus 5, latera ponimus cum Diophāto (potuit enim hoc quoque innumeris modis uariari) 1 N † 1, & 2 N —— 2. Horum quadrata 1 Q † 2 N † 1 & 4 Q —— 8 N † 4 ſummam conficiunt 5 Q —— 6 N † 5, æqualem ſcilicet 5. additisq; & adiectis quæ par eſt 5 Q æquantur 6 N, ſeu 5 N || 6. Ergo 1 N eſt $\frac{6}{5}$. & 1 N † 1 alter numerorum $\frac{11}{5}$, alter 2 N —— 2 eſt $\frac{2}{5}$. horum quadrata $\frac{121}{25}$ & $\frac{4}{25}$, conficiunt ſummam $\frac{125}{25}$, hoc eſt 5. (In Græco denominatores ubiq; ſunt omiſsi, ipſe, ſi uidebitur, ex noſtra interpretatione paſſim eos ſufficito.) Horum laterum utrum libuerit pro tertio numero adſumitur. & cum primus 1 N, ſecundus 2 N fuerit, tertius eſto $\frac{2}{5}$ N. Summa $3\frac{2}{5}$ N || 5 Q. Fit 1 N itaq; $\frac{17}{25}$. Is ergo eſt primus numerus: ſecundus 2 N, ſeu $\frac{34}{25}$: tertius $\frac{2}{5}$ N eſt $\frac{34}{125}$. Autor ad centenas uigeſimas quintas reduxit etiam reliquos, ut ſint quos quærebamus $\frac{85}{125}$, $\frac{170}{125}$, $\frac{34}{125}$. Atque his ita poſitis, nunc quomodo quæſtioni ſatisfiat, uideamus. 1 N eſt $\frac{17}{25}$, huius quadratus $\frac{289}{625}$ ſi per 5 multiplices (nam ſumma erat 5 Q) $\frac{289}{125}$ habebis: quanta planiſsimè eſt ſumma omnium. Iam cū numeros quæſitos ſtatuerimus $\frac{85}{125}$, &c. horū quadrati exſiſtēt in partib. q̄ denominātur à 15625. ad quas etiā ſumma omniū redacta, $\frac{36125}{15625}$ erit. Ac iamnunc licet iſto omniū denominatore omiſſo, cætera p̄ numeratores agere. Quadratus de 85 eſt 7225. de 170, 28900: de 34, 1156. hi ſeorſim à 36125 detracti, relinquunt 28900, 7225, 34969, numeros pro ſe quemque quadratū, à radicibus 170, 85, 187. Ita nihil in quæſtione poſtulatum fuit, quod non præſtiterimus. Alioqui ſi libet primū & ſecundum relinquere ſuis in numeris minimis $\frac{17}{25}$ & $\frac{34}{25}$. horum quadrata ſunt $\frac{289}{625}$ & $\frac{1156}{625}$. ſumma ad eundem denominatorem reducta $\frac{1445}{625}$. omiſſo eo, 289 & 1156 ſi auferas ſeorſim à numeratore 1445, relinquuntur quadrati 1156 & 289. quod indicare libuit. Cæterum hæ propoſitiones planè cum libri ſuperioribus ultimis cohærent: ut ſuſpicari interim ſubeat, librorum diuiſiones non eſſe geminas.

II. Inueniendi ſunt tres numeri, quorum ſummæ quadratus quouis ipſorum adiuncto quadratum faciat. Quadratum ſummæ pono 1 Q, numeros ipſos 3 Q, 8 Q, 15 Q. ut quadratus ſummæ ſingulis additus, quadratos faciat, 4 Q, 9 Q, 16 Q. Iam oportebit horum trium ſic poſitorum ſummam æquari 1 N: lateri ſcilicet quadrati ſummæ. ergo 26 Q æquantur 1 N. ſitq; 1 N, $\frac{1}{26}$. Ipſi autem quos quærimus, erunt $\frac{1}{676}$, $\frac{8}{676}$, $\frac{15}{676}$: & quæſtioni ſatisfacient.

XYLANDRI.

ἐκ τ̃ τριῶν τετραγώνων.) ultima uox abundat, & ſententiam euertit. ἔςαι ψ̈.) hæc nota nihil eſt. ſed rurſum denominator in Græco deeſt. Libet autem examinare numeros inuentos. Eorum ſumma eſt $\frac{26}{676}$, *hoc eſt* $\frac{1}{26}$, *quadratus ſummæ* $\frac{1}{676}$, *adde ſingulos, habes quadratos* $\frac{4}{676}$, $\frac{9}{676}$, $\frac{16}{676}$. *Vbi uoles uariabis tuo arbitrio & poſitiones, & numeros.*

III. Inueniendi ſunt tres numeri, ut eorum ſummæ quadratus quouis ipſorum detracto relinquatur quadratus. Sit ſumma eorum 4 N, cuius quadratus 16 Q. qui cùm uel 7, uel 12, uel 15 Quadratis detractis maneat quadratus: pono numeros eſſe 7 Q, 12 Q, 15 Q. horum ſumma 34 Q. at poſueramus eam eſſe 4 N. ergo hæc æquantur, & 1 N fit 2, Quadratus 4. erit primus 28, ſecundus 48, tertius 60. & præſtant quod habet quæſtio.

XYLANDRI.

Ita omnino legitur. ſed res hoc modo habet. 1 N fit $\frac{2}{17}$. *1 Q autem* $\frac{4}{289}$. *in Græco pro β uitioſè erat 1 β. Numeri ergo ſunt* $\frac{28\ \ 48\ \ 60}{289}$. *Sed autor denominatorem abiecit. Ceterùm horum numerorum ſumma eſt* $\frac{136}{289}$. *cuius quadratũ* $\frac{18496}{93521}$. *ad tales partes numeri etiam redacti, ſunt* $\frac{8092}{}$. $\frac{13872}{83521}$. $\frac{17340}{}$. *Iam demum omiſſo denominatore, 8092, 13872, & 17340 de 18496 aufer ſingulatim, relinquentur 10404. 4624, & 1156 quadrati, quorum latera 102. 68. 34.*

IV. Cedo numeros tres, ut ſummæ eorum quadratus à quouis ipſorũ detractus, quadratum relinquat. Eſto ſumma numerorum, 1 N: eius quadratus 1 Q. ipſi aũt numeri ſint 2 Q, 5 Q. 10 Q. nam horum quiſq; quadrato ſummæ detracto manet quadratus. Porrò cùm ſumma numerorum ſit 1 N: & uiciſsim tres illi, quos poſuimus, ſimul ſint 17 Q. fit 1 N, 1. & quadratus eius 1. ipſi autem, qui poſcebantur, numeri ſunt 2. 5. 10.

XYLANDRI.

Heic 1 N fit non 1, ſed $\frac{1}{17}$. *& quadratus eius* $\frac{1}{289}$. *numeri ipſi* $\frac{2\ 5\ 10}{289}$. *Horum ſumma eſt* $\frac{17}{289}$: *ſcilicet* $\frac{1}{17}$. *& huius quadratus* $\frac{1}{289}$. *quem ſi à numeris ipſis auferas: relinquentur quadrati* $\frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{289}$: *quod uidere quiuis poſsit.*

V. Tres numeri quæruntur, quadrato æquales, quorum bini tertium quadrato ſuperent numero. Statuamus eos æquales eſſe quadrato lateris 1 N † 1, qui eſt 1 Q † 2 N † 1. ac ſuperent primus & ſecundus iuncti tertium unitate. ſit tertius $\frac{1}{2}$ Q † 1 N, ut primus & ſecundus cum unitate ſuperent. Rurſum ſecundus & tertius primũ quadrato ſuperent, nimirum 1 Q. erit ſimiliter primus 1 N † $\frac{1}{2}$, & reliquum ſecundus, uidelicet $\frac{1}{2}$ Q † $\frac{1}{2}$. Reſtat ut primus cũ tertio ſecundum ſuperent quadrato, at quo eũ ſuperant, ſunt 2 N, æquale quadrato, ſcilicet unitatibus 16. fit 1 N, 8. Ergo primus eſt 8 $\frac{1}{2}$, ſecundus 32 $\frac{1}{2}$. tertius 40. & ſatisfaciunt propoſito.

XYLANDRI.

Hæ quoq; poſitiones ſunt arbitrariæ. Et quia ſatis obſcura eſt res, explanemus nonnihil. Quadratum ponit autor minimum 1 Q † 2 N † 1, quia & 1 Q, & 1, quadratus eſt: & 2 N. duo complementa repræſentat. qua de re ſuprà monui. Ergo primum & ſecundum tertio unitate, tertium & ſecundum 1 Q præſtare primo ponit; quod omnino aliter licuit, ſumto etiam alio quadrato ſimili. ſed theſes conſideremus hoc pacto. Tres ſunt numeri, quorum ſumma 20. A & B 6 ampliùs ſunt quam C: B & C 4 ampliùs quam A: C & A 10 amplius quam B. Heic ſi numeros inuenire compendio lubeat, 6, quo C ab A & B iunctis ſuperatur, à ſumma omnium (20) aufer, ſemiſſem reſidui ſtatues C. item 4, quo A ab B & C ſuperatur, aufer de 20, ſemiſsis reliqui dabit A. & 10 de 20 relinquunt 10, cuius ſemiſsis 5 eſt B. ut uides.

$$B \dagger 10 \left\{ \begin{array}{ll} A & 8 \\ B & 5 \\ C & 7 \end{array} \right. \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{l} 8 \\ 5 \end{array}}\right\} C \dagger 6. \\ \left.\vphantom{7}\right\} A \dagger 4. \end{array}$$

20. ſumma.

Hinc ergo cauſa operationis Diophanteæ intelligi poteſt. Primus & ſecundus 1 amplius habent quam tertius. aufer 1 à ſumma omnium, reſidui 1 Q † 2 N ſemiſſem habet tertius $\frac{1}{2}$ *Q 4 1 N. Rurſum ſecundus & tertius primum uno quadrato ſuperant. id aufer de ſumma omnium: reſidui 2 N † 1 ſemiſsis, 1 N † $\frac{1}{2}$ primo debetur. hoc à ſumma primi & ſecundi*

ſecundi ($\frac{1}{2}$ Q + 1 N + 1) ſubductum, relinquit ſecundo $\frac{1}{2}$ Q + $\frac{1}{2}$. Adde primum & tertium, habebis $\frac{1}{2}$ Q + 2 N + $\frac{1}{2}$. aufer ſecundum, relinquitur 2 N, exceſſus primi & terty ſupra ſecundum. Cur autem æquat 2 N cum ſedecim unitatibus? Quia ita, inquam, collibuit. Nam cuicunque quadrato numero 2 N æquaueris, res ſuccedet. impares autem propter minutias uitabis, cùm $\frac{1}{2}$ unitatis, & $\frac{1}{2}$ N heic requirantur. Arripuit ergo autor 16. ut radix fieret 8. Numeros ipſos poſitionum reſolutione nullo negocio inuenies. nam 1 N + $\frac{1}{2}$ eſt 8 $\frac{1}{2}$. 1 Q eſt 64. ergo $\frac{1}{2}$ Q + $\frac{1}{2}$ eſt 32 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ Q + 1 N eſt 32 + 8, hoc eſt 40. Summa horum numerorum eſt 81, quadratus. Primus & ſecundus ſunt 41. aufer tertium, reſtat 1 quadratus. Secundus & tertius 72 $\frac{1}{2}$. aufer primum, reſtat 64 quadratus. Tertius & primus 48 $\frac{1}{2}$. aufer ſecundum, reſtat 16 quadratus. Si 2 N æquaſſes, cum 4, numeri exſtitiſſent 2 $\frac{1}{2}$. 2 $\frac{1}{2}$. 4 & ſatisfeciſſent quæſtioni. Multo commodiùs, ſi 2 N || 36 poſuiſſes. nam A 18 $\frac{1}{2}$, B 162 $\frac{1}{2}$, C 180 fuiſſet. A & B ſumma 180, aufer C, reſtat 1. B & C ſumma 342 $\frac{1}{2}$. aufer A, ſupereſt 324. C & A ſumma 198 $\frac{1}{2}$. aufer B, relinquitur 36, quadrati omnes, quadratus etiam 361, ſumma omnium. Hæc enim conditio eſt in propoſitione hac, ut & in ſuperioris trigeſima ſecunda, adiecta, quòd ſummam oporteat quadratum numerum conficere. Eamq́ inculcat ſequens propoſitio. Quòd ſi ea abeſſet, tuo arbitratu quadratos ſumeres, & citra ullam moleſtiam immenſam uim ſoluendi debitum oſtentares. Quærantur, uerbi gratia, tres numeri, quorum bini reliquum quadrato ſuperent. Sit A B, C + 9. B C ſit A + 25. C A uerò B + 81. Addo quadratos, ſumma 115. hinc aufer 9, reſtant 106. ergo C eſt 53. Aufer 25 à 115, reſtant 90. ergo A eſt 45. Denique 81 ab 115 ſubtractis, ſuperſunt 34. ergo B eſt 17. Atque hos numeros ſatisfacere poſtulatis, licet experiri. & alios quadratos ſi ſumſiſſes, eodem modo alios reperiſſes numeros. Quod autem ſummam interuallorum quibus bini quique tertium excedunt, eandem hîc quoque ponimus quam ipſorum numerorum, ut & libro primo fecimus, propoſ. duodeuigeſima, id non eſt quod exiſtimes fieri temerè. Nam ipſæ Algebricæ neceſſitates oſtendunt, aliter rem habere non poſſe. Repetamus docēdi cauſa ſuperius exemplum de tribus numeris, quorum A B ſint C † 6, B C autem A † 4, & C A denique B † 10. Dico ſummam omnium A B C, non poſſe aliam eſſe quam 20, quæ eſt interuallorum ſumma. ſint A B, 1 N, erit C, 1 N —— 6. Ponamus A eſſe 1 Q, B erit 1 N —— 1 Q. ergo B C, 2 N —— 1 Q — B. cui æquatur 1 Q (puta A) † 4. fit 1 Q, 1 N —— 5, hoc eſt A. id de 1 N ablatum, relinquit 5. tantus eſt B. Deniq́ A C ſunt 2 N —— 11, æquale 15, quod eſt B † 10. Eſt ergo 1 N, 13. & qui quærebantur, ſunt A 8, B 5, C 7. neque alios ratiocinatio ſuggerit; & horum ſumma, itidem ut interuallorum, eſt 20. Iam fingamus ſummam eſſe ampliorem ſumma interuallorum: ſitq́ uerbi gratia 22. Sint A B 1 N, erit utiq́ C, 22 —— 1 N. quibus ſi 6 addas, habes 28 —— 1 N, quod æquetur 1 N. eſt ergo 1 N 14, ſumma A & B. ergo C erit 8. Eſto A 1 Z, addantur B, 14 —— 1 Z, & C 8; ſumma 22 —— 1 Z æqualis 1 Z + 4. fit 1 Z, 9. tantus eſt A. B ergo 5. Adde A & C, habes 17. at B + 10. tantùm 15 eſt. Non ergo explicabile. Erat hoc problema, ſed abſurdum. Rurſum fingamus ſummam eſſe minorem ſumma interuallorum ſitq́ 18. ſint A B 1 N, erit C 18 —— 1 N, cui ſi addas 6, erit 24 —— 1 N æquale 1 N, iſque eſt 12. ergo A B ſunt 12, & C eſt 6. Sit A 1 Y. erit B 12 —— 1 Y. Ei adde C, habes 18 —— 1 Y æqualia 1 Z + 4. fit 1 Y, 7. tantus eſt A, B 5, C 6. adde A C, fiunt 13. atqui B & 10, ſunt 15. ergo quæſtio hæc ſibi non conſtat. Hæc, ut non recondita admodum ſuperiore libro prudens emiſeram. nunc in rudiorum gratiam quod ea tamen annotaui, peritiores boni conſulant. Vide etiam decimamquintam quarti, & uigeſimamſextam eiuſdem.

VI. Alio modo hoc expediemus. Primùm tres numeros quæro quadratos, qui quadratum conficiant. Si duos numeros quadratos compono, ut 4 & 9, ſumma 13. quæritur quis quadratus ſit numerus, qui 13 ſi adſciſcat, quadratus fiat. is eſt 36. Ergo hi tres quadrati, æquant quadratum. Reſtat ut quæramus tres numeros, quorum bini reliquum certo excedant numero. ita ſcilicet ut primus & ſecundus ultra tertium 4: ſecundus & tertius ultra primum 9: tertius & primus ultra ſecundum habeant 36. Atque hoc iam antè eſt demonſtratum. Et ſunt numeri, qui impleant conditiones quæſtionis 20, 6 $\frac{1}{2}$, 22 $\frac{1}{2}$.

XYLANDRI.

Sic accipe. Trium horum numerorum ſummam 49 ponimus. & quæſtio nunc ſic inſtituitur.

Tres

Tres numeri ſunt, quorum ſumma 49. A & B amplius quã C habent 4. B & C quã A amplius 9. C & A quàm B, amplius 36. Noſq; adeo iam oſtendimus rationem eam iſtos inueniendi, quam ſub inuolucro innuit potiùs & propoſuit, quã expoſuit autor. Aufer 4 à 49, ſemiſsis reliqui eſt $22\frac{1}{2}$, C. aufer 9 à 49, reliquit ſemiſsis 20, eſt A. aufer 36 à 49, reliqui ſemiſsis $6\frac{1}{2}$, B. Et elegans eſt hæc ratio, & uariari poterat alijs quadratis ſumtis.

VII. Inueniantur tres numeri quadratum conficientes, quorum bini iuncti itẽ quadratum conſtituant. Statuamns quadratum, qui eſt ſumma iſtorum trium, eſſe 1 Q † 2 N † 1. Ac ſint primus & ſecundus iuncti, 1 Q. ergo tertius erit 2 N † 1. Iam ſecundus & tertius æquentur quadrato lateris 1 N —— 1, qui eſt 1 Q —— 2 N † 1. Cùm aũt trium ſumma ſit 1 Q † 2 N † 1, relinquitur primus 4 N, reliquis ab ea detractis. Atqui primum & ſecundum ſtatueramus ſummã conficere 1 Q. eſt ergo ſecundus 1 Q — 4 N. Reſtat ut ſumma primi ac tertij 6 N † 1 æquet aliquem quadratum, ſitq́ue is 121. ergo 1 N eſt 20. Et numeri quos deſiderabamus, ſunt 80, 320, & 41. qui imperata faciunt.

XYLANDRI.

Grauiter deprauârat librarius problema non adeò obuium. quid ſit legendum, uerſio mea ſatis demõſtrat. Vides autem heic quoq; multis ſolutionibus eſſe locum, ob licentiam poſitionũ. neq; enim opus fuit ſummam ponere 1 Q † 2 N † 1. ſed aliud quoduis quadratũ potuit adſumi. quod idem de reliquis intelliges. Quòd ad extremum 6 N † 1 æquantur quadrato numero 121, fit ut 1 utrinq; abiecta 6 N æquent 120 ut uitentur minutiæ. Licebat autem etiam quemuis aliũ quadratũ accipere, qui unitate abiecta per 6 diuidi poſsit. cuius rei exempla ſunt 49, 289, 361, & plures alij. Nam ſi 6 N † 1 || 49 ſtatuas, 1 N eſt 6. numeri 32. 32. 17. ſi 6 N † 1 || 289. 1 N eſt 48. numeri 192, 2112, 97. ſi 6 N † 1 || 361. 1 N eſt 60. numeri 240, 3360, 121. qui planiſsimè ſatisfaciunt propoſito, ſtantibus theſibus, & reſolutis prout radicis ualor ſe obtulit.

A 4 N
B 1 Q —— 4 N
C 2 N † 1

IIX. Aliter. Sit ſumma numerorum 1 Q † 2 N † 1. ſintq; primus & ſecundus iuncti 1 Q. ergo tertius 2 N † 1. Item ſecundus cum tertio ſit 1 Q —— 2 N † 1: & quia tertius eſt 2 N † 1, erit ſecũdus 1 Q —— 4 N. ergo primus, qui cum hoc 1 Q faceret, eſt 4 N. Summa horum omnium eſt 1 Q † 2 N † 1. Sed & primus cum ſecundo, & ſecundus cum tertio, facit quadratum. Ergo ſumma denique tertij & primi, quæ eſt 6 N † 1, æquabitur alicui quadrato. Is ſit 36. erit 1 N $\frac{35}{6}$. erit primus 140, hoc eſt $\frac{840}{36}$. ſecundus $\frac{385}{36}$. tertius $\frac{456}{36}$. atque hi ſatisfacient quæſtioni.

XYLANDRI.

Denominatorem omiſit ſiue Diophãtus, ſiue librarius. Licuit aũt rurſus uariare omnia. 846 & 385, quadratũ conſtant 1225, lateris 35. 385 & 456 quadratum conſtant, 841, lateris 29. 456 & 840 quadratum conſtant 1296, lateris 36. Denominatorẽ eſſe quadratũ ſatis liquet. Si quadratum numerũ adſumas, qui unitate detracta per 6 præcisè diuidatur, carebis minutijs. 25 id non præſtat, quia 1 N fieret 4, & ſecũdus 1 Q —— 4 N fieret 16 — 16, quod eſt nihil. Sume 121, erit 1 N, 20. & ſi hypoſtaſes ſequaris, numeri erunt 80. 320. 41. ſumma 441, quadratus. quadrati etiam qui ex binis colliguntur, 400, 361, 121. Idem aliter effeciſſes adſcito ad æquationem 289, 144, 361, & innumeris alijs.

IX. Quæruntur tres numeri progreſsionis arithmeticæ, quorum bini quadratũ conficiant. Principio tres numeros quadratos quæro æqualib. interuallis diſtãtes, quorum ſummæ ſemiſsis maior ſit quouis ipſorum. Eſto primus 1 Q: ſecundus 1 Q † 2 N † 1: interuallum 2 N † 1, quod additum ſecundo, tertium facit 1 Q † 4 N † 2. atq; is æquatur quadrato. Latus 1 N —— 8, producit quadratum 1 Q † 64 —— 16 N: huic æquemus 1 Q † 4 N † 2. fit 1 N $\frac{62}{20}$, hoc eſt $\frac{31}{10}$. Erit ergo primus 961, ſecundus 1681. tertius 2401. qui ſatisfaciunt quæſtioni: nimirum, tres ſunt quadrati, progreſsionis arithmeticę, & ſemiſsis ſummæ horum, quouis ipſorum eſt maior. Venio nunc ad id quod quæritur, ſcilicet quo pacto tres numeros eodem interuallo ſe ſuperantes inueniamus, quorum bini coniuncti, faciant quadratum. Primùm quęro tres quadratos arithmeticę progreſsionis, uti iam demonſtratum eſt. ſuntq; hi 961, 1681, 2401. Inueniendum iam eſt quomodo primus & ſecundus facere poſsint 961: ſecundus & ter-

& tertius 2401: tertius & primus 1681. nam ob interualli æqualitatem inuerſio quędam facta eſt ordinis. Statuamus eorum quos quærimus, ſummam eſſe 1 N. & cùm hoc ſit, 961, quę eſt ſumma primi ac ſecundi, aufero de 1 N: reſtat tertius 1 N —— 961. Rurſum ſi auferam ſecundum & tertiũ de 1 N, reſtabit 1 N —— 2401 primus. & ſi tertium ac primum de 1 N abſtulero, erit ſecundus reliquus 1 N —— 1681. Reliquum eſt, ut hi tres ſint æquales 1 N. & fit 1 N, $2521\frac{1}{2}$. Ergo ipſi numeri ſunt $120\frac{1}{2}$, $840\frac{1}{2}$, $1560\frac{1}{2}$. ſatisq; fit poſtulato.

XYLANDRI.

Tres numeros quadratos.] *Ita omnino res poſtulat, & uox τετραγώνους à librario malè eſt præterita. Vult autem ſumi quadratos quàm minimo ſe inuicem interuallo excedentes: ideò ſemiſſem ſummæ uult quouis eorum eſſe maiorem. alioqui explicari æquationem non poſſe, mox docebimus. Quod aũt quadrato ponit latus 1 N —— 8. arbitrarium eſt: modo 1 N (quæ ponitur ad 1 Q utrinq; abolẽdum) adijciatur numerus tantus, cuius multiplicatione in ſe & radices, æquatio harum ſpecierum exſiſtere poßit. quod unico exemplo infrà oſtendere ſatis habebimus. Iam ut 1 N fiat in autoris opere $\frac{31}{10}$, facilimum eſt deprehenſu. & ſi denominatorem in contexendis reliquis omitteres, tota uia aberrares. fierent enim 961. 1024. 1087. quorum poſtremus quiduis potius eſt quàm quadratus. Nunc cum N ſit $\frac{31}{10}$: primus (utpote 1 Q.) eſt $\frac{961}{100}$. ſecundus cõficitur ex $\frac{961}{100}$, ut 1 Q: & 2 N, quod eſt $\frac{62}{10}$ ſiue $\frac{620}{100}$, ac 1, ſeu $\frac{100}{100}$. ſumma $\frac{1681}{100}$. ad hũc tertio itidem accedunt $\frac{620}{100}$ ut 2 N, & $\frac{100}{100}$ ut 1. iſq; fit $\frac{2401}{100}$. atq; horum unius ſupra alterum exceſſus, ſecundi ſupra primum. tertij ſupra ſecundum, eſt $\frac{720}{100}$. Porrò autem licet abiecto nominatore uti ipſis quadratis 961, 1681, & 2401, 720 interuallo progredientibus. Quorum ſumma cum ſit 5043, ad extremum 3 N —— 5043 æquantur 1 N, hoc eſt 2 N || 5043. & fit 1 N, ſemiſſis ſummæ horum quadratorum, quouis ipſorum (ut mandatum erat) maior. Ab hoc ſemiſſe, ſcilicet $2521\frac{1}{2}$, ipſi quadrati ſublati, relinquunt eos qui quærebantur numeros. faciunt autem $120\frac{1}{2}$ & $840\frac{1}{2}$ additi, quadratum 961. $840\frac{1}{2}$ & $1560\frac{1}{2}$ additi 2401, quadratum. $1560\frac{1}{2}$ & $120\frac{1}{2}$, 1681 quadratũ, quod licet experiri. Quod ſi latus illius quadrati poſuiſſes 1 N —— 6, æquatio exſtitiſſet 17 || 8 N. & 1 N erat $\frac{17}{8}$. Quadrati $\frac{289}{64}$. $\frac{625}{64}$. $\frac{961}{64}$. ſeu 289. 625. 961: interuallo 336. Eorum ſumma 1875. & ad extremum æquabuntur 2 N || 1875. fit 1 N, $937\frac{1}{2}$. & qui deſiderantur numeri, haberi non poſſent: quia quadratorum ultimus 961, maior eſt quam ſemiſsis ſummæ $937\frac{1}{2}$. quî ergo ab eo auferetur? Itaq; uides 1 N —— 6 latus eſſe nimis magnum, & prudenti στοχασμῷ utendum eſſe. Poſuit ergo latus minus binario, 1 N —— 8. & res confecta eſt, ut uides. Quod ſi latus adhuc minus ponas, puta 1 N —— 10, æquabitur tandem 98 cum 24 N. ergo 1 N erit $\frac{49}{12}$. Eius quadratus $\frac{2401}{144}$, ſecundus $\frac{3721}{144}$, tertius $\frac{5041}{144}$. Omiſſo denominatore, 2401, 3721, & 5041 quadrati ſunt, interuallo 1320 progredientes. ſumma 11163 æquatur 2 N. & 1 N eſt eius ſemiſsis, quemuis quadratorum ſuperans iſtorum, $5581\frac{1}{2}$. à quo ſeorſim quadratis ſubtractis relinquuntur C $3180\frac{1}{2}$, B $1860\frac{1}{2}$, A $540\frac{1}{2}$. A & B conſtant 2401, B & C 5041, C & A 3721, quos conſtat eſſe quadratos. atq; ſic aliter ſoluta quæſtio eſt.*

x. Dato aliquo numero, inueniendi ſunt tres alij, quorum bini adſcito illo qui datus eſt, quadratum conflent. Sed & ſumma horum trium adiecto qui datur, quadratum exhibeat. Sit datus iſte 3. compoſitus è primis duobus 1 Q † 4 N † 1, ut adſcito 3 fiat quadratus. Compoſitus è ſecundo & tertio 1 Q † 6 N † 6. Summa autem omniũ ſit 1 Q † 8 N † 13, eadem uterque de cauſa. Iam cùm quos quærimus tres, coniũcti ſint 1 Q † 8 N † 13, & primus ac ſecundus ſint 1 Q † 4 N † 1, relinquitur tertius 4 N † 12. Et rurſum ſumma ſecundi & tertij 1 Q † 6 N † 6 ſubducta à ſumma omnium, reſtat primus 2 N † 7. Et ſumma primi ac ſecundi cùm ſit 1 Q † 4 N † 1, primus hinc ſublatus, ſecundum relinquit 1 Q † 2 N —— 6. Reſtat ut primus cũ tertio, adiecto 3, faciat quadratum. Fit autem 6 N † 22. quod æquatur quadrato. Eſto is 100. fiet 1 N, 13. eritq; primus 33. ſecundus 189, tertius 64. qui conditiones propoſiti implent.

XYLANDRI.

Poſitionum ratio heic quoq; facilis eſt. poſuit enim laterum 1 N † 2, 1 N † 3, 1 N † 4 quadratos ternario multatos, ut is additus quadratos redderet (ponere 1 N † 1 noluit, qa 3 de eius quadrato ſi auferantur, reſtat 1 Q † 2 N —— 2. noluit ergo uti diuerſis ſignis. aliàs licuit etiã hoc modo uariare operationem.) ſubtractione deinde ſingulos inuenit, ut uides. & 6 N † 22 *æquat quadrato,quem ſuopte arbitrio delegit: cautè quidem talem, ut ab eo 22 deductis, reliquum citra minutiam poſſet per 6 diuidi. Eſt ergo hoc arbitrarium, & uariari poteſt innumeris modis. Nam ſi (uerbi gratia) æquaſſes cum 64, 1 N eſſet 7. & numeri 21. 57. 40. optimè ſatisfacturi & hi propoſito. ut ſubſcriptum exemplum utriuſq; docet.*

1 N. 13.
33 } 222. adde 3. 225.
97. adde 3. { 189 }
100. 64. } 253. adde 3. 256.
Summa 286.
adde 3. 289.

1 N. 7.
21 } 78. † 3. 81.
61 † 3. 64 { 57 }
40 } 97. † 3. 100.
118 † 3. 121.

XI. Tres numeros inueniemus, quorum bini dato aliquo numero eodem multati, quadrati ſint. ſumma quoq; inuentorum, dato illo demto, quadratus ſit numerus. Eſto datus 3. Summa primi & ſecundi 1 Q † 3, quæ amiſſo 3 relinquatur quadratus. Eademq; de cauſa ſumma ſecundi & tertij ſit 1 Q † 2 N † 4. Summa quoque omnium quos quærimus, ſit 1 Q † 4 N † 7, ut deminuta ternario retineat quadratum. Heic cùm ſumma trium ſit 1 Q † 4 N † 7: ab hac ſumma primi & ſecundi ſi auferatur 1 Q † 3, tertius utique ſupererit 4 N † 4. Is à ſumma ſecundi & tertij detractus 1 Q † 2 N † 4, ſecnndum relinquet 1 Q —— 2 N. rurſum hic ablatus à 1 Q † 3, ſumma primi & ſecundi, primum relinquet 2 N † 3. Huic adiectus tertius, ſummā facit, quæ ſi 3 amittat, ſuperſunt 6 N † 4. quæ æquantur alicui quadrato. ſitq; is 64. erit primus N, 10. Proinde quæſitorum primus 23, ſecundus 80, tertius 44. quos quæſieramus.

XYLANDRI.

Hæc ex ſuperioribus facilè intelliguntur. & æquatio rurſum fuit arbitraria. nam 6 N † 4 æquare poteram (uerbi gratia) etiam 100. ut 1 N eſſet 16. uel æquari 16, ut 1 N fieret 2, &c. Vt ſequitur.

1 N. 10.
23. } 103. —— 3. 100.
67 —— 3. { 80 }
64. 44 } 124 —— 3. 121.
147 —— 3.
144.

1 N 16.
35 } 2593 —— 3.
103 —— 3. { 224 }
68 } 292 —— 3.
327 —— 3.

1 N 2.
7 } 7 —— 3.
19 —— 3. { 0 }
12 } 12 —— 3.
16 —— 3

Vides etiam in falſa poſitione ſatisfieri æquationi. qua de re dictum alibi.

XII. Tres numeri deſiderantur, ut quem bini, alter in alterum multiplicatus, producunt, is adſcito dato aliquo fiat quadratus. Datus eſto 12. Heic ſi ab aliquo quadrato ſubtrahas datum, facilè patet reliquum fore cum qui è primo fit in ſecūdum: quod is 12 addito fiet omnino quadratus. Auferam 12 de quadrato, puto 25: ſuperſunt 13. hoc fit primo in ſecundum ducto. Sit primus 13 N, ſecundus 1 N. ut producāt 13 Q ſua multiplicatione. Rurſum ab alio quadrato auferam 12, ut habeam quod fit ſecundo in tertium ducto. auferam à 16. relinquuntur 4. Ergo ſecundus in tertium ductus gignet 4. cumq; ſit ſecundus 1 N, erit tertius 4 N, qui 4 Q. producant. Reſtat ut productum tertij in primū, adſcito 12, faciat quadratum. Productum eſt 52 Q. Ergo 52 Q † 12, quadratum ualent. Hoc loco facilis eſſet æquationis ratio ſi 13, qui numerus eſt primo loco factorum 13 Q, quadratus eſſet. Quod cùm non ſit, eò res deducta eſt, ut duo numeri ſint inueniendi, quorum multiplicatione unius in alterum procreetur quadratus: & præterea uterq; cum 12 coniunctus, quadratum exhibeat. Sed & ſi loco numerorum quadratos inueniam: ij ſua multiplicatione quadratum producent. Inuentis igitur quadratis duobus, quorum uterq; adſumtis 12 fiat quadratus, expedita erit æquatio. ſunt aūt 4 & $\frac{1}{4}$. quorū uterq; 12 additus facit quadratū.

His

His ita repertis, refero me ad id quod egeram initio. Pono primum numerum 4 N: ſecundum 1 N: tertium $\frac{1}{4}$ N. Reſtat ut quod primo in tertium multiplicato producitur, additis 12 fiat quadratus. Tertius in primum gignit 1 Q. Ergo 1 Q † 12, quadrato æquatur. Hunc fingo à latere 1 N † 3, fit 1 Q † 6 N † 9. & fit 1 N, 3: ac præſtantur imperata.

XYLANDRI.

Eſt hoc problema non mendoſum mutilumq́; modò, ſed & multa habet uero & inuicem repugnantia. ut quidem ad nos delatum eſt. quæ ordine explicabimus, & doctiorib. iudiciũ permittemus. Primò omnium cur theſes ab abſolutis numeris deuocet, nõ ſatis apparet. Nam ſi numeri ponantur abſoluti 13. 1. 4. qua methodo eos Diophantus inuenit, (12 de 25 & 16 quadratis detracto: & reſiduis loco extremorum, 1 pro medio poſitis) optimè ſatisfit quæſtioni. Producuntur enim binorum multiplicatione 13. 4. 52. quorum ſingulis ſi 12 addas, fiunt 25. 16. 64, quadrati omnes: uti poſtulabatur. At ſi has theſes ad coſsicos numeros contrahas: quomodo res conſtet, uiderint alij. Equidem 13 † 12 eſt quadratus, 25. at 13 Q † 12, qui ſit quadratus, aut cur hoc fingi oporteat, neſcio. & quemcunq; ualorem demto 1 adſignaueris radici, impinges. ſit enim N 2. erunt 13 Q, 52. adde 12. fit 64. quadratus. pergamus. 4 Q † 12 hoc pacto ſunt 16 & 12, hoc eſt 28, neutiquã is quadratus. & 52 Q † 12 erunt 220, nihil minùs quàm quadratus. Scio bis eſſe in uerbis μονάδας, & ſic etiam in ſequẽti propoſitione: ſed δυνάμεις legendum euincit ratio, & æquatio ultima 52 Q † 12. unde abundè probatur, 12 unitates eum addere quadratis ex poſitionib. quarum numeros ad N contraxit, confectis. Iam 13 Q, eſt quidem quod ad ſignum attinet, quadratus, fateor. ſed radicem quadratum ex 13 Q uellem uidere: profectò neq; 13 N ea, neq; 13, ne tale quicquam eſſe poteſt. & niſi 1 Q ſtatuatur 13, quod ipſum quale ſit uides, nihil efficies. Quod aũt æquationem hanc ut inexplicabilẽ relinquit, neq; eam fingendo latere (ut aliàs) abſoluit: demiror. Nam ſi 52 Q † 12 æques (ut ſuprà factum eſt propoſitionib. 7. 8. 10. 11. & alibi) numero quadrato, puta 64; detractis utrinq; 12, erit æquatio inter 52 Q & 52. hoc eſt inter 1 Q & 1. atq; ſic 1 N faciet 1. ac ſoluta erit quæſtio, quo diximus modo. Enimuerò hoc tũ demũ cõtingit, cùm numerus abſolutus, & qui eſt ſignatus, additi quadratum faciunt, ut heic. uel cùm abſolutus numerus addi quadrato poteſt, ut ſumma ſit quadratus: numerus aũt Q notatus ipſe etiam quadratus eſt. ut 784 Q † 36 æquantur 100. nam 36 utrinq; detracto, fit 784 Q || 64. & 1 Q $\frac{4}{49}$. 1 N $\frac{2}{7}$. Sed hoc modo etiã quæſtionem nõ ſolui, doceamus exemplo. Quærãtur tres numeri, quorũ bini quem producunt, is cũ 21 faciat quadratum. Pono 4 N. 1 N. 100 N. quia 21 ad 4 & ad 100 additus, quadratos facit 25 & 121. Ergo 400 Q † 21 itidem debebat eſſe quadratus. æquo eũ quadrato 121. fit undiq; detractis 21, 400 Q || 100. hoc eſt 4 Q || 1. ergo 1 Q eſt $\frac{1}{4}$, & 1 N eſt $\frac{1}{2}$. Erũt ergo numeri quos quærimus 2 $\frac{1}{2}$. 50. at primus duntaxat & tertius producunt, qui adiũctis 21 ſit quadratus. de reliquis hoc falſum eſt: neq; dum ſoluta quæſtio, utcunq; æquatione ſoluta.

Aliud exemplum.

Diophãtus hac methodo deplorata, ad aliã confugit: cuius ſi cauſam nobis aperuiſſet, minùs laboraremus. Equidẽ propoſitio non quadratos, ſed quoquo modo ex multiplicatione binorum natos numeros compoſitos poſtulat, qui 12 numero aucti, quadratos numeros conſtituãt. & extremi theſiũ numeri, manente eodem medio, mutari non poſſunt, quin cõditiones quæſtionis infringãtur. deniq; in proximo noſtro exẽplo quadrati ſunt extremi 4 & 100. quos 1 medius multiplicãdo nihil quicquã alterat. neq; tamen res ſuccedit. Tamen Diophãtus iubet duos quadratos inueniri, quorum uterq; cum 12, faciat quadratũ. Id quia heic autor non oſtendit qua ratione fiat, doceamus obiter. De altero conſtat, in hoc quidem propoſito. nemo enim neſcit 4 & 12 eſſe 16. & ex dictis ad 8 ac 11. libri ſecundi huius operis, facilè uides ut ſit hoc inueniendum. alter ergo ſit 1 Q. ergo 1 Q † 12 æquatur quadrato. Huius latus fingo 1 N — tot unitatib. ut duplum harum minus ſit quã 12, quadratũ maius quã 12, quo cõſilio, ex alijs id genus Diophãteis effictionib. diſcere potuiſti. Sit latus 1 N — 4, ergo 1 Q — 8 N † 16 æquatur 1 Q † 12. ac tandẽ 4 || 8 N. eſt ergo 1 N, $\frac{1}{2}$. & quadratus alter $\frac{1}{4}$: qui cum 12, facit quadratum 12 $\frac{1}{4}$ ſeu $\frac{49}{4}$. Quod ſi latus finxiſſem 1 N — 5, erat futurus $\frac{169}{100}$ à radice $\frac{13}{10}$. nam & $\frac{169}{100}$ cũ 12, hoc eſt cũ $\frac{1200}{100}$, cõficit $\frac{1369}{100}$, cuius latus $\frac{37}{10}$. Sed priori uſus eſt Diophãtus. Si de neutro cõſtaret, ut ſi datus numerus eſſet 18, res plus operæ poſceret. Nam 18 ad nullum integrũ poteſt addi quadratus, ut quadratus cõfletur: cùm par ſit, ac ſemiſſem habeat imparem. de qua re plura (ut modò innui) ad 8 ſuperioris libri propoſitionẽ diximus. Priùs ergo per undecimã eiuſdem duo ſunt quærendi quadrati, quorum interuallum ſit 18. ij ſunt $\frac{1}{16}$ & $\frac{289}{16}$, inuenti poſitis lateribus 1 N & 1 N † 4. Et quia 18 ad $\frac{1}{16}$ additis, ſit

Dare duos quadratos qui cũ dato numero ſinguli iuncti, quadratum cõficiant.

quadratus $\frac{289}{16}$: erit $\frac{1}{16}$ alter quadratorum quos quærimus. eſto alter 1 Q. ergo 1 Q † 18 æquabũtur quadrato. quod effingo à latere 1 N —— 6. fit 1 Q † 36 —— 12 N æqualis 1 Q † 18. & fit 1 N $\frac{3}{2}$, ipſe quadratus $\frac{9}{4}$. & is quoq; ad 18, uel $\frac{72}{4}$ additus, $\frac{81}{4}$ quadratũ conflat. Ita omnino huic propoſito ſatisfit. Cæterum Diophantus hos quadratos ita inuentos, pro extremis ponit, ea lege, ut primus ſit 4 N, tertius $\frac{1}{4}$ N. Medius ergo ſtatuendus eſt 1 N, ut eius cùm in primum, tum in tertium producto 12 additus, facit quadratum: quod quale ſit, ſupra oſtendi. Eſt ſanè in Græco nota ſenarij ϛ̄. Sed locum habere non poteſt. nam ut 6 in 4 facit 24, cui additis 12 fit quadratus 36: ita 6 in $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{4}$ gignit, quibus ſi 12 accedat, 13 $\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{54}{4}$ fit, nequaquam quadratus numerus. ſæpe autem, & rurſus etiam proximè ſubſequenti propoſitione deprahendimus ϛ̄ pro ᾱ ſcriptum. Vnitas autem in extremos multiplicata, ſuapte natura nihil mutat. Quod ad æquationem attinet, 1 Q † 12 || 1 Q † 6 N † 9, in Græco eſt itidem uitiosè poſitum καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̄. non enim 3, ſed $\frac{1}{2}$ fieri radicem ſiue numerum, eſt certiſſimum atq; euidẽtiſſimum. Quod ait autor, impleri poſtulata quæſtionis: cùm ipſos qui quæruntur numeros non perhibuerit, iudicare non poſſum. Hoc quidem comperies, ſiue priores poſitiones 13 N, 1 N, 4 Q: ſiue poſteriores 4 N, 1 N, $\frac{1}{4}$ N, reſoluas uel per 3 uel per $\frac{1}{2}$ ut radicis ualorem; nunquam te poſtulata quæſtionis impleturum. Iam mea illa ſolutio propoſitæ à Diophanto quæſtionis fortuita uideri poteſt, & unius exẽpli: quæritur autem heic uniuerſalis & ἀμετάπτωτος ratio. Certè in exemplo à me propoſito, etſi extremi ſunt quadrati: tamen utraq; Diophantea methodus nos deſtituit. Et ſi inter $\frac{1}{16}$ ac $\frac{9}{4}$, quorum utriq; additus 18, quadratum facit, Diophanteo more inſeras 1: nunquam tamẽ efficies, ut quod fit ex primo in tertiũ, $\frac{9}{64}$, additis 18 ſit quadratus. eſt enim $\frac{1161}{64}$. Itaq; huius quidem quæſtionis ſolutio apud Diophantum non exſtat: atq; (ut ingenuè fatear quod res eſt) excogitare ex ipſius operationibus, ut in meas peruenerunt manus, nõ poſſum, quos ille numeros ſoluendo problemati huic deſtinauerit. Habemus itaq; ſatis nimirum ἀποριῶν, & διαπορῆσαι utique licuit. Videamus nunc quatenus πάρεργον nobis ſit hoc πρὸς τὸ ἀπορῆσαι. nam Diophantea hæc nos non expedient: niſi quis (quod fieri poteſt) acutiùs atque ego iſta perſpicit. Expediamus ergo rem noſtro Marte, domeſticiſq; copijs, & Diophanto tenebras, quantum quidem in nobis eſt detergamus. ſequamurq; adeò eius ueſtigia. Quia 12 de quadratis 25 & 16 ſubtractus, reliquos facit 13 & 4. placuit Diophanto ex A in B fieri 13, ex B in C, 4. quod ubi ſucceſſiſſet, reſtabat ut id quoq; præſtaremus, ut C in A multiplicato productus, 12 adſcito quadratum faceret. Ponamus A eſſe 13 N, ergo B eſt 1 N. ita enim ex his producitur 13 Q, qui cum 12 facit 13 Q † 12 æqualia 25. & abiectis utrinque 12, æquatio eſt inter 13 Q & 13. id eſt inter 1 Q & 1. ergo 1 N eſt 1. & 13 N, ſunt 13. Eodem modo pro C pono 4 N, fit ex B in C, 4 Q † 12 æquale 16. rurſumq; 1 N fit unitas. Deniq; C in A ducto, & additis 12, fiunt 52 Q † 12, æquanda & ipſa quadrato alicui. Fictio hæc locum non habet, quia ad N nulla unitatum multitudo adſcribi poteſt, ne fractiſſimorum quidem, quæ in ſe ducta 52 producat. Cauſa incommodi eſt, quod 4 quadrato in 13 ſurdum ducto, neceſſe fuit ſurdum produci. ſicut contrà futurus erat quadratus, ſi 4 in quadratum multiplicatus fuiſſet, aut ſimilis quadrato in ſimilem quadrati. quæ omnia ad initium noni Euclidis demõſtrãtur, & ad Diophanteæ poſterioris poſitionis cauſam explicandã conducit. Relinquere enim uoluit B, 1 N, ſed extremos ita mutare, ut non modò quod ex B tam in A quàm in C fit, 12 adiecto quadratum fieret: ſed etiam quod ex C in A fit, eadem lege teneretur. Debuerunt ergo A & C ambo eſſe uel quadratorũ ſimiles, uel quadrati, ut ait Diophãtus: cùm utroque modo multiplicatio quadratum gignat, ut paulò antè docuimus. Quo artificio inueniantur, demõſtraui. ſit ergo primus 4 N, ſecundus 1 N, tertius (ordinis mutatio nihil impedit, erat enim antè primus 13, cui nunc ſucceditur, ut inepto) $\frac{1}{4}$ N. De primo in ſecundum nõ eſt opus repetere. B in C gignit $\frac{1}{4}$ Q, cũ 12 æquale 12 $\frac{1}{4}$. & abiectis 12 utrinq;, $\frac{1}{4}$ Q æquatur $\frac{1}{4}$, & 1 N fit 1. C in A deniq; fit 1 Q. quod æquatur, ſi ei 12 addas, cum 12 $\frac{1}{4}$. & rurſus 1 N fit 1. Ergo A eſt 4, B 1, C $\frac{1}{4}$. Atq; ſic non ſatisfit poſtulatis. Nam ſi A in C duco, 1 fit, quod cum 12 non facit quadratum. Itaq; Diophantus quadrati cui æquetur 1 Q † 12, latus finxit 1 N † 3 ut æquentur 1 Q † 6 N † 9 cum 1 Q † 12. Omnino aũt utrinq; 1 Q & 9 abiectis, æquantur 3 & 6 N, & 1 N fit $\frac{1}{2}$, quo ualore hypoſtaſes poſteriores reſolutæ, fiunt A 2, B $\frac{1}{2}$, C $\frac{1}{2}$. Sed ne ſic quidem ſatisfit poſtulatis. nam A in B procreat 1, cui 12 additus, quadratũ non gignit. Executus ſum, quantum bona fide potui, Diophantea λείψανα. Nunc me ad quæſtionis propriã conuerto ſolutionẽ. ingenuè profeſſus, me in ea ſententia eſſe, omnes has difficultates ortas ex nõ ſatis conſiderata hypoſtaſeon inſtitutione, & ad
CANON. Coſſica ſigna applicatione. Vnitatem pro medio ponemus, pro altero quadratũ numerum, cui

additus

additus is qui proponebatur, quadratum facit: pro reliquo quadratum à latere latus unitate ſuperante latus quadrati ſic collecti, ſed multatum propoſito numero. Ita heic dato 12, cum is ad 4 addatur, & 16 quadratum conficiat, 4 erit primus, ſecundus 1, tertius 13, hoc eſt 25 (quadratum à 16, qui quadratus fiebat 12 ad 4 adiectis) —— 12. Sed uideamus hoc in altero exemplo, ubi 21 erat propoſitus numerus. Is & ad 4 & ad 100 additus quadratum facit 25 aut 121. Sit primus 4, ſecundus 1, tertius ergo 15 (nam 4 & 21 ſunt 25. quadratus ab hoc proximus 36, unde 21 ablato, relinquitur 15.) Primus in ſecundũ, & hic in tertium, utrobiq; faciunt adiectis 21, quadratos 25 & 36, ex hypotheſi. Sed & tertius in primum, 15 in 4, ductus, fit 60. quibus ſi addas 21, habes quadratum 81. Rurſum ſit primus 100, ſecundus 1, tertius 123 (nam ab 121, qui fit primo in ſecundum ducto & 21 addito quadratus, proximus eſt 144.) 100 in 123 ductis & additis 21, rurſum fit quadratus 12321, lateris 111. Aliud exemplum. Sit datus numerus 72. Is ad 289 quadratum additus, (quod ex annotatis ad octauam ſecundi docui) quadratum facit, cum colligatur ipſe ex imparibus 35 & 37. quadratus 361, lateris 19. Proximè maior à latere 20, eſt 400, inde aufer 72, relinquitur 328. Sunt ergo numeri 289, 1, 328. nam 1 nihil multiplicando mutante, 72 ad 289 & 328 additus, quadratos faciet 361 & 400. Sed & 289 in 328 ductis, productoq; 72 additis, fit 94864, quadratus à latere 308. Deniq; dentur numeri tres, quorum bini quem producunt, is adſcito 30 ut faciat quadratum. Enimuero 30 è cenſu eſt eorũ numerorum, qui nulli quadrato integro adijci poßint, ut quadratus fiat ſumma. quod ſuprà eſt à nobis commemoratum. Fracti cùm alij multi ſunt quadrati, tum $\frac{1}{4}$, qui cum 30 quadratum cõſtituat. quod inuenire ex paulo antè traditis non eſt difficile. nam latus quadrati cui æquetur 1 Q † 30, ſi ponas 1 N † 5: æquatio erit inter 1 Q † 30, & 1 Q † 10 N † 25. hoc eſt inter 5 & 10 N. & 1 N erit $\frac{1}{2}$, ergo 1 Q, $\frac{1}{4}$. Eſto igitur primus $\frac{1}{4}$, ſecundus 1, quorũ producto ſi 30 adijcias, quadratus fit 30 $\frac{1}{4}$ ſiue $\frac{121}{4}$, cuius latus $\frac{11}{2}$ ſeu 5 $\frac{1}{2}$. Id unitate auctum, (6 $\frac{1}{2}$) quadratũ facit $\frac{169}{4}$, unde ſi 30 ſubducantur, relinquuntur $\frac{49}{4}$ quod pro tertio ponamus. Ergo primus in hũc multiplicetur, confient $\frac{49}{16}$ quibus ſi addas 30, ſiue $\frac{480}{16}$, habebis quadratum $\frac{529}{16}$: ut iã nihil deſiderãdum in ratione problematis huius explanandi uideri poßit. Vides etiam perinde eſſe, unitas quotus in ordine numerorum habeatur. Poriſma. Si quis numerus additus quadrato, quadratum cõficiat. ſi eundem numerum ſubtrahas à quadrato, cuius latus unitate ſit maius quã eius qui modò erat confectus quadratus latus, hocq; reſiduum multiplices per quadratum cui numerus datus initio fuerat adiectus, producto ipſum datũ numerum ſi adiunxeris, denuò te habiturum quadratũ aio. Poteſt hoc quoq; inter raras quadratorum proprietates haud iniuria (niſi fallor) referri. Et ſuus erit, uti ſpero, de eo & ſimilib. plura dicẽdi locus theorematis. Equidẽ non puto me rectè facturũ, ſi ex hac planicie in coßicarum poſitionũ ſalebras uel me uel lectorem conijciam: maximè cùm unitate pro triũ horũ aliquo numerorũ quæſitorũ ipſe utatur Diophãtus. Aliud potius theorema ſubijciã, quod multo etiã expeditiùs ſoluẽdæ quæſtioni inſeruit. Si de duob. numeris quadratis, quorũ latera unitate differũt, eundẽ numerũ detraxeris, & reſiduorũ alterũ in alterũ multiplicaueris, ꝓducto idẽ numerus, qui à quadratis erat detractus, adiectus quadratũ faciet. Sit detrahẽdus 21. quadrati 80 & 100. reſidua 60 & 79. productus eorũ multiplicatione 4740, ergo 4761 quadratus lateris 69. Ergo ſi quærantur numeri tres, quorũ bini cum 26 faciant quadratum, hunc ego auferam ab 36 & 49. reſidui 10 & 23 cum unitate propoſito ſatisfacient. Nam 230 & 26 ſunt quadratus 256, &c.

Quadratorũ proprietas.

XIII. Inueniãtur tres numeri, ut quem bini, alter in alterũ multiplicatus, cõficiũt, eorũ quiſq; numero qui imperatur multatus, quadratꝰ relinquatur. qui imperatur, eſto 10. Quando productus primi in ſecundum multiplicatione is eſt, cui ſi 10 adimas, quadratus relinquatur: addã 10 alicui quadrato, ut eum cõſequar. Sit quadratus 4. ergo qui fit è primo in ſecundũ, erit 14. Sit primus 14, erit ſecundus 1. rurſumq; in numeris conſtituamus, quorum multiplicatione Quadrati 14 fiant. Sit primus 14 N, ſecundus 1 N. Alij porrò quadrato addam 10, ut habeam productum è ſecundo in tertiũ. is quadratus eſto 9. ergo ſecundus in tertium facit 19 Q. Reſtat ut primus in tertium quẽ gignit, is adſumto 10 ſit quadratus. Ergo 266 —— 10 æquantur quadrato. Proinde ob ea quæ ſuperiore propoſitione oſtendi, eò deuentũ eſt loci, ut quærendi ſint duo quadrati, quorũ uterq; demto 10 maneat quadratus. Quod facilè fit, ſi quæras quis quadratus demto 10 maneat quadratus. Sanè ſi cui numero adijcitur 1, & ſummæ dimidiũ in ſe ducitur, atq; à ſic facto quadrato numerus initio ſumtus detrahitur; relinquitur rurſum quadratus. Addo 1 ad 10, ſumma 11. huius ſemiſsis 5 $\frac{1}{2}$.

à cuius quadrato 30 $\frac{1}{4}$ ſi aufero 10, relinquitur quadratus 20 $\frac{1}{4}$ cuius latus 4 $\frac{1}{2}$. Statuo iam primū eſſe 30 $\frac{1}{4}$. ultimū 1. & neceſſe erit ut 1 Q etiā demto 10, fit quadratus. Ergo 1 Q —— 10 æquatur quadrato. Huius latus fingo 1 N —— 2, fit quadratus 1 Q † 4 —— 4 N. & fit 1 N, 3 $\frac{1}{2}$. Ergo tertius quem ſtatueram 1 Q, erit 12 $\frac{1}{4}$, primus 30 $\frac{1}{4}$. quorū uterq; eſt demto 10, quadrat⁹. Venio ad id quod initio quærebatur. Statuo numeros, primū 30 $\frac{1}{4}$ N, ſecundum 1 N, tertium 12 $\frac{1}{4}$ N. Reſtat, ut qui fit ex primo in tertiū, 370 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{16}$. dētis 10, æqualis relinquat̃ quadrato. & ut Quadrati integri ſint, multiplicemus per 16. Ergo ſic 5929 Q —— 160 æquabuntur quadrato lateris 77 N — 2. Qui quidē quadratus eſt 5929 Q † 4 — 308 N. fit 1 N, $\frac{1}{17}$. Statuerā primū 30 $\frac{1}{4}$. is erit 1244. ſecundū 1. is erit 77. tertium 12 $\frac{1}{4}$, is erit 502 $\frac{1}{4}$. & ſtat propoſitum.

XYLANDRI.

Duos numeros inuenire quadratos, qui dēto utrique dato eodem maneāt quadrati.

Idem eſt omnino meus de hoc problemate ſenſus, qui fuit de ſuperiore. Certè hi numeri 14. 1. 19. quæſtionem planiſsimè explicant. Sunt enim producti eorum multiplicatione 14. 19. 266. à quibus ſingulis ſi 10 auferas, relinquūtur profectò quadrati 4. 9. 256. Et æquatio illa 266 Q — 10 optimè explicatur, ſi quadrato 256 compares. nam 10 utriq; addito, fit 266 Q || 266. id eſt 1 Q || 1. ut ſuprà. Artificium aūt illud inueniendi numerū quadratū, qui dato aliquo multatus, tamen quadratus maneat: ſcitum eſt, & è procreatione quadratorum, de qua ad 8 ſecundi diximus, deſumtum. Adde 1 ad 11, fit 12. huius ſemiſsis 6, quadratus 36, unde 11 aufero, relinquitur quadratus 25. cuius latus ſcilicet 5, duplicatum, addita unitate proximè maiorē quadratū gignit. Sed hæc aliâs. Obiter tamen hoc moneā, nullum eſſe numerum pariter imparē, id eſt cuius ſemiſsis impar eſt, quo detrahi ab aliquo integro numero quadrato poſsit ita, ut quadratū relinquat. cū & impares, & alio modo pares hoc poſsint. nā de imparib. quidē è dicto loco abundè id liquet. Sed & 12, cū conſtet ex 5 & 7, quib. ad 4 additis 16 fit, ab hoc ſubtractus quadratū relinquit 4: & 16 ex 7 & 9 cōflatus, quæ ad 9 adiecta 25 cōſtituunt, ab hoc detractus, 9 relinqt quadratū. Cætera proſequi nō eſt opera. Enimuerò qui ſit integer quadratus, à quo 12, 16, 20, &c. ſubtractus quadratū relinquat: nunq̃ inuenies ex hoc canōe; facilimè ſi eū, ut fecimus, in duos proximos impares diuidas. puta 20 in 9 & 11: quæ addita ad 16, faciunt 36, à quo 20 ſi auferas, utiq; 16 relinquūtur, &c. At fractos inuenies etiā cōplures: unum ex autoris Canone; alios pro eo atq; 1 Q —— 20 æquaturi quadrati latus uariaueris. Verbi gratia. duos uolo inuenire quadratos, à quorum utroq; 20 ſi auferas, reſidua ſint quadrati. Dati in duos proximos impares iā expoſita diuiſio, oſtendit alterū eſſe 36. Aliū ſic inuenies. 1 Q —— 20 æquatur quadrato. Eius latus pono 1 N — 8 (ſcilicet ut duplū unitatis nō excedat numerū 20, & earū quadratū ut cum ſuperet) fit 1 N, 5 $\frac{1}{4}$. Ergo ipſe quadratus $\frac{441}{16}$ unde ſi $\frac{320}{16}$ (hoc enim eſt 20) auferas: $\frac{121}{16}$ relinquitur quadratus. Hunc ipſum inuenies Diophanteo uſus canone. Quod ſi latus poſuiſſes 1 N — 6, 1 N fuiſſet $\frac{14}{3}$. quadratus $\frac{196}{9}$. nam ab hoc etiā ſi 20, ſeu $\frac{180}{9}$ auferas, ſupereſt $\frac{16}{9}$ quadratus. Ex dictis facilè eſt, duos inuenire aut etiā plures quadratos, qui detracto dato numero relinquant quadratos. Practica porrò multiplicatione, q̃ uocāt, 30 $\frac{1}{4}$ per 12 $\frac{1}{4}$ producit 370 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{16}$. id eſt 379 $\frac{9}{16}$. Quod fiebat in fracta utroq; cōuerſo, $\frac{121}{4}$ per $\frac{49}{4}$, productus $\frac{5929}{16}$. Ergo 370 $\frac{9}{16}$ Q — 10 æquat autor quadrato: prius omnib. per 16 multiplicatis. ut res ſit expedita magis. (nā cū 16 ſit quadratus, omnino quadratus manebit numerus per 16 multiplicatus, ſiquidē quadratus iā antè habebatur.) ut 5929 Q —— 160, quadrato alicui æquet. Eius latus poſuit 77 N — 2. nā cùm 77 ſit radix quadrata numeri 5929: utiq; 77 N in ſe ductū, 5929 Q dabit. hi ergo mutuò abolebuntur: fientq; N plures, numerus abſolutus minor q̃ 160. ut uides. De reliquis uiderit autor. Nā mihi quidē nemo perſuaſerit ex hac æquatione 1 N fieri $\frac{1}{17}$. aut poſitiones has inde emergere quæ pro ſolutione quæſtionis ponuntur, aut eos propoſito ſatisfacere numeros. Canonem fabricari ad imitationē ſuperioris non eſt difficile. CANON. Duos aliquos muneros, ſerie numerandi naturali ſe continuò inſequētes, pro tuo arbitrio deliges. Vtriuſq; quadrato datū adijcies: habes extremos, unitate mediū occupāte locū *(licet enim uariare.) Sit datus numerus 8, aut 11, aut 18. Erunt qui quæruntur 17. 1. 24. Item 111. 1. 132. & 67. 1. 82. nā pro primo exemplo latera 3 & 4, pro ſecūdo 10 & 11, pro tertio 7 & 8 breuitatis cauſa delegi.* Poriſma. *Si duobus quadratis numeris, quorum latera unitate differunt, idē numerus addatur: producto ex collectorū uno in alterum ſe detrahas eundem datū numerū, reſiduus erit quadratus. Quadrati laterū 16 & 17, aucta 40 ſunt 296 & 329. Horum multiplicatione producitur 97384 aufer 4, habes quadratum lateris 312. Quæ autem porrò de his duabus propoſitionibus, & alijs etiam quibuſdam diſputari poſſe exiſtimem, ſuo explicabitur loco.*

Quadratorū proprietas.

XIV. Dentur tres numeri, quorum bini uno in alterum multiplicato producant numerum, qui adiecto ipſi reliquo ſit quadratus. Vnum poſtulatorum præſtabitur, ſi quadratum ſumamus, cuius aliquam partem tertij numeri loco ponatur, reliquũ productus è primo in tertium ſtatuatur. Sit lateris 1 N † 3 quadratus 1 Q † 6 N † 9. Ponamusq; tertium eſſe 9. ergo quod fit è primo in ſecundum eſt 1 Q † 6 N. Sit primus 1 N, erit ergo ſecundus 1 N † 6. Reſtat ut quod fit ex ſecũdo in tertium, 9 N † 54, adiecto primo, ſcilicet 10 N † 54, æquale ſit quadrato. & item quod fit ex tertio in primum, 9 N, adiecto ſecundo, nimirum 10 N † 6, utrunq; æquetur quadrato. Duplex heic exſiſtit æquatio. Nam cùm interuallum harum ſummarum ſit 48: duo ſunt inueniendi quadrati numeri, qui iſto diſtent interuallo. quod & facile eſt factu, & innumeris fieri poteſt modis. ac ſint ſanè 16 & 64. utri horum æquationem accommodes, reperietur quantus ſit 1 N. Etenim ſi dicas 64 æquari 10 N † 54, 1 N erit 1. idẽ eueniet, ſi 16 æquentur 10 N † 6. Ergo, ad propoſitum, erunt numeri primus 1, ſecundus 7, tertius 9: qui propoſitionis conditionibus ſatisfaciunt.

XYLANDRI.

Hæc quæſtio, eiuſq; tractatio elegans eſt, & artificij minimè uulgaris. quam uariari pro arbitrio poſſe, ſatis uel prima indicatur poſitione neq; expedit copia detineri lectorem. In Græco autem ualdè manca eſt hæc propoſitio: ego rem, non uerba, deſcripſi. Poſito primo 1 N, ſecundus ſit 1 N † 6. nam ortus ex primi in ſecundum multiplicatione 1 Q † 6 N diuiſus per primum, quantus ſit ſecundus, prodit. De duplicata æquatione memineris eorum quæ libro ſuperiore ad propoſitionem duodecimam ſunt explicata. etſi nihil eſt cauſæ cur canonibus ibi traditis utare potiſſimùm: cùm quadratorum quorum interuallum ſit quicunq; datus numerus, ut heic eſt 48, inuentio tradita ſit X I propoſ. lib. I I. Diophanti. Numeros inuẽtos quæſtioni explicandæ ſatisfacere, faciliùs eſt experiri, quàm ut præmonſtrato opus ſit. Rectè autem & de facilitate & de uariandi licentia autor monuit. Nam ut relinquamus hypoſtaſes, neq; pro quadrato 1 Q † 6 N † 9 alium (quod innumeris fieri potuit modis) adſciſcamus, pro quadratis 16 & 64, uſurpare licebat alios quadratos. Sanè 1 & 49 inueniſſes numero 48 diſtantes. per X I ſecũdi Diophanteorũ, poſitis lateribus 1 N, & 1 N † 6. æquatione inter 48 & 12 N † 36 oblata. Sed ij quadrati hypoſtaſibus accõmodari nullo modo poſſunt, cùm 10 N † 54 utiq; plus ſit quàm 49, &c. ſi ponas latera 1 N & 1 N † 2, inuenies quadratos 121 & 169. Si 1 N & 1 N † 4, eos habebis, quos uſurpauit autor. Si 1 N & 1 N † 3, quadrati erunt laterum $6\frac{1}{2}$ ac $8\frac{1}{2}$, ſcilicet $\frac{169}{4}$ & $\frac{361}{4}$, quorum interuallum $\frac{192}{4}$, hoc eſt 48. & cætera. Iam ſi quadratos ſumſiſſemus 169 & 121, utroq; modo ad hypoſtaſes & poſita ſi accommodetur ratio, 1 N erit $11\frac{1}{2}$. ac tantus eſt primus ſecundus $17\frac{1}{2}$. tertius ex hypotheſi 9. Duc $11\frac{1}{2}$ in $17\frac{1}{2}$, fient $\frac{805}{4}$, adde 9, habes $\frac{841}{4}$ quadratum lateris $\frac{29}{2}$. Duc $17\frac{1}{2}$ in 9, habes $157\frac{1}{2}$, adde $11\frac{1}{2}$, habes quadratũ 169. Duc 9 in $11\frac{1}{2}$, erũt $103\frac{1}{2}$, adde $17\frac{1}{2}$, habes 121 quadratũ. Reliqua tibi mãdo. Quod ſi duplicata uti libuiſſet æquatione, nõ minor ſe obtuliſſet uarietas. interuallũ n. inter 10 N † 54 et 10 N † 6, eſt 48. quẽ multi numeri cõponũt. Si ſumas 4 et 12, habebis quadratos 64 maiorẽ. 16 minorẽ ſi 2 et 24, habebis 169 et 121. Si 3 et 16, habebis $\frac{169}{4}$ et $\frac{361}{4}$, etc.

XV. Dentur tres numeri, ut quem bini alter in alterum multiplicatus producũt, is reliquo detracto ſit quadratus. Statuatur primus 1 N. ſecundus 1 N † 4. horũ multiplicatio producet 1 Q † 4 N. huic producto, ut fiat quadratus, tertius detrahendus eſt. Hunc nos ponemus ergo 4 N. Reſtat ut ſecundus in tertium, primo detracto ſit quadratus. productus 4 Q † 16 N, ablato primo, fit 4 Q † 15 N, æquale quadrato. Itẽ tertius in primum procreat 4 Q. unde ſi ſecundus auferatur, reſtabit 4 Q —— 1 N —— 4 quadrato æqualis. Et rurſum duplex occurrit æquatio. Nam cùm horũ quadrato æqualium interuallum ſit 16 N † 4: quærantur duo numeri, quorum unius in alterum multiplicatione hoc interuallum producatur. Ii ſunt 4 N † 1 & 4. Horum ſummæ dimidiæ quadratus æquatur maiori: uel interualli ſemiſsis quadratus æquatur minori. Fit 1 N, 25. & quæſiti, ac reſpondentes poſtulatis numeri 25, 105, 100.

XYLANDRI.

Hũc nos ponemus ergo 4 N.) *His enim producto multato, reſtat 1 Q, quadratus utiq;. Cætera in Græco mutila, meo Marte correcta dedi. Diuiſio 16 N † 4 in duos è quibus multiplicando componatur, facilis eſt intellectu & ſimplex. Vſus autem heic eſt canone, quẽ duodecima ſecundi tradidit: quia citra nouam æquationem expediri res non quibat. 4 N † 1 & 4, faci-*

unt 4 N † 5. dimidium 2 N † $2\frac{1}{2}$. huius quadratum 4 Q † 10 N † $6\frac{1}{4}$ æquatur 4 Q † 15, ut maiori (de minore tute experitor.) Fit autem 1 N, non 25, ſed $\frac{25}{20}$. & numeri ſunt non 25, 105, 100: ſed planè $\frac{25}{20}$, $\frac{105}{20}$, $\frac{100}{20}$. hoc eſt $\frac{5}{4}$. $\frac{21}{4}$. $\frac{20}{4}$ ſeu 5. Horum primus in ſecundum facit $\frac{105}{16}$. aufer tertium $\frac{80}{16}$ (ſeu $\frac{20}{4}$.) Reſtat quadratus $\frac{25}{16}$. Secundus in tertium gignit $\frac{105}{4}$. aufer $\frac{5}{4}$, utpote primum: reſtat $\frac{100}{4}$, ſcilicet 25, quadratus. Tertius in primum procreat $\frac{25}{4}$. aufer $\frac{21}{4}$, ſcilicet ſecundum: reſtat quadratus $\frac{4}{4}$, hoc eſt 1. Licet autem hoc quoq; pro arbitrio uariare, manēte primo 1 N, & ſecundo eum quotquot collubuerit unitatibus ſuperante: quibus poſitis, tot N utiq; fiat tertius. ut ſi primus ſit 1 N, ſecūdus 1 N † 10, erit tertius 10 N. & fiet duplicato æquatio inter 10 Q † 99 N & 10 Q —— 1 N —— 10 æqualia quadrato. Interuallum 100 N † 10. quod compones ex 10 N † 1 ac 10. aut 50 N † 5 & 2, &c. pro re nata & tuo arbitrio.

XVI. Quæruntur tres numeri, quorum bini alter in alterum ſi multiplicetur, numerum producant, cui reliqui quadratus adiectus, quadratum conficiat. Eſto primus 1 N, ſecundus autem 4 N † 4, tertius 1. ita duo poſtulatorum præſtauerimus. Supereſt ut tertius in primum quem producit, is ſecundo adſcito ſit quadratus. Atqui hoc modo fit 16 Q † 33 N † 16. quod æquatur quadrato, cius latus fingo 4 N —— 5. cuius quadratus 16 Q † 25 —— 40 N æquatur 16 Q † 33 N † 16. Fit 1 N, 9. Et numeri 9, 328, 73, ſoluunt nodum.

XYLANDRI.

Subtilis eſt hæc inuentio, & digna obſeruatu. Quadratū eſſe hunc 4 Q † 4 N † 1, uel extractione radicis quadratæ deprehendas: qualem ad 16 ſuperioris libri expoſuimus. fit enim à latere 2 N † 1, ſicut 441 quadratus eſt lateris 21, & 961 quadratus lateris 31: & 9 Q † 6 N † 1 latus habet 3 N † 1. Proinde unitate tertio adſignata, 4 Q † 4 N, diuiſit per 1 N, quem primum facit, ut ſecundus eſſet 4 N † 4. & horū multiplicatio produceret id, cui unitatis quadratus additus, totum quadratum reſtitueret. Nam neq; unitas multiplicat abſoluta, neque à ſuo differt quicquam quadrato; ut notiſſimum eſt. Itaq; etiam ſecundus in tertium multiplicatus, idem manet, & 1 N adſcito, primi quadrato, totum propoſitum quadratum reficit. Reliqua ſunt plana: & facilè eſt notare ex ſæpe iam oſtenſis, cur latus 1 N —— 5 fingatur. Enimuerò 1 N fit non 9: ut eſt in Diophanto, ſed $\frac{9}{73}$, primus omnino: & reliqua $\frac{328}{73}$. $\frac{73}{73}$. id eſt 1. Sed quia uno in alterū multiplicato, partes à quadrato 73, hoc eſt à 5329 denominatæ exſiſtunt: & quadratum addēdum eandem ſemper denominationē nanciſcitur: ideò cōmodè & rectè denominatore cōmuni abiecto numeri ſtatuuntur 9. 328. 73. quorum primus in ſecundū facit 2953, quib. ſi 5329 tertij quadratū addas, quadratū habes 8281, lateris 91. Secūdus in tertiū gignit 23944: adde 81, quadratum primi, fiet 24025 quadratus, lateris 155. Tertius in primum producit 657. adde 107584 quadratū ſecundi, habes quadratū 108241, cuius radix 329. In ſuperiore exemplo hæc abiectio denominatoris locū non habebat: quia multiplicatio 16 partes crearet, quibus integri erant addendi, non itidē quadrati, ut obſeruare licuit. Variari poſitiones & ſolutiones licere liquet. Nā primū ponere licuit 1 N, ſecundum 1 N † 2, tertium 1, reſpectu quadrati 1 Q † 2 N † 1, &c.

Denominatoris abiectio.

XVII. Deſiderantur numeri tres, ea conditione: ut quem bini unius in alterum multiplicatione producūt, is cum duorum iſtorum à quibus eſt productus ſumma, quadratum faciat. Enimuerò quibuſuis duobus quadratis, quorum latera unitate diſtant, altero in alterum ducto numerus fit, cui ſumma quadratorum addita, quadratum faciat. Eſto igitur primus 4, ſecundus 9, ut qui ex ijs procreatur quadratus 36, cum ſumma ipſorū quadratum conficiat. Reſtat ut ſumma ſecundi & tertij cum producto multiplicatione ipſorum, itemq; ſumma tertij & primi cū producto ipſorum multiplicatione, quadratos conflent. Sit tertius 1 N. Erit productus è ſecundo in tertium cum eorū ſumma 10 N † 9, æqualis quadrato: & productus è tertio in primum, cū eorum ſumma, 5 N † 4, æqualis quadrato. Heic quoq; duplex ſe offert æquatio. Ipſorum interuallum eſt 5 N † 5. quod qui conficiant duo numeri alter in alterum ductus, quærantur. ſunt autem 1 N † 1 & 5. atq; rurſus, ut in ſecundo libro docuimus, uel ſummæ horum ſemiſſis quadratus maiori, uel interualli ſemiſſis quadratus minori æquabitur. Fit 1 N, 28. Sunt ergo qui deſiderabantur, 4. 9. 28.

XYLANDRI.

Pulcerrimum eſt theorema quod proponit autor de inueniendis duobus numeris, quorum uno in alterum ducto quod fit, id additis ipſis quadratus fiat. Hoc beneficio 31 ſecundi huius operis

ris etiam potuit indagari. ſed præſtat ex hoc theoremate deſumere, quod quadratis naturali ſerie ſe inſequentibus, binis quibuſcunq; hanc uim tribuit. Idq; etiã ad fractos pertinet. Verbi gratia $\frac{49}{4}$ *&* $\frac{81}{4}$ *quadrati ſunt laterum* $3\frac{1}{2}$ *&* $4\frac{1}{2}$. *Ipſi producunt* $\frac{3969}{16}$. *ſumma ipſorum* $\frac{130}{4}$ *ſeu* $\frac{520}{16}$ *huic addita, quadratus fit* $\frac{4489}{16}$, *lateris* $\frac{67}{4}$. *Rurſum latera* $1\frac{1}{3}$ *&* $2\frac{1}{3}$. *quadrati* $\frac{16}{9}$ *&* $\frac{49}{9}$ *productus* $\frac{784}{81}$. *adde ipſorũ ſummam* $\frac{65}{9}$ *ſeu* $\frac{585}{81}$, *ſumma* $\frac{1369}{81}$, *quadratus lateris* $\frac{37}{9}$, *&c. Cætera ſunt ſatis plana. Numerorum, qui producunt interuallum, ſumma 1 N † 6. ſemiſsis* $\frac{1}{2}$ *N † 3. quadratus* $\frac{1}{4}$ *Q † 9 † 3 N æquatur 10 N † 9. utrinq; abijciuntur 9, itemq; 3 N æquantur* $\frac{1}{4}$ *Q & 7 N, hoc eſt* $\frac{1}{4}$ *N || 7, fit 1 N, 28. Examen rem comprobat. Nam 4 & 9 ſunt 13. quibus ſi addas 36, qui è 4 in 9 fit 49, conficitur quadratus. Et 9 in 28, 252 producit, cui ſi addas 37 (9 & 28) quadratus fit 289. Deniq; 4 in 28 ductus, gignit 112. cui ſi 4 & 28, id eſt 32 addas, habes quadratũ 144. Satis autem ipſum theorema docet, loco primi & ſecũdi quoſuis alios quadratos accipi potuiſſe, quorum latera unitate differrent: itaq; uariari etiam ſolutiones.*

XIIX. Alio modo idem propoſitum abſoluemus. Statuamus primum 1 N, ſecundum 3. Altero in alterum ducto, ipſiſq; ad productum additis, fit 4 N † 3, quadrato æquale. 15 quadratus eſto 25. erit 1 N, $5\frac{1}{2}$. atque ſic primo $5\frac{1}{2}$, ſecundo 3 poſitis, uni poſtulatorum ſatisfactum. nam qui fit ex uno in alterum, cum ſumma ipſorum conficit 25 quadratum. Superſunt duo reliqua poſtulata. Pono tertium 1 N. in hunc ſi ducatur ſecundus, & ſumma ipſorum addatur, fit rurſum 4 N † 3. at ſi tertius in primũ ducatur, & producto ſumma ipſorum adijciatur, fiunt $6\frac{1}{2}$ N † $5\frac{1}{2}$. horum uterq; quadrato æquatur. Sed quia alterius & N & unitatum numerus ijs qui ſunt in altero eſt maior: neque eorum inter ſe ratio eſt, quæ quadrati ad quadratum: ideò ocioſa & inutilis eſt hæc operatio. Eò itaque res deducta eſt loci, ut inueniendi ſint duo numeri, quorum ſumma cum producto unius in alterum multiplicatione, quadratum faciat: ipſorum autem ratio unius ad alterum ſit quæ quadrati ad quadratum. Quando numerus alterius quadruplum ternario ſuperat, unitate aucti inuicem rationem habebunt ut quadratus ad quadratum. Conſtituo primum 1 N, ſecundum 4 N † 3. Oportet etiam productum horum multiplicatione, cum ſumma ipſorum coniunctum, æquari quadrato. Fit autem 4 Q † 8 N † 3. Huic æqualis quadrati latus fingo 2 N —— 3, ipſe eſt 4 Q † 9 —— 12 N, ac 1 N fit $\frac{6}{20}$. hoc eſt $\frac{3}{10}$. tãtus eſt primus, ſecundus $\frac{42}{10}$, ſeu $4\frac{1}{5}$. Ita poſtulatorum uni eſt ſatisfactum. Supereſt, ut productus ſecundi in tertium cum ſumma ipſorum conflet quadratum. Eſto tertius 1 N: & cum ſecundus ſit $4\frac{1}{5}$: productus & ſumma ipſorum facient $5\frac{1}{5}$ N † $4\frac{1}{5}$. æquale quadrato. is ergo ſit 25. Rurſus cum tertius ſit 1 N, primus autem $\frac{3}{10}$: quid ex uno in alterũ producitur, & ſumma amborum conficiunt $\frac{13}{10}$ N † $\frac{3}{10}$. hoc æquatur quadrato, qui ſit 100. Multiplico $5\frac{1}{5}$ N † $4\frac{1}{5}$ in 25, fit 130 N † 105, æquale quadrato. Item $\frac{13}{10}$ N † $\frac{3}{10}$ in 100, fit 130 N † 30, æquale quadrato. Horum differentia eſt 75, ac rurſum duplex ſe obtulit æquatio, fitq; 1 N, 7. tantus eſt tertius, & æqualis ei primus. ſecundus 42. & ſatisfaciunt quæſtioni.

Quadratorũ ſimiles ut inueniendi.

XYLANDRI.

Hæc quoq; propoſitio eſt ex earum numero, quas ut in libro noſtro erant, fateor me non aſſequi. Numeri quidem per has inuenti ambages, propoſito nequaquam ſatisfaciunt. Nam 7 in 42, producunt 294. quibus ſi illorum ſummam 49 addas, 343 habebis, minimè quadratum. Et ſi primum in tertium ducas, 7 in 7, addaſq; 14, habebis 63, itidem non quadratum. De duplici æquatione, dictum eſt ad duodecimam ſecundi ſatis, & aliàs. interuallum 75 componemus ex 3 in 25. quadratum ſemiſsis ſummæ 196. quadratus ſemiſsis diſtantiæ 121. hic æqualis 130 N † 30: ille 130 N † 105. fit utrobique 1 N, $\frac{91}{130}$, *hoc eſt* $\frac{7}{10}$. *hic ergo eſt primus,* $\frac{42}{10}$ *ſecundus,* $\frac{7}{10}$ *tertius. Sed primus in ſecundum facit* $\frac{294}{100}$, *quibus ſi ipſorum ſummam* $\frac{49}{10}$ *ſeu* $\frac{490}{100}$ *addas, fit quadratus* $\frac{784}{100}$. *idem eſt de ſecundo in tertium. ſed tertius in primum facit* $\frac{49}{100}$, *quibus ſi ſummam ipſorum* $\frac{14}{10}$ *ſeu* $\frac{140}{100}$ *addas,* $\frac{189}{100}$ *habebis: nequaquam quadratum. ut ne denominatore quidem reſtituto, tueri Diophanteam poſsimus ſolutionem. Enimuerò poſterioris partis hypotheſis neque cum re, neque ſecum conſentiebat. Quod enim legebatur, ſi numerus alterum ter, ac 3 præterea contineat, addita utriq; unitate eos fore quadratorum ſimiles (hoc eſt enim habere rationem ut quadrati eſt ad quadratum) falſiſsimum eſt, utcunq; expreſſè id uerba habuerint. Ter 6 ſunt 18, adde 3, fiunt 21. adde 1 ad 6 & 21, fiunt 7 & 22, nihil minus quàm quadratorum*

rum ſimiles: niſi fortè quod ex altero in alterum fit 154, quadratus eſt. Id quidem uerum, ſi numerus alter ter & 3 præterea contineat: ſi minori 1 addatur, ſummaq; hæc maiori, poſteriorem ſummam ad priorem ſummam rationem quadrati ad quadratum habituram. erũt enim ſummæ hæ ſimiles quadratorum, & altera in alteram multiplicata aut diuiſa, exſiſtet quadratus. nam ſemper in quadrupla erunt ratione. Quicunq; autem numeri rationem habent, à 4, 9, 16, quocunq; demum quadrato denominatam: ÿ omnino ſimiles ſunt quadratorum, ut alibi eſt demonſtratum. Ter 11, uerbi gratia, ſunt 33, adde 3, ſunt 36. adde 1 ad 11, fiunt 12: ſumma priori 12 ad 36, fit 48, poſterior 12 & 48 ſunt ſimiles quadratorum, ratio quadrupla. Ita ſi numerus alium octies, & 8 præterea cõtineat: unitas minori, & totum hoc maiori ſi addatur, duæ ſummæ erunt quadratorum ſimiles numeri, rationis nimirum nouencuplæ. Si quindecies & 15, ac ſic agat ut iam dictum, fient quadratorũ ſimiles, rationis ſedecuplæ. At quòd autor numeros ponit 1 N & 4 N † 3; id neque cũ ipſius uerbis cohæret: (nã 1 N † 1, & 3 N † 4 poni oportuiſſet) neq; uerum eſt eos quadratorũ eſſe ſimiles. Itaq; nihil haberem heic quidem, quod dicerem, niſi cùm ex ſequenti quæſtione tũ ex re ipſa liqueret pro tripla ratione, quadruplam, pro τριπλασίων, legendum eſſe τετραπλασίων. quod & repoſui. Et huius theorematis ratio quouis exemplo poteſt intelligi. Quis enim neſcit quater 11, † 3, eſſe quater 12, —— 1? Ergo unitas utrobiq; additur, ut ratio quadrupla prorogetur, & fiant de 11 & 47, quadrupli 12 & 48. Itaque de quibuſuis quadratis theorema hoc accipi poteſt. Nam ſi numerus alterum nouies † 8, aut ſedecies † 15, uicies quinquies † 24 contineat, &c. utiq; unitatibus aucti ambo, rationem habebunt nouencuplã, ſedecuplã, uiginticuplã, &c. Cur autem ſolutio non procedat, culpa eſt; quòd tertium primo æqualem ſtatuit: cùm fieri nullo modo poſſit, ut in ſe multiplicatus aliquis numerus cum ſui duplo quadratum conſiciat. atq; id heic fieri oportebat. Neq; uerò Diophanti uitio hoc damus, ſed librario. Medeamur ergo. Verba hæc ἴσω δὲ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος τρίτος, tantus eſt tertius, & æqualis ei primus: ſic legantur, ἴσω δὲ καὶ ὁ πρῶτος τριῶν δεκάτων, ὁ δὲ δεύτ. &c. Tantus eſt tertius. at primus erat 3, ſecundus, &c. Eſt enim uera ſolutio in his numeris $\frac{3}{10}$. $\frac{42}{10}$. $\frac{7}{10}$. Primus in ſecundum facit $\frac{126}{100}$, adde eorum ſummã $\frac{450}{100}$, habes quadratũ $\frac{576}{100}$. de ſecundo in tertium ſuprà diximus. Tertius in primum producit $\frac{21}{100}$. adde eorum ſummã $\frac{100}{100}$, habes quadratum $\frac{121}{100}$. & ſatisfactũ eſt ſubtili admodum artificio quæſtioni. Porrò 25 & 100 quadratos adſciſcere docuit autorem ratio denominatorũ 5 & 10. qui ſunt dupli: quadrati eorũ quadrupli. Reſtat unus ſcrupulus, quòd non poſuit quadratorũ ſimiles, ut uidebatur inſtituiſſe propoſito ad hoc conſequendũ theoremate. ſed eum auferet proxima annotatio.

XIX. Quærantur tres numeri, ita ut binorum multiplicatione productus, adẽpta amborum ſumma, ſit quadratus. Hæc quæſtio ſimilis eſt præcedentis. Statuatur primus 1 N, ſecundus unitatum quotuis. & eodẽ modo in difficultatem inexplicabilem incidemus. Vt ergo multitudinem numerorum ad multitudinem numerorum habeamus ſub ratione quadrati ad quadratum, eò deuoluitur res, ut quærantur duo numeri, quorum unius in alterum multiplicatione factus, demta ipſorum ſumma ſit quadratus. ipſi autem ſimiles ſint quadratorum. Si numerus alterũ quater, ternario demto continet: unitate utrinq; detracta, numeri erunt quadratorum ſimiles. Iam & hoc conſtat, ſi à quadruplis auferantur quadrupla, reſidua fore quadrupla: ac nimirum quadratorum ſimilia. Ponamus ergo primum 1 N † 1, ſecundum 4 N † 1. Quod fit ex uno in alterum, demta amborum ſumma, eſt 4 Q —— 1. id æquatur 4 Q † 4 —— 8 N, quadrato lateris 2 N —— 2. Fit 1 N, $\frac{5}{8}$. Ergo primus erit $\frac{13}{8}$. ſecundus $\frac{28}{8}$ ſeu $3\frac{1}{2}$. Atq; ita uni poſtulatorum ſatisfecimus. Ponamus nunc tertiũ 1 N. huius in ſecundum multiplicatione quod fit, detracta utriuſq; ſumma eſt $2\frac{1}{2}$ N —— $3\frac{1}{2}$, æquale quadrato: is ſit 4. & illa per hunc multiplicata, fiunt 10 N —— 14. Rurſum quod fit tertio in primum ducto, ſi inde ipſorum ſumma auferatur, fit $\frac{5}{8}$ N —— $\frac{13}{8}$. æquale quadrato. is eſto 16. Et per hunc iſtud multiplicetur, fit 10 N —— 26. Interuallum huius producti & prioris, 12. Id componunt 2 & 6. quorum ſummæ dimidium in ſe, facit 16. id maiori æquatur, qui erat 10 N —— 14. fit 1 N 3. is ergo eſt tertius, ſiue $\frac{24}{8}$. Primus $\frac{13}{8}$, ſecundus $3\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{28}{8}$. & ſoluitur his quæſtio.

XYLANDRI.

In Græco denominatores ꝑperã omiſſi erãt, & alia deprauata, alia mutila, ut ex eorũ cũ noſtris *comparatione liquet. Inſtituamus examen. Primus in ſecundum producit $\frac{364}{64}$. ſumma ipſorum $\frac{41}{8}$, id eſt $\frac{328}{64}$, inde ablata, ſupereſt quadratus $\frac{36}{64}$. Secundus in tertiũ gignit $10\frac{1}{2}$. aufer $6\frac{1}{2}$, ſummã eorũ, reſtat 4, quadratus. Tertius in primũ $\frac{39}{8}$ creat. ſumma ipſorũ $\frac{37}{8}$ inde ſubtracta, ſupereſt $\frac{2}{8}$, ſcilicet $\frac{1}{4}$, quadratus. Theorematis, quo autor utitur, itidem eſt euidens ratio. Sumamus 10 pro exemplo. Quis non uidet quater 10, —— 3, eſſe quater 9, † 1? Sic etiam nouies 12, —— 8, ſunt nouies 11 † 1, &c. Alterum uel 19 quinti Euclidis demonſtrauerit. Verùm heic obſerua, nõ ipſos numeros ſimiles quadratorum pro theſibus uſurpari: ſed eos, qui unitate aucti, tales fierẽt, quod etiam in ſuperiore fuit factum propoſitione. Satis enim eſt pro inſtituta operatiõe, hoc nos conſequi, ut numerus Q ſit quadratus, ac proinde latus effingi poſſit, cuius adſcito quadrato æquatio conficiatur. Variandi rationem ipſa theoremata, & eorum explicatio ſuprà allata oſtendunt*

XX. Inueniantur duo numeri, quorum altero in alterum multiplicato, ſiue alteruter ſiue ſumma eorum producto adijciatur: fiat quadratum. Statuamus alterum 1 N, alterum 4 N —— 1. Nam ſi numero unitas deſit ad conficiendum alterius quadruplum: productus ipſorum multiplicatione ſi adſciſcat minorem, fit quadratus. Duo nunc reſtant. ſcilicet ut productus iſte etiam altero, etiam ſumma amborum auctus, quadratum faciat. At cum altero facit 4 Q † 3 N —— 1, cum ſumma 4 Q † 4 N —— 1. quorum utrunq; æquatur quadrato. Eſt & heic oblata duplex æquatio. Interuallum eſt 1 N. quod conficiunt multiplicando 4 N & $\frac{1}{4}$. & fit 1 N, $\frac{65}{224}$. tantus eſt primus: ſecundus $\frac{36}{224}$. & poſtulatis quæſtionis ſatisfaciunt iſti.

XYLANDRI.

Multiplicium quadrato numero proprietas.

Theorema, cui hæc innititur operatio, non de quadruplis tantum, ſed etiam nouencuplis, ſedecuplis, alijsq; rationem habentibus quadrato alicui cognominem numeris unitate deſtitutis uerum eſſe non modò experientia, ſed & ratio oſtendit. Cum enim quadrupli, nouencupli, &c. inter ſe ſint ſimiles quadratorum, & ſua multiplicatione quadratum gignant: ſi 1 auferatur maiori, & per minorem multiplicetur reſiduus, producto utiq; ad quadratum tot deerunt unitates, quot ſunt in minore. Quadrupli 6 & 24. Ergo 6 in 23 ſi duco, & 6 addo producto, quadratus 144 integratur, exſtiturus 6 in 24 ducto. Nouencupli 8 & 72. ergo 8 in 72 ducto, adiectisq; producto 8, fiet 576 quadratus, quem 8 in 72 procreaſſet. Ad duplicem æquationem quod attinet, 1 N interuallum ſcitè ex 4 N & $\frac{1}{4}$ multiplicando compoſuit, cum 4 Q eſſent abolendi æquando, qui ſunt in utroq; numero. Summa (ut rudioribus ſeruiam) eſt 4 N † $\frac{1}{4}$. ſemiſſis 2 N † $\frac{1}{8}$. quadratus 4 Q † $\frac{1}{64}$ † $\frac{1}{2}$ N, æqualis 4 Q † 4 N —— 1. Abijce utrinq; 4 Q & $\frac{1}{2}$ N, & utrobiq; adde 1, erit æquatio $\frac{65}{64}$ || $\frac{7}{2}$ N. fit 1 N $\frac{65}{224}$. huius quadruplum $\frac{260}{224}$, ſi auferas inde $\frac{224}{224}$, ſcilicet unitatem, ſecundum relinquit $\frac{36}{224}$. Denominator in Græco temere eſt (ut plerunq; etiam alias) omiſſus in ſolutionis pronunciatione. Videamus autem an poſtulata impleantur. Qui fit ex $\frac{65}{224}$ in $\frac{36}{224}$, is eſt $\frac{2340}{50176}$. Heic denominatorem omittamus licet, utiq; quadratum: ſed ut producto addere utrunq; datorum, & ſummam etiam ipſorum poſſimus: 65, 36, & ſumma eorum 101, multiplicentur per 224, ut in partibus eiuſdem cum producto nominis exhibeantur. fiunt autẽ, ubi ſingulis 2340 adieceris, 16900, 10404, & 24964. quadrati omnino, laterum 130, 102, 158. & ſatisfactum eſt poſtulatis.

XXI. Duo numeri poſcuntur, ut qui alterius in alterum multiplicatione producitur, ſiue alterutro, ſiue etiam ſumma amborum multatus, quadratus ſit. Eſto alter 1 N † 1. alter 4 N. Nam ſi numero quatuor unitates deſint ad quadruplum alterius præſtandum: qui fit multiplicatione alterius in alterum, maiore multatus quadratum præſtabit. Reſtat ut productus iſte minore etiam, etiam ſumma amborum detracta, quadratus relinquatur. at illic relinquuntur 4 Q † 3 N —— 1. heic 4 Q —— 1 N —— 1, utrunq; quadrato æquale. Interuallum 4 N. quem multiplicando componamus ex 4 N & 1. fitq; 1 N, $1\frac{1}{4}$. Ergo primus erit $2\frac{1}{4}$ ſecundus 5. & manifeſta eſt demonſtratio.

XYLANDRI.

Theorema, cui innititur hæc operatio, cauſam habet facilè perſpicuam. Nam de quocunque quadruplo numero auferas 4, de quocunq; nouencuplo 9, & ſic deinceps: manebunt quadrupli, nouencupli, &c. non eiuſdem, ſed unitate multati numeri alicuius. Ergo reſiduo in

priorem

priorem ducto, ultra quadratū qui è quadruplis fieret, tot unitates prouenient, quot ſunt in maiore. Verbi gratia 48 ad 12 eſt quadruplus. ab illo aufer 4, reſtant 44, non ad 12, ſed ad 11 quadruplus. itaq; duodecies 44 (528) ſunt quadratum è quadruplis 11 in 44 ducto, ac præterea 44. hoc eſt, duodecies 44, —— 44, ſunt undecies 44. Item 63 ad 7 eſt nouencuplus. aufer 9, reſtat 54 non ad 7, ſed ad 6 nouencuplus. ſepties ergo 54 (378) eſt quadratus è nouencuplis 6 atq; 54 procreatus, & 54 præterea. Porrò heic quoq; duplicata eſt æquatio: cuius tractandæ rationem ſuperiore indicauimus problemate. Valor Numeri ſic inuenitur. ſemiſsis interuallum componentium numerorum eſt 2 N † $\frac{1}{2}$*. quadratus 4 Q †* $\frac{1}{4}$ *† 2 N æqualis 4 Q † 3 N —— 1. utrinq; abijce 2 N & 4 Q, adde utriq; 1. erit æquatio* $1\frac{1}{4}$ *|| 1 N. Experiri lubet. Multiplica* $2\frac{1}{4}$ *per 5, habebis* $\frac{45}{4}$*. hinc aufer primum* $\frac{9}{4}$*, reſtat* $\frac{36}{4}$ *ſeu 9, quadratus. aufer ſecundum,* $\frac{20}{4}$*, de producto, reſtat* $\frac{25}{4}$*, quadratus. aufer ſummam amborum,* $7\frac{1}{4}$ *ſeu* $\frac{29}{4}$ *de producto, reſtat* $\frac{16}{4}$ *ſeu 4, quadratus. Multis modis poſſe hypoſtaſes mutari horum problematum, in aperto eſt.*

XXII. Poſcimur quatuor numeros, ita ut quadratus qui à ſumma omnium tanquam latere fit, ſingulorum tam detractione quàm adiectione quadratus fiat. Cuiuſuis trianguli rectanguli latus recto angulo ſubtenſum, quadratum habet, quod ſiue ei addas ſiue adimas duplum eius quod fit è lateribus rectum angulum facientibus, maneat quadratum. Quæro itaq; primum quatuor triangula rectangula, quorum hypotenuſæ ſint æquales. Hoc ipſum uerò aliud nihil eſt, quàm datum quadratum in quatuor quadratos partiri. Atqui didicimus datum quadratum infinitis modis in duos quadratos partiri. Nunc ergo duo exponamus triangula rectangula, quorum latera minimis explicentur numeris. ac ſint 3, 4, 5: & 5, 12, 13. & utriuſq; omnia latera per alterius ſubtenſam multiplicemus: fient 39, 52, 65: ac 25, 60, 65. habemus ergo duo rectangula triangula, quorum æquales ſint ſubtenſæ. Porrò ſuapte natura numerus 65 bifariam in duos quadratos diuiditur: ſcilicet in 16 & 49, ac rurſum in 64 & 1. quod ei contingit, quia continetur multiplicatione 5 in 13, quorum uterque in duos diuiditur quadratos. Sic expoſitorum 49 & 16 accipio latera 7 & 4, ac fingo triangulum rectangulum à numeris duobus, 7 & 4 ſcilicet. idq; erit 33. 56. 65. Similiter latera numerorum 64 & 1, ſunt 8 & 1. à quibus effingo triangulum rectangulum, cuius latera 16. 63. 65. ita fiunt quatuor triangula rectangula, quorum hypotenuſæ ſunt æquales. Refero me nunc ad propoſitam initio quæſtionem: ac ſummam numerorum quatuor, quos quæro, ſtatuo 65 N: quemuis autem ipſorum quadruplū areæ, nota Q inſignitū. primum 3696 Q, quartum 2016 Q. ac ſunt quatuor iſti in unam ſummam coacti 42768 Q, æquales 65 N, ac fit 1 N, * Nunc ad propoſiti partes. primus * & cætera. *

XYLANDRI.

Quadrati in duos alios quadratos diuiſionē docuit autor libri ſecundi propoſitionibus IIX, IX, X. Eſt autē oppidò elegans hæc quadratorum tractatio ad proprietatem orthogonij trianguli adiuncta, demanantem ex 47 primi Euclidis. In Græco ſolutio, & numeri Oedipum requirebant. Numeri 65 natura mirificè autor eſt uſus, qui cum obſcuriùs quædam dixerit, rudiores noſtra adiuuemus agedum opellà. Equidem 5 & 13 in duos utrunq; diuidi quadratos, uel hinc animaduerti poterat, quia uterq; eſt quadratum hypotenuſæ in rectangulo. Non dubito autem quin ad theoremata de quadratis numeris alio opere (aut libris ſaltem ad nos non perlatis) expoſita autor ſe retulerit, cū à lateribus 7 & 4, itemq; 8 & 1 iubet alios orthogonios fieri, quorum itidē ſit hypotenuſa utriuſq; 65. Ingenio heic & ocio me ſuperantibus gloriam rei perobſcuræ explicandæ integram libenter relinquo atq; defero. Dicam tamē nonnihil etiam ipſe pro meo modulo. Oportet cauſam eſſe utiq; aliquā, cur alij duo poſsint ultra priores dati trianguli orthogonij, in numeris non ſurdis (quos uocamus) ſed ueris, quorum itidem hypotenuſa utriuſque ſit 65. nam de prioribus minimè eſt mirum: cùm latera orthogonij omnia eodē multiplicata numero conſtet minimè cōditionem iuſq; ſuum mutare, & hypotenuſa utrobiq; eadem fiat alteris lateribus per 5, alteris per 13 multiplicatis. quod quale ſit, uel ex decimaſexta VII Euclidis, atq; adeò communi (ut dicitur) ſenſu liquet. Sunt ergo trianguli orthogonij latera cùm hæc, 39. 52. 65. tū hæc 25. 60. 65. Sed unde nobis reliqui iſti 33. 56. 65. item 16. 63. 65. prodierunt? Primùm quod de 65 bifariā in duos quadratos partiendo dictum eſt ab autore: id neq; uulgare eſt, & ex dictis

libri

libri ſecundi propoſitionibus, ibiq́ annotatis deprahendi potuit. Sed quî hoc ad præſentem congruat, minimè eſt in promtu uidere. quo, inquam, pacto conſtet adminiculo laterum 7 & 4, item 8 & 1, nouos orthogonios procreari, quorum hypothenuſa utriuſque ſit exactè 65. Quando Diophanteis heic deſtituimur theorematis, noſtram penum excutiamus. Eſt enim à nobis quadratorum mira rimantibus, inter alia etiam hoc obſeruatũ. Quã duorũ numerorũ quadrati ſummã conficiunt: eius ſummæ quadratus conſtet rurſum è duobus quadratis, quorum alterius latus ſit numerus, qui relinquitur quadrato minoris datorũ de quadrato maioris detracto. alterius latus ipſum ſe prodit. Etenim altero detracto quadrato, ſemper quadratus fiet reliquus. Demonſtrationem heic nihil attinet tractare. agemus id ſuo, ut ſperamus, loco. Exemplis ſaltem declaremus. Numeri 2 & 3. ſumma quadratorũ 13. huius quadratũ 169. Numerorũ quadrata 4 & 9, interuallũ 5. Ergo latus quadrati alterius 5, alterius 12. nã 25 de 169 ſubductis relinquitur 144, quadratus lateris 12. Aliud. Numeri 3 & 5. ſumma quadratorũ 34. huius quadratũ 1156. datorum quadrati 9 & 25 interuallo diſtãt 16. huius quadratus 256 de 1156 ablatus relinquit 900, cuius latus quadrati eſt 30. Deniq́ 7 & 10 dati. eorum quadrati 49 & 100. ſumma horũ 149: & eius quadratus 22201. quadratorũ differentia 51. huius quadratus 2601, ſubtractus à 22201, relinquit 19600 quadratũ, cuius latus 140. His ita cõſtitutis, cùm cõſtet quadratorũ de 7 & 4 ſummã conficere 65: quærãtur aũt duo numeri, quorũ quadratorũ ſumma, ſummã quadrati de 65, hoc eſt 4225, æquet: (ob XLVII *primi Euclidis) 16 de 49 aufero, minoris quadratũ de quadrato maioris, relinquitur 33 unũ latus rectũ includentiũ. cuius quadratus 1089 de 4225 quadrato hypotenuſæ ſubtractus, relinquit 3136, cuius latus 56 eſt alterũ rectũ includentiũ latus, manente hypotenuſa 65. Eadem prorſus ratione per numeros 8 & 1 inueniuntur latera 63 & 16.* Canon. *Nã aliud nihil fit, quàm quod minoris datorũ à maioris datorum ſublato quadrato, unũ trianguli habetur iã latus: alterũ ex doctrina theorematis de orthogonio abſoluitur. Quæ ſequuntur apud Diophantũ, ita ſunt mutilata & corrupta, ut ijs corrigendis metuerim ne oleũ atq́ operã perderẽ, adeoq́ laterẽ lauarẽ. Cõſideremus Diophãti theorema de rectangulo triangulo. Duplũ eius quod fit ex uno rectum angulũ includẽtium in alterũ, eſt omnino quadruplum areæ trianguli: ut ex* XLI *primi Euclidis notiſſimũ eſſe debet. Ergo quadruplum illud areæ, ſeu duplum parallelogrãmi rectanguli, quod laterib. cõtinetur rectũ includẽtibus, in ſingulis quatuor iã inuentis rectangulis hanc obtinebit uim, ut quæſtionẽ cõmodiſſimè poſſimus explicare. Nam ſummam quatuor horũ numerorum ponemus 65 N, erit eius quadratus 4225 Q. Numerorum primus eſto duplum eius quod fit baſi in cathetum multiplicata, uel quadratus areæ, puta 4056 Q in triangulo primo, eorum quorum hypotenuſa ſit 65. compoſitus ex 39 in 52 multiplicato, & producto duplicato: hoc eſt ex 39 N in 104 N, aut 78 N in 52 N. Cõſtat autẽ ex theoremate propoſito, 4056 Q uel addita uel ademta 4225 quadratis, exhibere quadratũ 8281 Q aut 169 Q, quorũ latera 91 N & 13 N. Eadẽ lege, ijſdẽ pactis pro areæ quadruplis, triangulorũ ſecundi ponẽtur 3000 Q. tertij 3696 Q. quarti 2016. Tuũ eſt iſta explorare: omnia conſentanea inuenies. Atqui ſumma horũ quatuor numerorum, exactè poſtulatis alioqui reſpõdentium, nõ eſt 65 N, ſed 12768 Q. hæc ergo æquãtur. & fit 1 N,* $\frac{65}{12768}$*. Ergo per hũc radicis ualorẽ hypoſtaſes noſtræ ſunt reſoluẽdæ. Quadratus fiet* $\frac{4225}{163021824}$ *(primi enim ſunt et laterũ, & porrò etiã quadratorũ numeri) habes ſummã omniũ, quæ eſt 1 Q. Quãti porrò ſint quatuor hi 4056 Q, 3000 Q, 3696 Q, 2016 Q, numeri qui quærebãtur quatuor, utq́ perfectiſſimè ſatisfaciãt poſtulatis propoſiti problematis, expertus ſum: ſtatuerãq́ adeò huc adſcribere. Sed ſi te piget multiplicãdo et radices quadratas extrahẽdo nos, q glaciẽ ſecuimus, ſubſequi: dignus nõ es, propter quẽ exſcribẽdi tam bonum cifrarum numerum labore uel famulum noſtrum oneremus. Demonſtrata ergo eſt ſolutio. tu lacunas relictas tuo labore complebis, & Diophantum ac interpretem de iſto pulcerrimo ſubtiliſſimoq́ problemate amabis. Cætera uide ad propoſitionem 8 quinti. Et alia ad primam ſexti & ſequentes*

Theorema de quadratis.

XXIII. Datum numerum partiemur in duos, & inueniemus quadratum aliquẽ qui demta utraq; parte diuiſi, ſit quadratus. Sit datus numerus 10. Quadratum qui reperiatur, pono 1 Q † 2 N † 1, qui ſiue ei 2 N † 1 adimas, ſiue 4 N, manebit quadratus. Erit ergo primus 2 N † 1, ſecundus 4 N. ſummam horum oportebat eſſe 10, at eſt 6 N † 1. ergo hac æquatione proditur 1 N, $1\frac{1}{2}$. Erit itaq;, ſi propoſito inſiſtamus, alter 4, alter 6. & quadratus de quo agebatur $6\frac{1}{4}$.

XYLANDRI.

Nā 4 & 6 ſunt 10 utiq;. Si 4 auferas de $6\frac{1}{4}$, ſuperſunt $2\frac{1}{4}$ quadratus. Si 6, $\frac{1}{4}$ ſupereſt, quadratus ipſe etiā. Cæterùm ſi de 1 Q † 2 N † 1 auferas 4 N, manebit eius reſiduum 1 Q —— 2 N † 1, quadratus lateris 1 N —— 1. ut binomium quadratus erat lateris 1 N † 1. Poterat autē quouis alio quadrato uti. Sit enim 1 Q, à quo ſi uel 2 N —— 1, uel 4 N —— 4 auferas, quadrati relinquentur 1 Q —— 2 N † 1 & 1 Q —— 4 N † 4. Summa partiū 6 N —— 5, æqualis 10. fit 1 N $2\frac{1}{2}$, &c.

XXIV. Propoſitū numerū partiemur in duos, & inueniemus quadratū ita ad has partes aptū, ut utrālibet ei addideris, quadratus fiat. Sit diuidēdus 20. quadratū ſumemus 1 Q † 2 N † 1. Huic ſiue 2 N † 3, ſiue 4 N † 8 addas, quadratus fiet. Hi ergo ſint partes diuidēdi. & eorū ſumma, quæ debuit eſſe 20, fit 6 N † 11. Erunt ergo partes diuiſi 6 & 14. quadratus autem $6\frac{1}{4}$. & euidens eſt demonſtratio.

XYLANDRI.

Fit enim 1 N, $1\frac{1}{2}$. & hoc precio æſtimantur reliqui. 1 Q eſt $\frac{9}{4}$. 2 N ſunt $\frac{12}{4}$. 1 eſt $\frac{6}{4}$. ſumma $\frac{25}{4}$. Porrò 6 & 14. ſunt 20. & ad utrunq; adiectus $6\frac{1}{4}$ quadratus, quadratos cōſtat $12\frac{1}{4}$ & $20\frac{1}{4}$. Si ſumſiſſes loco quadrati, 1 Q, huic ſiue 2 N † 1, ſiue 4 N † 4 addas, fieret quadratus. ſumma partium ſic poſitarum 6 N † 5 æqualis 20. Fit 1 N $2\frac{1}{2}$. Quadratus $6\frac{1}{4}$, numeri partes itidem 6 & 14, &c.

DIOPHANTI ALEXANDRINI RERVM ARITHMETICARVM LIBER QVARTVS.

Guilielmo Xylandro Auguſtano interprete.

1 DAtū numerū diuidemus in duos cubos, quorū laterū ſumma datur. Numerus 370, laterū ſumma 10. Statuo latus alterius cubi 1 N † 5. relinquetur latus alterius 5 —— 1 N. fit ſumma cuborū 30 Q † 250, æqualis 370, dato numero. fit 1 N, 2. Ergo, iuxta præſcriptum quæſtionis, latera cuborū 7 & 3, ipſi cubi 343 & 27.

XYLANDRI.

Numeri erāt in Græco uitiati, & quidā codici alleuerat λ eſſe λεῖψιν. reduuiā ſcilicet curaturus. Hæc quæſtio cōpendio è ſignorū † & —— cōmiſſione repetito ualdè elegāter ab autore ita ſoluitur, ut ſimplex æquatio fiat, neq; in cōnexas tractatio excidat. Et libet in gratiā tironū formulas multiplicationum quibus duo cubi datorum laterum conficiuntur, oculis ſubijcere.

1 N † 5	5 —— 1 N
1 N † 5	5 —— 1 N
† 5 N † 25	—— 5 N † 1 Q
1 Q † 5 N	25 —— 5 N
1 Q † 10 N † 25	25 —— 10 N † 1 Q
1 N † 5	5 —— 1 N
† 5 Q † 50 N † 125	—— 25 N † 10 Q —— 1 C
1 C † 10 Q † 25 N	125 —— 50 N † 5 Q
1 C † 15 Q † 75 N † 125.	125 —— 75 N † 15 Q —— 1 C.

Hi cubi iam ſunt addendi. uides autem ut ab altera parte 1 C & 75 N, horum ab altera parte defectum compenſent. itaq; ijs mutuò peremtis, ſumma fit 30 Q † 250, æqualis 370. & utrinq; reiectis 250, 30 Q æquantur 120. ergo 1 Q eſt 4. proinde 1 N, eſt 2. & omnia facilimè expedita. Quod ſi uulgatam ſecutus rationem, poſuiſſes latera 1 N & 10 —— 1 N, horum cubos inueniſſes 1 C & 1000 —— 300 N † 30 Q —— 1 C. ergo ſumma fuiſſet 1000 —— 300 N † 30 Q, æqualis 370. Primùm ſi addas utriq; 300 N, & adimas 370, erit æquatio inter 630 † 30 Q & 300 N. hoc eſt, quadratis ſeorſim (ut fit in hoc genere) conſideratis, 30 Q & 300 N —— 630. ac denique omnibus numeris per 30 diuiſis, 1 Q æquabitur 10 N —— 21. ut ex hoc connexo quærenda ſit radix quadrata. quod genus æquationis in ſextam Chriſtiferi Rodolfi regulam incidit. & 1 N, fit uel 7 uel 3. hoc eſt utrunq;, ut ex quinta ſecundi Euclidis alio loco eſt demonſtratum

II. Dentur duo numeri tanto quanto poſcitur numero differentes, ita ut cuborum quoq; id ſit quod præſcribitur interuallum. Sit adeò ipſorum differentia 6, cuborũ 504. Pono maioris cubi latus 1 N † 3, ut minoris ſit 1 N —— 3, & horũ interuallũ 6. Reſtat ut etiam cuborũ interuallũ ſit 504. At quo maior minori præſtat, eſt 18 Q † 54. hoc ergo æquatur 504. fit 1 N, 5. Itaq; ſecundum poſita, latus maioris cubi, 8, minoris 2. Cubi ipſi 512 & 8, ac demonſtratio euidens.

XYLANDRI.

In Græco heic quoq; mutilata erat propoſitio. Cæterùm eodẽ rurſum cõpendio uſus eſt autor, ut contineret ſe intra æquationẽ ſimpliciũ ſepta. Fiunt enim cubi numerorũ poſitorum 1 C † 9 Q † 27 N † 27 maior, & minor 1 C —— 9 Q † 27 N —— 27. de his 1 C & 27 N utrinq; detracti, nihil relinquunt, & negatiuum ſignum oſtendit —— 9 Q ac —— 27 non debuiſſe detrahi. adduntur ergo ad reliquos 9 Q ac 27, & fit cuborũ interuallum 18 Q † 54 æquale 504. & utrinq; reſectis 54, 18 Q æquantur 450. fit 1 Q 25, ergo 1 N eſt 5. Quod ſi, ut ſolet aliàs, latera poſuiſſes 1 N & 1 N † 6: cubos procreaſſes 1 C minorem, 1 C † 18 Q † 108 N † 216. unde minore abiecto, reſiduum 18 Q † 108 N † 216 æquaretur 504, ac tandem 1 Q eſſet 16 —— 6 N, quæ eſt quinta Chriſtiferi, & 1 N fit 2, latus minoris cubi, 8 maioris.

III. In quadratum numerum, & in latus eius multiplicabimus alium quendam, ita ut è latere cubus, è quadrato latus eius cubi fiant. Quadratus ſtatuatur 1 Q, erit latus eius 1 N. Qui autem in hos ducitur, ſit numerus unitatum cuiuſcunq; cubi, ac ſit ſanè 8. Eum ſi in 1 Q ducamus, 8 N: ſi in 1 N, 8 inueniemus. Atqui debent 8 N eſſe latus cubicum cubi 8. id uerò eſt 2. ergo 2 æquatur 8 N. & fit 1 N, $\frac{1}{4}$. Ad rem ergo, erit quadratus $\frac{1}{16}$, latus $\frac{1}{4}$, & is qui in horũ utrũq; ducitur, 32. demonſtratio patet.

XYLANDRI.

Heic cùm in Græco mirificè omnia ſint confuſa, uſus ſum mea in uertendo libertate, & bona fide rem ipſam tradidi; quã è uerbis autoris elicere uix potui. In ipſa propoſitione inter ἀριθμὸν & πλευρὰν deerat καὶ αὐξ. πολλαπλασιαζόμενος.) idem enim fit ſiue multiplicet, ſiue multiplicetur, per decimãſextã 7 Euclidis. legi autem inſequẽtia μονάδων ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν ὁσωνδή ποτε. ἔστω δὲ η̄. nam ſignum Numeri male heic fuit inſutum. Quot autem 8 in 1 Q dicit creare 8 N, & 8 in 8 N creare 8 abſolutum: id depreſſioni ſignorum, ſeu deminutioni eſt acceptũ ferendum: fiebãt enim 8 Q & 8 N. Illa aũt καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς β̄, & cætera uſq; ad ὁ ἀριθμὸς δʹ, uitioſa ſunt. hoc omnino fit ut $\frac{2}{8}$ ſit Numerus, quadratus $\frac{4}{64}$, & multiplicãs utrunq; 32. itaq; etiã rectiùs latus ſimpliciſſima minutia exprimitur $\frac{1}{4}$, & quadratus $\frac{1}{16}$. Horũ utrunq; ſi multiplicat 32, (nam 8, cubus aſſumtus, per 4, denominatorem 1 N, multiplicatus tantum facit) gignit 8 & 2. & (quod imperabatur) productus à quadrato latus eſt cubicum eius, qui à latere quadrati fuit productus. Quàm generalis ſit hæc operatio, experiendo facilè ſenties.

IV. Quadrato & lateri eius eundem adijciemus numerum, ut ſummæ idem ſint. Pono pro quadrato 1 Q, cuius latus 1 N. Vtriq; addendus ſit tot quadratorũ, ut cũ 1 Q coniuncti, quadratum faciant. ac ſit 3 Q. Is adiectus 1 Q, fit 4 Q: ad 1 N, facit 3 Q † 1 N. atqui hoc æquatur 2 N, nimirum lateri de 4 Q, fit 1 N, 1. ergo quadratus eſt 1, latus 1, addendus 3.

XYLANDRI.

Ne hoc quidem conſtat. Propoſitio in Græco eſt perobſcura. ποιεῖν τὰ αὐτά. & ſolutio operationi non congruit. Nam ex ſolutione apparet τὰ αὐτὰ ſignificare, debere ſummas eundem eſſe numerum: ſicut 3 utriq; unitati additus 4 facit, qui numeri in Græco perhibentur. Atqui in operatione oſtendit eo quod fit coniunctis addendo & latere, latus confici debere quadrati, quod ex addendo & quadrato ſumto componitur: neque profectò 4 latus eſt quadrati 4. Immò æquatio hæc 3 Q † 1 N || 2 N, facit 1 N non 1, ſed $\frac{1}{3}$: cùm utrobiq; tollatur 1 N, & 3 Q æquentur 1 N, hoc eſt 3 N æquentur unitati. Erit ergo ad hypoſtaſes ſi referamus, 1 Q, $\frac{1}{9}$. latus eius $\frac{1}{3}$. addẽdus 3 Q, hoc eſt $\frac{3}{9}$ ſeu $\frac{1}{3}$. Is quadrato additus $\frac{4}{9}$ facit: ad latus $\frac{1}{3}$ additus, $\frac{2}{3}$. & uerò $\frac{2}{3}$ ſunt latus numeri $\frac{4}{9}$. Ergo τὰ αὐτὰ intelligendũ ita eſt, ut ſumma quæ eſt additi & quadrati, latus ſit ſumma additi & lateris: hoc eſt, additione hac rurſum quadratus & eius latus conficiantur. Proinde etiam numeri quæſtionem ſoluentes mutandi, & ſic legendum eſſet. γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδος τρίτον. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος, ἔννατον, ἡ δὲ πλευρὰ τρίτων; ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς τρίτον. *Hoc autem problema generale eſt, & hanc requirit duntaxat cautionem, ut addendus numerus cum quadrato conſtituat quadratum. Ponamus quadratum 9 Q, latus eius 3 N. addendum 7 Q. Hic cum 9 Q, facit 16 Q, cuius latus 4 N. ei æquatur altera ſumma, 3 N † 7 Q. hoc eſt 1 N ſit $\frac{1}{7}$. Examen. 9 Q, ſunt $\frac{9}{49}$, latus $\frac{3}{7}$, addendus $\frac{7}{49}$, ſeu $\frac{1}{7}$. hũc adde ad $\frac{9}{49}$, habes $\frac{16}{49}$. cuius latus eſt $\frac{4}{7}$. ac tantum fit ſi $\frac{1}{7}$ ad $\frac{3}{7}$ addas, ut uult problema. Hoc modo poſitis 4 Q. 2 N. ſit addendus uel 5 Q, uel 12 Q. uterq; enim congruit. inuenies $\frac{4}{25}$ quadratũ, $\frac{2}{5}$ latus, $\frac{1}{5}$ addendum; uel $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$. & canonem fabricari ex ipſa operatione licet, quo expeditè ſemper hæ hypotheſes reſoluantur. Variari etiam poſitiones poſſe infinities, me tacente experientia & ratio te monebunt.*

V. Quadrato eiusq; lateri idem adijciendus eſt numerus, ita ut uiciſſim ſumma additi & lateris quadratus ſit: & latus eius ſit ſumma dati quadrati additiq; numeri. Sit quadratus 1 Q, latus ergo 1 N. addendum pono aliquot Q, quorum unitates ſint quadratus numerus, deficiente tamen 1 N. ac ſit addendus 4 Q —— 1 N, ergo is lateri 1 N adiectus, ſummam facit quadratam, puta 4 Q. eius latus 2 N. huic æquari debet ſumma quadrati poſiti, & addendi: quæ eſt 5 Q —— 1 N. ſit ergo 1 N, $\frac{3}{5}$. & ad poſitiones eo relato, fit quadratus $\frac{9}{25}$, latus $\frac{3}{5}$, addendus $\frac{21}{25}$.

XYLANDRI.

Multa heic ſunt incommoda, propoſitio quæſtionis obſcura admodum, τὰ ἐναλλὰξ (ſic enim legendum, ut & infrà, non τὰς.) quod pluribus uerbis interpretatus ſum, quia in ſequentibus aliquoties repetitur problematibus. Mutila ipſa operatio, & deprauata. quam ego integram dedi. numeri ſolutionis perperam denominatoribus ſpoliati, addendus etiam uitioſè κδ´ ſcriptus, pro κα´ εἰκοσόπεμπτα. Expediuimus tamen nos, & ueros numeros omnes poſuimus. Poſitionis 4 Q —— 1 N facile eſt rationem peruidere. nam —— 1 N compenſatur 1 N in additione. & 4 oportet quadratum eſſe cùm de eius radice res ſit. Aequatio etiam prompta eſt. Addendus eſt 4 Q —— 1 N, ſcilicet cùm 1 Q ſit $\frac{9}{25}$, ipſe erit $\frac{36}{25}$ —— $\frac{15}{25}$, hoc eſt $\frac{21}{25}$. Is ergo cum latere poſiti quadrati, id eſt cum $\frac{3}{5}$ coniunctus, ſummam conſtat $\frac{36}{25}$, cuius latus $\frac{6}{5}$. idem additicius ſi dato quadrato adiungatur, fiunt $\frac{30}{25}$, quod ipſum planiſſimè eſt $\frac{6}{5}$. Si libuiſſet, quadratum poſuiſſemus 9 Q, aut 16 Q, &c. & latere poſito uero, 3 N aut 4 N, &c. addendum licuit ponere 49 Q —— 3 N, uel 25 —— 4 N, &c. nolo enim perſequi hæc, cùm facilia ſint.

VI. Cubo & quadrato eundem adijcere quadratum, ut rurſum cubus & quadratus eodem ordine exſiſtant. Eſto cubus 1 C, quadratus quotcunque Quadratorum unitatum numero quadrato, uerbi gratia, eſto 9 Q. Iam cùm quadratus ſit inueniendus, qui ad 9 Q adiunctus, quadratum faciat: duos ſtatuo numeros, quorum altero in alterum ducto producatur 9. ut ſunt 1 & 9. aufero 1 de 9, & reliqui ſemiſſem in ſe duco, fit 16. qui adiunctis 9, quadratum facit. Pono ergo quadratum qui addendus illis eſt, 16 Q. is ad 9 Q additus, quadratum conficit. Idem ad 1 C additus, facit 1 C † 16 Q. quod æquatur cubo. Is ſit 8. Erit 1 N, 16. Iam ad præſcripta hoc accommodemus: erit cubus 4096, quadratus 2304. quadratus utriq; addendus 4096.

XYLANDRI.

Ita planè eſt in Diophanto. Sed longè ſecus habet res. Nam ſi æquatio inter 1 C † 16 Q & 8 ſtatueretur, uix, aut ne uix quidem explicari poſſet, cum tres ſpecies æquatio hæc contineret, nõ paribus diſtantes interuallis. Numeros quoque, quibus quæſtio ſoluitur, ſtatim corrigemus. Nã ubi legitur, ἴσα κύβῳ. ἔσω τῷ η̄. legendum eſt ἴσω κύβοις η̄. ut 1 C † 16 Q æquetur 8 C, hoc eſt 16 Q æquentur 7 C; uel deminutis (ut par eſt) characteribus, 16 æquentur 7 N. Ita 1 N ſit non 16, ſed $\frac{16}{7}$. nam denominator heic perperam omiſſus, uitiat totam rem. Iam ad poſtulata quæſtionis accedamus. 1 N eſt $\frac{16}{7}$. ergo 1 Q eſt $\frac{256}{49}$. & 1 C eſt $\frac{4096}{343}$ (non ergo δῡ ς ς ſcribi debuit, ſed δ̄ ς ς̄ τριακοσιοτεσσαρακοστότριτα.) Habemus ergo cubum de quo agitur. Quadratus erat 9 Q, is ergo eſt $\frac{2304}{49}$ (heic rurſum denominator peſſimè eſt præteritus.) Addendus erat 16 Q, hoc eſt $\frac{4096}{49}$ (in Græco idem uitium.) Vt experiamur uerè nos ſatisfeciſſe quæſtioni, addamus $\frac{4096}{49}$ ad $\frac{4096}{343}$. illis in $\frac{28672}{343}$ conuerſis. ſumma conſit $\frac{32768}{343}$, omnino cubus, cuius cubicũ latus eſt $\frac{32}{7}$. Rurſum $\frac{2304}{49}$ & $\frac{4096}{49}$ addita, quadratum conficiunt $\frac{6400}{49}$, cuius latus quadratum ſit $\frac{80}{7}$. Eſt ergo

rectè

rectè ſoluta quæſtio. Quod aũt heic traditur cõpendium de inueniẽdo quadrato qui ad datum quadratũ (aut etiam alium quẽuis numerum) additus quadratum cõſtet: ex his eſt deſumtum, quæ ſuprà ſunt expoſita lib. II. *propoſ.* XXXV.

VII. Cubo & quadrato adijciemus unum eundemq; quadratum, ut eadem quæ ſuprà, uerùm inuerſo fiant ordine. Sit cubus primo, quadratus ſecũdo, his adijciendus quadratus tertio loco. Et quoniã uolo additũ quadratũ adijciendũ ad quadratũ datũ, facere cubũ: faciat cubũ primũ: itaq; primus ſecundũ tertio ſuperat, nimirũ quadrato. tertius. n. eſt quadratus. Iã quoſcũq; duos numero poſuero, eorũ quadrati cũ duplo eius quod ex uno in alterũ fit, quadratũ facient. Debeo itaq; expoſitis duob. numeris, pro ſumma quã eorũ quadrati faciunt, ponere unitatẽ: quoniã unitas æquatur duob. quadratis, ei quod quæritur & ei quod adijcitur, qui ſunt ſecundus & tertius quadrati. duplũ eius quẽ producũt 3. & eſt 3 quadratus. itaq; etiam duplũ eius quẽ producũt, eſt quadratus. Statuo itaq; numeros hos 1 N & 2 N: ut duplũ eius quẽ alter in alterũ ductus producit, ſit quadratus. Horũ itaq; ſumtis quadratis, primũ ſtatuo 5 Q, tertiũ 4 Q, duplũ eius ꝙ fit ex uno in alterũ. Erit ergo ſecũdus 1 Q, ut cũ ſecũdo fiat æqualis primo. Reſtat ut primus ſit cubus. ergo 5 Q ęquãtur 1 C, facit 1 N, 5. Ad poſtulata quęſtiõis hoc aptemus. Erit cubus, primus ſcilicet, 125. quadratus, qui ſecũdũ obtinet locũ, 25. quadratus his adijciendus, tertio loco poſitus, 100. & euidens eſt demonſtratio. *

XYLANDRI.

Videbatur heic Delio opus eſſe natatore, adeò & perplexa & uitiata eſt explicatio. Quæſtio quidẽ planiſſimè ſoluitur. Nã 125 & 100 faciunt quadratũ 225: 100 & 25 faciũt cubũ 125. id eſt, quadratus additus cubo quadratũ, quadrato cubũ facit, ut poſtulabatur. hoc enim eſt ἐναλλὰξ reſpectu præcedentis problematis. & poſitis primo in ordine 5 Q, ſecundo 1 Q, tertio 4 Q, ſi 1 N ſit 5; omnino primus 125, ſecũdus 25, tertius 100 fiunt. Interim qui ſecundi & tertij ſumma 5 Q, cubũ efficiat, nõ explicatur. ἀριθμὸν Λ ποιῶσι, palàm eſt falſum, ut et illa ᾱ ρ̄ ἔστι γ′ τετράγωνος. & μετὰ γὰρ τὰς τρεῖς. in primo Λ abundat. ſecundũ perperã eſt inculcatũ. pro tertio legẽdũ μετὰ γὰρ τοῦ δευτέρου. Res ita habet. Tertius cũ primo quadratũ, cũ ſecũdo cubũ debet conficere. Ponit itaq; autor cubũ, qui eſt primus, æqualẽ eſſe duob. quadratis, dato ſcilicet & adijciendo. Eos aũt quadratos beneficio quartæ ſecũdi Euclidis ſic cõparat. Latera eorũ ponit 1 N & 2 N. horũ quadrati 1 Q & 4 Q ſunt 5 Q. duplũ eius quod uno in alterũ multiplicato producitur, eſt 4 Q. quod ſi ad 5 Q addas, fit quadratus 9 Q. Habes cur primũ 5 Q, tertiũ 4 Q ponat: hũc enim eſſe oportet quadratũ è tenore quæſtionis. ideoq; his potiſſimùm uſus eſt numeris. & quia ſecundus cũ tertio primũ æquare ponũtur, relinquitur mediũ eſſe 1 Q. reſtabat ergo, ut ſecũdi & tertij ſumma primus eſſet cubus. ergo 1 cubo eam æquat, &c.

IIX. Aliter. Sit cubus primo, datus quadratus ſecũdo, additicius quadratus tertio loco. Volo ut hic ſecundo additus, cubũ efficiat qui eſt primus. itẽ ut primus tertio additus, faciat quadratũ. Eò itaq; loci res deducta ſit, ut quærẽdi ſint duo quadrati, quorũ ſumma cũ altero ipſorũ cõiũcta quadratũ exhibeat. ideoq; cũ duo quadrati, datus nẽpe & adiecticius, primũ efficiãt cubũ: ponamus alterũ 1 Q, alterũ 4. ſumma eorũ cũ priore, 2 Q † 4. cui æquabimus quadratũ lateris 2 N — 2, qui eſt 4 Q † 4 — 8 N fit 1 N, 4. Ergo ponemus tertiũ eorũ de quib. agiť numerorũ eſſe 16 Q, ſecundũ 4 Q. ergo primus ſumma horũ, 20 Q. Aequãtur ergo 20 Q uni cubo. & fit 1 N, 20. Eſt ergo primus 8000, ſecũdus 1600, tertius 6400. Atq; hoc modo infinities licet quęſtioni ſatisfacere.

XYLANDRI.

Nã cùm quadrati quæruntur, alter 4 Q, 9 Q, &c. alter 4, 9, 16, &c. poni potuit ꝓ libito. Sed autor in minimis more ſuo ſubſtitit. In Græco δυνάμεων δ Λ ἀριθμῶν η ἐſt mutilatè. ſcribendum δυνάμεων δ, μο δ′, Λ ἀριθμῶν η. Cur latus finxerit 2 N — 2, in promtu eſt, nimirũ ut exſiſterẽt 4 unitates, quæ — 2 abolerẽt. ita enim Q & N deinde æquãtur: 2 Q || 8 N. & fit 1 N, 4. Primus numerus η, ſcribi debet, nõ η β. Ceterùm 8000 cubũ, reliquos quadratos eſſe liquet, & 6400 ad 8000 additus, facit quadratum 14400. ad 1600, cubum 8000.

IX. Cubo & lateri eius eundem adijciemus numerũ, & rurſum cubus ac latus eius exſiſtent. Sit addẽdus numerus, 1 N latus cubi, Numerorum quotlibet ſit ergo 2 N. Ergo cubus eſt 8 C. Iam 1 N, ſi addas ad 2 N, fit 3 N. ſi ad 8 C, fit 8 C † 1 N. Ergo 8 C † 1 N æquatur 27 C. aufer utrinq; 8 C. Ergo 19 C æquantur 1 N, uel (deminutis unitate numeris characterū) 19 Q ęquant̄ 1. Eſt aūt unitas, numerus quadratus. & ſi 19 quoq; Quadratorū numerus, quadratus eſſet: explicari iā ac ſolui æquatio potuiſſet. Sed 19 Q ꝑueniūt ab exceſſu, quo 27 C. ſuperāt cubos 8. horū latus 2 N, illorū 3 N erat. Atqui 2 N ponebātur, & 3 N fiebat, cùm ſemper addēdus 1 N facit Numerorū lateris cubici multitudinē unitate ampliorē. Eò itaq; res redijt, ut quærēdi ſint duo numeri unitate differentes, quorū cubi inter ſe diſtent, quadrato numero. Hos pono 1 N, & 1 N † 1, quorum cubi differunt 3 Q † 3 N † 1. hoc æquabimus quadrato, cuius latus ſit 1 —— 2 N. fit 1 N, 7 . Iā ad poſtulata propoſita hoc ſi cōferamus, numeri erūt 7 & 8. Redeamus ad id quod propoſitū fuit initiò. Statuo numerorū qui adijciendus eſt 1 N, latus cubi 7 N. erit ergo cubus 343 C. & 1 N. Si utriq; adijciatur, facit illū 8 N, hūc 343 C † 1 N. atq; hic debet eſſe cubus, cuius latus ſit 8 N. Proinde 512 C æquabuntur 345 C † 1 N. & fit 1 N, 1. Ad propoſitū. Cubus erit 343, latus 7, numerus addēdus, 1.

Cubi quadrato diſtantes.

XYLANDRI.

Sic in Græco eſt. niſi quod aperta mēda hæc ιθ' δῡ ἢ τετράγωνος, & τῶντε π' ἀριθμῶν, & κύβων πλευρᾶς ἔχοντι: uel cæcus uideat eſſe pro ιθ' δυνάμεων ἢ τετράγωνος, & τῶν τοσούτων ἀριθμῶν, ac κύβον, πλευρὰν ἔχοντι. Itē poſt ἀριθμῶν γ' μο̄, defuit ά. Sed ſolutio quæſtiōis palā eſt falſa. nā ſi 1 ad 343 & ad 7 addas, habebis 344 & 8, quorū hic latus illius cubicū eſſe qui poſſit, cū 344 nō ſit cubus. Certè ſi 512 C æquātur 343 C † 1 N; fiet ut 169 C æquētur 1 N: & deminutis characterib. 169 Q æquētur unitati. Ergo 1 N erit $\frac{1}{13}$. *latus nimirū quadrati 169, diuidet unitatē: ut Algebrici canones exigūt: & nos alibi oſtēdimus. Atq; ſic uera quæſtionis ſolutio exſtabit. Nā 1 N, ſi ſumimus* $\frac{1}{13}$. *erit latus cubi ex hypotheſi poſteriore* $\frac{7}{13}$. *cubus aūt* $\frac{343}{2197}$. *Huic ſi addas* $\frac{1}{13}$, *hoc eſt* $\frac{169}{2197}$, *cōficiētur* $\frac{512}{2197}$ *cubus rurſum, cuius latus cubicū* $\frac{8}{13}$. *ac tantundē fit ſi priori lateri, quod erat* $\frac{7}{13}$, *addas* $\frac{1}{13}$. *uides quid ſit denominatores, maximè diuerſos, omittere. quod paſſim euenit Græcis, quia cifris nō utūtur, & minutias ſeu fractos numeros (ut uocātur) nō eo modo, quo nos, ſcribūt: ſed denominatores ſupernè notant. qui ſæpè aut uitiantur, aut planè negligūtur ab imperitis:* Quorū cubi inter ſe diſtēt.) *Vt totū hoc problema ſit explicatius, formulā ſubijcio. Hinc 1 C abijce. ut habeas cuborū differētiā, quæ exſtat in cōtextu. Cui æquetur quadratus, callidè eius latus fingitur 1 — 2 N, cuius quadratus 4 Q † 1 — 4 N fiat. Sic. n. unitas utrinq; abijci poteſt, itēq; 3 Q. & utriq; addūtur 4 N, itaq; fit æquatio inter 1 Q & 7 N, ſiue 1 N & 7. Eſt ergo 1 N, 7. Non inelegās eſt hoc problema. ſed enitendū mihi in eo interpretādo fuit aduerſus librarij, inſcitiā dicā an oſcitantiam?*

1 N † 1
1 N † 1
quadratus. 1 Q † 2 N † 1
1 N † 1
† 1 Q † 2 N † 1
1 C † 2 Q † 1 N
1 C † 3 Q † 3 N † 1

X. Cubo eiuſq; lateri addemus eundem numerum, ut eadem quæ erant, inuerſo * fiant ordine. Eſto cubus quotcunq; unitatum cubicarum. ac eſto 8. erit latus eius 2 N, hoc eſt latus cubi 27 —— 2 N. & ſi numeris 2 N addantur, fiunt cubi 27. & eſt cubus à latere 3 N. quod ſi cubis 8 adijciantur, faciunt 35 C —— 2 N. Hoc uolumus eſſe latus cubicum de 27 C, quod eſt 3 N. Ergo 35 C —— 2 N æquatur 3 N. fiunt 5 N æquales 35 C. Ergo deminutis characteribus 35 Q æquantur 5. Non poteſt autem æſtimatio 1 Numeri explicari, propterea quòd ſpecies ad ſpeciem non habet rationem quadrati ad quadratum. Enimuerò 35 illi Q ſumma ſunt cuborum 27 & 8. 5 autem ſumma laterum ex quibus illi fiunt. Res itaque in eum eſt deducta locum, ut inuenire duos cubos oporteat, quorum ſumma ad ſummam laterum ipſorum rationem habeat quadrati ad quadratum. Sit ſumma laterum, quotquot libuerit unitatum. ac ſit ſanè 2. ſitq; unius cubi latus 1 N, erit latus alterius 2 —— 1 N. ſumma cuborum 6 Q † 8 —— 1 N. hæc ergo ad ſummam laterum, hoc eſt ad 2, rationem habet quæ quadrati eſt ad quadratum. Eſt autem 2 duplus quadrati: ergo etiam 6 Q † 8 —— 12 N duplum quadrati erit. proinde ſemiſſis, puta 3 Q † 4 —— 6 N æquabuntur quadrato. eius latus ſit 2 —— 4 N. fit ſecūdus 10. & ſecūdū poſtulata erit alterū latus 10, alterū 16. tollo decimaſtertias, & ſemiſſem; ipſorū cuborū ſunt latera 5 & 8. Venio ad principio ꝓpoſitū. ac cubi latus ſtatuo 5 N. erit cubus 125 C. qui additur utriq;, ſit cubus octonarij dēto latere poſiti cubi, hoc eſt ſit 512 C — 5 N. is ad 5 N additus, cubū facit.

Duo cubi, quorū ſumma ad laterū ſummā ut quadrati ad quadratum.

facit. additus autem ad 125 C, facit 637 C — 5 N. hoc debet æquare latus cubi 512 C. ergo 8 N æquales 637 C — 5 N. fit 1 N, 1. & iuxta poſtulata, cubus eſt 125, latus 5, appoſiticius numerus 267.

XYLANDRI.

Quia omnia ſunt deprauatiſſima, ita retuli ferè ut habebantur in Græco: quæ non Dauum profectò, ſed Oedipum uideri poſſunt deſiderare. Emendato ipſe Græca ex noſtra interpretatiõe. Certè 5 & 267 cõficiunt 272, qui nequaquã eſt cubus. multo minus is numerus fiet 392 (quæ eſt ſumma dati cubi & adijciẽdi numeri) in ſe cubicè multiplicato. Et tamẽ ingenioſiſſima eſt quã autor docuit ſoluẽdæ huius quæſtiõis ratio. Itaq; nõ pigebit eã eruere, & reſtitutã ſuæ integritati cũ Lectore cõmunicare. Cubũ quẽuis pro cubo quæſtionis licuit ſumere. ſed more ſuo autor minimum ſumit 8 C. eius radix cubica eſt 1 N. Addendi autem numeri ea eſt cõditio, ut lateri cubico adiectus, cubũ cõficiat, cuius latus cubicũ ſit ſumma cubi dati & addẽdi numeri. Ergo latus dati ab alio aliquo cubo (heic quoq; quiuis poterat ſumi,) utpote 27 C ſubtrahitur: reſiduum 27 C — 2 N eſt addẽdus numerus. liquet enim latere dati cubi, quod eſt 2 N, adiecto, cubũ 27 C integrari, cuius latus cubicũ 3 N. Cæterũ huic lateri debet æquari ſumma dati cubi & numeri additicij, quam uides eſſe 35 C — 2 N. additis utrobiq; 2 N, 5 N æquãtur 35 C; hoc eſt depreſſione facta, 35 Q æquantur 5. Ergo 1 Q fit 7. Heic quid 1 N ſit, dici non poteſt, quia 7 non eſt quadratus. alioqui eius radix quadrata rem explicaſſet. Et ſurdorũ numerorũ uſus locũ heic nõ habet. Ergo alia uia rem aggreditur Dioph. Conſiderat originẽ numerorũ 35 & 5, & nouo problem. uenatur ꝓpoſitũ. Quærũtur duo cubi, quorũ ſumma ad ſummã laterũ rationem habeat quadrato numero explicabilẽ. Latera 1 N, & 2 — 1 N. ſumma 2. Cubi, 1 C, & 6 Q † 8 — 12 N — 1 C. ſumma 6 Q † 8 — 12 N. Porrò 2 eſt duplus quadrati ſcilicet unitatis: (poteramus dicere ſemiſſẽ quadrati, ſcilicet 4, eſſe, ideoq; duplare. ſed minimos numeros optimo inſtituto cõſectantẽ autorẽ ſequamur.) Ergo eius ſemiſſis quadratus. quare, ex hypotheſi huius problematis, etiã ſumma cuborũ ſemiſſis 3 Q † 4 — 6 N quadratus erit, ſeu quadrato æqualis. Vt 4 tolli utrinq; poſſint, ac inter N & Q æquatio ſtatui, ideò huius quadrati latus ponitur 2 — 4 N. quadratus 4 † 16 Q — 16 N æquatur 3 Q — 6 N † 4. Abijce utrinq; 4 & 3 Q, & adijce utriq; 16 N, inuenies æquationem inter 10 N & 13 Q. ſeu 10 & 13 N. Ergo 1 N eſt $\frac{10}{13}$*. quo detracto de ſumma laterum 2, relinquitur* $\frac{16}{13}$*. Sed hæc latera ſi ſumerentur, ſumma non æqualis, uerũ dupla fieret quadrati. ideò ſemiſſes eorum ſumũtur* $\frac{5}{13}$ *&* $\frac{8}{13}$*: ut cubi quoq; ex hypotheſi æquentur quadrato. Quod autem de tollẽdis decimistertijs innuitur, tale eſt. Denominator omitti, adeoq; abijci poteſt & debet. nã eſt cõmunis utriuſq; lateris: ut ſi de cubis numeratorũ conſtet, eorũ ſummã ad 13 habere rationẽ quadrato numero exprimẽdam, abundè ſit rei ſatisfactũ. Numeri ergo in poſteriore problemate deſiderati, ſunt 5 & 8. nam ſumma horũ eſt 13. quadratorũ 125 & 512, ſumma 637, quæ ad 13 eſt ut 49 (quadratus uidelicet) ad 1 quadratũ. His itaq; confectis, reditur ad propoſitum. & cubus datus ponitur 125 C, latus eius cubicũ 5 N. addendus numerus, cubus de 8 N, minus latere poſiti cubi, hoc eſt 512 C — 5 N. cui ſi latus 5 N addatur, cubum fieri eſt euidentiſſimum. Reſtat ut cubus datus addendo adiuncto, hoc eſt 637 C — 5 N æquetur 8 N: lateri nimirum cubico eius cubi qui de 8 N fiebat, & qui detracto dati latere additicius erat numerus. Adde utrinq; 5 N, habes 637 C æquales 13 N. id eſt, characteribus deminutis 637 Q æquales 13, & facta partitione, 49 Q æquabũtur 1 N. Eſt ergo 1 N* $\frac{1}{7}$*. Accõmodemus hoc ad poſtulata. Latus cubi erat 5 N, eſt ergo ipſum* $\frac{5}{7}$*, & cubus datus* $\frac{125}{343}$*. Addẽdus numerus eſt cubus de* $\frac{8}{7}$ *(hoc eſt enim 8 N) utpote* $\frac{512}{343}$*, ſi hinc auferas latus dati cubi, quod eſt* $\frac{5}{7}$ *ſeu* $\frac{245}{343}$*. hoc ſublato, reſtat additicius numerus* $\frac{267}{343}$*. Is cum latere dati cubi* $\frac{5}{7}$ *ſeu* $\frac{245}{343}$ *coniunctus, ſtatim reficit cubum* $\frac{512}{343}$*. Huius cubicum latus eſt* $\frac{8}{7}$*. Adde cubũ datũ* $\frac{125}{343}$ *ad additicium* $\frac{267}{343}$*, ſumma* $\frac{392}{343}$*, hoc eſt planiſſimè* $\frac{8}{7}$*, latus alterius cubi; ut poſtulabatur. nam 49 eſt communis menſura numerorum 392 & 343. Vides iterũ denominatores omiſſos perperam: & nobis ſudandum in reſtituenda re fuiſſe.*

X I. Inueniamus duos cubos ſuis æquales lateribus. In Numeris horum latera ſtatuãtur, 2 N & 3 N. Cubi ergo cõiuncti erũt 35 C, quod ęquatur ſummę laterum 5 N. & depreſſis characteribus 35 Q æquãtur 5. Aequatio hęc rationali numero nõ poteſt explicari. Enimuerò 35 Q ſumma ſunt duorũ cuborũ 8 & 27. & 5 ſumma eſt laterũ cubicorũ iſtorũ. Redijt itaq; res eò, ut quęrẽdi ſint duo cubi, quorũ ſumma diuiſa per ſummã laterũ, quotiẽs ſit quadratus. Hoc aũt oſtẽſum iã eſt. ſuntq; latera cuborũ 5 N, & 8 N. Ad propoſitũ ergo ipſum reuertor, & latera cuborũ pono 8 N & 5 N. Cuborum ſumma 637, ſummæ laterū æqualis, quæ eſt 13 N. fit 1 N, $\frac{1}{7}$. Secundum poſtulata ergo cuborum latera ſunt $\frac{5}{7}$ N, & $\frac{8}{7}$ N. cubi ipſi $\frac{125}{343}$ & $\frac{512}{343}$.

XYLANDRI.

Hæc quæſtio è præcedenti facilè intelligitur. Notum eſt autem, quorum numerorum ratio eſt unius ad alterum ut quadrati ad quadratum, eorum inter ſe uel multiplicatione uel diuiſione numerorum exſiſtere quadratum. Examen. Cuborum ſumma eſt $\frac{637}{343}$. horū numerorū huius fracti communis menſura eſt 49. ergo in primis numeris ſumma ſcribitur hæc $\frac{13}{7}$. atqui tanta etiam eſt laterum $\frac{5}{7}$ & $\frac{8}{7}$ ſumma, quod poſcebatur.

XII. Inueniamus duos cubos, quorū interuallum æquale ſit interuallo laterum cubicorum. Latera ſint 2 N & 3 N. Cuborum hinc ortorum interuallū eſt 19 C: laterum interuallum 1 N. Ergo 1 N æquatur 19 C. Explicari quid ſit 1 N, non poteſt; quia ſpecies ad ſpeciem non habet rationem quadrati ad quadratum. Eò itaq; ſum redactus, ut inuenire opus habeam duos cubos, quorum interuallum ad ipſorum laterum interuallū rationem habeat, quæ eſt quadrati ad quadratum. Sunto latera * cuborum, 1 N, & 1 N † 1. ut differentia ipſorum, puta 1, ſit quadratus numerus. Differentia cuborum eſt 3 Q † 3 N † 1. hæc ad 1, quod eſt interuallum laterum, debet ſe habere, ut quadratus ad quadratum. Ergo quadratus erit, qui producetur horum altero in alterum multiplicato. Producitur uerò 3 Q † 3 N † 1. id æquabimus quadrato cuius latus ſit 1 —— 2 N. & fit 1 N 7. Reuertor nunc ad primum inſtitutum, ponoq́; cuborum latera 7 N, & 8 N. laterum differentia 1 N. cuborum 169 C. ergo hi æquantur 1 N. fit 1 N, $\frac{1}{13}$. Vt ergo poſtulatis faciamus ſatis, latera cuborum ſunt $\frac{7}{13}$ & $\frac{8}{13}$.

XYLANDRI.

Vbi aſteriſcū ſignaui, excidit aliquid. & rurſum denominator fuit omiſſus (ut ferè ſemper) frauſq́; facta ſolutiōi. Cubus de 1 N † 1, eſt 1 C † 3 Q † 3 N † 1. unde ſi alterū 1 C auferas, cuborū differentia ſiue interuallum exſtat. Scitè autem & pereleganter ob uarietatem heic uſus eſt proprietate numerorum qui ſunt quadratorum ſimiles, quòd inter ſe uel multiplicati ij, uel diuiſi, quadratū faciunt numerū. quod uariè, uel ex prima noni Euclidis notū eſt. & latus quadrati appoſitè fit 1—2 N, ut unitate abſoluta utrinq́; reiecta, inter ſe cōparentur Q & N. Finis uidetur intercidiſſe. examē ſubijciamus. Laterū $\frac{7}{13}$ et $\frac{8}{13}$ differētia eſt $\frac{1}{13}$. Cubi ſūt $\frac{343}{2197}$ et $\frac{512}{2197}$. interuallū horū $\frac{169}{2197}$, quod ꝑ ſecūdā ſeptimi Euclidis planiſſimè eſt $\frac{1}{13}$. itaq́; ſatisfactū ꝓpoſito.

XIII. Inueniantur duo numeri, ut maioris cubus adſcito minore numero, æquetur minoris cubo adſciſcēti maiorē numerū. Sint numeri 2 N & 3 N. Maioris cubus adſcito minore numero fit 27 C † 2 N. Minoris cubus adſcito maiore numero fit 8 C † 3 N. Hęc ergo æqualia inuicem. Depreſſis nominibus, fiunt 19 Q æquales unitati. Sed 1 N quid ſit, explicari numero nō poteſt. At 19 Q ſunt interuallū duorū cuborū, unitas laterū eſt differentia. Eò itaq; res mihi redijt, ut quęrendi ſint duo cubi, quorū interuallū ad interuallū laterū ea ſit ratiōe præditū, qua eſt quadratus ad quadratū. Suprà aūt hoc eſt demōſtratū. & ſunt cuborū latera 7 atq; 8. Accedo itaq; ad id quod primò quęrebatur: numeroſq́; ſtatuo 7 N & 8 N, fiunt 343 C † 8 N æquales 512 N † 7. & 1 N fit, $\frac{1}{13}$. Ad poſtulata, numeri ſunt $\frac{7}{13}$ & $\frac{8}{13}$, ac demonſtratio luculenta.

XYLANDRI.

Minus reliquis uitiatum eſt hoc problema: niſi quod falſi ſolutionis numeri proponūtur, denominatore neglecto. Veras examinemus. Minoris cubus eſt $\frac{343}{2197}$. adde maiorē $\frac{8}{13}$, hoc eſt $\frac{1352}{2197}$, habebis $\frac{1695}{2197}$. Maioris cubus eſt $\frac{512}{2197}$, adde minorem $\frac{7}{13}$, hoc eſt $\frac{1183}{2197}$, rurſum habebis $\frac{1695}{2197}$.

XIV. Quęrūtur duo numeri, quorū ſumma, ipſorū uterq;, ſed & interuallū ipſorū, ſi unitas eis ſingulis adijciatur, quadrati numeri fiāt. Si unitatē auferā ab aliquo quadrato, habuero primū. Fingo aliquē quadratū, cuius latus ſit aliquot N & 1. ut 3 N † 1. quadratus hinc fit 9 Q † 6 N † 1. hinc abiecta unitate, primū pono 9 Q † 6 N. Rurſus quia uolumus primū cū ſecūdo & unitate quadratū facere: ſed primus ac ſecundus * iūcti cū unitate & Q 9, N 6 ſunt: ſecūdus aūt cum unitate quadratū cōficit: quærendum mihi obtigit quis quadratus cōiunctus cū 9 Q † 6 N quadratū cōflet. Expono duos numeros, quorū multiplicatiōe unius in alterū fiāt 9 Q † 6 N. hoc in ſeſe multi* plicatū fit 16 Q † 24 N † 9. aufero 1, & ſtatuo ſecundū 16 Q † 24 N † 8. primus aūt eſt 9 Q † 6 N, quorū quiuis cū 1 quadratū facit. reſtat ut etiā differētia eorum cum 1, hoc eſt 7 Q † 18 N † 9, æquetur quadrato. cuius latus ſit nimirum 3 —— 3 N. fit 1 N, 18. ad poſtulata, erit primus 3024, ſecundus 9624. & manifeſta eſt demonſtratio.

XYLANDRI.

Ne propoſitio quidem huius quæſtionis intelligi ex uerbis poteſt. & cùm alia ſunt mutilata, tum 9624 alter deſideratorũ falſus eſt numerus. pro quo repones ε̄ χ̄ κ̄ δʹ, hoc eſt 5624. Hi aũt duo numeri planiſſimè ea præſtant, quæ in quæſtione (ut eſt à me propoſita) exiguntur. Summa ipſorum adiuncta 1, fit 8649, quadratus lateris 93. Si ad priorem numerum 1 adyciatur, fit quadratus 3025, lateris 55. ſi 1 ad poſteriorem numerum addas, quadratus fit 5625, lateris 75. Deniq́ ſi minorem à maiore auferas, relinquitur 2600. atqui 2601 quadratus iam eſt lateris 51. Eſt hæc quæſtio ualdè elegans, & inter quadratorum miracula meritò locum habet. Tractationem ita repoſui, ut inueni: hoc eſt ualdè mutilatam. Primi inuentio expedita eſt. Pro ſecundo requiritur quadratus, qui cum primo coniunctus, quadratum præſtet. cum ubi inueneris, unitate multato: habebis utiq́ ſecundum. itaq́ fiet, ut & ſumma duorũ, & pro ſe quiſque unitate adiecta quadrati omnes fiant. Fient ergo duo quadrati, quorum interuallum ſit 9 Q † 6 N. Heic iam ad duplicatam æquationem recurrendum eſt, quæ ſuprà huius operis libro ſecundo, propoſitione duodecima alibiq́ explicata fuit. Quærendi numeri duo, quorum unius in alterum multiplicatione gignatur 9 Q † 6 N: ea, quæ ibi dicta eſt, lege. Autoris uerba heic exciderunt. Sed cùm dicat ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ γίνεται: licuit diuinare quæ fuerint. rem ego dicam. 16 Q † 24 N † 9 quadratus eſt, cuius latus inueniri etiam uulgata radicis quærẽdæ ratione poſſe, ad decimamſextam ſecundi ſuprà docui. eſt enim ut uides 4 N † 3. Nam ſecutus heic quoq́ eſt Diophantus id quod erat ſimpliciſſimum. numeros, inquam, qui multiplicatione ſua interuallum componerent ſumſit 9 N † 6, & 1 N & quia minor quadratus quæritur, interualli eorum, quod eſt 8 N † 6, ſemiſſem latus eius ſtatuit, rectiſſimè quidem, puta 4 N † 3. Reliqua deinceps plana ſunt. differentia numerorum 7 Q † 18 N † 8. Neque obſcurum eſt, cur latus quadrati ſumſerit 3 —— 3 N, nimirum ut 9 utrinq́ tolli, itaq́ Q cum N componi poſſent. Quadratum eſt 9 Q † 9 —— 18 N, æquale 7 Q † 18 N † 9. abyciuntur utrinque 7 Q † 9, & utriq́ adduntur 18 N: ita 2 Q æquantur 36 N, &c.

$$\begin{array}{c} 16\ Q \dagger 24\ N \dagger 9 \\ \hline 4\ N \quad \dagger \quad 3 \\ \hline 8\ N \end{array}$$

XV. Quæruntur tres numeri, quorum ſumma ſummæ interuallorum quib. ipſi inter ſe diſtant, ſit æqualis. Quoniam differentia maximi & medij, ac differentia medij & minimi, & differentia maximi ac minimi: ſimul iunctę tribus numeris æquantur. ſumma autem hæc eſt duplum differentiæ maximi & minimi. Ergo duplum interualli inter maximum & minimum æquatur tribus numeris. Ponamus minimũ eſſe quadratum unitatis unius, maximum 1 Q † 2 N † 1. Horum interuallum duplicatum fit 2 Q † 4 N, qualium duo dicti ſunt 1 Q † 2 N † 2. Sunt autem hi tres quadrati. Ergo neceſſe eſt hæc ęquari quadrato, cuius latus ponamus 1 N — 4. & fit, 1 N, 9. ad * poſtulata. erit maximus 196, medius 121, minimus 1, omnia per 25. Erit maximus 196, medius 121, minimus 25.

XYLANDRI.

Ita ad me peruenit hæc quæſtio. Non autẽ dubito, quin ad quadratos propriè pertineat hoc problema, & tres hi numeri quadrati requirantur. quod non ſolutio modò problematis, ſed & ordo docendi poſtulat. Cæterùm hoc facilè intelligitur, tribus numeris propoſitis, differentiam maximi & minimi æqualem eſſe reliquorum differentÿs: & proinde omnium differentiarum ſummam, duplum eſſe differentiæ extremorum. quod non de tribus modo, ſed quotcunq́ numeris uerum eſt. & exempla docent.

$$10\left\{\begin{array}{ll} 6 & \\ & \}\,3 \\ 9 & \\ & \}\,7 \\ 16 & \end{array}\right\}\ \textit{Summa } 10. \qquad 18\left\{\begin{array}{ll} 5 & \\ & \}\,3 \\ 8 & \\ & \}\,4 \\ 12 & \\ & \}\,5 \\ 17 & \\ & \}\,6 \\ 23 & \end{array}\right\}\ \textit{Summa } 18.\ \textit{\&c.}$$

CANON: Quod ſi hęc quęſtio quibuſuis numeris ſolui debeat, lõgè facilima eſt ratio. Quoſuis. n. duos numeros ꝓ extremis ponere licet, modo duplũ interualli eorũ ſummã ipſorũ excedat. nã ſtatim ſũma à duplo illo detracta mediũ relinquet. *Qui canõ eſt ex*

Algebra

Algebræ operatione tractus. Pono enim primum 3, minimum, maximum 13. Eſto medius 1 N. Interuallum extremorum 10, eius duplum 20. tanta debet eſſe ſumma trium numerorum. Ergo 16 † 1 N æquantur 20. fit 1 N, utpote medius 4. ut uides. eadem ſumma interuallorum 1. 9. 10. quæ numerorum 3. 4. 13. Quod ſi extremos poſuiſſem 2 & 26. mediũ inueniſſem 20. interuallo 18. 6. 24. ſumma 48, quæ & numerorũ. At ſi extremos poſuiſſem 6 & 16, aut 6 & 14, non ſucceſſiſſet. æquarentur enim 20 & 1 N † 22 illo modo, quod eſt 0 || 1 N † 2. hoc aut 1 N † 20 & 20, quod eſt 1 N || 0. quorum utrunq; eſt abſurdum. Sed, ut dixi, heic de quadratis agitur. Numeri hi, 196. 121. 25. omiſſo denominatore 25, qui innui uidetur, omnino ſatisfaciunt propoſito. Nam quadrati ſunt omnes, & ſummam conficiunt 342. at maior minorem ſuperat unitatibus 171. medium 75, hic minimum 96. qui numeri ipſi quoq; ſummam conficiunt 342. quæ de re uide quæ annotauimus ad decimamſeptimã primi, &c. Sed quo pacto medius & ſumma omnium inueniatur, & ad æquationẽ perueniatur, & quid ſit quod æquetur quadrato lateris 1 N —— 4 qui quadratus eſt 1 Q † 16 —— 8 N; aut unde hæc quadrati fictio pẽdeat, ac quomodo 1 N cognoſcamus eſſe 9: dixiſſe autorem non dubito. Sed exciderint eius uerba. Nos ergo de noſtro ſubſtituamus. Duplum interualli extremorum eſt 2 Q † 4 N, id æquat ſummam trium numerorum. at extremorum ſumma eſt 1 Q † 2 N † 2. eam inde ſi auferamus, relinquitur 1 Q † 2 N —— 2. tantus ergo eſt medius. Sed quadratũ eum eſſe oportuit (nam de quadratis eſt, ut dixi, quæſtio. idq; uolunt uerba hæc, εἰσὶ οἱ τρεῖς τετράγωνοι.) Itaq; cõparatur quadrato 1 Q † 16 —— 8 N, à latere 1 N —— 4 producto, ea ratione nimirum, ut 1 Q utrinq; ſublato æquatio inter N & unitates explicetur. nam additis & ſubtractis quæ ratio iubet, fiũt 10 N æquales 18. & 1 N non 9, ſed $\frac{9}{5}$ eſſe deprehenditur. Maximus ergo eſt $\frac{81}{25}$ (1 Q) $\frac{18}{5}$ ſeu $\frac{90}{25}$ (2 N) & $\frac{25}{25}$ (1.) hoc eſt $\frac{196}{25}$. Eodem modo medius colligitur $\frac{121}{25}$. & minimus manet, ut poſueramus initio, 1. Cur autem denominator abijci debeat ac poſſit, aliquoties in ſuperioribus monui.

$$\begin{array}{c} 10\left\{\begin{array}{l} 3 \\ 4 \\ 13 \end{array}\right. \begin{array}{l} \}\,1 \\ \\ \}\,9 \end{array} \\ \hline 20 \end{array}$$

XVII. Dentur tres numeri, quorum bini in reliquum ducti numeros qui poſtulãtur producant. ſcilicet primus & ſecundus in tertium, 35. ſecundus & tertius in primum, 27. tertius & primus in ſecundum 32. Ponatur tertius 1 N. Ergo primus & ſecundus 35 N. Eſto primus 10 N, ſecundus 25 N. duo adhuc poſtulata ſunt nobis præſtanda. Secundus & tertius in primum debent 27 producere, at producunt 10 † 250 * Q. hoc ergo æquatur 27. Tertius & primus in ſecundum faciunt 25, † 250 Q, & 32: & 10, & 250 Q æquantur 27. exceſſus unitatum ſuper unitates, 5. ut ſi etiam 10 † 250 Q ultra 25 † 250 Q habuiſſent 5, æqualia utique fuiſſent interualla. ſed 25 unitates à ſecundo ſunt, 10 à primo. Volo eorum interuallum eſſe 5. Ipſi autem primus & ſecundus non ſunt quiuis, ſed coniuncti faciunt 35. Vſuuenit ergo mihi, ut 35 diuidam in duos numeros. quorum differentia ſit 5. Ij ſunt 15 & 20. ſtatuo primum 15 N, ſecundum 20 N. Ita ſumma ſecundi & tertij in primum facit 15 † 300 Q æquale 27. ſumma primi & tertij in ſecundum 20 † 300 Q æquale 32. & ſi 15 † 300 Q æquem 32, fit 1 N, 5. ad poſtulata ergo primus numerus eſt 3, ſecundus 4, tertius 5.

XYLANDRI.

a $\frac{35}{1\,N}$ b $\frac{10}{1\,N}$

c $\frac{25}{1\,N}$ d $\frac{25}{1\,N}$

e $\frac{1\,Q + 25.}{1\,N}$

f $\frac{10}{1\,N}$

g $\frac{10\,Q + 250}{1\,Q}$

h $\frac{10}{1\,N}$ i $\frac{1\,Q + 10}{1\,N}$

k $\frac{25}{1\,N}$

l $\frac{25\,Q + 250}{1\,Q}$

m $\frac{10}{1\,N}$ n $\frac{25.}{1\,N}$

Nam 7 (A & B iuncti) in 5, gignunt 35. 9 (B & C iuncti) in 3, faciunt 27. 8, (nempe C & A iuncti) in 4, 32 producunt. & poſtulatis ſatisfit planiſſimè. Operatio autem Sphingis ænigma uideri poteſt. & in uertendo quale eſt in Græco reliqui. Conabimur tamen explicare. Tertius ſi ſit 1 N, cùm per ſummam primi ac ſecundi multiplicatus 35 procreare debeat, hanc[a] eſſe oportet. Hanc ſummam in primum & ſecundum pro arbitrio primùm diſtribuo. nimirum in[b] &[c]. nam ſicut $\frac{10}{111}$ & $\frac{25}{111}$ facerent in ſumma $\frac{35}{111}$: ita heic quoq; res habet. Proinde ſecundi & tertij ſumma ſunt 1 N[d] hoc eſt[e]. Eam multiplico per primum[f] producitur[g] æquale 27. hoc eſt 10 Q † 250 æquale 27 Q. Rurſum tertij & primi ſumma eſt 1 N[h] nimirum[i]. id multiplico per ſecundum[k], producitur[l] æquale 32. hoc eſt 25 Q † 250 æquantur 32 Q. His duabus æquationibus inter ſe comparatis, cum utrinq; abijci 250 expediat: ſi inter 10 & 25 idem eſſet quod inter 27 & 32 interuallum, (nam notam Q undique abijcere licet) res iam ad æqualitatem deducta, adeoq; confecta eſſet. Atqui ſatis apparet, inæqualitatem inde ortam, quòd temerè ſummã primi & ſecundi, non ratione diuiſimus in[m] &[n]. nam ſi 10 & 25 quinario differrẽt itidem ut 27 & 32, eſſemus in uado. Ergo 35 diuidemus in partes duas, quarum interuallum ſit 5. itaque errorem arte corrigemus: nam ſi id ab initio feciſſemus (docendi autem gratia & induſtriæ acuendæ

acuendæ Diophantus incommodam diuiſionem priore loco propoſuerat. cum poſteriorem diuiſionẽ requiri peritus facilè perſpiciat) labore hoc ſuperſediſſemus. Diuiſio eſt facilima, & probl. 2.lib.1. huius operis explicata. partes 15 & 20. Ergo primo[a]*, ſecundo*[b] *tribuemus. operatiq́ ut* a $\frac{15}{1\,N}$
priùs (omnia ſcribendo inculcare nihil attinet) 15 Q † 300 æquari 27 Q, itemq́ 20 Q † 300 æ- b $\frac{20}{1\,N}$
quari 32 Q inueniemus. abijce utrinq́ 300. uides antecedentes 15 & 20 eodem auctos numero, quo 27 & 32 conſequentes. non enim heic proportione, ſed interualli æqualitate conſtat æqualitas. Ergo 5 eſt ultimus numerus, primus 3, ſecundus 4. ut diſputare de corruptiſſimis Diophanti uerbis prolixius, non ſit opus.

XVII. Tres numeri quærantur, quorũ ſumma ęquet quadratũ: ita ut quadratus cuiuslibet ipſorum, cum ſequente ipſum numero quadratum conficiat. Medium ponamus numeros quotquot libuerit. ac ſit 4 N. cũq; debeat quadratus primi huic adiectus quadratũ facere: in eo nunc res uertitur, ut inueniam quadratũ, cui ſi adijciam 4 N, ſumma ſit quadratus. Pono duos numeros, quorũ unus in alterũ multiplicatus producat 4 N. atq; hi ſunt (qui eũ metiũtur) 2 & 2 N. quorũ interualli ſemiſſis 1 N — 1 ponatur pro numero primo. Iam ergò hoc eſt confectũ, ut primi quadratũ cũ ſecũdo numero faciat quadratũ. Reſtat ut medij quoq; quadratus adſcito tertio quadratũ cõficiat. hoc expedietur, ſi quadratũ habeã, qui ademtis 16 Q. maneat quadratus. Pono latus eius 4 N † 1. fit quadratus eius 16 Q † 8 N † 1. aufer 16 Q. habes tertiũ, 8 N † 1. Supereſt ut hi tres quadratũ ſua ſumma conficiãt. at ſumma eſt 13 N. huic æquabimus 169 Q. fit 1 N, 13 Q. Ad propoſitũ hæc aptemus. Erit primus 13 Q — 1, ſecũdus 52 Q. tertius 104 Q † 1. Ita tria iã poſtulata impleuimus, non definito etiamnũ quid uel quantũ ſit 1 N. Reſtat ut quadratus tertij, hoc eſt 10816 Q Q † 208 Q † 1, cum numero primo ſummam condat quadratam. At ſumma eſt horum 10816 Q Q † 221 Q. & depreſſis characteribus 10816 Q † 221. hoc æquatur quadrato. Ponimus eius latus 104 N † 1. Fit 1 N ^{1},55. Quod ſi ad poſtulata transferatur, erit primus 36021, ſecundus 157374, tertius 317304.

XYLANDRI.

Ex mea uerſione corrigi pleraq́ Græcorum uerborum menda poſſunt. Eſt autem ualdè ingenioſa ſolutio quæſtionis, ſic ſatis difficilia quatuor poſtulata habentis. Ratio primi inueniendi explicata eſt ad decimam quartam huius, & ſextam eiuſdem, ac trigeſimamquintam ſecundi. tertij pendet à fictione laterum, ſæpenumerò indicata. Trium autem numerorum ſummam callidè 169 Q Q æquat, ut in fine poſſet fingendo latere quadrati poſt depreſſos characteres ſoluere quæſtionem æquatione explicata. Poſtrema æquatio ſic habet. Lateris 104 N † 1 quadratus eſt 10816 Q † 208 N † 1, cui æquatur 10816 Q † 221. abijciuntur utrinque Q, & unitas. ita æquantur 208 N ac 220. fit 1 N, $\frac{55}{52}$. (In Græco numeri ſunt corruptiſſimi; quibus ſatisfieri quæſtioni debuit: ob ineptam minutiarum notationem.) Ergo 1 Q facit $\frac{3025}{2734}$, & 13 Q ſunt $\frac{39325}{2704}$. unde ſi auferas $\frac{2704}{2704}$, hoc eſt 1, primus extabit $\frac{36621}{2704}$ (lege γ̄ ς,χκα,β,ψδα.) Secũdus eſt $\frac{157300}{2704}$ (ſcribe ιε̄ ζ,τ repetito denominatore.) Tertius $\frac{317304}{2704}$ (pro numeratore λᾱ ζ,τ̄ δ, rectè ſcriptum fuit.) Cæterùm denominatore abiecto numeri ſunt falſi. Longum autem eſt & ualdè operoſum examen. Sũma omnium $\frac{511225}{2704}$, quadratus numerus, cuius latus $\frac{715}{52}$. Ne ignauis uidear ſeruire, cætera tibi relinquo exploranda. omnia conſentanea deprehendes.

XIIX. Dentur tres numeri, quorum ſumma ſit quadratus numerus: cuiuſuis aũt ipſorum quadratus demto qui eũ ordine inſequitur numero, quadratus reſtet. Medium rurſus ſtatuo 4 N: & cum hoc detracto quadratus primi ſit futurus quadratus: ſupereſt ut quadratum inueniam qui demtis 4 N maneat quadratus. Quærãtur duo numeri, quorum alterius in alterum multiplicatione 4 N producantur. hi ſunt, qui eum metiuntur, 2 & 2 N. horum ſummæ ſemiſſem 1 N † 1 ſtatuo primũ numerum. Sic uni poſtulatorum ſatisfactum eſt. Porrò cùm quadratus ſecũdi tertio multatus numero debeat quadratum relinquere: quadratum lateris 4 N — 1, quod eſt 16 Q † 1 — 8 N aufero de quadrato ſecundi, id eſt 16 Q. relinquitur tertius 8 N — 1. ſic ſecundo etiam poſtulato ſatisfit. Rurſum quia tres hi, hoc eſt ſumma eorum 13 N, æquantur quadrato, id ſit 169 Q Q. Ergo 1 N fit 13 Q. quod ſi poſitis applicetur, fit primus 13 Q † 1, ſecundus 52 Q, tertius 104 Q — 1. Ita rurſum indefinitè tria poſtulata ſunt abſoluta. Supereſt ut quadratus tertij demto numero primo conſtet quadratũ. at qua-at quadratus ille primo detracto numero fit 10816 Q Q —— 221 Q. & depreſsis characteribus 10816 Q —— 221. Hoc æquatur quadrato, cuius latus ponimus 104 N —1, fit 1 N, 111. Ad propoſitum, erit primus 17 —— 89. ſecundus 64 unitates 692. tertius 127,568.

XYLANDRI.

Qui cum metiuntur.) *Alter ſcilicet altero. de qua re dictum eſt ad ſecundi xxxv. Cæterùm quia hic maior quæritur quadratus, ſumma ſemiſſe utitur. ἀορίστως, indefinitè ſolui eſt, cũ æſtimatione Numeri nondum comperta operamur. Finis quæſtionis eſt deprauatus. Vltima æquatio ſic habet. Quadratus lateris 104 N —— 1 eſt 10816 Q † 1 —— 208 N, cui æquatur 10816 Q —— 221. Quadrati utrinq; abÿciuntur, itemq; 1, & adduntur utriq; 208 N. ita fit, ut tandẽ 208 N æquentur 222. fit ergo 1 N, non 111, ſed* $\frac{111}{104}$. *& 1 Q eſt* $\frac{12321}{10816}$ *Ergo 13 Q ſunt* $\frac{160173}{10816}$, *adde 1, habes primum* $\frac{171717}{10816}$. *ſecundus eſt* $\frac{610692}{10816}$. *tertius* $\frac{1296840}{10816}$. *Horum ſummam inuenies* $\frac{2082249}{10816}$ *quadratum, cuius latus* $\frac{1443}{104}$. *Cætera ipſe comperies ſatisfacere poſtulatis.*

XIX. Inueniendi ſunt duo numeri, quorum primi cubus coniunctus cum ſecũdo, cubum conficiat: ſecundi autem quadratus primo adiecto, quadratum exhibeat. Pono primum 1 N: ergo alter eſt 8 —— 1 C. ita fit ut primi cubus addito ſecundo numero cubus ſit. Reſtat ut quadratus ſecundi primo adiuncto ſit quadratus. At ſecundi quadratus adiecto primo fit 1 CC † 1 N † 64 —— 16 C. * Vbi ſi quæ deſunt addas, quæ abundant auferas ęqualia ab ęqualib. utrobiq;: relinquuntur 32 C ęquales 1 N, hoc eſt deminutis characteribus, 32 Q æquantur 1. Eſt autem 1 quadratus. & ſi 32 Q etiam quadratus eſſet, iam ſolutam dediſſemus æquationem. Enimuero 32 illi C proficiſcuntur à bis 16 C, ortis ex duplicata multiplicatione 1 C in 8. itaque 32 Q ex quater 8 orti ſunt. Proinde id mihi incumbit, ut inueniam cubum, qui per quatuor multiplicatus, quadratum procreet. Is cubus eſto 1. cuius quadruplũ æquatur quadrato. ac ſint 4 C æquales 16 Q. fit 1 N, 4. Hoc accõmodemus inſtituto. Sit 1 C, 64. Statuo ſecundum 64 —— 1 C. Reliquum eſt ut huius quadratus primo numero adiecto, quadratus maneat. Sed quadratus ſecundi cum primo numero coniunctus, facit 1 CC † 1 N † 4096 —— 128 C. hoc ęquatur quadrato. cuius latus fit 1 C † 64. ipſe 1 CC † 128 C † 4096: additis & detractis quæ ratio imperat, tandem 256 C æquantur 1 N. fit 1 N $\frac{1}{16}$. Ergo ad rem, primus eſt $\frac{1}{16}$, ſecundus $\frac{262143}{4096}$.

XYLANDRI.

Nam primi cubus eſt $\frac{1}{4096}$ *qui additus ſecundo, conficit cubum* $\frac{262144}{4096}$, *cuius latus cubicum* $\frac{64}{16}$ *ſiue 4. Quadratus ſecũdi* $\frac{68718952449}{16777216}$. *adde* $\frac{1}{16}$, *hoc eſt* $\frac{1048576}{16777216}$ *ſumma fit* $\frac{68720001025}{16777216}$, *quadratus lateris* $\frac{262145}{4096}$. *quod annotandum duxi. Porrò ubi aſteriſcum poſui: exciderunt hæc circiter uerba. Hoc æquatur quadrato. cuius latus pono 1 C † 8. quadratus 1 CC † 16 C † 64.*
Διαχειρίζειν. *Ita omnia conſtabunt. Cubum διακεχειρισμένον γεγονότα heic uocari cubum per 4 multiplicatũ, res ipſa me docuit. Ita & in ſequenti διακεχειρῖσθαι eſt quadruplicari.*

XX. Inueniantur in infinitate tres numeri, ut bini ſemper quem producunt unius in alterum multiplicatione, is addita unitate fiat quadratus. Vt habeam productũ primi in ſecundum, aufero 1 de quocunq; libuerit quadrato. eius latus ſit N aliquot pro arbitrio, & 1. ſit latus 1 N † 1, erit quadratus 1 Q † 2 N † 1. ergo primus in ſecũdum facit 1 Q † 2 N. Sit ſecundus 1 N. ergo primus 1 N † 2. Rurſus ſecundi in tertium productus cum unitate quadratus ut fiat: eodem modo agens, à latere 3 N † 1 quadratum procreo 9 Q † 6 N † 1. aufer 1, ergo quod fit ex ſecundo in tertium, eſt 9 Q † 6 N. Atqui ſecundus eſt 1 N. ergo tertius 9 N † 6. Denique productus è multiplicatione tertij in primũ, adſcita unitate, eſt 9 Q † 24 N † 13, æquale quadrato. Hic numerus Q eſt quadratus. & ſi duplũ eius quod fit ex latere iſtius numeri in unitates abſolutas æquaretur numero Numerorum: indefinitè iam ſatisfactũ eſſet tribus poſtulatis. Cęterùm 13 unitates heic confectæ ſunt ex multiplicatione 2 in 6, & additione 1. Porrò unitates duæ ortæ ſunt ab eo quod fiebat bis 1 N ducto in 1. & unitates 6 ab eo quod fiebat bis 3 N ductis in unitatem. Volo itaq; ut bis numeri in bis numeros ducti cum unitate faciant quadratum. Atqui bis numeri in bis numeros ducti, ſunt quadruplũ numerorum. uolo ergo quadruplum ipſorum addita unitate fieri quadratum. Enimuerò quorumcunq; duorum numerorum, unius in alterum producti quadruplus cum quadrato differentiæ ipſorum, quadratum facit. Ergo ſi quadratum numerorũ differētię ſtatuamus 1, quod ſit uno in alterũ multiplicato, eius quadruplũ cum 1, facit quadratũ. & ſi differentiæ quadratũ ponimus unitatẽ, ipſa quoq; differētia erit unitas. Itaq; latera quadratorũ quibus heic utimur, ſtatuenda ſunt in Numeris deinceps, addita unitate. puta ut ſint 1 N † 1, 2 N † 1. Proinde quadratus lateris 1 N † 1 eſt 1 Q † 2 N † 1. unde ſi auferas unitatem, primi in ſecundum productus multiplicatione eſt 1 Q † 2 N. eſto ſecundus 1 N, erit primus 1 N † 2. Rurſum quadratus lateris 2 N † 1 eſt 4 Q † 4 N † 1. aufer 1. ergo ſecundus in tertium facit 4 Q † 4 N. & cùm ſecundus ſit 1 N, erit tertius 4 N † 4. Atq; ita ſoluta eſt quæſtio indefinitè, ut bini quiq; unius in alterum multiplicatione numerum producant, qui addita unitate quadratus fiat. 1 N autem quot libuerit unitatum æſtimabis. Hoc enim eſt infinitè quærere, tales poſitiones conſtituere, ut quamcunq; Numeri æſtimationem ijs accommodes, ſemper propoſiti poſtulatis ſatisfiat.

Infinitè quærere.

XYLANDRI.

Tertius in primum quoque, 4 Q † 12 N † 8 producit, cui ſi addas 1, quadratus eſt, lateris 2 N † 3. Volumus autem has hypoſtaſes examinare, 1 N ualore poſito 5 & 12. Primus hoc modo fit 14, ſecundus 12, tertius 52. At 14 in 12 ſunt 168. in 52, 624. 52 in 14, 728. His ſingulis 1 adde, habes quadratos 169, 625, 729. Illo modo primus eſt 7, ſecundus 5, tertius 24. producti 35, 120, 168. aucti unitate 36, 121, 169. Tute in alijs quibuſuis experiare licet numeris. Vt autem oſtenderet Diophantus quadratorum latera qua lege eſſent ſumenda, uſus eſt theoremate, quod ex quinta ſecundi Euclidis facile demonſtrari poteſt. Numeri 7 & 12. productus 84. quadruplum 336. adde 25 differentiæ quadratum, fit 361 quadratus. Numeri 3 & 11, productus 33, quadruplum 132. differentia 8. quadratum 64 cum 132 facit 196 quadratum.

Quadruplum producti cum quadrato differentiæ producentiũ, quadratus.

XXI. Dentur quatuor numeri, quorum bini quem alter in alterum dnctus faciũt, is addita unitate fiat quadratus. A' quadrato aliquo unitatem ſi detraxero, reſiduus erit is qui fit ex primo in ſecundum. Sit quadratus lateris 1 N † 1, ſcilicet 1 Q † 2 N † 1, unde ſi abijcio 1, quod ex primo in ſecundum fit, 1 Q † 2 N relinquitur. Sit ergo primus 1 N, ſecundus 1 N † 2. Rurſum ut quod ex primo in tertium fit, adiuncta unitate ſit quadratus: ſecutus ea quæ ſuprà demonſtraui, quadratum lateris 2 N † 1 ſumo, quod eſt 4 Q † 4 N † 1. ergo unitate abiecta 4 Q † 4 N eſt quod fit ducto primo in tertium. Et cùm primus ſit 1 N, erit tertius 4 N † 4. Iam quia uolo quod fit ex primo in quartum adſcita unitate fieri quadratum: deinceps à latere 3 N † 1 quadratum fingo 9 Q † 6 N † 1. & abiecta unitate, qui fit ex primo in quartum relinquitur 9 Q † 6. & cùm primus ſit 1 N, erit quartus 9 N † 6. Porrò qui fit ſecundo ducto in quartum, unitate adſcita quadratum facit. atqui ſic conflatur 9 Q † 24 N † 13. Huic æquabimus quadratum à latere 3 N † 4. Fit 1 N 1. Ergo ſecundum poſita, primus eſt 1, ſecundus 33, tertius 68, quartus 105.

XYLANDRI.

Vbi in uertendo à palàm falſis deſciuerim, conferendo experieris. Sed profectò & æquatio ultima, & ſolutionis numeri falſiſſima ſunt. Nam quadratus à 3 N † 4, eſt 9 Q † 24 N † 16. cum quo ſi æques 9 Q † 24 N † 13. utrinq; 9 Q † 24 N reiectis, 13 & 16 æquabuntur, quod eſt abſurdiſſimum. Itaq; latus faciemus 3 N —— 4. ut quadratus 9 Q —— 24 N † 16 æquetur 9 Q † 24 N † 13. nã ſic utrobiq; abiectis 9 Q ac 13, & additis 24 N, æquabũtur 3 & 48 N. facit 1 N, $\frac{1}{16}$. ac tantus eſt primus. ſecundus 1 N † 2. eſt $2\frac{1}{16}$. ſeu $\frac{33}{16}$. tertius 4 N † 4 eſt $4\frac{4}{16}$ hoc eſt $\frac{68}{16}$ uel $\frac{17}{4}$. quartus 9 N † 6 eſt $6\frac{9}{16}$ ſiue $\frac{105}{16}$. Primus in ſecundum creat $\frac{33}{256}$, adde 1, id eſt $\frac{256}{256}$. habes $\frac{289}{256}$ quadratum. Primus in tertium facit $\frac{68}{256}$. adde $\frac{256}{256}$, utpote unitatem, habes $\frac{324}{256}$ quadratum. Primus in quartum facit $\frac{105}{256}$, adde 1, habes $\frac{361}{256}$ quadratum. Secundus in tertium producit $\frac{2244}{256}$. adde 1, fiet quadratus $\frac{2500}{256}$. Secundus in quartum facit $\frac{3465}{256}$. adde 1, fit $\frac{3721}{256}$, quadratus lateris $\frac{61}{16}$. Tertius denique in quartum, producit $\frac{7140}{256}$. adde 1, habes quadratum $\frac{7396}{256}$, cuius latus $\frac{86}{16}$. quod uolui demonſtrare.

XXII. Tres numeri proportionales inueniantur, quorum binorum differentia ſit numerus quadratus. Ponatur minimus 1 N, medius 1 N † 4, ut eum excedat quadrato. tertius quoq; 1 N † 13, ut quadrato ſuperet medium. Porrò maximi & minimi differentia ſi eſſet quadratus numerus, iam indefinitè ſatisfactū quæſtioni eſſet. Eſt aūtem 13, qui numerus componitur additis 9 ad 4. Quærendi igitur ſunt duo quadrati æquales uni quadrato. quod facilè fit lateribus trianguli rectanguli ſumtis 9 & 16. Statuo minimum 1 N, mediū 1 N † 9, maximū 1 N † 25. Horum ſemper bini quadrato differunt. Supereſt ut etiam proportionales ſint. At qui tales ſunt, corū medij quadratus ęquatur producto ex primo in ultimum. Hic eſt 1 Q † 25 N. id ergo æquatur 1 Q † 18 N † 81 quadrato medij, fit 1 N 81. ac tantus eſt primus, ſecūdus 140. tertius 56.

XYLANDRI.

Aequationis & quæſtionis ſolutionem falſam eſſe, liquidò conſtat. Nam ſi ab 1 Q † 18 N † 81 & ab 1 Q † 25 N abijcias 1 Q † 18 N, reſtabunt 81 & 7 N aequalia. ergo 1 N eſt $\frac{81}{7}$. Hi autem tres numeri 81, 140, 56. ſi eſſent proportionales, implerent etiam conditionem à noſtro deſcriptam, & ab Euclide demonſtratam lib. 7. propoſ. 20. At 81 in 56 multiplicatus, producit 4536. & quadratum de 140 eſt 19600, numeri nihil minus quàm aequales. Qui uerò ſint proportionales illi, cum uterq; ſit minor medio, immò etiam ſumma ipſorum eum non attingat? Iam 81 ab 140 ſubductus, 59 relinquit, nequaquam quadratum. ut neq; 84 quadratus eſt, quem 56 ab eodem ſubtractus relinquit. Quæramus ergo ueros & poſtulatis ſatisfacturos numeros. 1 N eſt $\frac{81}{7}$. ergo tantus primus. ſecundus 1 N † 9, eſt $\frac{144}{7}$. tertius 1 N † 25, eſt $\frac{256}{7}$. Hos eſſe proportionales conſtat. Nam primus in tertium $\frac{20736}{49}$ producit. ac tantundem eſt medij quadratus. Proportio autem maioris ad minorem eſt utrobiq; 16 ad 9. Porrò aufer primum à ſecundo, ſuperſunt $\frac{63}{7}$. hoc eſt 9 quadratus. à tertiò, reſtant $\frac{175}{7}$, id eſt 25, quadratus. Ab eodem ſecundum, relinquuntur $\frac{112}{7}$, id eſt 16, quadratus.

XXIII. Inueniantur tres numeri, ut qui eorum multiplicatione ſolidus cōficitur, cum quouis ipſorum cōiunctus, quadratum faciat. Ponamus ſolidū ex his tribus ortū, eſſe 1 Q † 2 N. & primū numerū 1. ita enim ſolidus huic adiectus quadratū faciet. Idem ſolidus cū ſecūdo numero ut quadratū faciat, de quadrato aliquo auferā 1 Q † 2 N. reſiduum erit ſecundus. Sit quadrati huius latus 1 N † 3. ipſe 1 Q † 6 N † 9. hinc aufero ſolidum 1 Q † 2 N, reſtat ſecūdus 4 N † 9. Iam cum ſolidus ſit 1 Q † 2 N. primo aūt in ſecundū multiplicato producatur 4 N † 9: per hunc ille ſi diuidatur, habebimus tertiū. Verùm hęc diuiſio non eſt poſſibilis. Vt aūt fieri poſſit ſciendū eſt, quòd ſicut ſe habet 1 Q ad 4 N, ita etiā 2 N ad 9. & permutatè ut 1 Q ad 2 N, ita 4 N ad 9. At 1 Q ſemiſſis eſt (quantū ad unitates attinet) de 2 N. ut ſi 4 N quoq; eodē modo fuiſſent ſemiſſis ex 9: inſtitui poſſet diuiſio. Atqui 4 N proficiſcūtur ab eo, quòd 6 N amplius eſt quàm 2 N. & 4 N ſunt orti à duplo eius quod fit ex 3 in 1 N. Iam 9 quadratus eſt de latere 3. Res itaq; eò deducta eſt, ut quærendus ſit numerus loco unitatū triū, à cuius duplo ſi duæ auferantur unitates, reſiduum ſit ſemiſſis quadrati qui fit ab eo numero. Sit is numerus 1 N, huius duplum detracto binario eſt 2 N — 2. Quadratus 1 Q, ergo huius ſemiſſi æquatur 2 N — 2. Ergo 1 Q eſt æquale 4 N — 4. fit 1 N, 2. Reuertor nunc ad primò propoſitum. Primum numerū poſueram 1, ſolidū aūt ex triū multiplicatione conflatū, 1 Q † 2 N. Verùm ſolidus ille etiā cum ſecūdo debet componere quadratū. Ergo ſecundum habebo, ſi ab aliquo quadrato ſubduxero 1 Q † 2 N. Quadrati huius latus pono 1 N, & tot unitatū, ut harū de duplo ſi 2 auferantur, reſiduū ſemiſſis ſit quadrati unitatū. id eſt, ut demōſtrauimus iā, latus erit 1 N † 2. huius quadratus 1 Q † 4 N † 4. unde ſi ſolidū detraxero, reſtat ſecūdus 2 N † 4. Iā primo in ſecundū ducto 2 N † 4 producūtur, per quē ſi diuidatur ſolidus, prodetur tertius, nimirū $\frac{1}{2}$ N. Reſtat ut ſolidus ille unà cū tertio, quadratū cōficiat. fit aūt 1 Q † $2\frac{1}{2}$ N. hoc ęquabimus 4 Q. fit 1 N, 5. Ergo ſecūdū ea q̄ poſuimꝰ, primus eſt 1, ſecūdus 34, tertius 2.

XYLANDRI.

Multa quæ in Græco erant uitioſa, uerſione noſtra fretus corriges. Vides ut in ſecundo ponendo incommodum quod acciderat, arguté corrigatur. Nam 9 oritur à 3, quæ 1 N adſciuerat ut inde quadratum fieret. itaq; oſtendit non 3, ſed 2 eſſe adſciſcendum uni N, ut diuiſio expediatur. Aequationem autē hanc (1 Q æquatur 4 N — 4) non explicauit autor, cum ſit è connexarum genere, earum quas quinta quarti Euclidis diſcutit. Nam (ut alibi docuimus) dimidium de 4 N (charactere omiſſo) eſt 4. unde ſi auferatur (ob ſignum —) 4, relinquitur nihil

quod

quod ſiue addas ad 2, ſiue inde auferas, 2 erũt ualor 1 N. Diuiſio quoq; ſolidi 1 Q † 2 N in ſecũdi & primi productũ 2 N † 4, ſatis eſt arguta. ſuperiorũ inferiora quod ad numeros attinet ſunt dupla, ſed in ſuperioribus characteres inferioribus ſunt uno ordine maiores. Si ergo 2 N per $\frac{1}{2}$ N multiplicemus, habebimus 1 Q. Si 4 per $\frac{1}{2}$ N exſiſtent 4 N. eſt ergo $\frac{1}{2}$ N quotiens. In ultima æquatione 4 Q ſumuntur, ut 1 Q utrinq; abiecto, æquatio ſit inter 3 Q & $2\frac{1}{2}$ N. & 1 N eſt, non 5, ſed $\frac{5}{6}$. Proinde numeri etiã quos quærebamus, primus 1 ſiue $\frac{6}{6}$. ſecundus $\frac{14}{6}$, tertius $\frac{5}{12}$. (ſic enim ſunt corrigendi.) Horũ primus in ſecundũ facit $\frac{14}{6}$, quod productum in tertium ubi duxeris, $\frac{85}{36}$ habebis, ſolidum de quo res eſt. adde ei primum. ſeu $\frac{36}{36}$, habes quadratum $\frac{121}{36}$. Adde ſolido ſecundum, habebis $\frac{169}{36}$ quadratum. Adde ſolido tertium, fiet $\frac{100}{36}$ quadratus. quod libuit oſtẽdere.

XXIV. Inueniantur tres numeri, ut qui ex ijs fit ſolidus, quouis ipſorum multatus, fiat quadratus. Sit primus 1 N, ſolidus autem 1 Q † 1 N, qui multatus primo, quadratus fit. Iam cum ſolidus è tribus confectus ſit 1 Q † 1 N. & primus ſit 1 N: utiq; productus ſecundi in tertium multiplicatione erit 1 N † 1. ac ponamus ſecundum eſſe 1. ergo tertius eſt 1 N † 1. Supereſt ut ſolidus tam ſecundo quàm tertio detracto, utrobique fiat quadratus. At ſecundo multatus, fit 1 Q † 1 N —— 1: tertio adempto, retinet 1 Q —— 1. horum utrunque æquabitur quadrato. Heic iam duplicata æquatio exſiſtit. Arripio interuallum, quod eſt 1 N. & conſtituo duos numeros, quorum unius in alterum multiplicatione 1 N procreetur. ij ſint 2 N & $\frac{1}{2}$. ut hic ducatur in duplum lateris Quadrati. Eſt ergo quam noſti æquatio. & fit 1 N, 17. ac primus eorum qui quæruntur eſt 17. ſecundus 1, tertius 25.

XYLANDRI.

Vt hic ducatur.) *neſcio enim quid aliud ſibi uelint hæc,* τετάσι κατὰ πλευρὰς β τῆς δυνάμεως. *Duplicata autem æquatio ſic ſoluitur. Sũma componentiũ interuallũ eſt 2 N † $\frac{1}{2}$. huius ſemiſsis 1 N † $\frac{1}{4}$, quadratum habet 1 Q † $\frac{1}{2}$ N † $\frac{1}{16}$. huic æquatur 1 Q † 1 N —— 1. Vtriq; parti 1 Q adime, & 1 adde, rurſumq; $\frac{1}{2}$ N utrinq; aufer, æquabuntur $\frac{17}{16}$ & $\frac{1}{2}$ N. Ergo 1 N facit $\frac{17}{8}$. Et qui quæruntur numeri ſunt $\frac{17}{8}$, 1, & $\frac{25}{8}$. Solidus qui fit primo in ſecũdum, producto in tertium multiplicato, eſt $\frac{425}{64}$. Vnde ſi primũ, hoc eſt $\frac{136}{64}$ auferas, relinquitur quadratus $\frac{289}{64}$. Si ſecundum, puta $\frac{64}{64}$, relinquitur quadratus $\frac{361}{64}$. ſi tertium, uidelicet $\frac{200}{64}$, relinquitur quadratus $\frac{225}{64}$. & abundè ſatisfit poſtulatis.*

XXV. Datum numerum in duos numeros diuidemus, ut qui fit altero in alterum multiplicato, ſit cubus ſuo multatus latere. Sit numerus 6. partes ponantur 1 N & 6 —— 1 N. multiplicatio eorum producit 6 N —— 1 Q. Hoc æquatur cubo cui ſuum deſit latus. Fingo cubũ lateris aliquot N —— 1. ac ſit latus eius 2 N —— 1. cuius cubus, latere detracto, fit 8 C † 4 N —— 12 Q. hoc æquatur 6 N —— 1 Q. Heic ſi numerus N utrinq; fuiſſet æqualis, reſtabat ut C & Q æquarentur, & numero uero exprimeretur ſolutio. At 4 N ab exceſſu proficiſcuntur ſupra 2 N: ſcilicet ex ter 2 N. & ſi ter 2 N amittãt 2 N, tum fiunt bis 2 N. At 6 illi dantur ex hypotheſi. Eò itaq; redactus ſum, ut quærendus ſit loco 2 N numerus aliquis, qui bis ſumtus faciat 6. Is eſt 3. Ergo cum quærã 6 N —— 1 Q æquales cubo cui ſuum deeſt latus: hoc ego pono 3 N —— 1. cuius cubus, ipſo latere detracto eſt 2 C † 6 N —— 20 Q, quod æquatur 6 N —— 1 Q. fit 1 N, 26. Eſt ergo primus 26, ſecundus 136.

XYLANDRI.

Poſtrema hæc falſa eſſe omnia, uel cæco appareat. Nam cubus lateris 3 N —— 1 eſt 27 C —— 27 Q † 9 N —— 1. unde ſi ipſum latus auferas, relinquitur 27 C —— 27 Q † 6 N, quod reſiduum æquatur 6 N —— 1 Q. Aufer utrinq; 6 N, & adde utriq; 27 Q, æquatio erit inter 27 C & 26 Q. uides totum compendium in eo fuiſſe, quale latus cubi ad quem referenda eſt æquatio, poneretur. Cæterùm 1 N eſt $\frac{26}{27}$. Et cum hic ſit altera diuidendi pars, qui propoſitus eſt nobis ſex, ſiue $\frac{162}{27}$: altera erit $\frac{136}{27}$. Hic numerus per $\frac{26}{27}$ multiplicatus, producit $\frac{3536}{729}$. Quod an ſit 6 N —— 1 Q, uideamus licet. 1 N eſt $\frac{26}{27}$, 1 Q ergo $\frac{676}{729}$. At 6 N ſunt $\frac{156}{27}$. ſiue $\frac{4212}{729}$. aufer $\frac{676}{729}$, habes $\frac{3536}{729}$ reſiduum. Iam cubi latus eſt 3 N —— 1, hoc eſt $\frac{78}{27}$ —— $\frac{27}{27}$, nimirum $\frac{51}{27}$. Ergo ipſe cubus $\frac{132651}{19683}$. unde ſi latus ipſius auferas, quod eſt $\frac{51}{27}$ ſeu $\frac{37179}{19683}$, relinquitur $\frac{95472}{19683}$. hoc eſt (nam hi numeri communem habent menſuram 27) $\frac{3536}{729}$. eſtq; ſatisfactum huic propoſito. & quia non uſq; adeò obuia eſt intellectio rei, nolui eam rudioribus obiter commonſtrare.

XXVI. Datum numerum in tres partes diuidemus, è quibus ortus ſolidus, cubus ſit, latus habens æquale ſummæ interuallorum quibus bini inter ſe diſtant. Diuidendus ſit 4. ſolidus quem tres partes conſtituunt, ſit 8 C (cubum enim eſſe oportet) lateris 2 N. Iam interualla primi & ſecundi, ſecundi & tertij, tertij & primi, iuncta duplum faciunt eius quod eſt inter tertium & primum. hoc eſt, Si tres fuerint numeri inæquales, trium interualla duplum ſunt interualli extremorum. Numerorum autem & interuallorum ſumma debet eſſe eadem. Ponamus tertium primo maiorem interuallo 1 N, & ſit primus 2 N (poteram quotuis N ſumere) tertius erit 3 N. Cumq; ſolidus his tribus compræhenſus ſit 8 C: & primus in tertium ductus 6 Q producat: conſequens eſt ſecundum fore $1\frac{1}{3}$ N. Hoc loco ſi ſecundus tertio minor, maior primo exſtitiſſet: iam quæſtioni ſatis erat factum. Verùm ſecundus prodijt diuiſo 8 per id quod ex primo in tertium fiebat: primus autem & tertius nõ ſunt temerè ſumti, ſed qui unitate differant. Eò itaque deuenimus, ut quærendi ſint duo numeri unitate differentes, ut per eum qui altero in alterum multiplicato gignitur, diuiſo octonario, numerus exſiſtat minore maior, & maiore minor. Sit minor 1 N, maior 1 N † 1. productus eorum multiplicatione 1 Q † 1 N. per quem ſi 8 diuidas, erit medius[a]. is maior debet eſſe quàm 1 N, minor quàm 1 N † 1. Quorum interuallum cum ſit 1, etiam interuallum primi & medij minus unitate erit. Ergo ſecundus cum unitate maior erit primo. Secundus addita unitate, & reſolutus in minutiam, fit[b]. hoc ergo maius eſt quàm 1 N † 1. & facta reductione 1 Q † 1 N † 8 maius eſt quàm 1 C † 2 Q † 1 N. Auferantur ſimilia à ſimilibus, relinquitur 8 maius quàm 1 C † 1 Q. Fingamus cubum in quo contineantur 1 C † 1 Q. ſitq; latus eius 1 N † 3. & quoniam 8 maius ſunt quàm 1 C † 1 Q: cubus quoq; à dicto latere maior quàm 1 C † 1 Q: æquemus etiam latera, 2 & 1 N † 3. Fit 1 N, 5. Iam ad ea quæ poſueramus hoc accommodetur. Erit primus 8, ſecundus 9, tertius 5. & omnibus per 15 multiplicatis, primus 40, ſecundus 27, tertius 25, communi denominatore 15 reiecto. & inuenti ſunt tres numeri, quorum ex multiplicatione ortus ſolidus, ſit cubus, latus habens ſummam interualli eorum. Statuo itaq; primum 40 N, ſecundum 27 N, tertium 25 N. & ſolidus horum trium eſt cubus, cuius latus ęquatur interuallis ipſorum coniunctis. Volo autem hos tres æquare unitatibus datis, numero ſcilicet propoſito, qui eſt 4. Ergo 92 N æquantur 4. fit 1 N, 1. Ad poſita, primus erit 40, ſecundus 27, tertius 25.

[a] $\frac{8}{1Q+1N}$

[b] $\frac{1Q+1N+8}{1Q+1N}$

XYLANDRI.

Solutio quidem uera eſt. Nam 1 N ſit $\frac{1}{23}$. Primus ergo $\frac{40}{23}$, ſecundus $\frac{27}{23}$, tertius $\frac{25}{23}$. Pro quibus reiecto denominatore ſoli numeratores 40, 27, 25, ſufficiũt: cùm liqueat ſolido creato, etiam denominatorem fuiſſe cubicum exſtiturum. Itaq; primo in ſecundum ducto ſiunt 1080. hoc per tertium multiplica habes 27000, qui eſt cubus à latere 30. Sed & ipſorum numerorum interualla ſunt 13, 2, 15. hoc eſt 30, uti poſtulabatur. Præterquam autem quod mendæ in Græco aliquot ſunt, quas correximus inter uertendum: ualdè mutilata ſunt ea, quæ explicatus habent admodum difficiles. Quæ de interuallorum ſumma dicuntur, ex dictis ad tertij quintam ac propoſitionem huius libri decimãquintam ſatis intelligi poſſunt. Enimuero 8 C æquat autor cubo à latere 1 N † 3 facto, qui maior ſit quàm 1 C † 1 Q. itaq; latera etiam æqualia eſſe, cõmunis dictat noticia. Aequantur ergo 2 N & 1 N † 3. At ſic 1 N non ſit 5, ſed 3. Oportuit ergo ſcriptũ eſſe latus cubi 1 N † 5, ut 1 N fiat 5. hoc enim deinde in nouis hypoſtaſibus tenuiſſe autorem apparet. Vtut ſit, ſi 1 N & 1 N † 1 reſoluas per ualorem 1 N, nunquam fiet, ut 8 diuiſus per compoſitum ex illis, maior fiat eo qui loco 1 N ponitur. Nam ſi 1 N ſit 3, quotiens erit $\frac{8}{12}$, ſeu $\frac{2}{3}$. Si 1 N eſt 5, quotiens erit $\frac{4}{15}$, utrobique minorum minor. Aliò igitur auertenda eſt hæc inuentio. & uidendum unde hypoſtaſes Diophanteæ $\frac{40\ 27\ 25}{15}$, emerſerint, id eſt $\frac{8}{3}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{5}{3}$. nam id facilè eſt ratiocinari, his eum porrò ad ſoluendam quæſtionem uſum eſſe poſitionibus. ac 1 N ei fuiſſe $\frac{5}{3}$. Arbitror (nihil enim adſirmo) explorato 5 non ualere pro 1 N, intellegiſſe autorem, per minutias rem agendam: & finxiſſe è conditione oblata hypoſtaſes, more ſuo. Hoc ſatis fuit euidens, ideo medium numerum non quadrare poſtulatis, quia extremarum multiplicatione nimis magnus produceretur numerus. Minor autem quin producatur, ſi iſti eſſent minores, apertiſſimum eſt. Ergo pro 5, $\frac{5}{3}$ ponemus. ſed res non ſuccedet, quod expertus dico. Eſto ergo 1 N, $\frac{5}{3}$. erit alter extremus $\frac{8}{3}$. Horum multiplicatione producitur $\frac{40}{9}$. per quem ſi diuidas 8,

quotiens

quotiens habebitur $\frac{9}{5}$. *qui certè minore eſt maior, maiore minor. quod manifeſtum eſt, tribus numeris Diophanteis, ad communem decimarum quintarum partium denominationem redactis. Variari hoc poterat, nam* $\frac{5}{4}$ *etiam pro 1 N accepta nos expediuiſſemus rem. Sed & primæ poſitiones uariari infinitis poſſunt modis: quod perſequi non eſt tempeſtiuum. Cauſam hypoſtaſeon uides erutam. quæ reductæ ſub idem nomen, cur eo abſoluantur, nolo inculcare. Cætera iam antè indicauimus. Ponuntur ergo* $\frac{5}{3}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{8}{3}$, *omnes ſigno N affectæ, reductæ omnes ad eundem denominatorem, cumq́; poſtmodo miſſum factum. Atq; ita ſatisfit poſtulatis, hoc excepto, quòd non 4 (ut flagitabatur) ſed alius numerus eſt ſumma partium. Reliqua liquent.*

XXVII. Dentur duo numeri, ut qui fit multiplicatione alterius in alterum, utrolibet adiecto cubum faciat. Primum pono aliquot N, quorum numerus ſit cubicus. uerbi gratia 8 N. alterum 1 Q —— 1. Ita alteri poſtulatorum ſatisfit. Nam ſi alter in alterũ multiplicato ad productum adijciatur prior, cubus exſiſtet. Reliquũ eſt ut productus hic etiam poſteriore aſſumto cubus fiat. Fit autem his coniunctis 8 C † 1 Q —— 8 N —— 1. quod æquatur cubo. Huius latus fingo 2 N —— 1. & fit 1 N, 14. Ergo iuxta poſitiones noſtras, prior erit 113, poſterior 27.

XYLANDRI.

Si 113 per 27 multiplices, fient 3051. quibus ſiue 27, ſiue 113 addas, neutrubi cubum inuenies. Quod ad poſitiones attinet, cubum qui fieret primo ad productum numerorum addito, autor 8 C ſtatuit, à quibus ſi 8 N (primus) detraherentur, ſupereſt 8 C —— 8 N, quod fit ex primo in ſecundum. id ſi per 8 N diuidas, utpote primum, ſecundus inuenitur 1 Q —— 1. Latus cubi propter 8 C & 1 abolendos in æquatione, ſtatuitur 2 N —— 1. cubus eſt 8 C † 6 N —— 12 Q —— 1. huic æquatur 8 C † 1 Q —— 8 N —— 1. Utrinq; 8 C abijciuntur, adduntur utriq; 12 Q & 1 & 8 N, ita fit æquatio inter 14 N & 13 Q. Ergo 1 N eſt $\frac{14}{13}$. *Eſt ergo quæſitorum alter* $\frac{112}{13}$, *alter* $\frac{196}{169}$ —— $\frac{169}{169}$, *(1 Q —— 1) nimirum* $\frac{27}{169}$. *Multiplicato* $\frac{112}{13}$ *per* $\frac{27}{169}$ *producitur* $\frac{3024}{2197}$. *Huic ſi addas* $\frac{112}{13}$, *hoc eſt* $\frac{18928}{2197}$, *ſumma erit cubus* $\frac{21952}{2197}$, *lateris* $\frac{28}{13}$. *Sin eidem producto addas* $\frac{27}{169}$, *ſiue* $\frac{351}{2197}$: *ſumma erit* $\frac{3375}{2197}$, *cubus & ipſe, à latere* $\frac{15}{13}$. *& ſatisfactum eſt quæſtioni.*

XXVIII. Inueniantur numeri duo, quorum unius in alterum multiplicatione qui fit, utrolibet ipſorum detracto fiat cubus. Rurſum primus ponatur 8 N, ſecũdus 1 Q —— 1 ſemper. Ita productus eorum multiplicatione, demto ſecundo, fit 8 C † 8 N —— 1 Q —— 1. hoc æquatur cubo. Eſt autem impoſſibile. Rurſus primum ſtatuo numerum N cubicum & 1. ac ſit 8 N † 1. ſecundus 1 Q. uno in alterum multiplicato, & primo ab eo quod fit ſublato, fit cubus. Rurſum ſecundum ſi ab eodem producto auferamus, relinquitur 8 C † 1 Q —— 8 N —— 1 æquale cubo. hunc conficio à latere 2 N —— 1, fit 1 N 14. & ſi ad poſita id accõmodamus, primus eſt 125, ſecundus 196.

XYLANDRI.

Confuſa & uitiata hæc ſunt in Græco. Cur priorem poſitionem impoſſibile gignere dicat, non exprimitur. Certè ſi 8 N in 1 Q —— 1 ducas, fit 8 C —— 8 N, unde ſi ſecundum auferas, habebis 8 C —— 1 Q —— 8 N —— 1. atq; ita textum uerborum autoris corrigas. Hoc ſi cum cubo lateris 2 N —— 1 (cum nullo enim alio poſſis) conferas, cum 8 C † 6 N —— 12 Q —— 1: nihil fiet abſurdi. æquabuntur enim 14 N & 11 Q. Sed ſi primum de producto abſtuliſſes, relinquebatur 8 C —— 16 N æquale cubo. cuius latus poni nullum poteſt quin abſurdum incidat. Itaq; mutatur poſitio, & pro primo (in Græco primus & ſecundus inuerſo ordine ponuntur. ad rem nihil intereſt: malui tamen ſeruire perſpicuitati, maximè cum ſolutionis numeri eo ordine ab autore ponantur, ut inuerſionem librario deberi appareat,) ponitur 8 N † 1, pro ſecundo 1 Q. nam ex his producitur 8 C † 1 Q, ut 1 Q primo abiecto, euidens ſit 8 C reſtare cubum. Reliqua ſunt eadem quæ in ſuperiore propoſitione. Ergo 1 N heic quoque eſt $\frac{14}{13}$. *fit primus* $\frac{125}{13}$, *ſecundus* $\frac{196}{169}$. *Hoc per primum multiplicato, fiunt* $\frac{24500}{2197}$. *Unde ſi primus* $\frac{21125}{2197}$ *auferatur, ſuperſunt* $\frac{3375}{2197}$, *cubus lateris* $\frac{15}{13}$. *Si ab eodem producto ſecundum, qui eſt* $\frac{2548}{2197}$, *auferas: relinquitur* $\frac{21952}{2197}$ *cubus, latus habens cubicum* $\frac{28}{13}$. *Ita hæc quoq; explicata eſto quæſtio.*

XXIX. Quæruntur duo numeri, quorum unius in alterum multiplicatione qui fit numerorũ ſumma tam addita quàm detracta ei, cubus ſit. Sit cubus quem productus cum ſumma numerorum conficit, 64. & cubus quem ſumma numerorum à producto ſubtracta relinquit, 8. Horum cuborum interuallum 56, duplum eſt ſummæ numerorum: horum ergo ſumma 28. Et quia productus cum ſumma facit 64, relinquitur productum eſſe 36. Eò itaq; loci deducta res eſt, ut duos numeros inueniam quorum ſumma ſit 28, productus uno in alterum multiplicato 36. Eſto maior 1 N † 14: erit minor 14 —— 1 N. reliquum eſt, ut qui fit uno in alterum multiplicato, nimirum 196 —— 1 Q. ſit 36. Fit 1 Q æqualis 160. Quòd ſi 160 eſſet quadratus numerus, ſoluta eſſet quæſtio. Enimuero 160 eſt exceſſus 196 ſupra 36. Et 196 eſt quadratus numeri 14, qui eſt ſemiſſis de 28. itaq; 196 ſunt ſemiſſis 28 in ſe ductus. At 28 ſemiſſis eſt de 56. ergo 14 ſunt quadrans de 56. Eſt autem 56 interuallum duorum cuborum 64 & 8. & 36 eſt cuborum horum ſummæ ſemiſſis. Itaque eò redactus ſum, ut quærendi mihi ſint duo cubi, quorum interualli quadrans in ſe ſi ducatur, ipſorum cuborum ſemiſſe de quadrato qui ſic fiebat ſubducto, quadratum relinquatur. Sit latus maioris cubi 1 N † 1, minoris 1 N —— 1. fiunt cubi, maior 1 C † 3 Q † 2 N † 1. minor 1 C † 3 N —— 3 Q —— 1. Horum interualli quadrans eſt $1\frac{1}{2}$ Q † $\frac{1}{2}$. qui ſi in ſe ducatur, fiunt $2\frac{1}{4}$ QQ † $1\frac{1}{2}$ Q † $\frac{1}{4}$. Vnde ſi ſemiſſem ſummæ cuborum, qui eſt 1 C † 3 N auferas, relinquuntur $2\frac{1}{4}$ QQ † $1\frac{1}{2}$ Q † $\frac{1}{4}$ —— 1 C —— 3 N. hoc æquatur quadrato. Sed propter minutias omnia multiplicentur prius per 4. erunt 9 QQ † 6 Q † 1 —— 4 C —— 12 N. Huic æquabimus quadratum, cuius latus ſit 3 Q † 1 —— 6 N. Eſt ergo quadratus 9 QQ † 42 Q † 1 —— 36 C —— 12 N, æqualis 9 QQ † 6 Q † 1 —— 4 C —— 12 N. Additis & detractis utrobique æqualibus, tandem 32 C æquantur 36 Q. fit 1 N $\frac{9}{8}$. Iam ad ea quæ poſueramus hoc conferatur. Cuborum latera poſuimus, maioris 1 N † 1, minoris 1 N — 1. erit hoc $\frac{1}{8}$, illud $\frac{17}{8}$. Cubi ergo ipſi, maior $\frac{4913}{512}$, minor $\frac{1}{512}$. Venio nunc ad id quod erat initio propoſitum, ac quæro, quomodo duo numeri dentur, quorũ productus uno in alterum multiplicato, cum ſumma ipſorũ numerorũ coniũctus, cubũ $\frac{4913}{512}$ faciat. idemq́; productus ſumma eorũ multatus, cubũ $\frac{1}{512}$ relinquat. Et quoniam interuallũ horũ cuborũ duplũ eſt ſummæ numerorũ, eſtq́; hoc interuallũ $\frac{4912}{512}$: ſumma ipſorũ numerorũ erit $\frac{2456}{512}$. Ac quãdo productus cũ ſumma coniũctus, facit $\frac{4913}{512}$, & ſumma eſt $\frac{2456}{512}$: productus ergo erit $\frac{2457}{512}$. Quod reliquũ eſt ut conficiatur, demonſtratũ eſt libro primo: ſed explicandę cauſa quęſtionis denuò oſtẽdamus. Ponamus primũ 1 N cũ ſemiſſe ſummę ipſorũ, hoc eſt 1 N † $\frac{1228}{512}$. erit ſecũdus $\frac{1228}{512}$ — 1 N. ſumma eorũ utiq; $\frac{2456}{512}$ eſt. Sed uno in alterũ multiplicato, ꝓducitur $\frac{1507984}{262144}$ — 1 Q. atq; hoc ęquat̃ 2457. reducãtur cętera quoq; ad idẽ partiũ nomẽ, & auferãtur ęqualia ab ęqualib. ęquatio erit inter 262144 Q & 25 fit 1 N 500. ad poſitiões hoc ſi cõferat̃, erit prim⁹ 1728, ſecũd⁹ 728, & euidẽs eſt demõſtratio.

XYLANDRI.

Valde eſt arguta huius quæſtionis tractatio. & quamuis mendoſa ſunt multa, tamen ea corrigere non fuit laborioſum. Denominatores paſsim omiſsi, tenebras rei offuderunt. Quod de primo libro dicit, uide eius propoſitionem trigeſimam, & qua nos ibi docuimus. Sed ultimam partem more noſtro expediamus, cũ habeat nonnihil perplexitatis. Aequatio eſt inter $\frac{1507984}{262144}$ *— 1 Q, & productum* $\frac{2457}{512}$. *Si addatur utrobiq; 1 Q, & utrinq; abijciatur* $\frac{2457}{512}$ *ſiue* $\frac{1257984}{262144}$: *æquatio erit inter* $\frac{250000}{262144}$ *& 1 Q: (noſter inter 250000 ponit & Q 262144, reducta æquatione, & nihilominus re ad id quod nos agimus, recidente. Nam κε̄ in Græco 25 myriades ſignificare oportet.) Ergo 1 N fit* $\frac{500}{512}$. *Primus ergo 1 N †* $\frac{1228}{512}$, *erit* $\frac{1728}{512}$. *ſecundus* $\frac{1228}{512}$ *—— 1 N, erit* $\frac{728}{512}$. *Omitti hoc loco denominatores nullo modo poſſunt, niſi omnia uelis deprauare. Eſt enim in ſe multiplicandus denominator, & numerator alterius item multiplicando ad denominationis æqualitatem perducendus. ut mox patebit. Ipſas etiam minutias ſi ad minores redigeremus terminos; rationes turbaremus noſtras. cubicum enim oportet eſſe denominatorem. qui in ſe ductus, etſi producat quadratum, cubus tamen etiam eſt ille quadratus, ut uel ex elementis Algebricis liquet. Supereſt ut experiamur, ſatisfaciant' ne numeri à nobis inuenti poſtulatis quæſtionis. Certè ſi omiſſo denominatore 1728 in 728 multiplices, 1257984 producetur. cui ſi ſummam numerorum horum addas, conſit 1260440, nequaquam cubus. ſi ſummam producto adimas, ſuperit 1255528, nihilo magis cubus. At ſi* $\frac{1728}{512}$ *per* $\frac{728}{512}$ *multiplices, producetur* $\frac{1257984}{262144}$. *Summa numerorum eſt* $\frac{2456}{512}$, *ad idem producto nomen redacta,* $\frac{1257472}{262144}$. *Quin denominator ſit cubus, nemo arithmeticæ initiatus dubitabit. Itaq; eum nunc demũ ſeponamus, & 1257472 addamus ad 1257984: hoc eſt de numeratorib. uiderimus, ſint' ne cubici. Sũma eſt 2515456, cubus: latus eius*

tus eius

tus eius 136. Auferamus 1257472 de 1257984, relinquẽtur 512. quẽ eſſe cubũ, pueri noſſe debebãt.

XXX. Aliter hoc ipſum conſequemur. Hac in re ſcias, quòd ſi ſit quiuis quadratus diuiſus in duas partes, quarũ altera ſit latus eius; harũ partiũ altera in alterã multiplicata, & additis producto ipſis partibus, cubus fit. Statuatur itaq; quadratus 1 Q, & diuidatur in 1 N, ac reliquũ quod eſt 1 Q—1 N. fiet productus ex parte in partem cum ſumma partium, 1 C, cubus. Supereſt, ut productus idem ſumma partium detracta, cubus ſit. At fit hoc modo 1 C—2 Q. hoc æquatur cubo qui ſit minor quàm 1 C. ac ſit $\frac{1}{8}$ C. Omnia per octo multiplicentur, erunt 8 C——16 Q æquales 1 C. fit 1 N $\frac{16}{7}$, ac tantus eſt primus. ſecundus ergo $\frac{144}{49}$.

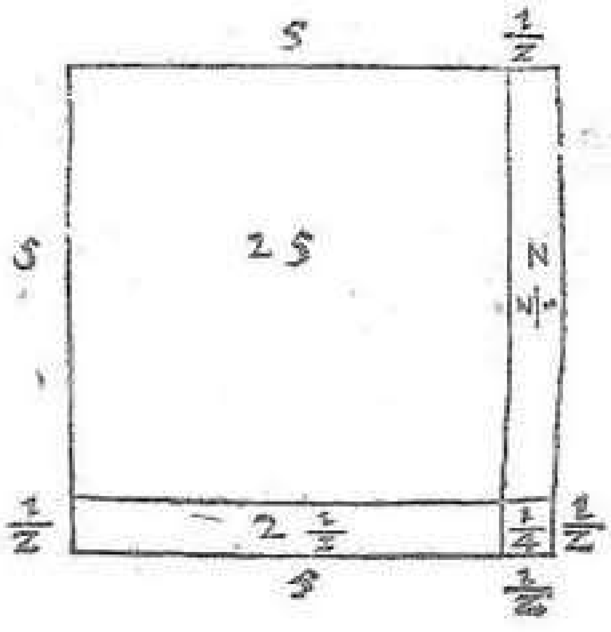
XYLANDRI.

Numeri ſolutionis æquationis & quæſtionis omiſſo denominatorẽ erãt corrupti. Eſt autem ſcitũ theorema de quadrato numero, quod huc adhibetur, & cauſa eius in prõptu. Nam ſi (uerbi gratia) quadratũ 49 diuidas in 7 & 42. & 7 per 42 multiplices, fiunt 294. heic ad cubũ ſeptenarij implendum nihil deſideratur, præter id quod fit ex 7 in reliquã totius 49 quadrati partẽ, nẽpe in 7. at quod fit, eſt ſumma ipſarum partiũ. Porrò ſi $\frac{16}{7}$ in $\frac{144}{49}$ multiplices, gignetur $\frac{2304}{343}$. Sũma ipſorũ $\frac{256}{49}$, ſeu $\frac{1792}{343}$. hæc addita ꝓducto, facit $\frac{4096}{343}$, cubũ lateris $\frac{16}{7}$. detracta ab eodẽ, relinquit $\frac{512}{343}$, cubũ lateris $\frac{8}{7}$. Aliã ſolutionẽ habuiſſes, ſi in æquatiõe ꝓ $\frac{1}{8}$ C, poſuiſſes $\frac{1}{27}$ C, &c. aut ꝓ 1 Q, ſumſiſſes 4 Q, &c. poteſt enim infinities uariari hoc. Sed in minimis cũ Dioph. acqueſcamꝰ.

XXXI. Quatuor numeri quadrati dentur, quorũ ſumma cũ ſumma laterũ cõiuncta, numerũ imperatũ cõficiat. Ac ſit is numerus 12. Omnis quadratus numerus, ſuo latere & unitatis quadrante auctus, quadratum exhibet, cuius latus ſemiſſe unitatis multatũ, fit prioris quadrati latus. Ergo quos quærimus quatuor numeri, ij ſuis aucti lateribus, 12 faciunt: & ſi quatuor inſuper quadrãtibus unitatibus augeãtur, quatuor cõtinebũt quadratos. Sic aũt 12 excreſcit in 13: addita nimirum unitate. Ergo 13 diuidẽdus eſt in quatuor quadratos, ut ſi de ſingulorũ lateribus ſemiſſem unitatis auferam, latera habeam quatuor quæſitorum quadratorum. Diuiditur autem 13 in duos quadratos, 4 & 9. & rurſus horum uterq; in alios duos quadratos, in 64, 144, & 81. Sumo cuiuſq; latus *, & à quouis aufero $\frac{1}{2}$. erunt latera quadratorum qui quęruntur, 11, 7, 19, 13. ipſi ergo quadrati 121, 49, 361, 169. *

XYLANDRI.

De numeris quadratis agi, ſatis eſt manifeſtum, etſi in propoſitione uox τετραγώνους excidit. falsò etiã ſcriptum fuiſſe μονάδας τέσσαρας pro μονάδος τέταρτον, res ipſa docet. Theorema enim hoc de quadratis numeris eſt ex quarta ſecundi Euclidis deſumptum. Nam ſi lateri cuiuſcunq; quadrati adijcias $\frac{1}{2}$, & gnomonem iſti quadrato circumponas, utrunq; eius ſupplementorum faciet ſemiſſem lateris, & ambo iuncta, lateri æquabuntur. quadratulũ autẽ gnomonis ſemper eſt $\frac{1}{4}$. Totius aũt ſic facti quadrati latus, ſupra latus prioris quadrati habere $\frac{1}{2}$, uel ex hypotheſi notũ eſt. Ita heic quadratũ 25, lateris 5. deſcripſi. adiecíq; lateri $\frac{1}{2}$. fit totũ maioris quadrati latus $5\frac{1}{2}$. ſupplementum utrunq; $2\frac{1}{2}$, ambo iuncta 5. quadratum in gnomone $\frac{1}{4}$. totus gnomo $5\frac{1}{4}$. totũ quadratũ eo auctum, $30\frac{1}{4}$. Cæterùm diuiſio numeri 13 in quadratos quatuor mutila eſt, ut & reliqua deinceps. & quid ſit πλευρὰ ν̄θ non poſſum intelligere. Quia aũt ſuprà lib. 2. prop. 8. & 9 nos Dioph. rẽ docuit, eius auſpicijs heic propoſitũ abſoluemus. Notiſſimũ eſt 13 componi additione duorũ quadratorũ, 4, & 9. Horum uterq; in alios duos quadratos eſt diuidendus. Diuidamus quadratũ 4 in duos quadratos. ſit alter 1 Q, alter 4—1 Q. huic quadratũ æqualẽ fingamus à latere 2 N—2, is erit 4 Q † 4—8 N. fiũt quadrati $\frac{64}{25}$ & $\frac{36}{25}$. diuidamus quadratũ quoq; 9 in duos quadratos. Sint eorum latera 1 N & 2 N—3, quadrati 1 Q & 4 Q † 9—12 N. ſumma 5 Q † 9—12 N æqualis 9. fit 1 N $\frac{12}{5}$. ergo quadrati ſunt $\frac{144}{25}$, & $\frac{81}{25}$. Quatuor ergo quadrati, quorũ ſumma 13, ſunt $\frac{64}{25}$. $\frac{36}{25}$. $\frac{144}{25}$. $\frac{88}{25}$. Latera horum $\frac{8\ 6\ 12\ 9}{5}$. de quorum uno quouis ubi detraxeris $\frac{1}{2}$, reſtabũt latera quæſitorũ quadratorũ. Ut expeditè ſubtrahas, omnia in decimas partes cõuerte. ſic de $\frac{16\ 12\ 24\ 18}{10}$ auferes $\frac{5}{10}$. ſupererũt $\frac{11\ 7\ 19\ 13}{10}$ ipſa latera. erũt ergo quadrati $\frac{121\ 49\ 361\ 169}{100}$. Sũma horũ quadrator. $\frac{700}{100}$, hoc eſt 7. adde 5 (nã ſumma laterũ eſt $\frac{50}{10}$) habes impatũ numerũ 12.



Si propoſitus numerus fuiſſet 1202.quadrati fuiſſent 625.289.144.81.quod licet experiri,& ratiocinari ad modum præſcriptum.

XXXII. Quærantur quadrati quatuor,quorum ſumma,detracta laterum ſumma, numerū exhibeāt præſcriptū.Sitq́; is 4.Enimuerò quiuis quadratus numerus,ſi ſuo multetur latere, & reſiduo $\frac{1}{4}$ unitatis accedat, quadratus fit, cuius latus ſemiſſe unitatis auctū,latus priſtini quadrati præſtet. Ergo hi quoq; quadrati quatuor , ſuis ſinguli multati lateribus,ſi reſiduorū ſummæ accedāt quatuor quadrātes, id eſt 1, quatuor quadratos æquabūt.At multatorū laterib. ſumma ponitur 4. ergo 1 adiecta, fient 5. Proinde hoc mihi datur negocij , ut quinq; diuidā in quatuor quadratos numeros, quorū ſingulorū laterib. ubi adiecero $\frac{1}{2}$ unitatis,reperero iā latera poſtulatorū quadratorū. At 5 diuiditur in quadratos 9,16,64,36. horū laterib. 3,4,8,6,ſingulis $\frac{1}{2}$ adijcio,inuenioq́; latera 11,13,21,17. Ergo qui poſtulabantur quadrati , ſunt 121,169, 441,289.

XYLANDRI.

Denominatores omiſſi omnia falſa de ueris redigunt. Theorema ex 4 & 7 ſecundi Euclidis & typo ad ſuperiorem propoſitionē poſito intelligi poteſt.de quadrato 121 latus 11 aufer , ſuperſunt 110.adde $\frac{1}{4}$.habes quadratū $\frac{441}{4}$,cuius latus $\frac{21}{2}$.adde $\frac{1}{2}$,habes 11,latus priſtini quadrati.Porrò quinarius in duos quadratos 1 & 4 rectà diuiditur . Vnitatē diuidamus in duos quadratos. ſint latera 1 N & 2 N —— 1, quadrati 1 Q & 4 Q —— 4 N † 1.Summa 5 Q —— 4 N † 1 æquatur 1.fit 1 N, $\frac{4}{5}$.ergo quadrati $\frac{16}{25}$ & $\frac{9}{25}$.Iam 4 in duos quadratos diuidamus, ut ſuprà eſt factum Sunt ergo quadrati,quorū ſumma 5 conficiat $\frac{16\ \ 9\ \ 64\ \ 36}{25}$.latera $\frac{4\ \ 3\ \ 8\ \ 6}{5}$.addantur ſingulis $\frac{1}{2}$,fient $\frac{13\ \ 11\ \ 21\ \ 17}{10}$.ſunt ergo quos quærebamus quadrati $\frac{169\ \ 121\ \ 441\ \ 289}{100}$. Quorum ſumma $\frac{102}{10}$,ſeu 10$\frac{1}{5}$. At laterum ſumma eſt $\frac{62}{10}$,ſeu 6$\frac{1}{5}$.quo ab 10$\frac{1}{5}$ ſubtracto,quatuor ſuperant, uti poſcebatur.Poterat ſic proponi,ut loco 4,numerus 1430 præſcriberetur.ſoluiſſent quæſtionem 36,121,441,900, &c.

XXXIII. Vnitatē in duos diuidemus numeros, & utriq; datum aliquem numerū adijciemus, & ſumma altera in alteram multiplicata quadratum producemus. Sint adijciendi 3 & 5 Pono partium alteram 1 N, ergo altera erit 1 —— 1 N. illi ſi 3 addo, fiunt 1 N † 3: huic ſi 5 addo, fiunt 6 —— 1 N. hac ſumma per illam multiplicata, producuntur 3 N † 18 —— 1 Q, quæ æquantur quadrato, ſitq́; is 4 Q. & addatur utriq; quod alteri deerat, fit 5 Q æquales 3 N † 18. quæ æquatio rationalis nō eſt. Verùm 5 Q quadratus ſunt cum unitate. oportet autem hoc multiplicato in 18, & addito quadrato ſemiſſis eius numeri qui ad N eſt adſcriptus , hoc eſt addito 2$\frac{1}{4}$ fieri quadratū. Itaq; eò redactus ſum, ut quærā quadratū qui unitate auctus , itaq; per 18 multiplicatus ſi ſit, producto 2$\frac{1}{4}$ additis fiat quadratus. Eſto hic 1 Q. Ergo iam 18 Q † 20$\frac{1}{4}$ æquantur quadrato. Omnia per denominatorē multiplica, 72 Q † 81 æquātur quadrato, cuius latus fingo 8 N † 9. fit 1 N, 18. ergo is quadratus eſt 324. Ad poſita hoc aptemus , & 3 N † 18 —— 1 Q æquemus quadrato. ſtatuo nūc 324 Q, & fit 1 N unitates 78, hoc eſt 6. Ergo ſecundum poſita primus numerus eſt 6, alter 19.

XYLANDRI.

Doctè heic Diophātus eſt locutus:ita ut nō quiuis ſit adſecuturus quid ſibi uelit . Explicemus ergo. Aequatio inter 5 Q & 3 N † 18 eſt ex compoſitarū genere , ad ſeptimā Chriſtiferi Rodolfi regulā pertinēs, quam demōſtrauimus ad ſextā ſecūdi Euclidis. Sic aūt eā oportet tractari. 1 Q æquabitur $\frac{3}{5}$ N † $\frac{18}{5}$, omnib. per 5 diuiſis, qui numerus fuit à quadrato unitate aucto (à 4 Q & 1 Q) profectus Heic iā Diaphantus ſemiſſem de $\frac{3}{5}$ (ut præcipit canon,) ſcilicet more ſuo [a] in ſe multiplicat, fiunt [b]. quibus ut adijci poſſint $\frac{18}{5}$ neceſſe eſt 18 nō minùs quàm 5 per 5 multiplicari, ut fiant $\frac{90}{25}$. qui ad [c] additi, cōficiunt [d]. ac denominator quidem interim omitti potuit, quem fieri 25, & habere radicē quadratā, in prōtu eſt. Canon aūt iā requirit ut de 92$\frac{1}{4}$ etiā numeratore, radix quadrata accipiatur. quod fieri nequit, cùm $\frac{369}{4}$ minutiæ numerator 369, numerus ſit (ut uocat) ſurdus. Alius ergo in prima æquatione numerus Q adijciendus fuit, qui & quadratus eſſet, & unitate auctus, ſic in 18 ductus, adſcitis 2$\frac{1}{4}$, quadratū haberet radicē , ut explicari porrò æquatio ſecūdū canonē poſſit. Si noſtrā cōſuetudinē reſpicias, ſemiſſis de $\frac{3}{5}$ erat $\frac{3}{10}$, quadratus eius $\frac{9}{100}$. cui ut addas $\frac{18}{5}$, 18 & 5 per 20 ſunt multiplicanda , fiunt $\frac{360}{100}$, & additus $\frac{9}{100}$, ſunt $\frac{369}{100}$. qui eſt ſurdus iterū numerus , ut non difficile ſit nouā illā quadrati inuentionē etiā huc accommodare. Porrò quòd per 4 denominatorē omnia iubet multiplicari autor, prudenter facit.

a $\frac{1\frac{1}{2}}{5}$

b $\frac{2\frac{1}{4}}{25}$

c $\frac{2\frac{1}{4}}{25}$

d $\frac{92\frac{1}{4}}{25}$

eſt

eſt enim 4 quadratus. & cùm 18 Q † $20\frac{1}{4}$ æquētur quadrato, etiā eorū quadruplū quadrato æquabitur. Cuius latus cur fingatur 8 N † 9, obſcurū nō eſt. ſcilicet ut 81 utrinq; ſublatis, æquatio ſit inter Q & N. nā quadratus fit 64 Q † 144 N † 81 æqualis 72 Q † 81. utrinq; abijce 64 Q † 81 reſtāt 144 N æquales 8 Q. & 1 N eſt 18. Poſterioris æquationis explicationē, quia mutila ad nos peruenit, integrā de noſtro largimur lectori: 3 N † 18 — 1 Q æquātur 324 Q. ergo 325 Q æquātur 3 N † 18. & 1 Q æquabitur $\frac{5}{325}$ N † $\frac{18}{325}$. ſemiſsis de $\frac{3}{325}$ eſt more noſtro $\frac{3}{650}$. eius quadratū $\frac{9}{422500}$. huic ut addere poſsis $\frac{18}{325}$, cū 325 denominatorē iā factū metiatur numero 1300, 18 per 1300 multiplicabis, & addes 90 fient $\frac{23409}{422500}$. Huius radix quadrata eſt $\frac{153}{650}$. quibus ſi accedant $\frac{3}{650}$ habes 1 N ualorē $\frac{156}{650}$, ſeu $\frac{78}{325}$ (ita enim in Græco fuit) hoc eſt $\frac{6}{25}$. nā cōmunis menſura numerorum 78 & 325 eſt 13. Partes ergo in quas unitas diuiditur, ſunt $\frac{6}{25}$ & $\frac{19}{25}$. Adde maiori 3, minori 5 (ita enim accipiendam eſſe uoluntatē autoris, hypoſtaſes docuerunt:) fient $\frac{81}{25}$ & $\frac{144}{25}$. cumq; numeratores quadrati, ne dubiū quidē eſt, quin quadratū ſint producturi ex ſecūda noni Euclid. apud Campanū, de denominatore ſatis conſtat fore quadratum ſi in ſe ducatur, etſi quadratus non fuiſſet. fit autem $\frac{11664}{625}$, cuius latus $\frac{108}{25}$.

XXXIV. Aliter unitatē in duas diuidemus partes, & utiq; addito qui datur ſeorſim numero, ſumma altera in alterā ducta quadratū producemus. ſintq; addēdi partib. 3 & 5. Eſto pars altera 1 N — 3 (eo ſcilicet numero egens, quem addere ei iubemur) erit altera 4 — 1 N. Priori ſi addas 3, fit 1 N. poſteriori ſi 5, fit 9 — 1 N. Ex harum multiplicatioue exſiſtit 9 N — 1 Q, quod æquatur quadrato. Sitq; hic 4 Q. fit 1 N, $\frac{9}{5}$. Si ad poſitiones hoc applicare coner, detrahere 3 ab $\frac{9}{5}$ non poſſum. Oportet ergo 1 N ita poni, ut maior ſit quàm 3, minor quàm 4. Porrò 1 N eſſe $\frac{9}{5}$ inuentum eſt eo quòd 9 diuidebamus per 5. at 5 eſt quadratus cum 1. Iam ſi 9 diuiſus per quadratum aliquē unitate auctum, facit 3, utiq; per quem diuiditur, is erit 3. Eſt ergo 3 quadratus unitate auctus. Ea abijciatur. relinquitur 2 quadratus. Rurſus ſecundam partem uolumus diuiſam per quadratum unitate auctum facere 4. Ergo per quem diuiditur 9, is eſt quadratus unitate auctus. Ergo quadratus cum unitate maior eſt $12\frac{1}{4}$. Et tollatur unitas, ergo maior quadratus eſt $1\frac{1}{4}$. oſtenſum eſt etiam ſecundam partem eſſe quadratū. Proinde eò deducitur res, ut quadratus ſit inueniendus maior quàm $1\frac{1}{4}$, minor quàm 2. reſoluo hęc in partes quadrati ſexageſimaſquartas. fiūt 80 & 128. Eſt aūt hoc facile. eſtq; quadratus 100, hoc eſt 25. Reuertor ad id quod initio erat propoſitum. Quęrebam 9 N — 1 Q ut æquarentur quadrato, nimirum iam inuento ęquentur 25 Q. fit 1 N, 124. ergo ſecundum poſita, prior pars eſt 21, altera 20.

XYLANDRI.

Mirificè obſcura ſunt hæc, & deprauata inſuper. Certè 9 N — 1 Q æquales 25 Q, 1 N faciunt $\frac{9}{26}$, non 124. Atq; 21 & 20 ſi ponantur unitatis partes, denominatorem oportebit intelligi 41, qui componitur ex quadratis 25 & 16, ſi quid hoc fortè ad rem faciat. Certè $\frac{21}{41}$ & $\frac{20}{41}$ ſunt numeri, quibus quæſtio explicatur. Nam ſi 3 ad illum, 5 ad hunc adijcias, fient $\frac{144}{41}$ & $\frac{225}{41}$ (cùm 3 ſint $\frac{123}{41}$, & 5 ſint $\frac{205}{41}$.) qui ſua multiplicatione omnino quadratum facient, ob cauſam ad finem ſuperioris propoſitionis traditam. fit autē $\frac{32400}{1681}$, hoc eſt $\frac{180}{41}$. Porrò $\frac{21}{41}$ & $\frac{20}{41}$ ſunt 1. & nihil eſt quod in ſolutione hac deſideres. Iā cùm $\frac{144}{41}$ fiat 3 ad $\frac{21}{41}$ additis, ſatis liquet 1 N eſſe $\frac{144}{41}$, cui ſi adimas 3, ſcilicet $\frac{123}{41}$, relinquatur 1 N — 3, nempe $\frac{21}{41}$. Itē ſi de 4, hoc eſt de $\frac{164}{41}$, auferas $\frac{144}{41}$, qui eſt 1 N, manent 4 — 1 N, nimirū $\frac{20}{41}$, altera pars unitatis diuiſæ. itaq; omnino ſatisfit etiā hypoſtaſibus noſtris. Videamus aūt unde 1 N efficiatur $\frac{144}{41}$. Vnde, inquies? hinc adeò, quòd 9 N — 1 Q comparantur & æquantur cum quadrato nō 25, ſed $\frac{25}{16}$ Q. Si enim utrobiq; additur 1 Q, fiunt 9 N æquales $\frac{41}{16}$ Q, uel characterib. depreſsis, 9 æquantur $\frac{41}{16}$ N. diuide 9 per $\frac{41}{16}$, habes 1 N æſtimationem, $\frac{144}{41}$. In Græco itaq; pro ϛκδ ſcribendum ϛμδ, & addendus denominator μά. Sed & pro $12\frac{1}{4}$, ιβ δˢ, ſcribi debet β δˢ $2\frac{1}{3}$. Nam ſi 9 per 4 diuidas, quotiens eſt $2\frac{1}{4}$, unde ſi auferatur 1, relinquitur $1\frac{1}{4}$. Ergo quadratus intra has metas inueniēdus erat, intra 2 & $1\frac{1}{4}$, æquandus 9 N — 1 Q, qui quadratus unitate adſcita cum 9 N comparetur. Hoc ut fieri poſſet, cùm ſatis appareat per minutias rem confore, numerum 64 pro denominatore delegit autor. ita 2 fiūt $\frac{128}{64}$ & $1\frac{1}{4}$ fiunt $\frac{80}{64}$. Inter hæc incidunt quadrati $\frac{81}{64}$ & $\frac{100}{64}$ & $\frac{121}{64}$. de quibus optione data Diophantus delegit $\frac{100}{64}$, quod eſt $\frac{25}{16}$. Quod ſi $\frac{81}{64}$ delegiſſet, N erat futurus $\frac{576}{145}$. partes unitatis $\frac{141}{145}$ & $\frac{4}{145}$. illi 3, huic 5 ſi addas, fient $\frac{576}{145}$ & $\frac{729}{145}$, quorum numeratores quadrati: itaque etiam ex ijs productus quadratus, ut ſuprà fuit demonſtratum. Idem de quadrato $\frac{121}{64}$

experirì

experiri licet:nam certò res conficietur. Hinc etiã uidere licet quantis cum difficultatib. fuerim conflictatus,& quid beneficium analyſeos poſſit.

XXXV. Datum numerum diuidemus in tres numeros,ea lege,ut qui fit primo in ſecundum multiplicato,ſiue ei addas tertiũ,ſiue adimas, quadratus exſiſtat. Sit datus numerus 6.Statuatur pars tertia 1 N, & ſecundus unitate amplior,ſit 2.Ergo primus erit 1 —— 1 N.reſtat ut qui fit multiplicatione ſecundi in primum, tam detracto quàm addito tertio ſit quadratus. fit æquatio duplex, 8 —— 1 N æquantur quadrato,& 8 —— 3 N æquantur quadrato.Non eſt autem rationale, quia numerorum inter ſe ratio non eſt quæ quadrati ad quadratum. Sed primus numerus unitate minor eſt ſecundo: & tres numeri ſimiliter maiores ſecundo. Eò itaq; res deducta eſt, ut inueniendus ſit numerus ad ſecundum, ut qui cum unitate excedit ad unitatem
* quadratũ numerũ. Sit is qui quæritur 1 N. qui unitate eo maior ſit, erit 1 N † 1. qui unitate minor,1 N —— 1.Hos uolumus inter ſe rationem habere,quæ eſt quadrati numeri ad quadratum.Sit 54 ad 1,ut 1 N — 1 ad 4. fiunt 4 N — 4 & 1 N † 1 ad 1. & ſunt hi expoſiti numeri ea inuicẽ ratiõe,quæ eſt quadrati ad quadratũ. nunc ergo 4 N —— 4 æquantur 1 N † 1.fit 1 N,5.Statuo itaq; ſecundũ 5.tertius autem eſt 1 N.primus ergo eſt 13 —— 1 N. Reſtat ut qui fit ex primo in ſecundum tam detracto quàm addito tertio fiat quadratus. Sed qui fit ex primo in ſecundum cum tertio eſt 65 —— 2 N,æquale quadrato.& idem demto tertio 65 —— 6 * omnia per 9 fiunt 65 —— 70 N æquales quadrato:& 65 —— 24 N æquales quadrato. Exæquo numeros æquationis unius,multiplicans per quatuor,fiunt 260 —— 24 N æquales quadrato, & 65 —— 24 N æquales quadrato.horũ nunc interuallum ſumo 195,& ſtatuo duos numeros, quorũ uno in alterũ ducto fiant 195.ij ſunt 13 & 15.horũ interualli ſemiſſis in ſe,ęquatẽ minori quadrato. fit 1 N,8.Ad poſita,primus erit 5,ſecundus 5,tertius 8,& demõſtratio eſt euidens.

XYLANDRI.

Nihil deprauatius excogitari poteſt.itaq; metuo ne oleum & operã (quam aiunt) perdam, ſi caſtigare coner. Ex ſolutione quaſtionis apparet,agi de ſenario diuidẽdo in res partes, ut prima in ſecundã ducta qui fit numerus,tertia uel addita uel detracta fiat quadratus. itaq; mendũ ος̄ *pro* ὁ ς̄ *nihil nos moratur:neq; eſt inſolens in hoc libro. Partes ſunt $\frac{5}{3}$. $\frac{5}{3}$. & $\frac{8}{3}$. ſumma $\frac{18}{3}$, hoc eſt 6 prima in ſecundam multiplicata fit $\frac{25}{9}$.adde $\frac{8}{3}$ ſeu $\frac{24}{9}$, habes quadratũ $\frac{49}{9}$. Itẽ de $\frac{25}{9}$ aufer $\frac{24}{9}$,relinquitur quadratus $\frac{1}{9}$.de duplicata æquatione ſatis multa ſuis diximus locis: ſed heic omnia ita ſunt,ut dixi,corrupta:ut diuinare uix liceat Sed experiamur tamẽ.* Secũdus unitate amplior.) ὁ δεύτερος μο̄ ὑπὲρ ὢν τὸ β ἔσω μο̄ β. *Intelligendũ putaui, ſecundum duab. unitatibus maiorẽ poni ſemiſſe propoſiti ad diuidendũ numeri. Is cũ ſit 6, ſemiſſem habet 3.ergo ſecũdus ſtatuetur 5 & cum tertius ſit 1 N poſitus,primo relinquetur,ut eſt in textu, 1 —— 1 N. Cauſam uellẽ Diophãtus harũ poſitionũ reddidiſſet:ſi quidẽ nõ intercidit.quod ille fideliter tradiderat.Certè qui in textu ſunt numeri, 1 —— 1 N,2,& 1 N,totũ diuidendũ, 6,nequaquã conficiunt,ſed eius duntaxat ſemiſſem.ut dubiũ nõ ſit,ſecundũ falſo perhiberi 2, pro 5.ſiquidẽ reliqui rectè habeant.Nã 6 diuidendũ eſſe,uel ſolutio quaſtionis euincit. At enim primo in ſecundũ ducto,fit 5 —— 5 N.cui ſi tertius addatur,1 N,fient 5 —— 4 N.Si adimatur,5 —— 6 N erunt. Hæc cũ Diophanteis iã nequaquã cõſentiunt.Certè 8 —— 1 N eſt autori noſtro productus ex primo in ſecũdũ,addito tertio 1 N. ergo ipſe productus fuit 8 —— 2 N. atqui primus expreſsè per-*
a $\frac{8 —— 2\,N}{1 —— 1\,N}$ *hibetur 1 —— 1 N.ut neceſſe fuerit ſecundũ poni,* ª *quod quale ſit,non ſanè perſpicio. Hæc ergo neq; cohærent,neq; cõiecturis explicari cõmodè poſſunt. Cur rationalẽ eſſe negat duplicẽ æquationem? quaſi uerò nullã talẽ duplicatã æquationẽ antea tractauerimus? uel hoc ipſo libro propoſ.* XIV *&* XXIV *uidebis exempla. Sed iſtud artificium locum heic non habet. nam ſi interuallum 8 —— 1 N & 8 —— 3 N, quod eſt 2 N, componamus,uerbi gratia, ex $\frac{1}{2}$ & 4 N, erit æquatio inter 4 Q † 1 N † $\frac{1}{16}$ & 8 —— 1 N, inexplicabilis:ut uidetur. Quod ſimili modo eueniet,ſi 5 —— 4 N & 5 —— 6 N conſideres. Hoc ergo uidetur autor dicere,non eſſe numeros quadratorum ſimiles,quod diuerſæ ſpecies componuntur, Q ſcilicet,N,& unitates.neq; fictione quadrati uidetur expediri æquatio explanariq; res poſſe.Has igitur hypoſtaſes miſſas faciamus. & rem hoc pacto attentemus. Theorema, cui Diophantea innititur ratio,non eſt expreſſum: ipſa autem miſerè confuſa. Ariolemur quantum poſſumus.Nam primũ quidẽ ſecũdo maiorẽ*

unitate

unitate ponere autor neq; uoluit, neq; potuit, ſi ſolutionē reſpicias, quātumuis id uerba præ ſe ferant. Sed uoluit ſecundum ita unitate differre à tertio atq; ſuperari, ut ſi unitas & adderetur & adimeretur ſecundo, reſidui ad ſummā ratio eſſet quæ eſt quadrati ad quadratū quos ſumſit more ſuo minimos (uariari enim iſthæc potuiſſe manifeſtū eſt.) Cùm ergo ponitur ſecundus 1 N: & 1 N † 1 ad 1 N —— 1 ea ratione, quæ eſt 4 ad 1: per 19 ſeptimi Euclidis æquatio exſiſtit inter 1 N † 1 & 4 N —— 4. ac fit 1 N, $\frac{5}{3}$. (nouum non eſt, quod in Diophanto 5 ſcribitur, denominatore omiſſo.) Cauſam huius inſtituti eam eſſe ratiocinor, quod ultimo poſito 1 N, reliquorū multiplicatione 1 Q —— 1 N produci oportuit, ſi 1 N addito debuit eſſe quadratus. 1 Q † 1 N itidem, ſi 1 N detracto relinquendus ex hypotheſi fuit quadratus. Perſequamur cætera. Cùm ſecundus ſit $\frac{5}{3}$, & tertius 1 N, ſumma trium 6, neceſſe eſt primū eſſe 6 —— $\frac{5}{3}$ —— 1 N, hoc eſt $\frac{13}{3}$ —— 1 N. Multiplicetur primus in ſecundum, fit $\frac{65}{9}$ —— $\frac{5}{3}$ N. adde tertium, hoc eſt 1 N, habebis $\frac{65}{9}$ —— $\frac{2}{3}$ N. Itē aufer tertiū de producto primi in ſecundū, habes $\frac{65}{9}$ —— $\frac{8}{3}$ N. Hæc per 9 (ut denominatorem) multiplicata, rediguntur ad integros numeros 65 —— 6 N & 65 —— 24 N. Argutum porrò eſt quod quadruplicando 65 —— 6 N, effingit 260 —— 24 N. ut N ſe abolentibus, æquatio conſiſtat in abſolutis unitatibus. atq; huius adeò rei cauſa æquatio illa ſuperior adhibita fuit. nam 6 N & 24 N ſunt ut quadratum ad quadratum. quod ſecus erat in duplicatis æquationibus 8 —— 1 N & 8 —— 3 N. itemq; 5 —— 4 N & 5 —— 6 N. Interuallū inter 260 —— 24 N atq; 65 —— 24 N eſt 195. Id autor cōponit ex 13 & 15. quorū interualli ſemiſſis quadratū habet 1, quod æquetur 65 —— 24 N. hoc eſt 64 æquantur 24 N. Fit ergo 1 N, $\frac{8}{3}$ & ſecundus eſt $\frac{5}{3}$. ſumma omnium 6. Ergo primo etiam $\frac{5}{3}$ relinquuntur. Ita priùs deploratum problema, tamen ſibi reſtituimus: ſubtiliſſimum, & obſeruatu apprimè dignum.

XXXVI. Inueniantur duo numeri, ut ſi alter ab altero eandē partē ſiue eaſdē partes acceperit, ratio ad reliquū ſit ea quæ poſcitur. Iubemur addere primo ſecūdi partē uel partes, itaq; reliqui eſſe triplū. ſecundū aūt, ſi eandē partē eaſdemúe partes primi acceperit, eſſe reliqui quincuplū. Statuamus ſecundū 1 N † 1. pars ſeu partes eius ſit 1. Primus ergo erit 3 N —— 1, ut ſi partē partesúe ſecūdi, hoc eſt unitatē acceperit, ſit reliqui triplū, quippe 3 N triplū eſt reſidui 1 N. Volumus etiā ſecundū, ſi primi eandē partē, partesúe eaſdē aſſumſerit, reſidui eſſe quincuplū. Sed quoniā duo hi numeri iuncti faciunt 4 N, & ſecūdus aliquid accipit, primusq́; id dat, & ſumma reſidui ſit quincupla, & iuncta cū reſiduo ſumma ſit 4 N: reſiduū utiq; erit pars de 4 N ea, quæ aliquota ſit & Numeros numeret: hoc eſt, 2 N. Ergo ſi à 3 N — 1 tollamus 1 N, habebimus primi partē uel partes. ſi aūt tollamus * *, fiunt 7 N — 1. Nā ſecūdus ſi à primo accipiat 7 N — 1, fit quincuplū eius quod relinquitur primo. Supereſt heic ut quæramus an quæ pars uel partes ſunt 1 N † 1, eadē ſit de 3 N — 1, hoc 7 N — 1. Cùm autē tale aliquid quæris, 7 N —— 1 & 1 N † 1 æqualia ſunt quod fit ex unitate in 3 N —— 1. hoc eſt, partes alternatim multiplicantur. Fiunt 7 N & 4 —— 1 æquales 3 N —— 1. & fit 1 N, 5. Iam ad poſitiones, erit primus 15, & ſecundus 12. Erant autem partes ſecundi, 1. uideamus an etiam 1 ſecundi. erunt 7. & multiplico per 7 duos numeros, erit primus 8, ſecūdus 12. partes 7. Et quia primus nō habet $\frac{1}{12}$, multiplico per 3, ne in unitatem excidamus. Erit primus 24, ſecundus 37, partes $\frac{1}{7}$, & demonſtratio manifeſta.

XYLANDRI.

In eadem cum priore naui eſt hæc propoſitio. quin ζ pro ς heic ſcripta ſint, non dubito. Si $\frac{1}{3}$ de 24 auferas, idq; 36 adijcias, habebis 20 & 40, ſumma reſidui duplam. Contrà ſi $\frac{1}{6}$ de 36 ablatum ad 24 adijcias, ſumma & reſiduum æquabuntur, utrunque 30. Hæc ergo ita ſunt affecta, ut planè Delio opus heic ſit natatore. Si de 3 N —— 1 primo, coneris auferre 7 N —— 1, idq; addere ſecūdo: inſanias profectò, ne dum ſummam reſidui quincuplam facias. Quæritur ergo, poſito primum eſſe 3 N —— 1, ſecundum 1 N † 1, quid auferri primo, addi ſecundo poſſit, ita ut ſumma reſidui ſit quincuplū. Primæ poſitionis ratio eſt euidens. Secūdā ſic indagemus. Summa poſitorū numerorū eſt 4 N. hāc oportet ſeſcuplā eſſe eius quod relinquetur primo, ſi ſecūdū ſuo detrimēto auxerit. Hoc perſpicuū eſt cōſideranti quorūcunq; numerorū naturā. ſi enim duo numeri ſint alter alterius multiplex, ſumma ad minorē multiplex erit, numero rationis unitate aucto puta 3 & 15 ſunt quincupli ſumma 18 ad 3 ſeſcupla. 18 ad 2 nouēcupla, 20 ſumma ad 2, decupla, &c. Relinquetur ergo primo $\frac{2}{3}$ N, & dabit ſecūdo 2 $\frac{1}{3}$ N — 1. atq; is eo pacto fiet $\frac{10}{3}$ N, planiſſimè ad reſiduū primi quincuplus. Itaq; poſtulatis ſatisfactum erat, ſi conſtaret tantam partem 1 eſſe de 1 N † 1,

quanta

quanta eſt $2\frac{1}{3}$ N—1 de 3 N—1. Obſcurum non eſt, hos quatuor numeros eſſe proportionales: quādo affirmamus eandē utrobiq; totius partē ſiue portionē ablatā fuiſſe. Duc ergo 1 in 3 N—1, & 1 N † 1 in $2\frac{1}{3}$ N—1, fient producti æquales $2\frac{1}{3}$ Q † $1\frac{1}{3}$ N—1 atq; 3 N—1. additisq́; & demtis quæ par eſt, 7 Q æquantur 5 N. Eſt ergo 1 N, $\frac{5}{7}$. Hypoſtaſib. hoc aptemus, fit primus $\frac{15}{7}$ — 1, hoc eſt $\frac{8}{7}$. ſecūdus $\frac{12}{7}$. Atq; hi planiſſimè ſatisfaciunt omnib. poſtulatis. Primo adijce unitatem, ademtam ſecundo, fit ſumma $\frac{15}{7}$, tripla reſidui $\frac{5}{7}$. Quanta autem pars ſecundi fuit unitas, tanta etiam pars primi, ademta ipſi, ſecundo eſt addenda. Id regula proportionum demonſtrabit quale ſit. $\frac{12}{7}$ dant 1, quid $\frac{8}{7}$. oſtenditur $\frac{2}{3}$ tantam eſſe partem primi, quanta unitas eſt ſecundi. & ſi $\frac{2}{3}$ in $\frac{12}{7}$, 1 in $\frac{8}{7}$ ducas, idem producitur. Primus multatus $\frac{2}{3}$, retinet $\frac{10}{21}$. $\frac{2}{3}$ ad ſecundum ſi addas, $\frac{50}{21}$ conficies, quincuplum ſummæ. Habes & artificioſam & uerā quæſiti demonſtrationem: & quæ iacturam Diophanteæ ſarcire utiq; poſſit. Autoris uerba longè ſunt corruptiora, quàm ut coniecturis emendari integrariúe poſſint, qui ex libro meliore reſtituet, ei à nobis agentur gratiæ. De uariè mutandis & poſitionibus & ſolutione, non eſt neceſſe monere.

XXXVII. Inueniantur duo numeri infiniti, ut qui ex uno in alterum ducto fit, cū ipſorum ſumma conficiat numerum præſcriptum. Is eſto 8. Sit primus 1 N, ſecundus 3. productus ipſorum multiplicatione cum ſumma ipſorum, eſt 4 N † 3. hoc æquatur 8. Fit 1 N, $\frac{5}{4}$. Ad poſita, erit primus $\frac{5}{4}$, ſecundus 3. Conſideremus nunc unde 1 N ſit factus $\frac{5}{4}$, nimirum quia 5 diuidebamus per 4 N. Ipſe 5 eſt id quo datus numerus ſecundum excedit. & 4 N unitate ſecundum excedunt. Ergo quantumcunque ſtatuamus ſecundū, & à dato numero (ut heic ab 8.) auferamus, reſiduo per numerum diuiſo, qui excedat ſecundum unitate, exiſtet primus. Sit ſecundus, uerbi gratia 1 N—1. aufer hoc de 8, reſtant 9—1 N. hoc diuide per ſecundum unitate auctū, puta per 1 N, habebis primum [a]. Atque ſic in infinitate ſoluta eſt quæſtio. & unius in alterum multiplicatione productus cum ſumma ipſorum, 8 faciet. Infinitum hoc dicitur, quia quotcunq; unitates pro 1 N uſurpes, ſemper poſitiones hę reſolutæ, quęſtionis poſtulatis ſatisfacient.

[a] $\frac{9—1\,N}{1\,N}$

XYLANDRI.

Paucula quædā menda ſuſtulimus. Infinitas ſolutiones admittit quæſtio, cùm pro ſecundo (uel primo etiā) ponere liceat quiduis. Sit primus 1 N, ſecundus 2. fiet etiā primus 2. Sit primus 1 N, ſecundus 7, fit primus $\frac{1}{8}$, &c. Sit in propoſito exemplo infinitatis (ubi quidē nos primū nō 9 N—1, quod falſum eſt, ſed [a] poſuimus) 1 N, erit ſecūdus 1, primus $\frac{7}{2}$. productus $\frac{7}{2}$. ſumma ipſorum $\frac{9}{2}$. ſumma horum 8, &c. 1 N 5. ergo ſecundus 4, primus $\frac{4}{5}$. productus $\frac{16}{5}$. ſumma ipſorū $\frac{24}{5}$. ſumma horū $\frac{40}{5}$, id eſt 8, &c. Cætera uide ad ſequentem propoſitionem.

[a] $\frac{9—1\,N}{1\,N}$

XXXIIX. Inueniantur tres numeri, ita ut quem bini faciunt planum, is cum eorum ſumma cōiunctus, faciat datum numerum. Numeros autem datos neceſſe eſt quadratos eſſe unumquemlibet, ſi ei unitas adijciatur. Primi & ſecundi ſumma cū plano ex ipſis orto ſit 8. ſecundi & tertij 15. tertij & primi 24. Quoniam uolo qui fit ex primo in ſecundum, eum cum ſumma ipſorum fieri 8, ponatur ſecundus quotcunq; unitatum, detrahaturq́; ab 8, diuiſo reſiduo per numerum unitate ſecundo maiorem, prodetur primus. Sit ſecundus 1 N—1, erit primus 9 N—1. Rurſum quia qui fit ex ſecundo in tertium cum ſumma eorum facit 15, ab his aufero 1 N—1, & diuido per unitate maiorem ſecūdo, hoc eſt per 1 N: fit tertius 16 N—1. Hic in primū ductus quem producit, ei ſi accedat ſumma ipſorum, fit 144 Q—1. hoc ęquatur 24. fit 1 N, 12. ad poſitiones hoc applicemus, erit primus 33 ſecundus 7. tertius 68. omnia multiplicentur per denominatorem, fit primus 165, ſecundus 84, tertius 240.

XYLANDRI.

Ponamus ut placuit Diophanti exſcriptori primum 9 N—1, ſecundum 1 N—1, tertiū 16 N—1. Multiplicemus primū in ſecundum, fit 1 Q † 1—10 N, adde ipſos numeros, fit ſumma 9 Q—1, quæ æqualis ſit 8. Ergo 9 Q ſunt 9, & 1 N eſt 1. Ergo primus fit 8, ſecundus nihil, quod eſt oppidò abſurdum. At ſecundo in tertium ducto, ſit addita eorum ſumma 16 Q—1 æquale 15. & rurſum 1 N, fit 1. Ergo rurſum ſecūdus eſt nihil. uides quàm hæc ſint abſurda. Porro primus in tertium 9 N—1 in 16 N—1 faciunt 144 Q † 1—25 N. ſumma ipſorū 25 N—2 illis adiecta, fit 144 Q—1 æqualis 24. ſiue 144 Q æquantur 25. Ergo 1 Q eſt $\frac{25}{144}$. ergo 1 N eſt $\frac{5}{12}$. Reſoluantur iam poſitiones. 9 N—1, eſt $\frac{45}{12}$ minus $\frac{12}{12}$, hoc eſt $\frac{33}{12}$, primus. ſecundus 1 N—1 eſt $\frac{5}{12}$

minus

minus $\frac{11}{12}$. quod cum fieri non poſsit, illud ab hoc deduxit autor, ut ſint $\frac{7}{12}$. nulla huius licentiæ commonſtrata cauſa. tertius eſt $\frac{80}{12}$ —— $\frac{11}{12}$, 16 N —— 1, ſcilicet $\frac{68}{12}$. Quod additur de communi denominatore, prauum eſt. nam 33 in 165 quinquies, 7 in 84 duodecies ineſt. Itaq; neceſſe eſt aliquid hinc excidiſſe. Nam hi numeri quæſtioni planè non ſatisfaciunt. $\frac{33}{12}$ in $\frac{7}{12}$ multiplica, habes $\frac{231}{144}$. adde $\frac{40}{12}$, ſeu $\frac{480}{144}$, ſumma $\frac{711}{144}$ nihil minus quàm 8. Sed & quod datos numeros uult unitate ſingulos à quadrato abeſſe, quam cauſam habeat non explicatur: cur ita ſit neceſſe, facile apparet ex æquatione 144 Q —— 1 & 24. Nam cùm unitatem adijci oporteat ad 24, niſi hoc pacto fieret quadratus, explicari in ueris numeris æquatio non potuiſſet: puta ſi 144 Q — 1 æquarentur cum 30, aut 9, aut 12, &c. quia radix quadrata ex 31, 10, 13, &c. haberi non poteſt. Cauſa autem falſitatis omnis in eo eſt, quod (ut & in ſuperiore propoſitione fecerat) 9 —— 1 N per 1 N diuidere cum debeamus, pro uero quotiẽte, qui eſt[a], falſum poſuit 9 N —— 1 librarius, & reliqua confudit omnia. Nam ſi 1 ſit ualor Numeri, ſanè quia hæc nihil diuidit,[b] erit 8. Eſt autem 8 etiam 9 N —— 1. Verùm hoc ipſum abſurdum eſt abſurdius quouis alio abſurdo, tantum ponere primum numerum, quantum fieri debeat amborum ſumma ad productum ex ipſis adiecta: & ſecundo dare nihil. Ponamus denuò primum ex ſuperiore propoſitione[c], ſecundum 1 N —— 1. pro tertio ſequamur canonem, auferamus ſecundum à 15, & reliquum per 1 N diuidamus, fiet tertius[d]. Primo in tertiũ ducto, producitur[e]. huic ſi addas ſummam ipſorum[f], conficies[g]. atq; hæc ſumma æquabitur 24. & facta (ut ſolemus appellare) reductione 144 —— 1 Q æquatur 24 Q, hoc eſt, 144 || 25 Q. (Atq; heic quoq; apparet, cur dati numeri, unitate ſinguli debeãt quadrato aliquo eſſe inferiores, ut paulo antè in uitioſa æquatione etiam licuit uidere.) Fit ergo 1 N, $\frac{12}{5}$. Reſtat ut demonſtremus, hoc pacto ſolui quæſtionem, & omnibus eius poſtulatis ſatisfieri. Reſoluamus hypoſtaſes 9 —— 1 N, eſt $\frac{45}{5}$ —— $\frac{12}{5}$, hoc eſt $\frac{33}{5}$. quod diuidi per $\frac{12}{5}$ (nempe per 1 N) oportet. fit $\frac{11}{4}$. tantus eſt primus. ſecundum $\frac{7}{5}$ eſſe, tertium uerò $\frac{17}{3}$, eadem ſecutus comperies. Diophantus hos tres numeros redegerat ad eandem denominationem, ſexageſimarum ſcilicet partium, ut eſſent $\frac{165\quad 84\quad 340}{60}$. quod artificium alibi tradidimus. neq; uerò fuit neceſſarium. Si A in B multiplices, $\frac{77}{20}$ emergent. atqui A eſt $\frac{55}{20}$, B $\frac{28}{20}$. Summa omnium $\frac{160}{20}$. nimirum 8. Si B in C, habebis $\frac{119}{15}$. ſed B eſt $\frac{21}{15}$, C $\frac{85}{15}$. ſumma omnium $\frac{225}{15}$, hoc eſt 15. C in A ducto gignes $\frac{187}{12}$. iam C eſt $\frac{68}{12}$, & A eſt $\frac{33}{12}$. ſumma omnium $\frac{288}{12}$, uidelicet 24. Iucundior eſt hæc, quàm laborioſior, operatio. (Alioqui licebat duobus primis ut collibuiſſet per præcedentem poſitis, puto $\frac{1}{8}$ & 7, &c. tertium inuenire, & ſatisfacere quæſtioni. Sed nos etiam Diophanti emẽdationem ſubtili expoſita propoſiti pertractatione uolumus oſtendere.

a $\frac{9 — 1\,N}{1\,N}$
b $\frac{9 — 1\,N}{1\,N}$
c $\frac{9 — 1\,N}{1\,N}$
d $\frac{16 — 1\,N}{1\,N}$
e $\frac{144 \dagger 1\,Q - 25}{1\,Q}$
f $\frac{25\,N — 2\,Q}{1\,Q}$
g $\frac{144 — 1\,Q}{1\,Q}$

XXXIX. Inueniantur duo numeri infinitè, ut qui ex uno in alterum fit, ſumma ipſorum multatus, datum numerum exhibeat. Hic eſto 8. Statuamus primum 1 N, ſecundum 3. Qui fit ex altero in alterum, dempta ipſorũ ſumma, eſt 2 N —— 3, quod æquatur 8. Fit 1 N, $5\frac{1}{2}$. Ergo ſecundum poſitiones, primus eſt $5\frac{1}{2}$, ſecundus 3. Rurſum diſpicio unde factum ſit quod 1 N eſt $5\frac{1}{2}$. nimirum quia 11 diuidebatur per 2. Atqui 11 eſt ſumma dati & ſecundi numerorum. 2 autem N ſunt unitate minor numerus ſecundo. Itaque ſi ſtatuero ſecundum quantumcunque, eumq; dato adijciam, & ſummam diuidam per unitate minorem ſecundo, inuenero primum. Sit ſecundus 1 N † 1. adde ad 8, fiunt 1 N † 9. diuide per unitate minorem ſecundo, ſcilicet per 1 N. fit 1 † 9 N. itaq; infinitè ſoluta eſt quæſtio. Hæc propoſitio, lemma eſt ſequenti inſeruiens.

XL. Dentur tres numeri, ut qui producitur binis altero in alterum multiplicatis, demta eorum ſumma ſit qui poſcitur numerus. Oportet datos ſeu poſtulatos numeros, quemq; unitate minorem quadrato eſſe. Planus è primo in ſecundum detracta ſumma ipſorum fit 8. ſecundi in tertij itidem horum ſumma multatus, 15. tertij in primum ſumma horum amiſſa 24. Heic iuxta lemma iam expoſitum, ſi ſecundum ſtatuo 1 N † 1, addo hoc ad 8, fiunt 1 N † 9. diuido hoc per unitate minorem ſecundo, hoc eſt per 1 N, naſcitur primus 1 † 9 N. Sed & tertius hoc modo inuenietur 1 † 16 N. duobus itaque poſtulatis ſatisfecimus. Denique primus in tertium ductus quem producit, demta eorum ſumma facit 144 Q —— 1, æquale hoc 24. & fit 1 N, 15. ad poſitiones hoc ſi conferas, erit primus 17, ſecundus 17, tertius 92. quos ſi uelis idem habere nomen, omnia per 60 multiplicabis, erit primus 285, ſecundus 204, tertius 460.

XYLANDRI.

In fine eſt ἄλλως, Aliter. Sed aliunde hoc, & ocioſè inculcatum, cùm problema ſequens nihil tale tractet. eodem autem quo ſuperiora uitio laborant hæc problemata. Non enim 1 † 9 N fit, ſi 1 N † 9 per 1 N diuidatur, ſed [a]. quomodo prius problema horum ſoluitur in infinito. Eſto enim ualor Numeri 4. ac ponamus ſecundum 1 N † 1. is erit 5. primus ſit 1 † 9 N, erit 37. producunt hi 185, unde ſi 42 (ſummam ipſorum) auferas, 143 reſtant, cùm 8 poſtulentur. At ſi primus ſtatuatur [b], is hoc pacto erit $\frac{13}{4}$. quod ſi per 5 (ſecundum) multiplices, emergent $\frac{65}{4}$. ſumma amborum eſt $\frac{33}{4}$, quæ à producto ſublata, $\frac{32}{4}$ relinquit, hoc eſt 8. Reſtat ut ueram poſterioris ſolutionem exponamus. Sit ergo ſecundus 1 N † 1, erit primus (ut antè) [c], & tertius iuxta canonem non 1 † 16 N, ſed [d]. Hoc ubi per primum multiplicaueris, [e] producetur. cui ſi adimas [f] (hæc enim eſt ſumma primi & tertij) relinquetur nimirum [g] æquale 24, rurſumq́; 1 N eſt $\frac{12}{5}$. Ergo primus eſt $\frac{19}{4}$, ſecundus $\frac{17}{5}$, tertius $\frac{23}{3}$. (ſi uoles ad unum reducere, erunt communi denominatore 60 conſtituto, hi numeratores 285, 204, 460. qui ſoli numeri integri incorrupti apud Diophantum ſupererant.) Experiamur autem an ſatisfiat poſtulatis. Primo in ſecundum ducto fiunt $\frac{323}{20}$. ſummam ipſorum $\frac{163}{20}$ inde aufer, reſtant $\frac{160}{20}$, hoc eſt 8. Secundus in tertium producit $\frac{391}{15}$. ſumma ipſorum $\frac{166}{15}$. inde ſubtracta, relinquuntur $\frac{225}{15}$, hoc eſt 15. Deniq; tertius in primum gignit $\frac{437}{12}$, unde ſi abijciam ipſorum ſummam $\frac{149}{12}$, ſuperſunt $\frac{288}{12}$, hoc eſt 24. Variari poterant hæc multis modis, etiam loco 8, 15, 24. alijs adſcitis numeris, 35, 48, 63, 80, 99, &c. modò unitate adiecta quadrati qui fierent, quibuſcunq;. ne in ſurdos res excidat.

a $\frac{1N+9}{1N}$
b $\frac{1N+9}{1N}$
c $\frac{1N+9}{1N}$
d $\frac{1N+16}{1N}$
e $\frac{1Q+25N+144}{1Q}$
f $\frac{2Q+25N}{1Q}$
g $\frac{144-1Q}{1Q}$

XLI. Duo numeri infinitè dentur, ut qui fit uno ipſorum in alterum ducto, ad ſummam ipſorum habeat proportionem quæ præſcribitur. Sit producti ad ſummam tripla ratio. Statuo primum 1 N, ſecundum 5. Planus ex ipſis fit 5 N, quod triplum ſit ad 1 N † 5. ergo 3 N † 15 æquantur 5 N. fit 1 N, $7\frac{1}{2}$. quod ſi poſitionibus noſtris accommodemus, primus erit $7\frac{1}{2}$, ſecundus 5. Conſidero heic, 1 N fieri $7\frac{1}{2}$, quia 15 per 2 N diuiduntur. At 15 ſunt ſecundus per datæ rationis numerum multiplicatus. & 2 ſunt interuallum ſecundi, & numeri rationis. Ergo ſi quantumcunq; ſtatuamus ſecundum, & multiplicemus eum per numerum rationis datæ, ac productum diuidamus per interuallum, quo ſecundus rationis numerum excedit, inuenietur primus. Secundus ſit 1 N, multiplica per 3, fiunt 3 N. diuide per 1 N—1, habes primum $\frac{1N}{1N-3}$.

XYLANDRI.

In Græco mutilata ſunt hæc. Porrò ſi $7\frac{1}{2}$ & 5 addas, habes $12\frac{1}{2}$. quorum triplum $37\frac{1}{2}$. tantundem fit ex 5 in $7\frac{1}{2}$. Variari poſſe hoc, non eſt obſcurum. Sed adhibenda eſt cautio. Sit primus 1 N, ſecundus (uerbi gratia) 12. ſumma 1 N † 12. huius triplum 3 N † 36 æquabitur 12 N, quod ſit uno in alterum ducto. ſit primus 4, ſecundus 12. Nam quater 12 ſunt 48, cuius tripla eſt ratio ad ſummam amborum, 16. Statuamus porrò primum 1 N, ſecũdum 2. & ratio maneat eadem. Producitur 2 N, quod ſit triplum ad 1 N † 2. ergo 3 N † 6 æquabuntur 2 N, & 1 N † 6 erit nihil, quod eſt abſurdum. Hoc monui, ut intelligas ſecundum maiorem rectè poni eo numero quo ratio producti ad ſummam futura exprimitur.

XLII. Dentur tres numeri, ut quem bini producunt planum, is ad eorum ſummam ea ſit quæ poſcitur ratione. Sit productus è primo in ſecundum ad ſummam ipſorum triplus: è ſecundo in tertium ad ſummam horum quadruplus: è tertio in primum ad ſummam eorum quincuplus. Statuatur ſecundus 1 N, erit ex præcedente lemmate primus [a]. Eodemq; modo tertius [b]. Reſtat ut primus in tertium ductus quem producit, is ad ſummam ipſorum ſit quincuplus. Producitur autem [c]. Summa autem horum eſt [d]. Huius ſummæ ergo quincuplum [e] æquatur [f]. Et abiecto communi denominatore, 12 Q æquantur 35 Q —— 120 N. ita fit 1 N, 120. Id nunc ad poſitiones applicemus, quæ erant [g], 1 N [h]. Si 120, ut 1 N, in primam multiplices, in 3 N, erunt 360, reliquum eſt ut 120 ducas in 1 N —— 4, fiunt 51. relinquitur ergo primus 361. Secundus 120. non enim ab aliqua numeri parte denominabatur. Pro tertio 120 in 4 N ducatur, fiunt 480. item in denominatorem 1 N —— 4, fiunt 20. reſtat ergo tertius 480. & manifeſta eſt demonſtratio.

a $\frac{3N}{1N-3}$
b $\frac{4N}{1N-4}$
c $\frac{12Q}{1Q+12-7N}$
d $\frac{7Q-24N}{1Q+12-7N}$
e $\frac{35Q-120N}{1Q+12-7N}$
f $\frac{12Q}{1Q+12-7N}$
g $\frac{3N}{1N-3}$
h $\frac{4N}{1N-4}$

XYLANDRI.

Monſtroſè omnia ſunt deprauata. Itaque ab æquationis initio ad uerbum omnia deſcripſi Latinè.

Latinè. ſuperiora de meis uerbis corrigas licet. Rationem addendi [a] *&* [b] *alibi nos explicauimus, quã heic Diophãtus perſequitur. Vbi nos diximus* Abiecto communi denominatore, *in Græco eſt* καὶ πάντα ἐπὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν μ̄ ο̄ ε̄ *. legendum autem eſt* αὐτῶν μόριον. *nam abiectio denominatoris eiuſdem, nihil aliud eſt quàm occulta multiplicatio per eum ipſum, qua numeratores abſoluuntur. Cætera omnia ſunt falſa. Non enim 120, ſed* $\frac{120}{23}$ *fieri 1 N, ſatis eſt euidens. Et hi numeri, 361, 120, 480, quiduis potius præſtabunt, quàm poſtulatis problematis huius ut reſpondeant. Cæterùm ut rem expediamus, cum 1 N ſit* $\frac{120}{23}$, *3 N erunt* $\frac{360}{23}$, *& 1 N —— 3 erunt* $\frac{120}{23}$ *demtis* $\frac{69}{23}$, *hoc eſt* $\frac{51}{23}$, *per hoc ſi diuidas* $\frac{360}{23}$, *inuenietur primus numerus* $\frac{360}{51}$. *Secundus manet* $\frac{120}{23}$. *tertius eſt 4 N,* $\frac{480}{23}$, *diuidendus per 1 N —— 4, hoc eſt per* $\frac{120}{23}$ *——* $\frac{92}{23}$, *ſcilicet per* $\frac{28}{23}$, *fit ergo tertius* $\frac{480}{28}$ *ſiue* $\frac{120}{7}$. *Hinc facilè eſt uidere quo pacto Græca corrigenda ſint. Sed experiamur Marte noſtro, an etiam poſtulatis ſatisfiat. Primo* $\frac{360}{51}$ *in ſecundum* $\frac{120}{23}$ *ducto, producitur* $\frac{43200}{1173}$. *Summa ipſorum* $\frac{14400}{1173}$, *triens producti. Rurſum ſecundus* $\frac{120}{23}$ *in tertium* $\frac{120}{7}$, *gignit* $\frac{14400}{161}$. *at ſumma ipſorum eſt* $\frac{3600}{161}$, *quadrans producti. Deniq; tertius* $\frac{120}{7}$ *in primum* $\frac{360}{51}$ *gignit* $\frac{43200}{357}$. *at ſumma ipſorũ eſt* $\frac{8640}{357}$. *quæ per quinq; multiplicata, productũ æquat.*

a $\frac{3N}{1N - 3}$

b $\frac{4N}{1N - 4}$

XLIII. Dentur tres numeri, quorum quem bini faciunt planum is ad ſummam omniũ habeat quæ poſcitur rationem. Sit planus à primo in ſecũdum ad omnium ſummam triplus: planus è ſecundo & tertio ad omniũ ſummam quadruplus: planus tertij in primum ductu factus, ad omnium ſummam quincuplus. Quando binorum planus ſemper ad ſummam omniũ habet datam rationem: quæro primùm tres numeros, & aliquem utcunq; adſcitũ, ad quem binorũ plani habeãt imperatas rationes. Arbitrarius iſte numerus ſit 5. cuius triplũ, hoc eſt 15 N cùm ſit planus qui fit ex primo in ſecũdum, erit planus iſte 15. Statuamus ſecundum 1, erit primus 15 N. Rurſus cùm qui ex ſecundo in tertium fit, ſit quadruplũ arbitrarij iſtius, erit planus 20 N. ergo cùm ſecũdus ſit 1, erit tertius 20 N. Reſtat ut qui è tertij ductu in primum fit, nimirum 300 Q, ſit quintuplus ad arbitrarium. Ergo 300 Q æquantur 25. Sanè ſi numerorum inter ſe exſtitiſſet ratio ea, quæ quadrati eſt ad quadratum, quæſtionis ſolutionem inueneramus. Enimuerò 300 Q orti ſunt ex 15 N in 20 N multiplicatis: cùm quidem 15 ad arbitrarium 5 triplam, 20 ad eundem quadruplam haberet rationem. Hoc ergo deſideratur, ut ſi triplus ad 5 per quadruplũ ad 5 multiplicetur, productus ad 5 per 5 multiplicatis productũ rationem habeat, quæ eſt quadrati ad quadratum. Atqui 5 numerus arbitrarius eſt, & temerè adſcitus. Quærendus proinde eſt numerus, cuius triplus & quadruplus quem planum procreant, is ad numeri ipſius quincuplũ, rationem habeat quæ eſt quadrati ad quadratum. Hunc ſtatuamus 1 N. Eius triplus 3 N in quadruplũ 4 N multiplicatus, producit 12 Q: atque hic ad poſiti quincuplũ, ad 5 N inquam, rationem habeat oportet quæ eſt duorũ quadratorum inter ſe. Conſequens eſt ut altero in alterũ ducto, fiat quadratus. Ergo 60 C æquantur quadrato. is ſit 900 Q. fit 1 N, 15. Ergo ad poſita, cùm quæſitus numerus ſit 15, primus & ſecundus producent 45 N. cumq; ſecũdus ſit 1 N, erit primus 45 N. eadẽq; ratione tertius 60 N. Supereſt ut productus hoc in primum multiplicato, ſcilicet 2700 Q, æquetur quintuplo poſiti numeri, quod eſt 75. Fit 1 N hoc pacto 6. Itaque ſecundum poſita primus erit $7\frac{1}{2}$, ſecundus 6, tertius 10. Quorum ſumma ſi foret 15, ſatisfactum planè eſſet quæſtioni. Statuo itaque eorum ſummam 15 Q. atqui ea eſt $23\frac{1}{2}$ N. hoc ergo æquatur 15 Q. fit 1 N 47. Ad poſita. erit primus 308. ſecundus $282\frac{1}{2}$, tertius 470.

XYLANDRI.

Heic quoq; mendas complures correximus, re ipſa freti. Docet autem ratio, ſi 60 C aliquot quadratis æquentur, & 1 N fieri debeat 15 (quod conſtat Diophantum uoluiſſe) non referri ad μ̄, *40 Q, ſed ad* ω̄ α, *900 Q. Nam 900 per 60 diuiſo, 15 prodeunt. Cætera omnino ſunt confuſa. Itaq; reliqui ut erant in Græco. Meam autem operationem proponam. Certè in primis hypoſtaſibus inconſtanter arbitrarius ille ſummam omnium repræſentans 5 N, eius triplum 15 N, quadruplum 20 N, ac quincuplum deniq; 25 unitates dicuntur. & ſi hoc 25 N ponas, 300 Q æquabuntur cum 25 N, & 1 N ſit* $\frac{1}{12}$, *quod minimè placuit Diophanto. Eadem inconſtantia eſt in hypoſtaſibus poſterioribus. ubi ſumma omnium ponitur iam 75 unitates, mox ad ſolutionem inueniẽdam unitatibus ſignum Q adhibetur. Solutionis autem numeri palàm ſunt falſi & inepti* *ut demonſtrare etiam hoc pigeat. Sic itaque ratiocinationem inſtituamus. Inueniemus numerum, cuius triplus & quadruplus inter ſe multiplicati, producāt numerum cuius ad dati quincuplum ratio ſit quæ eſt quadrati ad quadratum. Hoc loco utcunq; tolerari poteſt Diophantea lectio. & ſit quæſitus numerus 15. Atq; hanc nos ſtatuamus ſummam omnium eſſe. Iam cum primo in ſecundum ducto fiant 45. ponamus ſecundum eſſe 1 N, fiet primus*[a]*, & eadem ratione tertius*[b]*. primo in tertium ducto producemus*[c]*, quod æquetur 75, quincuplo ſummæ omnium. Hæc reducta æquatio, fit —270 || 75 Q. & 1 Q fit 36. Ergo 1 N, puta ſecundus, eſt 6. primus $7\frac{1}{2}$, tertius 10. quæ poſitiones manſerant integræ inter tot corruptelas. Atqui horum numerorum ſumma non eſt, quod ponebatur, 15, uerū $23\frac{1}{2}$. Hoc loco obſeruandum eſt, ſummā omnium non temerè poni 15 Q. Nam character N additur nouis poſitionibus, ad uerum ualorem Numeri inueniendum, quo ſoluatur quæſtio. Erunt ergo nunc hypoſtaſes hæ $7\frac{1}{2}$ N, 6 N, 10 N. quarum ſumma $23\frac{1}{2}$ N. At primus in ſecundum ductus, 45 Q producit, cuius triens 15 Q ex hypotheſi ſummam omnium æquat. fit ergo 1 N, $\frac{47}{30}$. Ergo primus, $7\frac{1}{2}$ N, eſt*[d]*. ſecundus (puta 6 N) $\frac{282}{30}$, tertius $\frac{470}{30}$, nimirum 10 N. Præſtat autem in ſexageſimis ſic exponi, $\frac{705\ 564\ 940}{60}$. Summa omnium eſt $\frac{2209}{60}$. Primus in ſecundum ſi artificioſè multiplicetur ($\frac{705}{60}$ in $\frac{564}{60}$. 705 & 60 per 15, 60 & 564 per 4 diuiſos ad minores terminos reduco, fiunt $\frac{47}{15}$ in $\frac{141}{4}$.) producuntur $\frac{6627}{60}$, omnino triplum ſummæ omnium. Si ſecundum in tertium ducas ($\frac{564}{60}$ in $\frac{940}{60}$. numeratorem prioris & denominatorem poſterioris per 6, reliquos per 10 diuiſos ad minimos redegi, fiunt $\frac{94}{6}$ in $\frac{94}{10}$.) producitur $\frac{8836}{60}$, omnino ſummæ omnium quadruplus. Deniq; primo & tertio commiſſis, $\frac{705}{60}$ in $\frac{940}{60}$, hoc eſt (quo in prima multiplicatione, eodem heic utor compendio) $\frac{47}{15}$ in $\frac{235}{4}$ multiplicato, fiunt $\frac{11045}{60}$, ac tantundem fit prorſus, ſi ſummam omnium quintuplices. Habes explicationem quæſtionis neq; inelegantis, & perdifficilis: ita autem corruptè ac mutilatè ad nos perlata, ut pœnè animum initio deſponderim. Vides autem quid poßit legitima minutiarum tractatio in his rebus.*

a $\frac{45}{1N}$

b $\frac{60}{1N}$

c $\frac{2700}{1Q}$

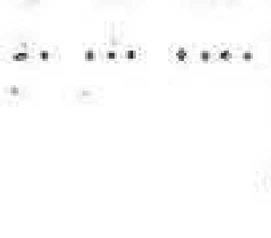
d $\frac{352\frac{1}{2}}{30}$

XLIV. Inueniantur tres numeri, ut ſumma eorum multiplicata per primum, fiat triangulus; in ſecundum, quadratus; in tertiū, cubus. Statuatur ſumma trium 1 Q. Primus quadratorū numero triangulo, puta 6 Q. ſecundus quadratorum numero quadrato, 4 Q. tertius quadratorū numero cubico, ſit 8 Q. Ergo 1 Q in primum ducta facit 6, triangulū. in ſecundū, 4, quadratū. in tertiū, 8, qui eſt cubus. reſtat ut hi tres coniūcti ſint 1 Q. at ſunt 18 Q quod æquatur 1 Q. & multiplicatis omnibus per 1 Q, fit ęquatio inter 18 & 1 QQ. Oportebat ergo 18 eſſe 1 Q, & habere latus quod ſit quadratus. At 18 eſt ſumma trianguli, quadrati, & cubi. Proinde reperiēdus eſt quadratus, cuius latus cōſtet ex partib. numeris triangulo, quadrato, cubo. Eſto is 1 QQ —2 Q. Ergo ſi ab 1 QQ aufero 1 Q † 1 —2 Q, ſuperſunt 2 Q—1. hæc diuidātur in cubū & triangulū. ac ſit cubus 8. erit triāgulus 2 Q—9. Porrò quiuis triāgulus ꝑ octo multiplicatus, adſcita unitate quadratus fit. Ergo 16 Q—71 æquantur quadrato. Fingo quadratū à latere 4 N—1. is eſt 16 Q † 1—8 N. Fit 1 N, 9. Hoc ſi ad poſitiones accōmodetur, erit triangulus 56, quadratus 470, cubus 8. Venio ad id quod initio propoſueram. Statuo ſummam eorum 1 Q. primum 153 Q, quando triangulus requiritur. ſecūdum 470 Q, quia quadratus, tertium 8 Q, quia cubus. In hos multiplicetur 1 Q, numerus quadratus: faciet triangulum, quadratum, cubum. Horum ſumma ſit 1 Q. at eſt 2561 Q, quod ęquatur 1 Q. & depreſſo utroq; per 1 Q. æquatur 1 Q & 2561. Fit 1 N 9. Ergo ſecundū poſita, primus eſt 153, ſecundus 6400, tertius 8. & euidēs eſt demonſtratio.

XYLANDRI.

De triangulis numeris non uulgaria.

Obſcurior an corruptior ſit hoc loco Diophantus, quæri poteſt. Vix adeò ueſtigia reſtant, quæ ſecutus poſſe uidearis indagare quid hoc ſit rei, quod heic agitur. Trianguli numeri ſunt, qui numeris aliquot (quotcunq; ſint, perinde eſt) ab unitate ordine naturali progredientibus (ſcilicet ſequente antecedentem unitate identidem ſuperante, qui eſt modus & ratio numerandi) in unam ſummam contractis. ut 3, 6, 10, 120, 3828. & infiniti alij: ſic dicti, quod unitatibus ita diſtributis ac collocatis, ut appinximus, quādam triquetri æquilateri habent ſimilitudinē: non quod area ſit eadē, ſed quod ſimilis utcūq; figura. Eſt ergo trigonus ſumma ꝓgreſsionis Arithmeticæ ab unitate inchoatæ & cōtinua numerorū ſerie quouſq; libuerit propagatæ. Tædebat adſcribere canonē, quo pacto talis ſeries numerorū in unā ſummā cōtrahatur. ſed tamē inferiùs oportebit eū proferre. Ipſorū aūt trigonorū ꝓgreſsio & ꝓpagatio qualis ſit, ex hoc typo licet intelligas.



Series

Series numerorum.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
		/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
Trigoni.——	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.	55.	66.	78.	91.	105.	120.	136.	153,&c.

Primus ſtatuitur 1.adde 2.habes 3,ſecundum.huic 3,habes 6 tertium.huic quartum numerum ſeriei naturalis addes, & ſic deinceps augebuntur trigoni. Sed & alia elegantior ratio eſt eos inueniendi,multiplicando impares naturali ſerie expoſitos, per binos numeros ordine numerandi ſibi ſuccedentes. ita

Impares.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17,&c.
Multiplicantur per	1 & 2.	2 & 3.	3 & 4.	4 & 5.	5 & 6.	6 & 7.	7 & 8.	8 & 9.
Fiunt trigoni	3. 6.	10. 15.	21. 28.	36. 45.	55. 66.	78. 91.	105.120.	136.153.

Hoc loco rationem nullam fractorum aut ſurdorum haberi, ſed de ueris numeris agi & abſolutis,notum eſt. Quod ſi quæratur numero aliquo propoſito,ſit ne (uerbi gratia is quem ſuprà poſuimus) 3828 trigonus; & ſi ſit, quotus in ordine & cuius progreſsionis numerorum ab unitate naturali ſerie proficiſcentium ſumma: eius quæſtionis ſolutionem Diophantus obliquè perſtrinxit. Omnis,inquit,trigonus per octo multiplicatus, accedente unitate fit quadratus. Ergo 100, 20,11,&c. trigoni non ſunt: quia 801,161,89. quadrati non ſunt. At ſi 3828 per 8 multiplices, & unitatem producto addas, 30625 conficitur,quadratus numerus. Eſt ergo 3828 trigonus. Vt ſcias quotus ſit, & è qua ſerie numerorum coagmentatus (radicem uocant hoc trianguli) latus quadrati ſic facti unitate multa, reliqui ſemiſsis oſtendet ultimum progreſsionis numerum: primus eſt 1. Verbi gratia, radix quadrata de 30625 eſt 175. aufer 1, reſtant 174. cuius ſemiſsis 87. Eſt ergo 3828 trigonus in ordine (unitate pro primo, ut ſolet, numerata) octogeſimus ſeptimus: ac conflatur 1 & 87, omnibusq; in medio numeris in unam ſummam collectis. Nam 1 & 87 ſunt 88. cuius ſemiſsis (ut canon poſcit) in 87 multiplicatus, ſummam uniuerſorum 3828 gignit. Sic 5050 per 8 multiplicatus, adiecta producto unitate fit 40401. quadratus, cuius radix 201. ergo ſemiſsis de 200, id eſt 100, eſt radix trigoni 5050, hoc eſt, is eſt centeſimus, fitq; collectis omnibus ab 1 ad 100 (his ſimul incluſis) numeris. Huius trigonorum proprietatis meminit etiam Plutarchus noſter in quarta Platonica quæſtione. quam nos ex Algebra demonſtrare hoc loco ſatis habebimus. Cuiuis trigono æquatur $\frac{1}{2}$ Q † $\frac{1}{2}$ N. Nam ſi canonis dicti ignaro mihi imperaretur, ut trigoni 703 radicem exponerem, (quod uniuerſè de quouis trigono intelligendum liquet.) 1 N ego pro ultimo progreſsionis numero ponerem: ſed & numerus terminorum progreſsionis Arithmeticæ, qualem definiuimus, in unã ſummam contractæ, quam datus exprimit trigonus, erit 1 N. primus autem terminus in hoc negocio ſemper eſt unitas. Ergo canonem progreſsionis Arithmeticæ in unam ſummam colligẽdæ ſequor. addo primum ultimo, hoc eſt 1 ad 1 N, fit 1 N † 1. hoc per ſemiſſem numeri terminorum, uel hunc totum per ſemiſſem ſummæ primi & ultimi (idem enim eſſe conſtat) multiplicato: producitur $\frac{1}{2}$ Q † $\frac{1}{2}$ N. Hoc ergo æquatur uniuerſè cuiuis trigono numero; hoc eſt, ſummæ cuiuſuis progreſsionis numerorum naturali ſerie continuatæ ab unitate: & heic æquatur cum 703. Supereſt, ut uideamus quantus ſit, id eſt quot unitatibus æſtimetur 1 N. Heic tiro (his enim laboramus) animaduertat bis quatuor eſſe octo: & numerum per 2, mox productum per 4 multiplicare, eſſe illum numerum octuplicare. Nam cum $\frac{1}{2}$ Q † $\frac{1}{2}$ N æquentur 703: utrinque detracto $\frac{1}{2}$ N, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ Q & 703 —— $\frac{1}{2}$ N. Ergo ſi per 2 omnia multiplicentur, 1 Q æquabitur 1406 —— 1 N. (uides trigonum per 2 eſſe multiplicatum?) Iam ſecundum canonem ut æquatio explicetur, ſemiſsis unitatis N notatæ, hoc eſt $\frac{1}{2}$ in ſe multiplicatur. fit $\frac{1}{4}$. addendus eſt 1406, (duplum trigoni.) quod ut fiat, per 4 multiplicatur (ita fit octies 703) ſubſcripta ſibi, fit ſcilicet $\frac{5624}{4}$. & addito $\frac{1}{4}$, colliguntur $\frac{5625}{4}$. (Heic uides qui unitas ad octuplum trigoni addatur.) Summæ radix quadrata eſt $\frac{75}{2}$. ſed $\frac{1}{2}$ canon auferri iubet. ita 1 N fit $\frac{74}{2}$, ſiue 37. Ergo 37 eſt radix dati trianguli 703, hoc eſt trigeſimusſeptimus trigonus eſt 703, & ſumma eſt numerorum 1, 2, 3, & 37. ſerie naturali progredientium. Vides ut ſapientes ex Algebra pulcerrimos canones extruxerint? Nosq; eadem opera & Plutarchi locum illuſtrauimus (quod idem, DEO uolente etiam aliàs ſuis locis noſtrarum lucubrationum faciemus) & Diophanteo lemmati lucem attulimus. Sed & canonem de Arithmetica progreſsione obiter auximus: quem alio loco collocupletauimus. Sub cultro me relinquis, diceres? neq; problemati interim ſatis fit? Certè modeſtus Lector ueniam nobis debet, ſi neque

Plutarchi locus illuſtratus.

ocium nobis omnia rimandi ſuppeditat, & difficultati moleſtiæq; etiam quandoque ſuccumbimus. Experiamur tamen, quid contra has difficultates φιλοπονία pertinax poſſit, inſtigata elegantijs rei propoſitæ. Primò omnium illud ὕστερον πρότερον non ἐμμελικῶς modò, ſed & ἀριθμητικῶς iuuat. eſt enim analyticum. Quo modo numeri proponuntur ſoluturi quæſtionem: nunquam ei ſatisfiet. Summa omnium eſt 6561. (nam mendas perſequi non uacat) qui cum ſit quadratus non ſemel in 6400 ductus, quadratum utiq; (ut ſuprà monuimus) dabit. Sed fieri non poteſt, ut per 8 multiplicatus, cubum producat. cum neque cubi ſint ambo, neq; cuborum naturam communicantes ſiue cuborum ſimiles. de trigono ipſe, ſi uidebitur, experieris. Quid ſi numeros proponas $\frac{153 \quad 6400 \quad 8}{6561}$? ne ſic quidem ſatisfiet poſtulatis. Summa enim erit $\frac{6561}{6561}$, hoc eſt 1. & cùm 1 nihil uariet ſui multiplicatione in alium, cæterùm 153 ſit (quod per canonem experiri licet, aut etiam in typo uidere) triangulus, 6400 haud obſcurè quadratus, 8 cubus: demto medio, nullus ſatisfaciet quæſtioni. nam $\frac{153}{6561}$ trigonus eſſe non poteſt, cùm non ſit numerus propriè. & $\frac{8}{6561}$ cubicam radicem non habet. Hæc ergo ita ſunt affecta. Græca quidem facilius fuerit de integro ſcribere, quàm corrigere. Valdè heic multa ſunt, quæ explicari aut defendi poſſe non uidentur. Quis enim concedat triangulum per quadratum ſi multiplicetur, ſtatim manere triangulum? Certè 6 triangulus eſt, 24, 54, 96 trianguli non ſunt, facti quadratis in triangulũ multiplicatis. Porrò quadratus cubum ſi multiplicet, niſi ipſe quoque cubus ſimul fuerit, cubum nullo modo producet. niſi fortè 32 cubus eſt, 4 in 8, quadrato in cubum multiplicato ortus; ut & 576 fit ex quadrato 9 in cubum 64, & 432 ex 16 in 27: neuter cubus. atq; hoc etiam elementa Algebrica docent. Quis uerò neſcit, aliud eſſe numerum per 1, quàm per 1 Q multiplicare? Ergo ſi ponantur numeri iſti 6 Q, 4 Q, 8 Q, producetur ſumma eorũ 1 Q poſita, & in ſingulos ducta, 6 QQ, 4 QQ, & 8 QQ. quorum ſummam fateor quidem eſſe 18 QQ: ſed ut concedam primum eſſe triangulum, & ultimum cubum eſſe (nam quin quadrato in quadratũ ducto quadratus naſcatur, dubium minimè eſt) quis me coget credere, aut quî patiar etiã mihi hoc perſuaderi? Adde quòd hoc pacto noua conditio terminis ſtatuitur, adeoq; noua quæſtio proponitur. Oportebit enim de tribus qui quæruntur primũ eſſe ſeſcuplũ ſummæ, ſeſquiplum ſecundi, dodrantem tertÿ, ſecundum quadruplum ſummæ, beſſem primi, ſemiſſem tertÿ, tertium ſecũdi duplum, primi ſeſquitertiũ, octuplũ ſummæ. quæ omnia multis modis ſunt abſurda. niſi hoc fortaſſe prætexatur, 1 Q non ubiq; idẽ ualere: quòd alieniſſimũ eſt in res Arithmeticas admittere. Vides nõ heic dũtaxat impingi, quòd 18 quadratus non eſt? His omnibus ſic medebimur, ut ponamus ſummam quæſitorum eſſe 1 Q, eum qui ſit primo in eam ducto, 6, puta triangulum. erit ergo primus[a]. eademq; de cauſa ſecundus[b], tertius[c]. hi enim ſingulatim per 1 Q multiplicati, producent 6. 4. 8. triangulũ, quadratũ, cubũ. & ſi ſumma ipſorũ eſſet 1 Q, planiſſimè ſatisfeciſſemus quæſtioni. at ſumma ipſorũ eſt[d], æqualis ſcilicet 1 Q. & ſic reductiõe facta, 1 QQ æquabitur 18. Hoc eſt quod in Græco dicitur, ἐ πάντα ἐπὶ δύναμιν μίαν. Si 18 eſſet Quadratoquadratus, ſatisfieri quæſtioni iam nũc poſſet. cùm non ſit, alius quærẽdus eſt, cõpoſitus (ut erat 18) iũctis triãgulo, quadrato, & cubo. Diophantus heic admodũ ingenioſa eſt uſus fictione, quã cõſectatus ueſtigia indagaui. Quadratoquadratũ ponit 1 QQ. qui cũ ſit ex quadrato, cubo, triãguloq; cõflatus; cùm cõſtet 1 QQ — 2 Q † 1 eſſe quadratũ (lateris 1 Q — 1. ſicut 1 Q — 2 N † 1 eſt quadratus lateris 1 N — 1) hunc ab illo aufert. relinquitur 2 Q — 1. (& notũ eſt 2 per 8 multiplicato fieri 16, quadratũ, ad quod reſpexit autor, alioqui aliũ quadratũ licuiſſet ſubtrahere, ut 1 QQ — 6 Q † 9, &c.) Reſiduũ porro cõſtat ex cubo & triãgulo. ſit cubus quicũq; abſolutus numerus: 8 more ſuo ſumſit Dioph. & nos eũ ſequemur Is de reſiduo ſublatus 2 Q — 9 relinquit. atq; hæc eſt portio triãgulo debita. Et ſi 1 QQ — 2 Q † 1, 8, ac 2 Q — 9 addas, omnino cõficies 1 QQ. Iã theorema illud de triãguli ꝓprietate à nobis è Dioph. ac Plutar. allatũ explicatũq;, ad æquationẽ ꝑueniẽdi uiã nobis aperit. Multiplicabimus 2 Q — 9 per 8, & ꝓducto unitatẽ adÿciemus, fiet 16 Q — 71, quadratus nimirũ. Cui effingitur quadratus à latere 4 N — 1, ut 16 Q utrinque aboleantur, & æquatio ſit inter N & unitates. & fit 1 N 9. ergo 1 QQ, eſt 6561. Videamus nũc reliqua. 1 QQ — 2 Q † 1 eſt 6400. aufer ab 1 QQ, ſuperſunt 161. de his 8, relinquũtur 153, quẽ eſſe trigonũ cõſtat. ergo 1 QQ 6561, cõponitur ex trigono 153, cubo 8, & quadrato 6400. Hoc ad ſuperiora nũc accommodemus. Sit ſumma omniũ 1 Q, primus[e], ſecũdus[f], tertius[g]. Hi ſingulatim per 1 Q multiplicati producent 153. 6400. 8. triãgulum ſcilicet, quadratum & cubum. Summa omnium[h] æqualis 1 Q, & reducta æquatione 6561 æqualis 1 QQ. Ergo 1 Q eſt 81. Proinde primus eſt $\frac{153}{81}$, ſecundus $\frac{6400}{81}$, tertius $\frac{8}{81}$. ſumma omnium $\frac{6561}{81}$, hoc eſt 81. uidelicet 1 Q. producti multiplicatione ſingulorũ in ſummã ſunt ÿdẽ liberati denominatore, ut ratio & experientia

[a] $\frac{6}{1Q}$

[b] $\frac{4}{1Q}$

[c] $\frac{8}{1Q}$

[d] $\frac{18}{1Q}$

[e] $\frac{153}{1Q}$

[f] $\frac{6400}{1Q}$

[g] $\frac{8}{1Q}$

[h] $\frac{6561}{1Q}$

experientia dictat. Itaq́, hanc quoq́, nos propoſitionē ſuæ integritati reſtitutam damus: ut, ſi lubeat, Græca omnia facere poſſis, ac pro mēdis uera reponere. Variari ſolutio innumeris modis poteſt, alijs triangulis, quadratis, cubis, pro arbitrio ad poſitiones adſcitis.

XLV. Quæruntur tres numeri, ita ut exceſſus maioris ſupra medium ad exceſſum medij ſupra minimum ſint qua præcipitur ratione. Porrò autem bini quadratū faciant coniuncti. Sit ratio interualli maiorum ad interuallum minorum tripla. Iam cum ſumma medij & minimi ſit quadratus, eſto 4. ergo medius erit maior binario. ſit itaque 1 N † 2. erit minimus 2 —— 1 N. Et cum interuallum maioris & medij ad interuallum medij & minimi ſit triplum: hoc autem ſit 2 N: erit illud 6 N. Ergo maximus eſt 7 N † 2. Superſunt duo poſtulata, nimirum ut primus & medio, & ſeorſim minimo addito, fiat quadratus. Heic mihi duplicata occurrit æquatio, cùm & 8 N † 4 quadrato, & item quadrato 6 N † 4 æquentur. & quia unitatum numerus eſt quadratus, expedita eſt æquatio. Statuo enim duos numeros, quorum uno in alterum ducto producantur 2 N: quam legem eſſe duplicis æquationis nouimus. Sint $\frac{1}{2}$ N & 4. Fit 1 N, 112. At ubi me ad poſita confero, non poſſum auferre 112 (1 N) à 2. Volo itaque 1 N inueniri minorem binario: atque ſic etiam 16 minus erit quàm 6 N † 4. Nam binario in 6 multiplicato, & 4 addito, fiunt 16. Quando igitur quæro 8 N † 4 æquales quadrato, itemq́; 6 N † 4 æquales quadrato: ſed & à binario fit quadratus 4: ita iam tres ſunt quadrati, puta 8 N † 4, 6 N † 4, & 4. & interuallum inter maximum & medium, interualli inter medium & minimum eſt triens. Itaq; eò res redijt, ut inueniendus ſit quadratus, ut interuallum maioris & medij, triens ſit eius quo medius minimum ſuperat: ac præterea minimus ſit 4, medius minor quàm 16. Statuatur minimus 4, latus medij 1 N † 2, erit ipſe 1 Q † 4 N † 4. Cum ergo interuallum inter maiores, interualli inter minores ſit triens: hoc autem ſit 1 Q † 4 N, erit interuallum maximi & medij $\frac{1}{3}$ Q † $\frac{4}{3}$ N. adde hoc medio, habebis maximū 1$\frac{1}{3}$ Q † 5$\frac{1}{3}$ N † 4, quod æquetur quadrato. Multiplica totum per 9. fient 12 Q † 48 N † 36 æqualia quadrato. ſed & quadrans horum, 3 Q † 12 N † 9 æquatur quadrato. Præterea conſtitutum erat ut medius quadratus minor eſſet quàm 16. ergo etiā latus eius minus oportebit eſſe quàm ſit 4. eſt autem latus illud 1 N † 2: ut utrinq; binario abiecto, 1 N oporteat minorem eſſe quàm eſt 2. Supereſt ut 3 Q † 12 N † 9 æquem quadrato. Effingo quadratum à latere quod ſit 3 —— aliquot N. Fit autem N ex aliquo numero ſexies ſumto, & adſciſcente demum ſibi 12, qui fuit æquationis numerus, ac diuiſo in interuallum quo Numeri quadratus abeſt à Quadratorum numero, ſcilicet 3, qui ſunt in æquatione. Eò itaque deducta eſt res, ut inueniendus ſit numerus, qui ſexies ſumtus, adiecto 12, ac diuiſus in interuallū quo quadratus ipſius ternario præſtat, quotientem binario minorem exhibeat. Sit is 1 N. is per 6 multiplicatus, itaq́; 12 auctus, fit 6 N † 12. ipſius autē quadratus detractis 3, habet 1 Q —— 3. Volo igitur 6 N † 12 diuidi per 1 Q —— 3, ut quotiens fiat binario minor. Sed & ſecundus diuiſus per 1, duplum quotientis facit. ergo 6 N † 12 ad 1 Q —— 3 rationem habent minorem quàm ſit 2 ad 1. ergo etiam planus qui fit ex 1 in 6 N † 12 minor eſt quàm qui ex 2 in 1 Q —— 3, hoc eſt quàm 2 Q —— 6. Adijciantur 6 quæ deſunt utrinq;, fiunt 6 N † 18 æquales 2 Q. In æquatione hac explicanda, dimidium numeri charactere N inſigniti in ſe ducitur, fiunt 9. & numerus Q inſignitus in abſolutos ducitur, fiunt 36. quibùs adde 9, habes 45, cuius latus minus eſt quàm 7. adde ſemiſſem N, non minus quàm 5 habebis. ita fit, ut 3 Q † 12 N † 9 æquentur quadrato lateris 3 —— 5 N. Fit 1 N, 42, hoc eſt 21. Poſui autem medij quadrati latus 1 N † 2. erit quadrati latus 43, ipſe quadratus 1849. Venio ad primum propoſitum, & ſtatuo quadratum 1849 æquales 6 N † 4. omnia in 121, fit 1 N 1765. Eſtq́; minor binario. Iā ad poſita initio quæſtionis. Statueramus medium 1 N † 2, minimū 2 —— 1 N, maximū 7 N † 2. Erit maximus 11007, medius 2817, minimus 887. & quando denominator eſt 726, nō eſt quadratus, ſextans autem eius eſt 121 quadratus. Rurſum itaq; omniū ſextantes accipiantur, fiet primus 1834$\frac{1}{2}$, ſecundus 469$\frac{1}{2}$. tertius 14$\frac{1}{2}$. Quodſi in integris hæc habere deſideras, ne ſemiſsis intercurrat, omnia per quatuor multiplica. Erit primus 7338. ſecundus 1878. tertius 58. & manifeſta eſt demonſtratio.

XYLANDRI.

Non Platonicis obſcuriora ſunt hæc monſtra numeris, ſed folijs Sibyllæ confuſiora. Prima hypotheſes ſatis habent commodè. Ad duplicatam quod attinet æquationem, 1 N ſit 112 (malè ῑβ pro ρῑβ legitur) omnino. Nam ſi addas $\frac{1}{2}$ N & 4, quorum multiplicatione 2 N componuntur, fit $\frac{1}{2}$ N † 4, cuius ſemiſsis $\frac{1}{4}$ N † 4 in ſe ductus, $\frac{1}{4}$ Q † 1 N † 4 producit, æquale 8 N † 4. utrinque 4 abijciuntur & 1 N, fit æquatio inter $\frac{1}{16}$ Q & 7 N. ergo 1 N eſt 112, & $\frac{1}{2}$ N ac 4 ideò ſumebantur, ut utrinq; abijci 4 poſſent. quod non contingeret ſi $\frac{1}{2}$ & 4 N ſumſiſſet. At tertius ponebatur 2 —— 1 N, quod hac ratione eſſet 2 —— 112, quod eſt abſurdum. In poſitione poſteriori inuertitur problematis conditio. Et cum interuallum maiorum ad interuallum minorum triplũ fuerit, heic contrà fit minorum differentia tripla ad differentiam maiorum. Quod ſcripſi, medius minor quàm 16, id ſequentia demonſtrant ita debere eſſe. & alioqui cùm 16 ſit quadratus, quid attinet ei latus fingere, ut heic fingitur 1 N † 2? Quod 1$\frac{1}{3}$ Q † 5 $\frac{1}{3}$ N † 4 per 9 multiplicauit, id eſt non ſine cauſa factum: quia ſcilicet 9 eſt quadratus, per quem deberent ad integros numeros reduci. quo etiã conſilio per 4 diuiſit, ut quadratus δυνάμει maneret. Sed quæ ſequũtur, Fit autem 1 N ex aliquo numero, &c. libenter fateor me nõ intelligere. neq; uolui operam ludere in ijs obſcuritatibus perluſtrandis, quam alibi rectiùs ponere licebat. Cur ſtatus quæſtionis mutetur, utcunq; apparet, nempe ut inueniatur ualor Numeri minor binario, per quem primæ hypotheſes reſoluantur. Quæſtio eſt de latere ponendo, cuius quadratus æquetur 3 Q † 12 N † 9. Cur pars eius lateris ſit 3, facilè apparet: ſcilicet ut 9 utrinq; abijci poſsint. ſed & —— N eſſe debent, ut in quadrato & Q affirmari, & N negari, itaq; iniri poſsit comparatio. Ponamus latus 3 —— 4 N. quadratus 9 † 16 Q —— 24 N æquabitur 3 Q † 12 N † 9. abijce utrinq; 9 ac 3 Q, & adijce utrobiq; 24 N, fient 13 Q æquales 36 N, & 1 N 2$\frac{10}{13}$ maior binario. Si latus ſtatuiſſes 3 —— 3 N, 1 N inueniſſes etiã grãdiorẽ, ſcilicet 5. quod experiaris licet. Si aũt latus ſtatuas 3 —— uel 5, uel 6, uel 10, &c. N, ſemper ualor radicis fiet minor quàm 2. Quod cùm ipſa multiplicationũ & inter æquationes comparationũ tractatione nullo negocio ſentire poſſis, equidem non uideo quorſum labyrintho iſti peruagando debeamus nos macerare: maximè cum res in ſurdam æquationem excidat, inter 2 Q & inter 6 N † 18, hoc eſt 1 Q & 3 N † 9, quã ille ſuo more abſoluens, cum 2 Q ſint, neceſſe habuit 18 per 2 multiplicare. Fit autem 1 N propriè √ 45 † 2. pro quo 5 ſuo arbitratu ſumſit autor, cum potuerit 6, 7, &c. accipere. Videamus nũc reliqua. Lateris 3 —— 5 N quadratus eſt 9 † 25 Q —— 30 N, æqualis 3 Q † 12 N † 9. deme utriq; 3 Q † 9, & adde 30 N, fiet æquatio inter 42 N & 22 Q. & 1 N fit $\frac{42}{22}$, hoc eſt $\frac{21}{11}$, paulo minus binario. Ergo 1 N † 2 eſt $\frac{43}{11}$. Eius ergo quadratum $\frac{1849}{121}$ æquabimus 6 N † 4, ut minori parti duplicatæ æquationis. fit 1 N, $\frac{1365}{726}$, minor aliquantulum binario. Iam ad primas poſitiones hoc accommodemus. eaſq; per iam inuentum Numeri ualorem reſoluamus. fiunt maximus $\frac{11007}{726}$ medius $\frac{2817}{726}$. minimus $\frac{87}{726}$. Hi ergo ſunt qui deſiderabantur numeri, & ſatisfaciunt poſtulatis. Idq; experiamur. Aufer medium à maiore, ſuperſunt $\frac{8190}{726}$. aufer à medio minimum, reſtant $\frac{2730}{726}$. Eſt aũt illud reſiduum huius triplum. Adde primum ſecundo, habebis ſummam $\frac{13824}{726}$, hoc eſt (nam 6 communis eſt menſura, cũ numerator & denominator ſimiles ſint quadratorum: quod ſi non perſpicis, experiendo cognoſces) $\frac{2304}{121}$, quadratum lateris $\frac{48}{11}$. Adde primum tertio, habebis ſummam $\frac{11094}{726}$. hoc eſt (eandem ob cauſam) $\frac{1849}{121}$, quadratum lateris $\frac{43}{11}$. Adde medium tertio, habebis $\frac{2904}{726}$, hoc eſt $\frac{484}{121}$, ſiue 4, utiq; quadratum. Præter alia hoc etiã obſeruare in hac tractatione poſsis, noſtram quàm Græcorum tractationem minutiarum multo eſſe expeditiorem. Numerorum uitia dedita opera reliqui. De appendice tamen Diophantea ob Græcum minutiarum morem, rudiores hoc à nobis auctarij accipiant. Senario is & numeratores omnes diuidit, & communem denominatorem 726, qui hoc pacto quadratus fit. & ita exponuntur. [a] Iam ſi unus numerus multos multiplicet, non mutari proportionem eſt notum. Ergo ad ſemiſſes illos numeratorũ amoliendos, ut denominator quadratus interim maneat, omnia per 4 (quadratum minimum) multiplicat. ita numeri quæſiti fiunt $\frac{7358\quad 1878\quad 58}{484}$, noſtrorũ beſſes. eos ſatisfacere poſtulatis certum eſt: itaq; eſſe calculus te docebit. Heic quoq; improbus labor me expediuit: & perrupimus ea, quæ pæne inacceſſa uidebantur primo obtutu.

[a] $\frac{1834\frac{1}{2}.\ 469\frac{1}{2}.\ 14\frac{1}{2}}{121}$

XLVI. Inueniantur tres numeri, ut exceſſus qui eſt quadrati à maximo orti ſupra quadratum medij, ad exceſſum medij ſupra minimum ratione ſit quæ præſcribitur. Bini autem ſumti, quadratum faciant. Exceſſus porrò quadrati à medio ſupra quadratum minimi, ſit ad exceſſum medij ſupra minimum triplus. Quando maximus

& medius quadratum faciunt, faciant 16 Q. eritq́; maximus maior quàm 8 Q. ſit ergo maximus 8 Q † 2. Et quando maximus ac medius coniuncti ſuperant ſummam medij & minimi: hi ergo iuncti minus ſunt quàm 16 Q, amplius interim quàm 8 Q. Sint ergo hi ſimul 9 Q. Ergo cùm maximus & medius iuncti ſint 16 Q, maximus autem 8 Q † 2, medius eſt 8 Q —— 2, ac proinde tertius 1 Q —— 2. Et quando uolo exceſſum, quo quadratus maximi quadratum minimi ſuperat, eſſe triplum exceſſus medij ſupra minimum: ille autem eſt 64 Q, hic 7 Q: uolo 64 Q eſſe triplum ad 7 Q. at hoc triplicatum facit 21 Q. at 64 Q ex trigeſies bis duabus unitatibus orti ſunt. Incumbit ergo mihi, ut numerum aliquem inueniam qui per 32 multiplicatus faciat 21. is eſt 21. Pono ergo primum 8 Q † 21 medium 8 Q —— 21. tertium 1 Q —— 21. Eſtq́; impletum unum poſtulatorum. ſummam ſcilicet medij & minimi eſſe quadratum. Sunt autem medius & minimus 9 Q —— 41, æquales quadrato; cuius latus ſit 3 N —— 6. & fit 1 N, 597. Ad poſitiones, erit primus 306, tertius ergo 1376. Secundus autem 263544. tertius 138681.

XYLANDRI.

Quid uis amplius? Pœnè defatigatus incidi in hanc propoſitionem. cuius ſolutio quàm eleganter ad nos peruenerit exſcripta, facilè uides. Vt omnia ſint faciliora intellectu, hypotheſes ſic exponamus.

$$\text{Summa } 9\ Q \begin{cases} \left.\begin{array}{l} A\ \ 8\ Q + 2 \\ B\ \ 8\ Q - 2 \end{array}\right\} \text{Summa } 16\ Q. \\ C\ \ 1\ Q - 2 \end{cases}$$

Hoc modo ſatisfactũ eſt duobus poſtulatis: cùm primi ac ſecundi ſumma ſit quadrata. itemq́; primi & tertij. Medius minimum quo ſuperat, id eſt 7 Q. Quadratus maximi eſt 64 Q Q † 32 Q † 4. Quadratus medij eſt 64 Q Q —— 32 Q † 4. Horum interuallum eſt 64 Q. Atqui debuit eſſe 21 Q. Heic dignus uindice nodus incidit: ſed noſter codex eloquia Diophantea ad nos non pertulit. Diſpiciamus originem incommodi, ut medeamur: ſiquidem poſſimus. Numerus hic 64 Q. qua ratione fuit productus, eadem ſi producamus 21 Q, rem confecerimus. Proinde loco binarij alius quærendus eſt, cuius quadruplum in 16 ductum, 21 procreet. Nam 64 Q interualli inuentio hoc docet, 2 bis in 8 (mitto ſigna prudens) multiplicatum fuiſſe ad quadratorum utriuſq́; inuentionem, & in ſubtractione minoris quadrati de maiore, æquale productum fuiſſe adiectum. Sicut ergo octies octo, 64 fecerunt: ita quæremus numerum, qui per 8 multiplicatus, 21 faciat. cuius quadrans (itidem ut 2, quadrans de octonario) additus & detractus 8 Quadratis abſolutè, primi & ſecundi hypotheſin exhibeat. Compendio hoc dixit Diophantus, intelligiq́; uoluit, loco binarij alium quærendum, qui per 32 multiplicatus, 21 producat. Ego cauſam commonſtrare uolui. Inuentio eſt pœnè puerilis: fit enim $\frac{21}{32}$. *Ergo primus ponetur 8,* Q † $\frac{21}{32}$ *ſecundus 8* Q —— $\frac{21}{32}$. *ſumma, ut antè, 16 Q. Secundum de 9 Q aufer, habes reliquum tertium. Vitiata ſunt hoc loco Diophanti uerba, ut & initio. Nam non ſecundus & tertius, uerùm hic & primus, ſua ſumma 9 Q conficiunt. Eſt ergo tertius 1* Q —— $\frac{21}{32}$. *& ſuperatur à medio quantitate 7 Q. Quadratum maximi eſt 64 Q Q †* $\frac{441}{1024}$ † $\frac{21}{2}$ *Q. Medij autem 64 Q Q †* $\frac{441}{1024}$ —— $\frac{21}{2}$ *Q. horum interuallum planè eſt 21 Q, triplum eius quo ſumma primi & ſecundi, ſummam primi & tertij excedit. quod erat interuallum 7 Q. Nihil ergo ad perfectam ſolutionem nobis deeſt, quam quod ſumma ſecundi & tertij an quadrata ſit, nondum liquet. Ea autem eſt 9* Q —— $\frac{41}{32}$. *Heic demum mea utar libertate, & tibi indagandos numeros Diophanteos, corrigendosq́; (ſi harum rerum ſatagis) relinquam. ipſe de meo ſoluam quaſtionem. 9* Q —— $\frac{21}{16}$ *(minutiam enim minimis terminis expreſſi) æquantur quadrato. Poteram hîc per 4. 9. aut alium quadratum multiplicare, maximè per 16. ſic enim 144* Q —— *21 æquarentur quadrato. uerùm id tu, ſi placet, ſequere. Ponamus latus quadrati, cui 9* Q —— $\frac{21}{16}$ *æquari debeat, eſſe 3 N ——* $\frac{1}{2}$ *fiet 1 N,* $\frac{25}{48}$. *Breuitatis cauſa operatiões omitto. Heic ſi circũſpectus ſis, (qđ hæc negocia unicè requirũt) cõfeſtim animaduertes te peccaſſe. Nã cũ 1 N unitate ſit minor, quadratus quoq́; eius unitatẽ nõ æquabit, nedũ ut ſuperet. (Hæc hypotheſis quã ſit uera, nemo nõ ſtatim uidet in numerorũ tractatiõe uerſatus.) Qui ergo* $\frac{21}{16}$ *ab hoc quadrato ſubducemus, ꝙ flagitat hypoſtaſis? Iã ut ualor Numeri unitatẽ ſuperet, facilè mediocri attentione conſequemur. Nam de 3 N quidem dubitari nõ poteſt, quin ad mutuò abolenda in æquatione 9 Q ſola hæc poſitio ſit apta: ſed & hoc manifeſtum eſt, quicquid ei unitatũ*

adijcie-

adijciemus, negatiuo debere ſigno — copulari. alioquin abſurdum quod erat cõſecuturum, ultrò ſe oſtendit. Quanto magis auxeris numerum unitatũ per — à 3 N ſubtrahendarũ, ut latus fingendi quadrati cõſequare: tanto maiorẽ fore 1 N unitate; uel ratiocinando perſpicies, uel experiẽdo uidebis. ut nouis et perplexis hypotheſib. planè ſit ſuperuacaneũ uti. Semper quidẽ diuiſor erit duplum eius quod fit unitatibus in numerum N adſcripto ductis. diuidetur aũt quadratus harũ ipſarũ unitatũ, adſcitis $\frac{21}{16}$. nam ipſe ciphrarũ ductus hoc ſubminiſtrat. Ergo niſi quadratus qui fit unitatib. ſigno — ad 3 N annexis in ſe multiplicatis, excedat aliquanto duplum eius quod fit ijs unitatibus in 3 (qui eſt N numerus) nihil efficietur. Proinde ſtatuamus latus 3 N — 6. erit quadratus 9 Q † 36 — 36 N, æquale 9 Q — $\frac{21}{16}$. Ergo $37\frac{5}{16}$ æquantur 36 N. (Habes Diophanteos numeros, nobis ratione certa in minimis uerſantibus oblatos. & in his acquieſcemus, alioqui ſtatuerã 3 N —— 8 ponere pro quadrati latere. Sed ſcilicet mos gerendus eſt Diophanti exſcriptori.) Ergo 1 N, eſt $\frac{597}{576}$. & 1 Q eſt $\frac{356409}{331776}$. ſed & $\frac{5}{16}$ ſunt ſub eodẽ denominatore ſunt $\frac{103680}{331776}$. Eſt ergo primus, ſi hypoſtaſes dextrè reſoluas, $\frac{2954952}{331776}$. ſecundus $\frac{2747592}{331776}$. tertius $\frac{252729}{331776}$. Horum quadratos, & reliqua nolui adſcribere, ne patrocinium ueterni ſuſcepiſſe induſtrijs exiſtimari poſſem. magna mihi moleſtia fuit, rem eruere explorareq; in numeris. Diſcipulorum hæ ſunt partes, ſcrutari ſingula, & periculum ſuæ diligentiæ facere in examinandis ſingulis. neq; ego hic compendia Logiſtices trado. Confirmare autẽ hoc poſſum, numeros ſatisfacere poſtulatis, quos nos perhibuimus. rediguntur aũt per communem menſuram ad minores eiuſdem nominis. ſed tu uideris.

DIOPHANTI RERVM ARITHMETICARVM LIBER QVINTVS.

1 DEntur tres numeri proportionalitatis geometricæ, ita ut quiuis eorũ multatus certo uno aliquo numero fiat quadratus. ſitq; iſte numerus 12. Eſt aũt geometrica proportionalitas, quando numerus qui fit extremorum altero in alterum multiplicato, quadratus eſt medij. Quæro numerum quadratum qui 12 detractis fiat quadratus, quod facilè fit, & eſt $42\frac{1}{4}$. pono alterum extremorum 1 Q. ergo medius erit $6\frac{1}{2}$ N. Reſtat ut horũ uterq; demtis 12 fit quadratus. Quadrato itaque æquatur cùm 1 Q —— 12, tum $6\frac{1}{2}$ N —— 12. Horum interuallum 1 Q —— $6\frac{1}{2}$ N. id metitur 1 N, menſura 1 N —— $6\frac{1}{2}$. quorum interualli ſemiſsis in ſe ſi ducatur, fit 169, quod æquatur minori, ſiue $6\frac{1}{2}$ N —— 12. fit 1 N, 361. Ergo poſitiones ſi ad hũc exigantur, erit primus $42\frac{1}{4}$. ſecundus ſeu medius $346\frac{1}{2}$ 144. tertius 13321.

XYLANDRI.

Deiphobum apud inferos Aeneas nõ tam difficulter agnouit, atq; ego ſenſum & formam pulcerrimi huius problematis: adeò eſt lacerum. Explicemus ergo. In progreſsionis ſeu proportionis (proportionalitatem uocamus ἀναλογίαν, *cùm* λόγον *proportionẽ uſurpamus) geometrica deſcriptione pro* πλέον ἔχῃ τὸν μο, *legendum eſt,* πλευρὰν ἔχῃ τὸν μέσον. *Res nota eſt uel ex 20. ſeptimi Euclidis. Quæruntur ergo tres numeri continuè proportionales, quorũ quiſq; 12 abiectis ſit quadratus. Ipſum opus docet, quadratos eos fore antequam multentur duodenario: utiq; extremos. Sed uerba hæc* ζητῶ πότερον τῆς λείψεως μο̄ ῑβ, *mutila ſunt, & quadratum requiri, cui ſi auferãtur 12, maneat quadratus, res ipſa docet. niſi enim quadratus eſſet, multiplicati per 1 Q radix haberi quadrata nequiret, ut ex annotatis à Campano & nobis ad 2 noni Euclidis patet. & ſequens problema ſimile huius, diſertè quadrati meminit. Quomodo ergo is quadratus inueniatur, undecima ſecundi noſter docuit Diophantus. Poſuit autẽ 1 N & 1 N † 1. ita quadratorum differentia 2 N † 1 æquatur 12. fit 1 N, $5\frac{1}{2}$. ergo alter $6\frac{1}{2}$. quadratum huius, ut maioris, & detractionis 12 patiens non mutata natura, $42\frac{1}{4}$. Is ergo eſt maximus. minimus 1 Q per eum multiplicatus, fit $42\frac{1}{4}$ Q, cuius latus $6\frac{1}{2}$ N. Reliqua per duplicatã cõficiuntur æquationẽ, de qua alibi præceptũ ſatis. Metientẽ et menſurã uocat duos numeros, quorũ multiplicatione cõponitur 1 Q — $6\frac{1}{2}$ N, interuallũ duplæ æquationis. ij ſunt 1 N, & 1 N — $6\frac{1}{2}$. quorũ differentia $6\frac{1}{2}$. eius ſemiſsis $3\frac{1}{4}$, huius quadratus $\frac{169}{16}$, qđ minori, hoc eſt $6\frac{1}{2}$ N — 12 æquatur. Fit aũt 1 N quãtitas ſic nota. 12 utrinq; adde, habebis $6\frac{1}{2}$ N æquales $\frac{361}{16}$ (quia 12 ſunt $\frac{192}{16}$) facta diuiſiõe, fit $\frac{361}{104}$, tantus ergo eſt 1 N. Cùm ergo poſuerimus primũ ſiue maximũ $42\frac{1}{4}$, ſecũdus $6\frac{1}{2}$ N, erit $\frac{13}{2}$ in $\frac{361}{104}$ multiplicatis ꝓductus, ſcilicet $\frac{361}{16}$. hic eſt medius. Minimus eſt 1 Q. ergo $\frac{361}{104}$ in ſe ductus, facit quadratũ $\frac{130321}{10816}$. is eſt tertius ſeu minimus. Primũ an ſint cõtinuè ꝓportionales hi numeri, exploremꝰ.*

Multipli-

Multiplicetur $\frac{169}{4}$ primus, in $\frac{130321}{10816}$ tertium. Compendio heic uteris, ſiquidem obſeruaueris 169 & 10816 communem habere menſuram, quod in ipſo opere animaduerti potuit nam $42\frac{1}{4}$ ſeu $\frac{169}{4}$ ita ortus eſt, ut ſit quadratus 13 lateris, numerus 169. ſed 10816 quadratus eſt lateris 104, quod 13 in 8 multiplicatis fiebat. diuide 10816 per 169, inuenies 64 præciſè. Ergo 169 eſt cōmunis menſura numerorum 169 & 10816, pro quib. (per 2 & 17 VII Euclid.) ponemus 1 & 64. & multiplicabimus $\frac{1}{4}$ in $\frac{130321}{64}$ fient $\frac{130321}{256}$. tantundem fieri, ſi medius, nimirum $\frac{361}{16}$, in ſe ducātur: hoc eſt radicē quadratā hūc eſſe illius, liquet. Sunt ergo $42\frac{1}{4}$. $\frac{361}{16}$. & $\frac{130321}{10816}$. tres numeri cōtinenter proportionales, quòd in minùs exercitatorum gratiam demonſtrandum duxi. Porrò 12 aufer à primo, ſupereſt $30\frac{1}{4}$, quadratus lateris $\frac{11}{2}$. Aufer 12 ($\frac{192}{16}$) à ſecūdo, ſuperſunt $\frac{169}{16}$, quadratus lateris $\frac{13}{4}$. Aufer 12 (uidelicet $\frac{129792}{10816}$) à tertio, relinquitur $\frac{529}{10816}$ quadratus lateris $\frac{23}{104}$. Vides etiam huic poſtulato ſatisfactum planiſsimè. Si in opere per XI ſecundi poſuiſſem 1 N & 1 N † 2, quadratum inueniſſemus 16. quo poſito pro altero extremorū, res in æqualitatē fuiſſet deducta, numeriq́; facti 16. 16. 16. Si 1 N & 1 N † 3. quadratus fuiſſet $12\frac{1}{4}$, &c. Nam perſequi omnia non habeo neceſſe, ſatis eſt indicaſſe.

11 Dentur tres numeri continuè proportionales, quorū quiuis detracto numero qui præſcribitur, fiat quadratus. ſitq́; præſcriptus numerus 20. Quæro quadratū, qui adiectis 20 fiat quadratus. is eſt 16. Hunc pro altero extremorū pono, pro ultimo 1 Q. ergo medius eſt 4 N. Ergo, ut in præcedente propoſitione, reſtat ut tam 4 N † 20 quàm 1 Q † 20 æquentur quadrato. Horum interuallum eſt 1 Q —— 4. quem cōponunt 1 N & 1 N —— 4 ſua multiplicatione. quorum interualli ſemiſsis in ſe multiplicatus, facit 4, quod æquetur 4 N † 20, minori quadratorum. Eſt autē hoc abſurdū, cùm oportuerit 4 non eſſe minus quàm 20. Eſt autem 4 quadrans numeri 16. Porrò 16 numerus eſt non caſu & temerè oblatus: ſed quadratus eſt, qui adſumtis 20 faciat alium quadratum. Quærendus ergo eſt quadratus, qui cùm quadrantem habeat, maiorem quàm eſt 20, tum adſcitis 20 fiat quadratus. Vtiq; quadratus hic erit maior quàm 80. Eſt autem 81 quadratus, maior octogenario. Ergo ſi latus quadrati quem quærimus, ſtatuamus 1 N † 9, erit quadratus 1 Q † 18 N † 81. Is cum 20, quadratus eſſe debuit. Ergo 1 Q † 18 N † 101 æquantur quadrato. Ponamus eius latus 1 N —— 11, fiet quadratus eius 1 Q † 121 —— 22 N æqualis 1 Q † 18 N † 101. fit 1 N, $\frac{1}{2}$: ergo cùm quæſiti quadrati latus fuerit 1 N † 9, erit quadratus eius $90\frac{1}{4}$. Recurro nunc ad id quod initio erat poſitum, & extremorum alterum ſtatuo $90\frac{1}{4}$: tertium 1 Q. erit medius $9\frac{1}{2}$ N. Iam eò uentum eſt, ut quæram quo pacto & $9\frac{1}{2}$ N † 20, & 1 Q † 20 æquentur quadrato ſingula. Interuallum eſt 1 Q —— $9\frac{1}{2}$ N. quod metitur 1 N, menſura 1 N —— $9\frac{1}{2}$. Interualli huiuſce ſemiſsis in ſe ductus, facit 361, quod æquatur minori, ſcilicet $9\frac{1}{2}$ N † 20. Fit 1 N, 41. ergo ſecundum poſita erit primus $90\frac{1}{4}$, ſecūdus $389\frac{1}{2}$, tertius 1681.

XYLANDRI.

Vltima hæc liquidò ſunt falſa. In ſuperioribus quædam mendoſa ſunt, quorum emendatio ex uerſione noſtra peti poteſt. pro μέρος δ' καὶ μείζων, lege μέρος τέταρτον ὁ μεῖζον. Nam cùm poſitione numeri 16 (qui quadratus, etiam 20 auctus quadratus manet) in abſurdum incidiſſet, quod 4 (quadrans eius) cum 4 N † 20 æquabatur: ſenſit loco 16 alium quadratum ponendum, qui 20 adiectis quadratus itidem fieret, ſed quadrantē haberet qui 20 excederet unitates. qualis omnino futurus erat, qui præter Q & N haberet unitates 81. Eſt ergo obſeruatione digna hæc hypotheſeos ſiue (ut noſter ait) hypoſtaſeos correctio artificioſiſsima. Latus etiam quadrati deinde 1 N —— 11 callidè ſtatuit, ut abſolutus numerus amplior quàm 101 fieret, & —— N exſiſteret, æquatioq́; abiectis utrinq; 1 Q abſolueretur. Nam 101 abiectis utrinq;, & additis 22 N, fit 20 æqualis 40 N, & 1 N eſt omnino $\frac{1}{2}$. & latus quadrati 1 N † 9, eſt $9\frac{1}{2}$. quadratus $90\frac{1}{4}$ ſeu $\frac{361}{4}$. Porrò numerorum, quorum unius in alterum ductu interuallum menſuræ & metientis conficitur, eſt interuallum $9\frac{1}{2}$. huius ſemiſsis $\frac{19}{4}$ in ſe, $\frac{361}{16}$ efficit, cui æquatur $9\frac{1}{2}$ N † 20. Aufer utrinque 20, quod idem eſt $\frac{320}{16}$: relinquunt $9\frac{1}{2}$ N æquales $\frac{41}{16}$, & peracta diuiſione 1 N deprehenditur eſſe $\frac{41}{152}$. Ergo primus ex hypotheſi correcta eſt $90\frac{1}{4}$. ſecundus ($9\frac{1}{2}$ N) fiet $\frac{41}{16}$. tertius $\frac{1681}{23104}$, nimirum 1 Q. Experiamur, an poſtulatis quæſtionis hi numeri ſatis reſpondeant. Qua in re mirum in modum nos compendium ſuprà traditum adiuuabit.

Multiplicemus $90\frac{1}{4}$ ($\frac{361}{4}$) per $\frac{1681}{23104}$. fient $\frac{1651}{256}$. (nam 361 & 23104 communem habent menſuram 361. & multiplicatio ſic inſtituitur. $\frac{1}{4}$ per $\frac{1681}{64}$ multiplicetur, &c.) Tantūdem fit ſi medius in ſe ducatur. Sunt ergo tres inuenti numeri continenter proportionales. Adde primo 20, fiet $110\frac{1}{4}$ quadratus, lateris $\frac{21}{2}$. Ad ſecundum, $\frac{41}{16}$, adde $\frac{320}{16}$ (ſcilicet 20) habes $\frac{361}{16}$ quadratum lateris $\frac{19}{4}$. Adde $\frac{462080}{23104}$ (puta 20) ad $\frac{1681}{23104}$: habes quadratum $\frac{463761}{23104}$, cuius latus eſt $\frac{681}{152}$. Nihil ergo deſiderari iure poteſt in noſtris ſolutiõis numeris: ex quib. corriges Græcos, ſi ita uidebitur.

III. Dato numero tres numeros adijciemus, ita ut quiuis eorū & qui à binis producitur quibuſuis, dato numero aſſumto fiat quadratus. ſitq; datus numerus 5. In poriſmatibus hoc habetur, Si duo ſint numeri, quorū tam uterq;, quàm qui ex ipſis producitur unius in alterū multiplicatiõe, ſemper dato numero adiecto fiant quadrati: eos exortos eſſe à duobus continenter proximis quadratis. Duos ergo quadratos ordine ſe conſequentes ſtatuo, laterum 1 N † 3, & 1 N † 4. Quadrati hi ſunt, alter 1 Q † 6 N † 9, alter 1 Q † 8 N † 16. Ab utroq; horum tollo 5. & ſtatuo alterum 1 Q † 6 N † 4, alterum 1 Q † 8 N † 11. Tertium ſummam horum, demta unitate, ſcilicet 4 Q † 28 N † 29. Reſtat ut hic quoq; adſcito quinario ſit quadratus. Ergo 4 Q † 28 N † 34 æquantur quadrato. Eius latus 2 N —— 6 ſtatuatur. fit quadratus 4 Q † 36 —— 24 N, quod æquetur 4 Q † 28 N † 34. & fit 1 N, 26. Ergo ſecundum poſitiones, primus erit 2861. ſecundus 7645. tertius 2336.

IV. Dato numero, inuenire alios tres, ita ut quiuis ipſorum & qui ex binis quibuſq; fit, detracto dato numero faciat quadratū. Datus ſit 6. Rurſum ſimiliter duos expono quadratos deinceps in ordine quadratorum conſtitutos: unum 1 Q, alterū 1 Q † 2 N † 1. his adijcio datum. fiunt primus 1 Q † 6. ſecundus 1 Q † 2 N † 7. tertius itidem ſit duplum amborum demta unitate. hoc eſt 4 Q † 4 N † 19. Fit 1 N, 17. Ergo * ſecundum poſita primus eſt 4996. ſecundus 729, tertius 2466.

XYLANDRI.

Harum duarum propoſitionum explicationem ſi non adfero, mirari non debes. cum neq; ſolutiones ueræ ſint, neq; poriſma cui innituntur (quod ex libris de proprietatibus numerorum ab autore ſcriptis deſumtum fuiſſe apparet, quos deſideramus) expreſſum ſit, neq; cum eo hypoſtaſes, ut neq; cum ipſa propoſitione conſentiunt. Videamus æquationem & ſolutiones. Aequatio ſtatuitur inter 4 Q † 28 N † 34 & 4 Q † 36 —— 24 N. Vtrinq; abijciuntur 4 Q & 34: relinquitur æqualitas inter 2 —— 24 N & 28 N. ergo 2 æquantur 52 N. Itaq; 1 N eſt $\frac{1}{26}$. Hoc ad hypoſtaſes autoris accommodemus. Erunt latera quadratorum $3\frac{1}{26}$ (1 N † 3) & $4\frac{1}{26}$ (1 N † 4.) Proinde ipſi quadrati $\frac{6241}{676}$ & $\frac{11025}{676}$. Quorum utrunq; ubi quinario multaueris, habebis primum quæſitorum $\frac{2861}{676}$, ſecundum $\frac{7645}{676}$. Quod ad tertium attinet, æquatio ipſa demonſtrat eū duplum poni ſummæ ipſorum numerorum unitate multatum. Nam ſi 1 Q † 6 N † 4 & 1 Q † 8 N † 11 addas, 2 Q † 14 N † 15 ſumma erit: cuius duplo 4 Q † 28 N † 30 ſi unitatem abſtuleris, 4 Q † 28 N † 29 relinquitur pro tertio, qui addito quinario deinde cū quadrato lateris 2 N —— 6 æquetur, ut 1 N fiat $\frac{1}{26}$. Ergo tertius eſt omnino $\frac{22336}{679}$. In Græco æquationis ſolutæ numerator omiſſus eſt, perhibito denominatore: qui contrà deeſt ſolutionis numeris, ultimo etiam numeratore ambiguè ſcripto. Sunt ergo qui quærebantur numeri $\frac{2861\quad 7645\quad 203\ 36}{676}$. atq; hos ipſos inuenies, ſi hypoſtaſes per ualorē 1 N reſoluas. Proinde ut poſtulatis ſatisfaciāt quæſtionis, perſpiciamus. De duob. primis, quin 5 utriq; adiecto, quadrati fiant, dubiū non eſt, cùm ſint ex hypotheſi quadrati quinario multati. Adde 5 etiam ad tertium, nempe $\frac{3380}{676}$, fiet numerator (nam de denominatore quin ſit quadratus, dubitādi cauſa nulla relinquitur) 23716, quadratus, à latere 154. Ergo 5 additus ſingulis inuentorum. Primo in ſecundum multiplicato fiunt $\frac{21872345}{456976}$. adde 5, hoc eſt $\frac{2284880}{456976}$, fit numerator 24157225, omnino quadratus à latere 4915. Idē hoc experieris etiam in reliquorum binorum multiplicatione, & quinarij ad productum adiectione. Veram ergo ingenioſiſſimi huius problematis ſolutionem eruimus. Supereſt ut poriſma etiā ipſum ab effectu ad cauſam retrorſum inſtituta analyſi inueſtigemus. Quo loco memineris nos heic non in eo eſſe ut proprietates numerorum demonſtremus, (neq; enim arithmeticam heic, ſed logiſticen tractamus:) ſed ut Diophantum interpretemur. interim non diſſimulantes, in hoc genere Algebricas operationes uim demonſtrationum obtinere, quod & alibi, & ad ſuperioris libri quadrageſimamquartam propoſitionem docuimus. Hoc quoq; tenendum, quod ex Ariſtotelea analytica doctrina dicimus, ἔκθεσιν ſufficere unius exempli, quo totū καθόλου repræſentetur,

quod

Theorema de quadratis, quorum latera unitate differunt.

quod heic ſequemur. Si de duobus quadratis, quorum latera unitate differunt, ita numerus aliquis idem ſubducatur, ut duplum ſummæ reſiduorū unitate multato idem ſi adijciatur, quadratus exiſtat: trium horum reſiduorum bina quos producunt numeros altero in alterum multiplicato, hi eodem illo aucti numero, ipſi quoq; quadrati fient. Sumamus duos quadratos, quorum latera unitate differunt, 4 & 9: & quæramus numerum qui ita ab utroque eorum auferatur, ut duplo quoq; reſiduorum ſummæ unitate multato idē additus, quadratū faciat. non enim quiuis numerus hoc præſtat, etſi innumeri id præſtent. Vtamur Algebra. Eſto ille numerus 1 N. reſidua ergo 4 —— 1 N 1 & 9 —— 1 N. horum ſumma 13 —— 2 N, duplum 26 —— 4 N, unitate demta, 25 —— 4 N. adde 1 N, fit 25 —— 3 N æquale quadrato. Deligendus eſt quadratus qui minor ſit quàm 25. nā 25 ab eo detrahenda, & reſiduū per 3 N (charactere ſolutū) diuidendū eſſe, ratio dictat. 16 ergo ſumemus, qui à 25 ſubductus, 9 relinquit, qui per 3 ſine minutijs diuidi poteſt (alioqui uel 4, uel 9, uel ex fractis aliquē ortū adſciſcere innumeris modis licebat: ſed ſectemur planiſſima.) Ita ergo æquatio exiſtat 25 —— 3 N || 16, hoc eſt 9 || 3 N. & 1 N, eſt 3. Experiamur. 3 à 4 & à 9 ſublatis, reſidua ſunt 1 & 6. horum ſumma 7. duplum eius unitate demta, 13. huic 3 adde, habes 16, quadratū. Sunt ergo tria reſidua, 1, 6, 13. quorū bina quē producūt, is 3 auctus, quadratus fiat. Nā primū in tertiū ſi duco, 6 habeo. ſex & tria quadratus ſunt. ſecundo in tertium ducto, 78 fiunt, quæ cū 3 ſunt 81. Primus in tertium ſunt 13, cū 3, 16. Aliud. 16 & 25 eodē modo tractemus, 81 —— 3 N æquātur quadrato. Is ſit 36 (ut reſiduū per 3 diuidi integrè poſſit) erit 1 N 15. Hic à 16 & 25 detractus, relinquit 1 & 10, ſumma horū 11, duplū unitate demta 21, cui ſi addas 15, 36 quadratus cōfiet. Reſidua tria 1. 10. 21. quadrati qui fiunt producto binorū ad 15 adiecto, 25. 225. 36. Canon. *Semper enim ſi tales duos quadratos addas, ſummæ duplo unitatē adimas: relinquitur quadratus. à quo ſi aliū minorē detraxeris, reſiduo per 3 diuiſo emergat is qui quæritur numerus. Demonſtratio ex ipſa operatione peti poteſt, ſi quis mediocriter ſit exercitatus. ſed eam hic mitto. Eandē ergo quartæ etiā nauemus propoſitioni, eidē theorematí omnino innitēti, operā. hebetē enim eſſe oportet, qui ſi nō ultrò, ſaltē tot ſimilibus quæſtionibus tractādis nō perceperit poſitiones ut uarientur additione in mutationē detracta. Pro minore quadrato ponitur 1 Q, quod in ſuperiore nō fecerat autor, ne 1 Q —— 5 poſito primi loco, ſigna —— & † aliquid moleſtiæ offerrent inter ſe cōmiſſa in hypoſtaſibus. quæ cautio ut minimè neceſſaria, ita elegās tamen eſt & callida. Ita nihil mutauimus. Primus ſit 1 Q † 6, ut 6 dato inde ademto, maneat quadratus. Secūdus 1 Q † 2 N † 7, quia 6 abiecto, quadratus relinquitur 1 Q † 2 N † 1. Tertius duplū horū, minus unitate, 4 Q † 4 N † 25 ſit. Qui cùm ipſe etiā detracto 6 quadratus fiat, æquatio obtigit inter 4 Q † 4 N † 19. & quadratū 4 Q † 25 —— 20 N, à latere 2 N —— 5. Nā cū numeri Diophātei ſint deprauatiſſimi, quorſum in illis corrigendis ego torquerē me, cùm de meo liceat expeditā promere ſolutionē. Tu, ſi libet & uacat (nā mihi uix ad hæc tēpus ſufficit) correctionē uenare. Noſtra æquatione 1 N proditur $\frac{1}{4}$. Ergo primus eſt $6\frac{1}{16}$ ſecūdus $6\frac{9}{16}$. tertius $26\frac{1}{4}$. à quorū ſingulis ſi 6 auferas, reſtāt quadrati $\frac{1}{16}$, $\frac{9}{16}$, $2\frac{1}{4}$. Duc primū in ſecūdum, habebis $\frac{10185}{256}$. aufer hinc 6, puta $\frac{1536}{256}$. relinquitur numerator (ſatis enim de denominatore liquet) 8649, lateris 93 quadratus. Eodem modo ſi cæteros binos examines: compertū habebis legitimè omnibus eſſe ſatisfactum poſtulatis.*

Quartæ explanatio.

V. Inueniantur tres quadrati, ut quē duo quicūq; faciūt planū, ſiue addita ſiue detracta eorū ſumma ſit, quadratus. Rurſum hoc in poriſmatibus habemus. Omnib. duobus quadratis cōtinēter proximis adiūgi poteſt alius numerus, duplus ſummæ ipſorū & binario amplius, q́ ſit maiorē tres numeros facit, quorū bini quē ꝑducūt, is amborū ſumma uel detracta uel addita fit quadratus. Ergo triū expoſitorū quadratorū facimus primū 1 Q † 2 N † 1. ſecūdū 1 Q † 4 N † 4. tertiū 4 Q † 12 N. Reſtat ut hūc quadrato æquemus. ſed & quadrās eius quadrato æqualis eſt. Ergo 1 Q † 3 N † 3 æquantur quadrato. Huius latus fingo 1 N — 3. eſt ergo ipſe 1 Q † 9 — 6 N, & æquatur ei 1 Q † 3 N † 3. Et fit 1 N, $\frac{2}{3}$. Ergo ſecūdū poſita, primus erit 25, ſecūdus 64, tertius 196.

XYLANDRI.

Falſum hoc eſſe nullo negocio depræhendes. Nā 25 & 64 ſunt 89. & 25 in 64 ducto fiunt 1600. ſi addas ſummā, fiet 1689 ſi auferas, 1511. at horū neuter eſt quadratus. Sed & poriſma uerū eo modo quo traditur, etſi corruptè traditur, uerū nō eſt. Hoc cōſtat, ſi duo quadrati ordine (ut ſuprà) cōtinui ſumātur, ijsq; adiūgatur duplus ſummæ ipſorū, binario auctus: qui fit binorū multiplicatione, ſumma ipſorū addita quadratū eſſe. Verbi gratia 4 & 9 quadrati ſunt, inter quos

Quadratorū continuorum proprietas.

nullius intercidit. 4 & 9 ſunt 13. huius duplum & 2, ſunt 28. is eſto tertius. 4 in 9 facit 36. adde 13 ſummam eorum, fit 49. Item 9 in 28 facit 252. adde 37 ſummam ipſorum, habes 289. Deniq; 28 & 4 ſunt 32. adde ad 112, quod fit ex 4 in 28, habes 144. notum eſt aũt 49, 289, 144 eſſe quadratos. Aliud exemplũ. 25 & 36 ſunt 61. huius duplũ & 2, ſunt 124. Cõſidera tres hos numeros, 25 in 36 producit 900. adde 61, habes 961 quadratũ lateris 31. Itẽ 36 in 124 facit 4464, adde eorũ ſummã 160, habes 4624 quadratũ cuius latus 68. Itẽ 124 in 25 facit 3100, adde 149 eorũ ſummã habes 3249 quadratũ, cuius radix 57. Hoc igitur poriſma cõſtat ſibi, eſtq; ex Algebrica ductũ & demonſtratum operatione. In propoſitione ergo & quæſtionis & poriſmatis ſumma detractio perperã eſt poſita: & poriſmatis uerba planè falſa ſunt atq; confuſa. neq; ἐκκαίδεκα quicquã ad rẽ facit. fortè pro exemplo 9 & 16 autor ſumpſerat, et quæ nos poſuimus, de Græco interciderũt. ſed & ubi tertius ponitur, μο̄ ῑβ extritũ fuiſſe, ratio & ſequẽtia mõſtrãt. Nã ſi in noſtris exemplis tertius qui adiungitur quadratis, fuiſſet quadratus (28 uel 124) nihil opus erat hac quæſtione. Nunc ut ea ſolui poſſit, pro quadratis ſtatuit quos uides quadratos laterũ 1 N † 1 & 1 N † 2 unitate differẽtium. Nã ſi ſtatuiſſet 1 Q, & 4 Q, tertius fuiſſet ductu poriſmatis 10 Q † 2, cui æquale quadratũ effingi nõ potuiſſet. Heic cum tertius fiat 4 Q † 12 N † 12, diuiſo ei per 4 quadratum, hoc eſt quadranti eius nullo negocio quadratus cõparatur, ita latere cõſtituto, ut ſæpe antè explicatã cauſam repetere nihil attineat. (Quod fieri etiã potuit, ſi toti quadratũ à 2 N —— unitatib. certis æquaretur.) Aequatio etiã nullo negocio explicatur, & 1 N fit $\frac{2}{3}$. & 1 Q eſt $\frac{4}{9}$. Cùm ergo primus ſit 1 Q † 2 N † 1 eſt $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{3}$, 1, hoc eſt in ſumma $\frac{25}{9}$. Secundus $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{3}$, 4, nimirum in ſumma $\frac{64}{9}$ (cuius latus $\frac{8}{3}$ unitate ſuperat latus primi, quod eſt $\frac{5}{3}$,) ut uideas optimè omnia cohærere. Tertius 4 Q † 12 N † 12 eſt $\frac{16}{9}$, 8, 12. hoc eſt $\frac{196}{9}$. ac tantundem fit ſi ſummã primi & ſecũdi ($\frac{89}{9}$) duples, ac duplo ($\frac{178}{9}$) duo ($\frac{18}{9}$) addas. Ergo hypoſtaſib. & poriſmati planè ſatis fecimus. An etiã quæſtionis poſtulatis? Numeri quadrati ſunt $\frac{25\ 64\ 196}{9}$. Primus in ſecundum ductus $\frac{1600}{81}$ procreat. ſummam ipſorum $\frac{89}{9}$ ſeu $\frac{801}{81}$ adde, conſit $\frac{2401}{81}$ quadratus lateris $\frac{49}{9}$. (Certè ſubtractio ſummæ locum non habet. relinquetur enim $\frac{799}{81}$, nequaquã quadratus.) Secundus in tertium ductus gignit $\frac{12544}{81}$. adde $\frac{260}{9}$ ſeu $\frac{2340}{81}$ ſummã eorum, fiunt $\frac{14884}{81}$ quadratus lateris $\frac{122}{9}$. Tertius in primum producit $\frac{4900}{81}$. his adde ſummã eorũ $\frac{221}{9}$ ſeu $\frac{1989}{81}$, conflatur $\frac{6889}{81}$ quadratus, cuius latus $\frac{83}{9}$. Nihil ergo non legitimè factum.

VI. Inueniemus tres numeros, quorum quiuis binario multatus, fiat quadratus. & qui fit ex binis, ſiue ſummã amborũ, ſiue totũ abijciat, fiat quadratus. Si cuiuis ſuperiore quæſtione inuentorũ numerorũ adijciã 2, ſic cõfecti ſatisfacient poſtulatis. Quod itaq; dicitur, tale eſt. Ponimus unũ eorũ qui quærũtur 1 Q † 2. erit ſecũdus 1 Q † 2 N † 3, tertius 1 Q † 4 N † 6. itaq; fit quod iubemur. Supereſt ut 1 Q † 4 N † 4 æquemus quadrato; & quadrantẽ, ut etiã 1 Q † 1 æquetur quadrato. Quòd ſi latus quadrati ponamus à differentia, erit 1 N —— 2. fit quadratus 1 Q † 5 —— $4\frac{1}{2}$ N, Q $\frac{1}{2}$ † 1. & fit 1 N, 3. Quod cùm poſitis accõmodatur, erit primus 59, ſecundus 114, tertius 246. & euidens eſt demonſtratio.

XYLANDRI.

Quid heic facias, ubi neq; propoſitio, neq; ſolutio, neq; tractatio te expedit? Sunt enim omnia falſa, & quid attinebat ambagibus uti in 1 Q † 4 N † 4 æquãdis quadrato, ſi is numerus rectè haberet, cùm ſit quadratus lateris 1 N † 2 notiſſimus. Iã illud ἑαυτε τὸν ὅλον, ſiue totũ, quid ſibi uelit, nõ ſatis aſſequor. In ſuperiore quidẽ problemate ſumma omniũ ($\frac{285}{9}$) ſi adderetur ex binis producto, quadrati nõ fiebãt. quod ita eſſe res ipſa cõprobat. Eo itaq; omiſſo, ſaltẽ reliqua uideamus. Cur primũ ſimpliciter 1 Q ſtatuat, monui ad ſuperiorem propoſitionẽ. Tertius, quãdo ad ſuperiorẽ propoſitionẽ & eius poriſma reſpicitur, erit 4 Q † 4 N † 4. cui addẽdus eſt, ut reliquis, binarius, ut ſit 4 Q † 4 N † 6 tertius. Ergo 4 Q † 4 N † 4 æquatur quadrato, itẽq; quadrãs eius 1 Q † 1 N † 1. huic æqualẽ quadratũ pono lateris 1 N — 2 (uidetur 2 uocaſſe differentiã, quia ſinguli 20 demto fiunt quadrati) ſcilicet 1 Q † 4 —— 4 N. fit 1 N $\frac{5}{3}$. Ergo reſolutis hypoſtaſibus, primus erit $\frac{43}{9}$. ſecũdus $\frac{82}{9}$ tertius $\frac{214}{9}$. De horũ ſingulis ſi auferas 2, ſiue $\frac{18}{9}$ habebis reliquos quadratos $\frac{25}{9}$, $\frac{64}{9}$, $\frac{196}{9}$. Iã primo in ſecundũ ducto $\frac{3526}{81}$ producũtur, ſumma ipſorũ ſub eodẽ nomine eſt $\frac{1125}{81}$, quæ detracta à primo, $\frac{2401}{81}$ relinquit quadratũ (omniũ ſumma ſubtracta, relinquitur $\frac{475}{81}$, nequaquã quadratus. quod propter ὅλον illud annotandũ duxi obiter.) Summa ſecundi & tertij eſt $\frac{2664}{81}$, quã ſi auferas à plano ex ijs orto $\frac{17548}{81}$, relinquitur quadratus $\frac{14884}{81}$. Summa tertij & primi eſt $\frac{2313}{81}$. ea ſubducta à producto unius in alterũ $\frac{9202}{81}$, relinquit $\frac{6889}{81}$ quadratũ,

quod

quod poteſt experiri. Ergo aliud hinc emergit theorema ſiue poriſma, ſuperiori ab altera parte reſpondens cū binarij prærogatiua. Expoſitis enim tribus, ut in ſuperiore propoſitione numeris, ſi binarius ſingulis adijciatur, quē ſic facti bini producunt, is ſumma eorū multatus fit quadratus. Numeri 4. 9. 28. aucti binario, 6. 11. 30. Et 66 —— 17, 330 —— 41, 180 —— 36, quadrati oēs. Aliud. 16, 25, 84. aucti binario, 18, 27, 86. producti 486, 2322, 1548, binorū ſumma ab his auferendæ 45, 113, 104. reſidui quadrati 441, 2209, 1444, laterū 21, 47, 38. Diophantea emendare nō prohibeo quin coneris: ego quod mearum partium fuit, peregi.

Binarij & continuè quadratorū proprietas.

LEMMA AD ID QVOD SEQVITVR.

VII. Inueniantur duo numeri, ut qui fit ductu alterius in alterum, addito utriuſq; quadrato, fiat quadratus. Sit primus 1 N, alter unitatū quotlibet. ac ſit 1. Eorū multiplicatio producit 1 N, ſumma quadratorum 1 Q † 1. Adde 1 N, fit 1 Q † 1 N † 1 æquale quadrato. Huius latus ſit 1 N — 2. fit quadratus 1 Q † 4 — 4 N, quod æquatur 1 Q † 1 N † 1. fit 1 N 3. Ad poſita hoc referamus. Erit primus 3, ſecundus 5. & ſublato denominatore, numeri ipſi erunt 3 & 5. qui poſtulatis reſpondent. Nam qui ab ipſis fit quadratus, cū plano quē ipſi gignunt cōiunctus, quadratū facit. Quoties aūt cūq; uoles ternarium & quinariū ſumere, facient numeri qui naſcuntur, id quod iuberis.

XYLANDRI.

Sæpenumerò mihi uſu uenit, id quod & heic, ut ex re de uerbis autoris uitiatis cōiecturā cogar facere. Quis enim intelliget alioqui Græca noſtra? Hac ergo propoſitione requiritur, ut productus ex hypotenuſæ in minus trianguli rectanguli latus multiplicatione, additus quadratis eius lateris & hypotenuſæ, conficiat quadratū. id priuilegij numeris 3 & 5, & eorū æquè multiplicib. (id eſt ſi quocūq; numero 3 & 5 multiplicaueris: idq; uolunt ultima uerba propoſitionis) in præſentia arrogatur. Nā quib. inſeruit quæſtionib. hoc lēma, ea ſatis oſtēdunt ad penultimā primi Euclidis reſpici. cui in primis numeros 3. 4. 5. cōmodè adhiberi, notiſſimū eſt. De alijs diametralib. inueniendis, ad 8 & 35 ſecundi, nec nō alibi, perſpicuè docuimus. Sic aūt ratiocinari expedit. Numeri ipſi, quos quærimus, ſint 1 N & 1. Hi producunt altero in alterū multiplicato 1 N. Quadrata ipſorū 1 Q & 1. Omnib. additis, 1 Q † 1 N † 1 æquatur quadrato, quod in textu rectè exprimitur, 1 Q † 4 —— 4 N à latere 1 N —— 2. Heic ſi utrobiq; addas 4 N, abiectis 1 Q, habebis 5 N † 1, æquales 4. ergo detractione unitatis utrinq; facta, 5 N æquātur 3. ac proinde 1 N eſt $\frac{3}{5}$. Tantus eſt primus, ſecundus $\frac{5}{5}$. & rectè abijci cōmunē denominationē ipſe Diophantus monet. Sunt ergo numeri 3 & 5. neq; hi ſolū. ſed quicūq; eandē habēt proportionē, quā 3 & 5. hoc eſt, quocūq; eodē numero 3 & 5 multiplicētur, producti poſtulatis ſatisfacient. Enimuerò 3 in 5, faciunt 15. ipſorū quadrati ſunt 9 & 25. quib. ſi addas 15, habes 49 quadratū. Iam ſi 3 & 5 per 7 multiplicemus, proportio manebit eadē, argumento 17. VII. Euclid. Erunt aūt 21 & 35. Horum multiplicatione planus producitur 735. adde huic quadrata numerorum, 441 & 1225, ſumma 2401, quadratus numerus. Nō aūt eſſe hoc cuiuſuis in rectāgulo hypotenuſæ et minoris rectū facientium lateris, facilè diſces. Si quis enim hoc affirmet, inſtātia eius dictū euertemus. Nā 5. 12. 13. ſunt latera orthogonij. 5 minus latus, hypotenuſa 13. altero in alterū ducto fit 65. adde 25, & 169, eorū quadratos, ſumma 259, numerus minimè quadratus. Cæterùm latiùs patere hanc propoſitionē, quàm ut triangulo orthogonio ſoli adſtringatur, docuiſſe obiter in rē (puto) erit. Ponantur numeri, 1 N & 6. Ergo 1 Q † 6 N † 36 æquabuntur quadrato. qui etſi ipſe uariè poteſt effingi, ut ſuprà ſæpe monuimus: tamen latus ei ſtatuamus 1 N —— 8. quadratus ergo 1 Q † 64 —— 16 N æquatur 1 Q † 6 N † 36. Fit 1 N, quod obſcurū non eſt, $\frac{14}{11}$. Ergo alter eſt $\frac{14}{11}$, alter $\frac{66}{11}$, & denominatore abiecto, 14 & 66. immò ſumemus primos horū 7. & 33. Hi producunt 231, & quadrati ſunt 49 atq; 1089. ſumma omniū 1369, quadratus lateris 37. At 7 & 33 nō ſunt latus minus (immò ne latus quidē omnino) & hypotenuſa rectanguli trianguli. nā ſi 49 ab 1089 auferas, relinquitur 1040, numerus minimè quadratus. Itaq; pronūciamus, facere quidē multū ad rectanguli trianguli conſiderationē hoc problema: ſed amplius tamen uim ſuā protēdere, quàm eius ut terminis includatur. cætera in ſequente propoſitione examinabūtur. Verba hæc, Nā qui ab ipſis, fit enim, ſic ſunt legēda, Nā qui ab ipſis fiunt quadrati, cū plano quē ipſi gignūt cōiuncti, quadratū faciunt. Porrò quoſuis duos numeros, ſi ipſorū quadrati duplo ex ipſis multiplicādo cōpoſiti adijciantur, quadratū conficere, notū eſt ex quarta ſecundi Euclideorū elemētorum. Sed hic planus fit inſtar duorum ſupplementorum.

LEMMA AD ID QVOD SEQVITVR.

IIX. Inueniantur tria triangula rectangula, quorum æquales ſint areæ. Primum quærantur duo numeri, quorum quadrati coniūcti cum eo qui fit ex altero in alterum, faciant, cuius latus ſit 7. Compono tria triangula rectangula à numeris binis, 7 & 3, 7 & 5, ac denique 7 & 8 (quæ eſt ſumma 3 & 5 inuentorum numerorum.) Ergo à 7 & 8 erunt triangula 40, 42, 58. & 24, 70, 74. & 15, 112, 113. quorum omnium eadem eſt area 840. *

XYLANDRI.

Ita eſt ad uerbū in Græco. ſed nemo facilè intellexerit. Equidē in ueris (quos rationales uocāt) numeris hoc præſtare, ut omnia latera ſint rationalia, adeoq́ numeri integri, nō eſt cuiuſuis aut uulgaris operæ. Itaq́ conabimur illuſtrare. Primò ex præcedenti liquet, ſeptenarij quadratū ea eſſe cōditione, ut cōponatur ex 3 et 5 quadratis, eoq́ quod fit altero in alterū multiplicato. Sed quid hoc ad triangulū rectangulū pertineat, nondum liquet. Si in triangulo orthogonio rectū angulū includentiū laterū alterum in alterū ducatur, duplū ipſius areæ produci, notiſſimū eſt. Ergo ſi de triangulo orthogonio, cuius latera ſint 3, 4, 5, & qui πυθμὴν in hoc genere habetur, agamus: aream eius habebimus 3 in 4 ductis, & producti ſemiſſe accepto, 6. Præſtat horum laterū æquè multiplicia ſumere, ut aream habeamus numero tali expreſſam, qui trifariã binorum cōpoſitione fiat. Si aream ſtatuiſſemus 24, latera angulum rectū includentia poterant eſſe 6 & 8, uel 4 & 12, uel 3 & 16, uel etiã 2 & 24. atq́ ſic non tria, ſed quatuor rectangula habuiſſemus triangula, quorum omnino eadem fuiſſet area. Sed hoc ijs deeſt, quòd hypotenuſæ non ſtatim ſunt omnes rationales. Nam lateribus 6 & 8 rectum includentibus, fieri hypotenuſam 10, manifeſtum eſt. at reliquorum eſſent √160. √267. √580. quod eſt ab autoris inſtituto alienum, mirificis quadratorum inuentionibus & comparationibus ſurdos numeros quaſi eludentis, aut potiùs triumphum ex ijs agentis quendam. Oportebat ergo laterū orthogonij cuiuſq́ angulum rectum facientium eam eſſe naturam, ut & quadrati binorum conficerent quadratum, & producti ex binis ijdē eſſent. Nota quod potiſſimum fuit in huius quæſtionis tractatione, intercidit: ſcilicet ſuperioris propoſitionis ad præſentem quæſtionem accommodatio: & ipſorum deinde triangulorum trium inuentio. Ad hanc rem opus eſt nouis ſiue poriſmatis ſiue theorematis. quæ cum noſter nobis Diophantus ſuppeditare non poſſit, de noſtro largiamur: non heic demonſtraturi ea, ſed re comprobaturi. Ipſos hos, de quibus agitur, triangulos ex ſuperiore propoſitione miro artificio deduxit Diophantus: ſed magna eſt iactura uerborum eius facta. Exponit quatuor numeros, duos ſuperiori lemmati reſpondentes, tertium datus quadrati qui conficiebatur plano & quadrato illorum coniunctis, quartum ſummam duorum primorum. Hi ergo ſunt in minimis terminis 3. 5. 7. 8. Si primum in reliquos, itemq́ deinceps quemlibet in ſequentes ducas, ſex fient numeri 15. 21. 24. 35. 40. 56. ea (quod in arithmetica demonſtratur) conditione, ut primo in ſextum, ſecundo in quintum, tertio in quartum ductis, idem ſemper numerus producatur 840. qui duplum areæ eſſet, ſi bini latera trianguli poſiti eſſent qui eum producunt, ut area fiat 840, ſecundus, quartus & ſextus duplicantur. Atque ita fiunt quos autor poſuit trianguli orthogonij, omnes area æquali, & lateribus omnibus uero numero conſtantibus, & 47 primi planiſſimè ſatis facientes. At hi quidem certè trianguli, cum trigono 3. 4. 5. præter orthogonij illam uniuerſalem proprietatem nihil habent commune: ut neq́ inter ſe etiam, niſi quòd arearum æqualitas accedit. Aliam ergo horum laterum proponemus inuentionem, multo ſubtiliorem, & ad rem propiùs pertinentem. Latera triangulorum ſic confiunt, 7 (qui numerus erat latus quadrati per præcedentem facti propoſitionem) cum 3, 5, ac ſumma horum 8 ſeorſim commiſſo. Duc 7 in 3, habes 21. eius duplum 42, eſt unum latus. Quadrati 49 & 9, horum interuallum 40, eſt alterum latus. tertium hypotenuſa fit quadratorum additione, 58. Rurſum 7 in 5 gignunt 35. ergo unum latus angulum rectum facientium 70. quadrati 49 & 25. ergo 24 alterum, hypotenuſa 74. Denique 7 in 8, producunt 56, ut alterum latus ſit 112. quadrati 49 & 64: horum interuallum 15, eſt alterum. hypotenuſa autem ſumma quadratorum 113. Heic demum mirificè prodeſt eorum conſideratio atque uſus, quæ ad 22 tertij annotauimus de triangulorum inuentione. uide infrà 6. 1. Perpendamus ergo nonnihil accuratius. Statuatur triangulus rectangulus laterum rectum includentium 7 ac 3 (ſeptenarius etiam in altero triangulo committetur

cum

cum 5: qui alter eſt inuentorũ numerus, & ſunt minimus, atq; utroq; multiplicato qui illam bonã proprietatẽ ſartã tectã propaget.) huius ergo erit hypotenuſæ quadratũ 58, ipſa √ 58. quales numeri heic non admittũtur. Ergo aliũ triangulũ cõparemus nobis, cuius omnia latera ſint rationalia: et huius quidẽ hypotenuſa maneat 58. cuius quadratus eſt 3364. Quadrata laterũ priorũ 49 & 9, interuallũ habẽt 40. hoc erit unũ latus, eius quadratũ de 3364 deductum, 1764 relinquit, quadratũ reliqui lateris, quod eſt 42. Habes ergo aliũ triangulũ orthogoniũ, 40.42.58. in cuius inuentione etiam ratio ineſt, cur prioris areæ numerus duplicatus, in præſentia ſiue baſis ſiue cathetus (nã perinde eſt) poſterioris fiat orthogonij. Perſequi moleſtũ eſt, indicaſſe ſatis fuerit, eodem modo reliquos autoris triangulos ex his 7.5. √ 74, & 7.8. √ 113. eſſe deductos. Hoc ergo cõſecuti uidemur, ut & inuentionẽ horũ triangulorũ eruerimus, & theorema, quo ſuperior ꝓpoſito accõmodetur propoſitio, detexerimus. Si enim duo ſint numeri, quorũ unius in alterũ multiplicatione factus additis eorũ quadratis quadratũ cõficiat: huius radix cũ iſtorũ utroq; ſeorſim, & cũ ſumma ipſorũ cõmiſſa, ſuppeditabit latera angulũ rectũ includẽtia triangulorum rectangulorũ bina: ex quib. per tradita ad XXII tertij huius operis, tres trianguli producãtur, quorũ ſint areæ æquales, & omnia latera ueris cõſtent numeris. Atq; hoc ipſum minimè adſtringitur ad numeros 3 & 5, eorũue multiplices. ſed & quicũq; alij ꝑ ſuperiorẽ propoſitionẽ inuẽti, et eorũ æquè multiplices huc accõmodari poſſunt: ut uix ullũ toto opere elegãtius theorema exſtare cõſtet. Itaq; nõ pigebit etiã alius exempli ἐκθέσει locũ magno cũ detrimẽto rerũ arithmeticarum decurtatũ utcũq; in integrũ reſtituere. Quærãtur duo numeri, quorum quadratis ſi adijciatur productus ex unius in alterum multiplicatione, ſumma ſit numerus quadratus. ſint hi 1 N & 2. Ergo 1 Q † 2 N † 4 æquatur quadrato. eius latus eſto 1 N —— 3. quadratus 1 Q † 9 —— 6 N. & ritè omnib. peractis, 1 N eſt $\frac{5}{8}$, & alter $\frac{16}{8}$. Sed nos abiecto denominatore (id eſt utroq; per 8 multiplicato) ſumemus eorũ loco 5 & 16. Hi planum faciũt 80, qui ad 25 & 256 eorũ quadratos adiectus, ſummã facit 361, quadratũ. Hoc ad propoſitũ theorema cõferamus. Quadrati huius latus eſt 19, ſumma inuentorũ numerorũ 21. Statuamus ergo tres triangulos rectangulos, quorũ omniũ baſis eadẽ ſit 19, catheti 5, 16, 21. Erunt hypothenuſæ √ 386. √ 617. √ 802. Ex his eliciemus tres triangulos alios orthogonios, quorũ area eadẽ, latera ſint rationalia. Primus triangulus erat 5.19. √ 386. Quadratũ de 386 eſt 148996. Laterũ quadrata 25 & 361, interuallum 336. huius quadratus 112896 de priore ſublatus, relinquit 36100, quadratũ lateris 190. In locum ergo dicti trianguli ſuccedet alius rectangulus triangulus, cuius latera 336.190.386. ſecundo triangulo 16, 19. √ 617. ſubſtitues eodẽ artificio 105.608.617. Tertio canon idẽ ſubrogabit 80.798.802, cùm fuiſſet 21.19. √ 802. Palàm eſt ſic inuentos triangulos eſſe rectangulos, ex 47 primi Euclidis. Sed & latera omnia ueris expediuntur numeris: nõ ſine miraculo. Enimuerò ſiue 336 in 190, ſiue 105 in 608, ſiue 80 in 798 multiplices: ſemper producitur 63840, cuius dimidium ſingulorum areas numero 31920 exprimat. Itaq; non iam tres, ſed ternos triangulos innumeris uicib. te inuenire docui, quibus hæc & ſequens quæſtio ſoluatur. Obſeruaui horum triangulorum aream eſſe ad Diophanteorum aream, ut eſt 38 ad unitatem.

IX. Inueniantur tres numeri, ut uniuſcuiuſque quadratus ſumma omnium ſiue demta ſiue addita, quadratus fiat. Omnis trianguli rectanguli quadratum hypothenuſæ quadratus fit, ſiue ei addas ſiue adimas quadruplum areæ. Ergo iſti tres erunt hypothenuſæ triangulorum rectangulorum: & ſumma ipſorum erit quadruplum areæ trianguli rectanguli, cuius hypothenuſæ ſunt ipſi numeri. Eò itaque res redit, ut quærenda ſint talia triangula tria, quorum area ſit eadem. Id autem iam demonſtratum eſt. & ſunt trianguli 40, 42, 58, & 24, 70, 74, & 15, 112, 113. Ergo propoſitum repetens, ſtatuo in numeris tres ſubtẽſas triangulorum. & erit primus 58 N, ſecundus 74 N, tertius 113 N. Summam autem quadruplorum areæ in Quadratis. Ergo 3360 Q æquantur 245 N. fit 1 N, 7. & iuxta poſitiones, erit primus 406, ſecundus 518, tertius 791.

XYLANDRI.

Numeri, immò omnia, peſſimè habent in Græco. Res autem ita habet. Summa hypothenuſarum 58.74.113. eſt 245. Ergo hanc 245 N appellat, cum nulla interceſſerit multiplicatio, & N adijciatur ſingulis hypothenuſis. Quadruplum areæ eſt 3360, cui adijcit notam Q 1. Fit enim area, multiplicando ſemiſſem catheti in baſin. ut in triangulo, cuius latera 40 N, 42 N, 58 N

(cui æquales ſunt cæteri.) baſis fit ex 20 N in 42 N, aut 40 N in 21 N ductis, uidelicet 840 Q. e-
ius ergo quadruplū eſt 3360 Q. ita uerò non 7, ſed $\frac{7}{96}$ fit 1 N. Hypotenuſæ per 7 multiplicatæ, o-
miſſo denominatore ſunt 406, 518, 791. uerū omitti is nō debet, neq; poteſt. ſunt ergo qui quærūtur
numeri $\frac{406 \quad 518 \quad 791}{96}$. Summa omniū $\frac{1715}{96}$, ſiue $\frac{164640}{9216}$. omnib. per 96 multiplicatis, quia qua-
drati numerorū eundē ſint habituri denominatorem, 9216. numeratores aūt inuenies 164836.
268324. 625681. De denominatore ſatis liquet, quadratū eſſe. Si ſummæ omniū addas numera-
torē iā inuentis, exſiſtent 329476. 432964. 790321. quadrati oēs, laterum 574. 658. 889. Quòd ſi
ſummæ numeratorē de quadratorum numeratoribus ſingulatim abſtuliſſe, relicti fuiſſent 196,
103684, 461041, quadrati numeri, laterū 14, 322, 679. quod fuit demonſtrandū, ne uera ſubtiliſ
ſimi problematis abſolutione lectorē defraudaremus. Tuū eſt exercitatiōis loco eadē in à me in-
uentis triangulis experiri. Quod ad trianguli hāc proprietatem attinet rectanguli, eadem ſu-
prà fuit lib. 3. propoſ. 22. propoſita. & in his ipſis, alijſq; omnibus experiri licet.

X. Datis tribus numeris quadratis, inuenire licet tres numeros, quorū bini qua-
dratos iſtos producant alter in alterum ductus. Nam ſi ſint dati quadrati 4, 9, 16. &
ſtatuamus unū quæſitorū eſſe 1 N, reliqui erūt 4 N, & 9 N. ac ſupereſt, ut ſecūdus in
tertiū multiplicatus producat 16. atqui producit 16 Q, æquales quadratis 16. & 1 N
fit $1\frac{1}{2}$. Ergo ſecundū poſitiones, primus erit $1\frac{1}{2}$, ſecūdus $2\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$. tertius 6. Sed ut hoc etiā
methodo exponatur, inueni 36 Q æquari 16. & omnia per 1 Q, fiunt 16 Q æqualia 36.
& fit 1 Q 36. cuius latus 6. Sed 6 à laterib. fiunt 4 & 9, hoc eſt ſecūdo & tertio, & por-
tio, hoc eſt 4, latus eſt quadrati 16. Ergo cū iuſſus fueris tres numeros dare, quorū
bini quadratos datos producant, ut heic 4, 9, 16. duc 4 in 9, fiunt 36. diuide in latus
quadrati 16, fit primus ſex. Nūc rurſus diuide quadratū 4 per 6, fiunt 6. Erit ergo pri-
mus 6, ſecundus 16, tertius 6.

XYLANDRI.

Hæc ita ut ſunt deprauata tranſcripſi. Eſt enim faciliùs rem tradere quàm uerba corrigere. Statuo primū 1 N, ſecundū[a], tertiū[b]. Ita enim primus in ſecundū ductus 4, in tertiū 9 producet, charactere N ſe mutuo abolente. nam[c], id eſt 4 N, per 1 N diuiſi, ſunt 4, &c. at ſecundus in tertium ductus facit[d] æquale 16. Stat æquatio reducenda multiplicādo tranſuerſè, quod per crucē uocāt[e]. fit ergo 36 æquale 16 Q. atq; hoc eſt quod omnia per 1 Q iubet multiplicari Diophantus. nā[f] per 1 Q multiplicata, faciunt 36, hoc eſt numerator denominatore ipſum diuidente liberatur. & 16 per 1 Q multiplicata, fiunt 16 Q. Iā ſi 16 Q ſunt 36, 1 Q erit $\frac{36}{16}$, hoc eſt $\frac{9}{4}$. ergo 1 N, radix huius quadrata eſt $\frac{3}{2}$ ſeu $1\frac{1}{2}$. Sunt ergo numeri $1\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$ (pro $\frac{2}{3}$ noſter Græca ambage $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{6}$ ſcripſit, quæ ſunt $\frac{3}{6}$ & $\frac{1}{6}$, hoc eſt $\frac{4}{6}$, nempe $\frac{2}{3}$) & 6. Nam $1\frac{1}{2}$ in $2\frac{2}{3}$ duc, habes 4. in 6, habes 9. rurſum $2\frac{2}{3}$ in 6, habes 16. Canon *ergo quem ex hac elicitum operatione Diophantus indicauit hic eſt: Datis tribus quadratis, ut inuenias tres numeros, quorū bini eos producāt: duc primū in ſecundum, producti (ſatis conſtat quadratum eſſe) latus diuide per latus tertij, inuenies primū numerum. per hunc diuide quadratum primum, habes ſecundum numerum. Tertium inuenies, ſecundo quadrato per primum numerum aut tertio quadrato per ſecundum numerum diuiſo. Specimen. Quadrati dantur 36. 225. 900. Multiplica 36 per 225, fit 8100 huius, latus 90 per latus tertij 900, quod eſt 30, diuide, habes primum 3. per hunc diuide 36, habes ſecundum 12. Diuide uel 900 per 12, uel 225 per 3, habebis & tertium 75. Sic quadratis datis 36. 64. 144. inuenies numeros 4. 9. 16. quod tibi relinquo explorandum. proxima propoſitione & uſum huius quæſtionis, & canonis exemplum multo abſtruſius habebis.*

[a] $\frac{4}{1N}$

[b] $\frac{9}{1N}$

[c] $\frac{4N}{1N}$

[d] $\frac{36}{1Q}$

[e] $\frac{36}{1Q} \times \frac{16}{1}$

[f] $\frac{36}{1Q}$

XI. Inueniantur tres numeri, ut qui fit ex quibuſuis duobus, omnium ſumma uel
addita uel detracta, quadratus fiat. Rurſum initiò quærantur tria arearum triangu-
la. quibus repertis, ſumimus quadratos hypotenuſarum. Eſt autem tertius quidem
334, quintus uerò 476, primus autem 2769. quos nacti, inuenimus ut iam tradi-
tum eſt tres numeros, quorum bini multiplicans alter alterum, iſtos producant
quadratos. Expoſuimus autem hos, quia quiuis ipſorum ſiue addas ei, ſiue adi-
mas 3360, fit quadratus. Sed 3360 numerus duplum eſt areæ ſingulorum triangulo-
rum. Eapropter nunc in Numeris pono, primū 4292 N, ſecundū etiā 43732 N, ter-
tium 71187. quorum bini faciunt ſupradictos quadratos. Reſtat ut hi tres æquentur

3360

3360 Q. Et omnia ut unius fiant denominationis, conijcimus 555796. & 1 N 568510 eiuſdem denominationis. tertius 92255431 eiuſdem denominationis. & fiũt hi tres N 19901. 5211. partis 55791, æquales 3360 Q. & omnia in 55796. & fit 1 N, 19901. 5211 æquales Q 18747. 4560. & fit 1 N 19901. 5214. partis ſecundæ unitatis unius, & primæ 8747. & unitates 4760 communis cuiuſdam partis ſumtæ. quod fieri nequit, cùm numeri ſint primi inuicem. Erit 1 N, 19901. 5214, partis 18747. unitatẽ 561. ad poſitiones, erit primus quidem * * *

XYLANDRI.

Quæſtio hæc, ut apparet, è duabus eſt compoſita præcedentibus. uerum & ſolutionis numeri deſunt, & reliqua omnia ita ſunt uitiata, ut inſanire mihi dedita opera uidear, ſi coner abſq́ codicis adminiculo ea corrigere. Videamus an ſoluere quæſtionem noſtro Marte poſſimus, auſpicijs tamen Diophanteis. Omnium ſumma in propoſitione intelligi debet non productorum, ſed eorum trium, ex quibus binis producentur ij quos uolumus. Etenim ſi producti ſtatuantur hypotenuſarum trium orthogoniorum ſuprà octaua propoſ. inuentorum quadrati, ſummà autem eos componentium 3360: iam uno poſtulatorum defuncti ſumus, cùm 3360 quadruplum (ita eſt legendum, itaq́ res habet) areæ cuiuſuis æqualium quod ad areas triangulorum iſtorũ, additum aut detractum quadrato hypotenuſæ cuiuſuis eorum, utroq́ modo quadratum facere ex ſuperioribus iam conſtet. Quadrati hypotenuſarum 58.74.113. ſunt 3364.5476.12769. (qui numeri mutilati ſunt in textu.) Iam per præcedentem quæremus binos, quorum multiplicatione hi exſiſtant. Duc primum in ſecundum fient 18421264, cuius latus quadrati 4292, per tertij latus (quod eſt 113) ſi diuidas, primus componentium erit $\frac{4292}{113}$. *Per hunc ſi diuidamus 3364, quadratum primum, componentium ſecundus emerget* $\frac{95033}{1073}$. *Tertius, quadrato ſecundo per primum numerum diuiſo, prodetur* $\frac{154697}{1073}$. *Hi tres numeri ſi cum nota N ponantur loco quæſitorum, dubium non eſt quin hypotenuſarum quadratos charactere Q inſignes bini ſint producturi eos quos expoſueramus. quorum ſingulis ſiue addas ſiue auferas 3360 Q (nam hoc characteris quadruplo areæ multiplicando N in N naſcitura deberi, etiam ad nonã ſuprà docuimus) fiant quadrati: addendo quidem 6724, 8836, 16129, laterum 82, 94, 127: detrahendo autem, 4, 2116, 9409, laterum 2, 46, 97. Reſtat ut componentium ſumma, ſigno N notata, æquetur 3360 Quadratis. Laborioſa utcunq́ eſt operatio: ſed uel Diophanto ſic mutilato, uel rudiorum imperitiæ ſubuenire liberalis eſt hominis. Antequam longiùs progrediar, experiemur an bini iſtos quadratos hypotenuſarum producant: non qui dubitemus, ſed ut canonem ſuperiore propoſitione traditum, nouo exemplo & inſolenti demonſtremus, ſimulq́ logiſticorum compendiorum uſum exhibeamus. Primum* $\frac{4292}{113}$ *in* $\frac{95033}{1073}$ *ſecundum multiplicaturus, recordor eorum quæ in horum inuentione mihi uſu uenerunt. eſt enim 4292 ad 1073 quadruplus. Ergo 95033 per 113 diuide, habebis 841 (horum enim multiplicatione iſte exſtiterat) id per 4 multiplica, habes 3364 primum illorum quadratorum. Multiplica primum* $\frac{4292}{113}$ *in tertium* $\frac{154697}{1073}$, *hoc eſt, ijſdem cõſideratis* $\frac{4}{1}$ *in* $\frac{1369}{1}$, *habes ſecundum, 5476, hypotenuſæ quadratum. Deniq́ ut ſecundũ in tertiũ multiplices, denominatores inter ſe multiplicari oportet, itidemq́ numeratores. Numerator in numeratorẽ ductus, 14701320001 producũt. denominatoris quadratus 1151329 ſi hũc productũ diuidat, omnino 12769 prodit, tertius hypotenuſæ quadratus. Nihil ergo etiã erratũ eſt. itaq́ ad ſolutionẽ quæſtionis nos cõferamus. Denominatores inuentorũ numerorũ (1073 & 113) eſſe inter ſe primos, ex 2 ſeptimi Euclideorum facilè diſces. Quærẽdus eſt igitur harũ minutiarũ cõmunis denominator, & ad eum tres iſtæ nouis numeratorib. redigendæ minutiæ. Sic aũt ſtabũt reductæ* $\frac{4605316 \quad 10738729 \quad 17480761}{121249}$. *Summa porrò triũ quos inuenimus numerorũ, eſt* $\frac{32824806}{121249}$. *Ergo* $\frac{32824806}{121249}$ *N æquantur 3360 Q.*

XII. Vnitatẽ diuidemus in duas portiones, quarũ utriq; datũ numerũ ita adijciamus, ut fiat quadratus. Oportet aũt datũ neq; imparẽ eſſe, neq; duplũ eius N unitas maiorem habere quadrantẽ quàm eſt numerus, quo ipſum metitur primus numerus. Imperatum ſit, ut utriq; portioni adiungamus 6, itaq́; efficiamus quadratũ. Eſto ſumma duorũ qui ſic fiunt quadratorũ, 13. Eſt ergo 13. diuidẽdus in duos quadratos, quorũ uterq; maior ſit ſenario. Ergo ſi 13 diuidã in duos numeros, quorũ interuallũ unitate ſit minus, ſoluo quęſtionẽ. Sumo ſemiſſem de 13, qui eſt 6 $\frac{1}{2}$: & quæro quam partem poſſim ad 6 $\frac{1}{2}$ adiungere, ita ut quadratum conficiã. Multiplico per 4. quęriturq́; poſtmodo pars quadrata, quę ſi ad 26. adijciat, fiat quadratũ. Sit pars apponẽda, da, 1 Q fiunt 26 † 1 Q æqualia quadrato, & ſi omnia per 1 Q multiplicentur, 26 Q † 1 æquabitur quadrato. eius latus pono 5 N † 1. fit 1 N, 18. Nam Quadratus eſt 100, & quadrati pars $\frac{1}{100}$. ergo 100 apponetur ad 26, & ad $6\frac{1}{2}$ apponetur $\frac{1}{400}$. facitq; quadratum, cuius latus $50\frac{1}{2}$. Oportet ergo tredecim ita diuidere in duos quadratos, ut utriuſq; latus proximè accedat ad 51. Et quæro quis ternarius defectu, accipiens binarius, producat 51. Statuo itaq; duos quadratos à lateribus 11 N † 2 & 3 —— 9 N. & fit ſumma quadratorum ab his ortorum 202 Q † 13 —— 10 N, quod æquatur quadrato. & fit 10 æqualis quadrato, & 1 N fit 5. Ergo alterius quadratorum eſt latus 256, alterius 258. & ſi auferamus ab utroq; quadratorum inde factorum 6, alterũ unitatis ſegmentũ erit 5358, reliquũ 4846. & liquet horum utrunq; 6 adſcito fieri quadratũ.

XYLANDRI.

Imitari ſtatueram bonos grammaticos hoc loco, quorum (ut aiunt) eſt multa neſcire. Ego uerò neſcio heic non multa, ſed pœne omnia. Quid enim (ut reliqua taceam) eſt μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἀρ̄ μο̄ α, &c. quæ cauſa huius προσδιορισμοῦ, quæ proceſſus? immò qui proceſſus, quæ operatio, quæ ſolutio? Ceterùm ab hac, ſi placet ordiamur, & uideamus quid confici poſſit. Si 5358 & 4846 unitatem componunt additi, unitas erit 10204, ſcilicet $\frac{10204}{10204}$, ut appareat denominatorem prioribus fuiſſe amputatum. Porrò ſenarius hoc modo fieret (parumper diſſimulato denominatore) 61224. Is ad 5358 & ad 4846 additus, 66582 & 66070 facit. qui duo numeri cùm altero in alterum ducto quadratum non producant, (alibi enim demonſtrauimus nullum numerum in binarium aut unicam o finientem, eſſe poſſe quadratum) ad nihil recidit omnis ſpes noſtra retexendo ſaltem aliquid inueniendi. nam hi quidem quadrati non ſunt. Primùm hoc conſtat, horum duorum quadratorum, qui quæruntur, ſummam fore 13. cum uterq; ultra ſenarium alteram unitatis partem habeat, quæ ambæ ſimul unitatem conſtituant. Eſt ergo (quod in uerbis autoris mãſit integrum) danda opera, ut 13 in duos diuidatur quadratos, quorum uterq; maior ſit ſenario, neque tamen unitatem ipſorum interuallum æquet: ne incurratur contra hypotheſin. ſemiſſem de 13, hoc eſt $6\frac{1}{2}$, per 4 multiplicat Diophantus: ſcilicet numerum quadratum. & fingit partem quadrati alicuius (totus enim nullus eſt unitate minor: quod heic requiritur) adijciendam eſſe 1 Q. Ergo 26 † 1 Q æquabitur alicui quadrato, ſi uerba ſequimur. Quod autem ait omnib. in quadratum ductis fieri 26 Q † 1, perobſcurum eſt immò autem liquidò falſum. Vide, quæ ſuprà lib. iv. propoſ. xxxvij, ac deinceps annotauimus. Verùm heic alius eſt error, quẽ deprehendere non eſt cuiuſuis. Non 1 Q, ſed [a] partem aliquotam Quadrati nondum noti, ad 26 adijci uult Diophantus. Ergo 26 † [b] æquabitur quadrato: & ſi per Q (ut quadratum) multiplicetur illud, fit 26 Q † 1, rurſum quadratus, ſi quidem antea ponebamus fuiſſe quadratum: argumento eorum, quæ ad initium noni Euclideorum tradũtur. Et hæc [c] ad 26 additio ſimilis eſt huic, ſi 26 & $\frac{1}{4}$ addidiſſem, 26 per 4 multiplicatis, itemque $\frac{1}{4}$ per 4: fierẽt enim $\frac{105}{4}$, &c. Fingamus nunc quadratum, cui æquetur 26 Q † 1, à latere 5 N † 1: (nimirum ut 1 utrinque abiecta, æquatio inter 1 Q & N fiat.) Is eſt 25 Q † 1 † 10 N, aufer utrinque 25 Q † 1, reſtat 1 Q æqualis 10 N. Ergo 1 N eſt 10 (corrigito mendas textus ipſe, ſi lubet, ex noſtris.) & 1 Q eſt 100. & [d] eſt $\frac{1}{100}$. Nam hoc ad 26 adiecto, quadratus fit $\frac{2601}{100}$, cuius latus $\frac{51}{10}$. Ergo ad $6\frac{1}{2}$ quadrantem eius, $\frac{1}{400}$ adijciatur itidem quadrati particulæ quadrans, fiet quadratus $\frac{2601}{400}$, cuius latus $\frac{51}{20}$. Reliqua monſtra ſunt, non præcepta à Diophanto. Latera quadratorum ſummam 13 confecturorum ſolertiſſimè inſtituit acutiſſimus arithmeticus 2 † 11 N, & 3 —— 9 N (Sic enim poni debent:) ut unitatum abſolutarum quadrati 4 & 9 in comparatione ad 13, abolere & aboleri poſſent, itaq; inter Q & N æquatio reperiretur. Quadrata ſunt 121 Q † 44 N † 4, & 81 Q † 9 —— 54 N. ſumma horum 202 Q, † 13 —— 10 N, rectè in Græco ſuperſtes. Ergo 1 N fit $\frac{5}{101}$, cùm ſumma illa æquetur 13. quod cuiuis non rudiſſimo in procliui eſt intelligere. Hypoſtaſes nunc ad 1 N æſtimationem deuocemus. Erunt latera $\frac{257}{101}$ & $\frac{258}{101}$. horum quadrati uterq; ſex unitatibus multati, cùm integri ſint $\frac{66049}{10201}$ & $\frac{66564}{10201}$, fient $\frac{4843}{10201}$ & $\frac{5358}{10201}$, quorũ reſiduorum ſumma omnino eſt unitas, itaq; ſatiſfactum quæſtioni haudquaquam uulgari. Cur autẽ, inquies, in laterib. ſtatuẽdis 11 N ad minorẽ ſunt additi numerum, de maiore 9 N ſubtracti? quid ad hoc facit 1 N, quem 10 eſſe inueneramus, & reliqua inde producta? Multũ ſanè. Nam cùm latus inuentum eſſet $\frac{51}{20}$ ea ratione, neq; tamẽ planè quæſtioni ſatisfieret (eſt enim quadratus $\frac{2601}{400}$ utiq;, ſed ſi eum à 13 ſubducas, relinquitur $\frac{2589}{400}$, non item quadratus) uſus ſua εὐστοχίᾳ ſic poſuit latera, ut æquatione inuenta, utrunq; reſolutis poſitionib. nõ longè abeſſet à $\frac{51}{20}$. Quippe ſi

[a] $\frac{1}{1Q}$

[b] $\frac{1}{1Q}$

[c] $\frac{1}{1Q}$

[d] $\frac{1}{1Q}$

pe ſi ponas ut 51 ad 20, ſic 257 aut 258 ad 101, extremi 5151 producent, medij 5140 uel 5160, inter quos ille quaſi medius eſt. Verba hæc, Et quæro qs ternarius, &c. & hoc innuūt, ternariū cū certorū Numerorū defectu, binariū cū certorū Numerorū additione collocari debere. atq; operæpreciū eſt heic ſubtilitatē Diophanti penitùs introſpicere. Summā quadratorum cùm uideret ad 13 comparatum iri, 2 & 3 (ut monui) delegit, quorum quadrata faciunt 13. Et quia latus utriuſque debuit quamproximè ad $\frac{51}{20}$ accedere, quod eſt 2 $\frac{11}{20}$: ideo 1 N interim finxit eſſe $\frac{1}{20}$. Ita latus unius ſtatuitur 2 † 11 N, & alterius 3 —— 9 N, quorū utrunq; ſit 2 $\frac{11}{20}$. tantūdē.n. ſit $\frac{9}{20}$ à 3 ſubtractis, quantum ſi $\frac{11}{20}$ ad 2 addas. Hæc neq; obuia ſunt cuiuis, & lucem ſequentib. inferunt. ideoq; explicanda duxi. Quod ad conditiones dati numeri attinet, uidetur poſterior hoc uelle, debere eum qui datur duplum eſſe alicuius numeri primi. Quod autem imparem eſſe non uult, ſic exploremus. Sit 7. Ergo ſumma quadratorum 8. Quærendū ergo eſt, quæ pars quadrati ad 4 addita quadratū faciat. 4 eſt quadratus, cui ſi pars quadrati, puta $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{25}$, &c. adijceretur, numerator collectus ex producto quadrati in quadratum & unitate, quadratus fieri nō poſſet. non enim ullus numerus quadratus quadratum unitate excedit. Sit datus 11. Ergo ſumma quadratorum fiet 12. Ad 6 addi poteſt $\frac{1}{4}$ pars quadrati, ut fiat quadratus $\frac{25}{4}$, cuius latus $\frac{5}{2}$. Certè expediri reliqua ex dictis canonibus poterunt, inuentis duobus numeris, quorum quadrati 12 conficiant, &c ut planè de his conditionib. non habeam, niſi amplius.

XIII. Vnitatē ſecare, & adijcere utriq; ſegmēto aliū atq; aliū datum numerum, itaq́; quadratum conficere. Sint addendi ſegmentis unitatis alteri 2, alteri 6 itaq́; cōficiēdi quadrati. 

Exponatur unitas a b, & ſeceturin c. addaturq́; ad a c binarius a d, ad c b aūt ſenarius b e. utrūq; ergo, c d & c e eſt quadratus. Et cū a b ſit 1, a d aūt & b ſimul iūctæ faciāt 8. Ergo tota d e, cōtinēs etiā unitatē a b, & 9. diuidi aūt d e oportet in duos quadratos c d & c e. Sed qm̄ quadratorū alter, c d, maior eſt binario a d, minor aūt q̄ ternarius d b: eò res redijt, ut 9 (quadratus datus) diuidi debeat in duos quadratos d c & c e, quorum ille inter 2 & 3 incidat. Nā inuēto ac dato quadrato c d, cùm d a binarius ſit, dabitur etiam reſiduum a c. Porrò a b eſt unitas: ergo etiam c b datur, quod ad unitatē ultra c b reſtat. dabitur etiam c, in quo unitas ſecatur. Iam deſcriptionis ductum ſic exſequamur. Eſto alter quadratorum, is q̄ inter 2 & 3 incidit, 1 Q erit alter 9—1 Q. Atq; hoc æquatur quadrato. Facilè res conficitur. Scilicet inueniēdus eſt quadratus binario maior, ternario minor. Sumamus duos quadratos, unum binario maiorem, alterū ternario minorem, qui ſunt 289 & 361. iam ſi 1 Q ita adornemus, ut inter hos incidat, explicabitur quæſtio. Oportebit ergo latus etiam 1 Q, hoc eſt 1 N, poni maius quàm 17, minus quā 19. Ergo oportet quærentes 9—1 Q, inuenire Numerū quadrati maiorē quā 17, minorē quàm 19. Qđ ſi 9—1 Q æquale quadrato ſtatuimus: huius latus fingētes 3—aliquot N: inueniemꝰ 1 N ortum ex aliquo numero ſexies ſumto, & diuiſo per numerū unitate maiorē, q̄ eſt quadratus numeri ſic ſumti. Redacti ſumus itaq; eò, ut numerum indagemus, cuius ſeſcuplum ſi diuidatur per numerum unitate q̄ illius eſt quadratus maiorē, quotiens q̄ 17 maior, q̄ 19 minor ſit. Eſto qui quæritur 1 N † 1. & quæro, ut iuxta latā cōditionē 6 N diuiſi ꝑ 1 Q † 1 quotiētē faciāt maiorē q̄ 17, & minorē q̄ 19. Sed & 17 ꝑ 12 diuiſus quotientē q̄ 17 facit maiorē. oportet itaq; 6 N ad 1 Q † 1 maiorē habere rationē, q̄ quæ eſt 17 ad 12. Quod ergo fit ex 6 N in 12, puta 72 N, amplius erūt quā 6, dimidij. In ſeipſum, fit 1296. aufer quadrata in unitates, hoc eſt 289 maiorē, reſtat 1007, cuius latus nō eſt maius 31, adde ſemiſſem Numerorū, fit nō minus quā 67. diuide per multitudinē numerorū, fit 1 N, 67. Similiter 5 Q in numeros 6 ad 1 Q † 1 minorē rationē habere inueniemus 1 N haud minorē 60. ſed ne maiorē quidē 60. ſit 3 $\frac{1}{2}$. Fingo latus quadrati à 3—3 $\frac{1}{2}$ N. fit quadratus 11 Q † 9—21 N. Hęc ęquanť 9—1 Q. ergo 1 N, 84. nā 7056 * & ſi hinc auferamus 2, erit unū ſegmentū unitatis 1838, ergo alterū 1081. & poſtulato ſatisfit.

XYLANDRI.

Quæſtio elegās, & tractatio ſubtilis eſt, ſed uerba autoris deprauata. Si partes unitatis ſunt 6838 & 1081, ergo ipſa eſt 2919. & binarius erit 5838. Sed is cū neutra partiū cōiūctus quadratū faciet. nō ergo habemus ueros ſolutiōs. Sed hoc quoq; uerū nō eſt, quadratū lateris 3—3 $\frac{1}{2}$ N fieri 11 Q † 9—21 N. fit.n. 12 $\frac{1}{4}$ Q † 9—21 N. cui ſi æquatur 9—1 Q, abiecto utrinq; 9, & 1 Q † 21 N utriq; adiectis, æquatio erit inter 13 $\frac{1}{4}$ Q & 21 N, & 1 N omnino fiet $\frac{84}{53}$. & 1 Q erit $\frac{7056}{2809}$. q̄ ſi à 9 auferamus, hoc eſt à $\frac{25281}{2809}$, relinquitur $\frac{18225}{2809}$. Tātus ergo eſt quadratus C E, latus eius $\frac{135}{53}$. C D *aũt quadratus & eius latus iã ſunt indicata. Sed & partes unitatis nullo negocio inueniũtur, ſi C D à 3 (ab D B,) & C E à 7 (ab A E) ſubtrahas. relinquẽtur.n. C B 1371, & A C 1438 partiũ, qualium integra unitas eſt 2089. Et ſi 2 ad A C adÿcias, $\frac{7056}{2809}$ habebis quadratum. ſi 6 ad C B, habebis $\frac{18225}{2809}$ quadratum. Eſtq; poſtulatis quæſtionis abundè & uerißimè ſatisfactum. Ità cum unum latus quadrati 3—3 $\frac{1}{2}$ N corruptela ſuperfuerit, cætera omnia ad ſolutionem pertinentia non magno labore reſtituimus. ſegmentorum numeri ueri α̅ υ̅ λ̅ η̅ & α̅ τ̅ π̅ α̅. denominator communis β̅ ω̅ ϑ̅. Sed iam ea quoq;, quib. ad latus quadrati ſic inſtituẽdum autor rem perduxit, conſideremus. D C quadratus eſt ex hypotheſi maior quàm 2, minor quàm 3. qualem inuenimus $\frac{7056}{2809}$. cum 2 ſint $\frac{5618}{2809}$, 3 autem $\frac{8427}{2809}$. Talem quadratum in integris numeris nemo dabit. At in fractis hoc faciũt $\frac{289}{144}$ & $\frac{361}{144}$. cùm 2 ſint $\frac{288}{144}$, & 3 ſint $\frac{432}{144}$. Et hoc facile fuit deprehenſu. aliquot parib. quadratis examinãdis, qui ſumerẽtur loco denominatoris, & quadratus duplo proximè maior impar aliusq; ab eo proximus itidem impar, uiſo an hic etiam minor ſumti triplo eſſet. Verbi gratia ſumatur 64. duplum 128. quadratus 169. proximus impar 225. maior triplo de 64, &c. Ergo cùm quæſtio ſit quid 1 Q ualeat (hoc enim inuento facilè fuerit de 9—1 Q & reliquis ſtatuere) latus eius, puta 1 N debet ſtatui maius quàm 17, & minus quàm 19. hi enim numeri ſunt latera quadratorum 289 & 361, & nullo incommodo heic denominatores diſſimulantur. Cæterùm quia 9—1 Q eſt ex hypotheſi quadratus, quæſtio exſiſtit de latere eius fingẽdo. qđ rectè inſtuititur 3—aliquot N, ut 3 in ſe ductus, 9 in quadrato dato aboleat, & inter Q ac N æquatio oriatur. ſed quot N à 3 debeant detrahi in lateris poſitione, id minimè eſt euidens. neq; enim quiuis numerus idoneus eſt, cũ 1 Q oporteat intra 2 & 3 incidere. Fingamus interim 3—8 N latus eſſe, cuius quadratus 9 † 64 Q—48 N æquetur 9—1 Q. & uideamus qui 1 N ualor eliciatur: (hoc enim uolũt ſibi uerba Diophãti perobſcura illa, Inueniemus 1 N ortũ ex aliquo, &c.) Abÿcimus utrinq; 9. deinde 1 Q ac 48 N adÿcimus utrobiq;. fit æquatio inter 65 Q & 48 N. & 65 diuiſor ſit, 48 diuidẽdus ex regula. & 1 N fieret $\frac{48}{65}$. Sed is repugnat hypotheſi. cùm enim ſit unitate inferior, eius quadratus inter 2 & 3 incidere nullo pacto poteſt. Sed Diophantus acutè numeros 65 & 48, eorũq; originẽ conſiderat. 48 eſt ſexies octo, qđ quadrãdo 3—8 N fiebat. nam bis 3 in 8 ducitur. At 65 eſt ipſius 8 quadratus unitate auctus, quod quadrato de 8 N adÿcitur 1 Q inſuper, ut & ab altera æquatiõis parte ad 9—1 Q defectus ille cõpleatur. Hinc ergo noua procuditur hypotheſis illa: Redacti ſumus itaq; eò, &c. qua indagatur, quot N detrahẽdi ſint ternario, ut latus quadrati cõſtituatur, hypotheſib. ſaluis. Numerũ hunc qui denuò quæritur, 1 N ſtatuit († 1 librarÿ uitio ei accreuit) ergo[a], (ſeſcuplũ ſcilicet diuiſum per quadratũ unitate auctũ) amplius eſt quàm 17, minus quàm 19. Quæ ſequũtur planè ſunt mutilata & falſa. Quis.n. credat 17 per 12 diuidendis quotientẽ exſiſtere maiorẽ ipſo diuiſo? Sed intelligendum ita eſt quod dicitur. 6 N diuiſi per 1 Q † 1, amplius ſunt quàm $\frac{17}{12}$ (nõ.n. 17, ſed $\frac{17}{12}$ propriè ẽſt qui huc pertinet numerus.) ergo ſtatuuntur quatuor quantitates, 6 N ad 1 Q † 1 maiore ratione quàm 17 ad 12. & per demonſtrata in arithmeticis, ſi extremi multiplicẽtur alter in alterum; itemq; medÿ, illorũ productum q̃ horum erit maius. utq; id intelligas quale ſit, $\frac{5}{6}$ maius eſt quàm $\frac{3}{4}$, ſcilicet 5 per 6 diuiſus præſtat 3 p̄ 4 diuiſo: ergo quinquies quatuor amplius ſunt q̃ ſexies 3. cũ illud 20, hoc ſit 18. Multiplicamus ergo 6 N per 12, & 17 per 1 Q † 1, fit 72 N maius q̃ 17 Q † 17. Ergo 72 N—17 (17 utrinq; abiectis) amplius ſunt q̃ 17 Q. Fingamus æquari. habebimus conuexam æquationem 1 Q (omnia per 17 diuido) & $\frac{72}{17}$ N—1. Multiplico $\frac{36}{17}$ in ſe (ut ſemiſſem N) fit $\frac{1296}{289}$. inde aufero 1, hoc eſt $\frac{289}{289}$, reſtant $\frac{1007}{289}$. cuius radix quadrata ſeu latus præciſè dari nõ poteſt, ſed proximũ eſt $\frac{31}{17}$, adde his $\frac{36}{17}$, habes $\frac{67}{17}$, ac tantus ferè erat 1 N. ſed oportet eſſe aliquãto minorẽ. Rurſus[b] minus ſunt quã $\frac{19}{12}$. Ergo quatuor his quantitatib. expoſitis 6 N, 1 Q † 1, 19, 12, eodẽ modo agentes quo antè, inueniemus 72 N minus eſſe q̃ 19 Q † 19. Ergo 72 N—19 minus ſunt q̃ 19 Q. Fingamus æquari, &, ut priùs, æquationem abſoluamus, fit 1 N ferè $\frac{66}{19}$. ſed oportet aliquantulo eſſe minorem. Iam $\frac{67}{17}$ ſunt 3 $\frac{16}{17}$ nimius, & $\frac{66}{19}$ ſunt 3 $\frac{9}{19}$ iuſto minor. Et cũ is de quo agitur in noua hypotheſi, intra duos hos tanq̃ limites ſtatuatur, ac $\frac{9}{19}$ ſemiſſem, qui à $\frac{16}{17}$ exceditur, nõ planè æquet: prudẽtißimè 3 $\frac{1}{2}$ ſtatuitur is, qui per has ambages quærebatur, numerus. Cætera ſunt explicata. Indicari poteſt uel ex hoc problemate, quantas ærumnas exanclauerim, dum Diophantum ab inferis quaſi in lucem reuoco.*

XIV. Vnitatem in tres diuidamus numeros, & cuiuis addamus primùm datum numerum eundem, itaque ſingulos quadratos efficere. Oportet autem datum numerum neque binarium eſſe, neque eorum quenquam, qui octuplicando binario naſcuntur.

[a] $\frac{6\ N}{1\ Q\ \dagger\ 1}$

[b] $\frac{6\ N}{1\ Q\ \dagger\ 1}$

naſcuntur. Sit datus numerus 3. Rurſum 14 diuidendus ſit in tres quadratos, ut quiuis eorum ſit 3. Si igitur rurſus 10 diuidamus in tres quadratos, ut quiuis eorum maior ſit adæqualitatis comparatæ ductus, erit qui ipſorum maior ternario. & poterimus ternario à quouis eorum ſubtracto eos inueſtigare, in quos unitas diuidebatur. * Sumimus itaque trientem denarij, hoc eſt $3\frac{1}{3}$, & exploramus quæ'nam pars à quadrato denominata ei poſsit adijci, ut fiat quadratum. Omnia nouies. Iam ad 30 oportet partem à quadrato denominatam addi, ut fiat quadratus. Sit ea 1 Q. & omnia multiplicentur per 1 Q, fiunt 9 Q † 1 æqualia quadrato lateris 5 N † 1. fit Quadratus, 1 Q † 10 N † 1, æquale quadrato 1 Q † 1. Ergo N 1, eſt 2, & 1 Q, 4. Si ergo ad 30 adijcimus 4, ad $3\frac{1}{3}$ adijcientur 36, & fiet 121. Oportet ergo 10 diuidere in tres quadratos, ut cuiuſq; latus ſit adæquale unitati. At 10 conflatur ex duobus quadratis, 9 & 1. diuidimus 1 in duos quadratos 9 & 16, ita ut 10 conſtet ex tribus quadratis, 9, 16, 9. Horum cuiuſuis lateri oportet ſtatuere adæqualem 14. Sed & latera eorum ſunt 3, 4, 3. & omnia tricies. fiunt 90 & 24 & 18. & 14 fiunt 50. Oportebat itaque unumquoduis latus adornare 50. Fingimus unius latus 3 —— 6 N. ſecundi 31 N † $4\frac{1}{5}$. tertij 37 N † 10. Quadrati horum in ſumma ſunt 3025 Q † 5 —— 116 N. hæc æquantur 10. unde inuenitur numerus 196. Applicetur hoc poſitionibus, & fiunt latera quadratorum data: ergo & reliqua ſunt manifeſta.

XYLANDRI.

*Non ſemel ſtatui quæ ſic monſtroſè corrupta eſſent, relinquere in præſentia, ne Cæcia inſtar nubes ſibi attrahentis uiderer mihi ipſi moleſtias attrahere. Sed uel excitandorum aliorũ cauſa mutaui conſilium, laboremq́ impendendum eſſe duxi, ut eo ſuperari etiam eas difficultates, quas iam deſperauiſſemus poſſe expediri, oſtenderem. Propoſitum eſt unitatem diuidere in tres portiones, ut ſingulis adiectus ternarius, nobis exhibeat quadratum. Conditionem numeri portionib. addendi, ut & ſuprà, nõ dubito experiẽtia coſsicarũ operationũ cõcepiſſe autorẽ. Primùm numeri quadrati tres qui fient, ter 3 erunt, & unitas. Ergo diuidẽdus eſt 10 (nõ 14) in tres quadratos, quorum quiuis ternario ſit maior. quiuis enim ipſorum fit ternario ad unitatis certam partem adiecto. Multa nobis adiumẽta conferet duodecimæ propoſitionis paulò antè à nobis tradita explicatio. Triens denarij aſſumitur hoc loco $3\frac{1}{3}$, quia de tribus agitur quadratis, & quæritur quænam pars quadrati ad eum adiecta, quadratum faciat. Ea ſit [a]. Ergo $3\frac{1}{3}$ † [b] æquatur quadrato. Ergo omnibus per 9 multiplicatis (numerorum quadratum) etiam 30 † [c] æquatur quadrato. Ergo ut loco dicto demonſtrauimus, 30 Q † 9 æquabuntur quadrato. Sed hoc non uoluit (dices) Diophantus, quantum quidem ex reliquijs licet coniectare. Nos uerò cum omnia diſcrepent, inſtitutam proſequemur operationẽ. Eſto latus quadrati 5 N † 3 (utrinq; enim abolendus eſt 9, &c.) eius Quadratus 25 Q † 30 N † 9 æquabitur 30 Q † 9, & 1 N erit 6. & 1 Q erit 36, & [d] erit $\frac{1}{36}$. Proinde $3\frac{1}{3}$ † [c] eſt $\frac{10}{3}$ & $\frac{1}{36}$, hoc eſt $\frac{121}{36}$, certè quadratus, cuius etiam ueſtigium extat in textu. nam quia nouies $3\frac{1}{3}$ ſunt 30, id & rationem ſecuti, omiſsis quæ in medio ſuperſunt mendis, ad rem peruenimus. Quid ſit illa παρισότης non poſſum ſatis adſequi, ideoq́; ad uerbum reddidi. Non ſum neſcius 10 in tres quadratos diuidi, duos 9 & 1. & hunc denuò in $\frac{9}{25}$. & $\frac{16}{25}$, quæ res * ſuo loco fuit tractata. Verùm reliqua neq; cohærent (ut ad nos peruenerunt) cũ præcedẽtib. quicquã, neq; omnino intelligi poſſunt. ne quid de laterũ poſitione querar, quorum quadratorum ſumma ei quæ ponitur nihil quicquam reſpondet: quæ ipſa ſumma æquationem inſolentem contra morem Diophanti, in conuexis tribus formis exhibet, ſolutione etiam non uera. Quocunq; nos uertamus, diuidendus eſt 10 in tres quadratos; quorum quiuis ternarium ſuperet, interuallorum autem ſumma unitatem conficiat. hoc enim intelligendum eſt, etſi uerba μείζων ἢ τῆς παρισότητος ἀγωγὴ manca & praua id non exprimunt. neq; illa πάρισον μο̄ ᾱ. Horum unus inuentus erat, ut docui, $\frac{121}{36}$. Sed quaſi repudiatus poſthac uidetur: neque ex uerbis textus liquet uel cur inuentus, uel cui adhibitus rei fuerit. Si ad duodecimam huius reſpicimus, apparet ideò inuentum, ut trium quadratorum latera ſingula quàm proximè ad $\frac{11}{6}$, latus inuenti, accedere debere intelligamus. Sed παρισότης illa, & denarij in tres quadratos diuiſio, & maximè à præſenti prudẽs quæ ſequitur ſtatim propoſitio, oſtendunt opinor aliũ Diophanto ſcopum fuiſſe propoſitum. Alioqui ſi $\frac{121}{36}$, hoc eſt $3\frac{13}{36}$ de 10 ſubtrahamus, relinquuntur $6\frac{23}{36}$. & eò res uidebitur deducta, ut $\frac{23}{36}$ diuidendus ſit in duas partes, quarum utraque cum ternario quadratum conficiat. Sic enim unitas in tres fuerit diuiſa partes,*

a $\frac{1}{1\,Q}$

b $\frac{1}{1\,Q}$

c $\frac{9}{1\,Q}$

d $\frac{1}{1\,Q}$

e $\frac{1}{1\,Q}$

* Lib. 2. propoſ. 8.

quarum

quarũ ſingulæ ternario aucta quadratũ exhiberẽt: (qđ unũ poſcimur) & iã inuenta eſt una harũ $\frac{13}{36}$. ſed Diophãtus nimirũ aliã rẽ egit. quod quale ſit, utinã inueſtigare liceat. Experiamur, ſi quid ex illa denarij in tres quadratos diuiſione poſsimus exſculpere. Ergo 9 $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. tres ſunt quadrati, ſumma eorum 10. latera 3 $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{5}$. ſuprà per 9 multiplicato 3 $\frac{1}{3}$, factus erat 30. & inuentum, ſi $\frac{1}{36}$ ad 3 $\frac{1}{3}$ adijceretur, fore quadratum. Ergo ſi ad eius nouencuplum. $\frac{9}{36}$ ſiue $\frac{1}{4}$ adijciamus, quadratus itidem habebitur 30 $\frac{1}{4}$. ſiue $\frac{121}{4}$. Nam ſicut 2 & 7 faciunt coniuncti quadratum 9. ſic uterq; quadrato ſi multiplicetur, (uerbi gratia per 16.) 32 & 112 fient, quorum ſumma 144 quadratus. Item 3 & 13 faciunt 16 quadratum. Multiplica utrũq; per 100, habes 300 & 1300, quorũ ſumma 1600 quadratus. uel per 81, habes 243 & 1053, quorum ſumma 1296 quadratus. de quo theoremate heic ſatis. Itaq; ut minutiæ uitentur, latera iſtorum quadratorum quorum ſumma 10, ſingula autor per 30 multiplicauerit: fiunt certè 90. 18. 24. qui numeri ſunt in contextu ſuperſtites. Sed quorſum pertinent, aut quid ſibi uolunt tandem illa 50? Sanè laterum ſumma ad rẽ nihil conducit: neq; etiam eſt 50, ſed 132. Cur uerò latera per 30 multiplicantur, numerum minimè quadratum? Summa omnium quadratorum debet fieri 10. hoc liquet. Sed & latus quodque ternarium excedere debet, ita quidem, ut omnium exceſſuum ſumma ſit 1. de hoc quoque conſtat. Oportebit ergo latus quodq; quàm proximè ad $\frac{11}{6}$ accedere. quod ipſum exploratum habemus. Quadratorum à lateribus 90, 18, 24, ſumma eſt 9000, non gentecupla ad 10. quæ ſumma eſſe quadratorum debuit. ſunt autem 900 quadratus de 30, qui numerus latera multiplicauerat. $\frac{11}{6}$ per 30 multiplicatum, fit 55. ad quem numerum apparet fieri debere comparationem, παρισότητα nimirum illam Diophanteam. Elucescit etiam cauſa illius per 30 multiplicationis. Nam uitare uoluit, ut monui, autor minutias. itaq; hos numeros $\frac{3}{1}$. $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{11}{6}$ omnes per 30 (communẽ denominatorem) multiplicauit. ut 90. 18. 24. 55. numeri inter ſe primi exſiſterent. Ergo pro πάρισιν ῑ δ ſcribendum πάρισον ια ἑκτημορίοις. & pro τὰ ῃ ῑ δ γίνονται ν, reponendum τὰ ῃ ια ἑκτημόρια γίνονται νε. Quo pacto autem latera ad 55 comparentur, & quo pacto inſtitui ſeu fingi debeant, in tanta caligine, quantam heic librarius offudit, uidere non poſſumus fortaſſe. cùm præſertim ſolutionis numeri nos deſtituant, & laterum æquationisq; numeris ſe committere, hominis ſit hoc loco parum cauti. Equidem manifeſtum eſt, 3025 quadratum eſſe numeri 55. Sed & 31 ac 37 ſunt interualla inter eum & 24 atque 18. quæ latera fiebant, itidem 90 cum 55 comparanda. Sed ſi quadrata iſtorum interuallorum 961 & 1369 coniuncta, hoc eſt 2330 à 3025 auferas, relinquetur 695 numerus nequaquam quadratus, & latere qualicunque poſito non proditurus eius in ſe multiplicatione. Sed & cur ad 31 N adijciatur 4 $\frac{1}{5}$, & 10 ad 37 N, rationem explicari non puto poſſe, aut cur pro 90 ponatur latus 3 —— 6 N. Itaque exitum rei ut inueniamus, nihil nobis ſuppeditatur auxilij. neque apparet ulla propoſitæ æquationis ratio. Sequamur nunc coniecturam, nobis à duodecima huius libri tractatione ſuppeditatam. Laterum 90, 18, 24, quadrati ſummam faciunt 9000. Quæ latera dum ad 55 accommodamus ſingula, ita erunt inſtituenda, ut abſolutorum numerorum quadratis eam ſummam æquantibus, & inuenta æquatione abolentibus, inter N & Q reliquum æquationis conſiſtat, atque ita quid 1 N ſit deprehendatur. Statuamus latera 90 —— 35 N, 18 † 37 N, 24 † 31 N: interim poſito 1 N eſſe 1. ſic enim quodq; latus erit 55. Horum laterum quadrati ſunt 8100 † 1225 Q —— 6300 N, 324 † 1369 Q † 1332, 576 † 961 Q † 1488 N. Summa omnium 9000 † 3555 Q —— 3480 N, æqualis 9000. Ergo additis detractisq; ijs quæ ratio iubet, æquatio conſtabit inter 3555 Q & 3480 N, hoc eſt, characteribus depreſſis, & numeris ad minimos redactis terminos, inter 237 N & 232. Ergo 1 N erit $\frac{232}{237}$. Equidem ad moleſtas minutias res redijt. Sed animum deſpondere non eſt noſtrum. Reſoluamus ergo hypoſtaſes ualore 1 Numeri potiti. 35 N ſunt $\frac{8120}{237}$, qui à 90 detracti, puta à $\frac{21330}{237}$, relinquunt primam hypoſtaſin $\frac{13216}{237}$. Eadem ratione ſecundam inuenimus $\frac{12850}{237}$. tertiam $\frac{12880}{237}$. Horum quadrati ordine ſic exponuntur $\frac{174504100 \quad 165122500 \quad 165894400}{56169}$. Horum ſumma planiſsimè eſt 9000. nimirum $\frac{505521000}{56169}$. Ergo analyſi utamur, & ſingula iam inuenta latera per 30 diuidamus, ita quadratorum ſumma erit 10. & de quouis horum ternario ſubtracto, partes unitatis ſeſe oſtendent. Latera $\frac{1321 \quad 1285 \quad 1238}{711}$, quadrati $\frac{1745041 \quad 1651225 \quad 1658944}{505521}$. Summa eorum $\frac{5055210}{505521}$ utique 10. Denique auferamus de ſingulis quadratis ternarium, ſiue $\frac{1516563}{505521}$ relinquuntur partes unitatis $\frac{228478 \quad 114662 \quad 142381}{505521}$. quarum ſanè partium ſummam præciſè eſſe unitatem, additio demonſtrat. Habes ueram & exquiſitam omnium huius problematis partium ſolutionem

Quadratorum compoſitorũ proprietas.

atq;

atque explicationem, ex qua etiam uerba Græca corrigere potuiſſem, ſi imitari uoluiſſem eos, qui ſua uerba ſupponunt autoribus. Quanto labore me ex his difficultatibus expediuerim, æſtimandum æquo & diligenti lectori relinquo.

XV. Vnitas diuidenda eſt in tres numeros, addendusq́; cuiuis eorum alius atque alius datus numerus, ut ſumma quælibet ſit quadratus. ſint autem dati, 2, 3, 4. Rurſum eò res redijt, ut denarium diuidam in tres quadratos, quorum primus binarium, ſecundus ternarium, tertius quatuor ſuperet. Ergo unitate in duas diuiſa partes, & ſemiſſe ſingulis datorum addito, fit ut quærendus ſit quadratus unus maior quàm 2, minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. alius maior quàm 3, minor quàm 3 $\frac{1}{2}$. denique alius maior quàm 4, minor quàm 4 $\frac{1}{2}$. eoque omnia deducuntur, ut 10 ex duobus conflatum quadratis, ſubdiuidam in alios duos, quorum alter maior ſit quàm 2, minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. ab hoc ſi 2 abijciamus, partem unitatis quęſitam primam habebimus. Rurſum alium quadratorum ſubdiuidam in duos, quorum alter maior ſit quàm 3, minor quàm 3 $\frac{1}{2}$. à quo item 3 ſi abiecero, ſecundam unitatis partem inuenero. Eadem etiam tertia inuenietur ratione.

XYLANDRI.

Obſcurum non eſt, quin ad decimamtertiam propoſitionem huius libri ſe habeat hæc propoſitio, ſicut præcedens ad eiuſdem duodecimam. Vides autem, quomodo res propoſita & expoſita ſit. Certè 10 diuiditur in tres quadratos 9, $\frac{16}{25}$, $\frac{9}{25}$: ſed hi ad id quod hoc loco agitur, nihil faciũt, ut prima fronte uidetur. Iam quod de ſemiſsibus unitatis dicitur, non explicatur, neq; ratio uel cauſa adfertur ulla: neq; ueſtigia habemus quæ conſectemur. Itaq; amplius.

XVI. Datum numerum in tres quadratos diuidemus, ut bini coniuncti quadratum conficiant. Sit is 10. Quoniam de tribus qui quæruntur numeris maior & medius cum tertio faciunt quadratum, itemq́; medius cum tertio, & tertius cum primo: Ergo tres iſti bis ſumti, tres faciunt quadratos, quorum quiſque minor eſt quã 10. At tres hi bis ſumti conficiunt 20. Diuidendus igitur eſt 20 in tres quadratos, quorum quiuis minor ſit denario. Iam 20 è duobus componitur quadratis, 16 & 4. Et ſi de quæſitis unum ponamus 4, oportebit 16 diuidere in duos quadratos, quorum quiuis minor ſit quàm 10. Didicimus autem datum quadratum diuidere in duos quadratos, ut unus eorum maior quidem ſit quàm 6, minor autem quàm 10. ſunto ambo 16 unitates. Itaque diuiſus ſit in tres quadratos, quorũ quilibet denario ſit minor. & ſi unumquemq; auferamus à denario, inueniemus reliquos, quorũ bini coniuncti quadratum faciant. Deeſt ἐλάσσων.

XVII. Datum numerum in quatuor numeros diuidemus, quorum terni coniuncti quadratum faciãt. Sit ille 10. Quoniam qui à primo deinceps tres iuncti quadratum faciunt, itemq́ue qui à ſecundo, qui à tertio, qui à quarto deinceps. ſic utique quatuor conſiunt quadrati. Atqui ſic fiunt 30. Ergo 30 diuidendus eſt in duos quadratos, quorum uterque minor ſit denario. Hoc autem ſic inuenietur, ſi per ad æqualitatem ſtatuo utrunque unitatum 7, & utrunque quadratorum auferamus à denario, inueniemus quæſitos. Sin autem, animaduerto 30 componi ex 16, 9, 4, 1. Ponemus 4 & 9, quando uterq; minor eſt quàm 10. Reſtat ut 17 diuidamus in duos quadratos, quorum uterque minor ſit quàm 10. Si ergo 16 diuidamus in duos quadratos, uti didicimus, quorum uterq; maior ſit quàm 8, minor quàm 10, erit uterque ipſorum minor quàm 10. unde ſi utrunq; eorum auferamus, reliquos depræhendemus de quæſitis, alterum 6, alterum 1. itaq; ſoluta erit quæſtio. παρισότης.

XIIX. Tres numeri ſunt inueniendi, ut cubus ſummæ eorum, quouis ipſorum adiecto cubus exſiſtat. Statuamus eam ſummam 1 N, quæſitos aũt 7 C, * C, 63 C. conſtat hoc, cubum ſummæ cum quouis poſitorum iunctum, cubum præſtare. Reliquum eſt, ut tres iſti coniuncti, faciant in ſumma 1 N. atqui conſiunt 96 C. ij ergo æquantur 1 N: & depreſsione facta 96 Q æquantur unitati. Vnitas quidem, quadratus eſt. ac ſi 96 item quadratus eſſet, ſoluta fuiſſet quæſtio. Proinde quæro unde 96 ille numerus ortus fuerit. Nimirum ſumma is eſt trium numerorum, quorum quiuis auctus unitate, cubus fieret. Ita eò res redit, ut tres numeros inuenire in bear, quorum quilibet unitate adſcita cubus fiat: ea tamen lege, ut ſumma eorum numerorum ſit numerus quadratus. Ponatur latus primi cubi 1 N † 1, ſecũdi 2 N—1, tertij 2. Cubi fiunt 1 C † 3 Q † 3 N, 6 Q † 8——1 C——12 N, & 8. Ab horum unoquoque abijcio 1, & pono primum de his q quæruntur numerũ 1 C † 3 Q † 3 N, ſecundũ 6 Q † 7——1 C——6 N, tertium 7. Reliquum eſt ut ſumma eorum ſit quadratus numerus. Eſt autem ea 9 Q † 16——9 N, quod æquatur quadrato lateris 3 N——4. & fit 1 N, 2. Erunt ergo quæſiti 1538, primus 8577, & 7. Iam redeo ad id quod initio erat propoſitum, & denuò ſummam ſtatuo 1 N, & fiunt 43740 N. & alius 1538 C, primus 8577 C, tertius 7 C. Rurſus ſtatuimus ſummam eorum 1 N. fiunt 43740 C æquales 1 N, & omnium decimaquinta pars, ac characteres per N deminuantur. fiunt 2991 Q æquales 225. & $\frac{876}{15}$. adpoſita, & manet.

XYLANDRI.

Ipſa quæſtio in Græco eſt turpiter deprauata: nedum reliqua ſibi conſtent. Atq; propoſitionē quidem nos inter uertendum caſtigauimus. cùm autem & elegans ſit & ſubtile problema, lubet id explicare. Callidè ſummam numerorum 1 N poſuit autor, cuius cubus ſit 1 C. & ipſi numeri charactere C inſigniuntur, additis minimorum cuborũ numeris unitate multatis. ut ſint 7 C, 26 C, & 63 C. ita enim ſummæ cubo, 1 C, ſingulis addito, fiunt 8 C, 27 C, 64 C, omnes cubi, quorum latera notum eſt eſſe 2 N, 3 N, 4 N. Plures ſolutiones admittere problema uides, quia alijs etiam cubicis numeris licebat eodem pacto uti. minimis autor ſuo more & conſulto ſe continet. Summa numerorum ſic poſitorum fit 96 C, & ponebatur 1 N. hæc ergo æquantur, & characteribus depreſſis 96 Q ſunt 1. Ergo 1 N eſt 96. Sed ſurdos noſter, ut alibi monuimus, miro artificio euitat. Si 7, 26, 63, qui ſunt cubi unitate quiuis multati, ſummam conficerent quadrato numero expreſſam, res confecta eſſet. Ergo alij cubi ſunt inueniendi, quorũ unitate quouis multato ſumma numerorum quadratum habeat. Latera cuborum cur ponantur 1 N † 1, 2—1 N, & 2, non eſt obſcurum. hoc enim agitur ut 1 C & —1 C ſe mutuo aboleant. Eſt enim falſum, quòd ſecundum latus poni Græca iubent 2 N—1. quod expoſita in rudiorum gratiam re docebimus.

1 N † 1	2 N——1	2——1 N
1 N † 1	2 N——1	2——1 N
† 1 N † 1	——2 N † 1	——2 N † 1 Q
1 Q † 1 N	4 Q——2 N	4——2 N
1 Q † 2 N † 1	4 Q——4 N † 1	4—4 N † 1 Q
1 N † 1	2 N——1	2——1 N
† 1 Q † 2 N † 1	——4 Q † 4 N—1	——4 N † 4 Q—1 C
1 C † 2 Q † 1 N	8 C—8 Q † 2 N	8——8 N † 2 Q
1 C † 3 Q † 3 N † 1	8 C—12 Q † 6 N—1	8—12 N † 6 Q—1 C
Primi cubus.	*Cubus huc nihil faciens.*	*Cubus ad inſtitutũ noſtrũ commodiſsimus, &*

in ipſis uerbis autoris ſuperſtes, primo loco integer, pòſt corruptus. Binarij cubum eſſe 8 nemo neſcit. huic adde 1 C † 3 Q † 3 N † 1, & 8 † 6 Q—1 C—12 N, ſumma conficietur 9 Q—9 N † 17. Cæterùm aliter paulo res habet, quàm præ ſe ferat. Non enim cuborum ſumma, ſed unitate deminutorum cuborum ſumma quadrato æquari debet. addamus ergo hæc, 1 C † 3 Q † 3 N. 6 Q † 7——1 C——12 N, & 7. conficietur ſumma 9 Q——9 N † 14. (quod idem fiebat ternario de cuborum ſumma reiecto.) Huic demum quadratum æquabimus 9 Q † 16——24 N, à latere 3 N——4 ortum. cuius inſtituẽdi ratio ſæpiùs iam eſt à nobis explicata. fiet itaq; 1 N, $\frac{2}{15}$. Erunt ergo cuborum latera $\frac{17}{15}$. $\frac{28}{15}$. $\frac{30}{15}$. Cubi $\frac{4913}{3375}$ $\frac{21952}{3375}$ $\frac{27000}{3375}$. Horum ſumma $\frac{53865}{3375}$. communis menſura eſt 15, per quem diuidi numeratorem liquet perito, cum characterum ſumma ſit ternario diuidua, & ultimus quinarius numerator cubus à 15 ortus, utiq; eo diuidi poteſt. Eſt ergo ſumma $\frac{3591}{225}$, hoc eſt (nam rurſum communis menſura 9, quòd item characterum etiam ſumma docet) $\frac{399}{25}$. hinc aufer ternarium ($\frac{75}{25}$) reſtabit $\frac{324}{25}$, utiq; quadratus numerus. Ad rem. Mutilemus cuborum inuentorum quenque unitate, & ſtatuamus eos quos quærimus

1538

$\frac{1538 \quad 18577 \quad 23625}{3375}$. *addito ſingulis charactere C. & ſtatuamus ſummam omnium eſſe 1 N. Atqui eſt* $\frac{324}{25}$ *C, ut iam docuimus. Ergo* $\frac{324}{25}$ *Q æquantur 1. Ergo 1 N eſt* $\frac{18}{5}$. *Reſoluamus nunc hypotheſes. 1 Q erit* $\frac{324}{25}$, *1 C autem* $\frac{5832}{125}$. *per hunc multiplicabimus tres poſitos à nobis, habebimus* $\frac{8969616 \quad 105341064 \quad 137781000}{421875}$. *Iam cubum ſummæ eorum ita inuentorum oportebit itidem eſſe 1 C, cùm ſumma ſit 1 N. Addere ergo* $\frac{5832}{125}$ *oportebit ſingulis, ut uideamus an fiat cubus ubiq;. Et cùm denominatorem poſitionum communem, eſſe cubum cõſtet, natũ ex multiplicatione cubi 125 in cubum 3375, per quartam noni Euclidis: de numeratorib. agendum eſt. Scilicet multiplicabimus 5832 per 3375, ut eadem denominatio ſummæ, & quæſitorum numerorum fiat (neq; enim heic de cõmuni menſura cogitabit, qui naturas numerorũ & cõpendia nouit.) Numerator cubi ſummæ erit 19683000. Cui addemus hypotheſeon numeratores, fient 28652616 prima ſumma, cubus, cuius latus 306. ſecunda 128024064, cubus lateris 504. Tertia 157464000, cubus lateris 540. Eſt ergo ſatisfactum huic quoq; problemati, quod cùm & inter numerorum miracula meritò referatur, neq; poſtremum locum mereatur, eruendum, neq; in eo ulli parcendum labori aut ſuperſedendum moleſtiæ duxi.*

XIX. Inuenito tres numeros, ut cubus ſummæ eorum quouis ipſorũ detracto, cubum relinquat. Statuatur ſumma 1 N. ipſi rurſus 7 C, 26 C, 63 C. ſupereſt ut æquentur coniuncti 1 Numero. & fit 80 C æqualis 1 N. depreſsiſq; characteribus 80 Q æquantur 1. Eſt aũt 1 quadratus. Oportebat autem etiam numerum cui nota Q adeſt, eſſe quadratũ. Vnde ergo is eſt natus? quòd à ternario ſubducti ſunt tres cubi, quorum quilibet minor quàm unitas. Inueniendi ergo ſunt tres cubi, quorũ quiuis ab unitate ſuperetur, ſumma autem ipſorũ à ternario ſublata, relinquatur quadratum. & quia uolumus cuborum quemq; minorem eſſe unitate * ſi ergo ſtatuamus tres illos numeros unitate minores, multo minores ſinguli erunt unitate. itaq; quadratum, qui relinquetur, oportebit maiorem eſſe quàm eſt 1 Q. atque hoc ſtatuamus. Oportet igitur tria diuidere in cubos, & eorum multiplicia ſecundum quoſdam cubos diuiſos. Eſto autem ſecundum 216. Oportet igitur 162 in tres cubos diuidere. At 162 componitur ex cubo 125, & duorum cuborum interuallo, qui ſunt 27 & 64. Habemus uerò in poriſmatis hoc, omnium duorum cuborum interuallum eſſe cubum. Recurramus ad propoſitum initiò, & ponamus quemuis cuborum inuentorum: ſummam autem 1 N. ita fiet ut ex tribus cubis conflatus, detracto ipſorũ quolibet, cubum relinquat. Reſtat ut tres illi æquentur 1 N. fiunt autem tres illi cubi 2 $\frac{1}{4}$. quod æquatur cum 1 N, & 1 N fit 2. ad hypoſtaſes.

XYLANDRI.

Expreſsi qua debui & potui fide quidquid in Græco repperi. quale autem ſit, non eſt in operto. Ego ſanè nihil iſtorum intelligo, neq; uacat, ut maximè libèret, operam ludere. Si propoſitum eſt tres numeros inuenire, quorum ſummæ cubus quocũq; ipſorum multatus, cubum relinquat: ipſi certè non poterunt tales poni, quales in hypoſtaſibus indicantur. Sanè ſequens problema uidetur oſtendere, heic id, quod diximus proponi, & ueſtigia etiam in ijs quæ conuertimus iſtius propoſiti ſunt reliqua. at profectò inſanus ſit, qui credat 1 C —— 7 C eſſe cubum. Vnde uerò illa trium cuborum, quorum quiuis unitate ſit minor, à ternario ſubtractio? unde nobis 162? cur ita diuidendus? Quid hoc poriſmatis, aut unde πεπορισμένον, *interuallum cuborũ cubum eſſe? ſentio 27 de 64 detractis, reſtare 37, qui ad 125 additus 162 faciat. unde & quorſum, non doceor. Itaq; diuinare non poſſum neq; de ſolutione, neq; de methodo, neq; omnino de ſententia huius quæſtionis: nullis ueſtigijs exſtantibus, & his quæ dantur, inter ſe (ut uera maximè eſſent) non cohærentibus. Libet interim propoſitionem, qualem accepimus, tentare. Si ſumma numerorũ ponatur 1 N, cubus eius erit 1 C. de hoc ſubtrahere tres numeros, ut reſidua ſint cubi, eſt mediocris opera. Si ab unitate auferas ſeorſim* $\frac{7}{8}$. $\frac{25}{27}$. $\frac{63}{64}$, *relinquentur* $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{27}$. $\frac{1}{64}$, *cubi nimirum. Hæc ergo charactere C afficiantur, & ſint hypoſtaſes* $\frac{7}{8}$ *C,* $\frac{26}{27}$ *C,* $\frac{63}{64}$ *C, ſumma omnium 1 N, eius cubus 1 C, à quo detractis ſingulis relinquantur cubi* $\frac{1}{8}$ *C,* $\frac{1}{27}$ *C,* $\frac{1}{64}$ *C. Summa numerorum* $\frac{4877}{1715}$ *C æqualis 1 N. Ergo ſi illa ſumma fuiſſet quadrata, eius latus quid 1 N eſſet docuiſſet. Atq; heic ſanè imitari artificium ſuperioris problematis non licet: & autoris inuentum librarius interuertit. Id quidem deprehendimus, cuborum ſummam à ternario detractam, debere relinquere quadratum, ut ſi, uerbi gratia, à 10*

Cuborum interualla duorum proximorum qualia.

auferas 5.6.7. relinquuntur 5.4.3. ſumma reſiduorum 12. tantum etiã relinquitur, ſi ſummam prius ſubtractorum, 18 de 30 auferas. Ad poriſma quod attinet, in promtu eſt emendatio. Etenim duorum quorumcunq; cuborum interuallum, ordine contiguorum, à ſumma ipſorum ſubtractum, relinquit duplum cubi ordine illos proximè antecedentis. quod exemplo monſtrare libet.

Summæ.	9.	35.	91.	189.	341.	559.	855.	1241.	1729.	2331.	3059,		&c.
Cubi.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.	1331.	1728,	&c.
Interualla.	7.	19.	37.	61.	91.	127.	169.	217.	271.	331.	397,		&c.
Reſidua.	2.	16.	54.	128.	250.	432.	686.	1024.	1458.	2000.	2662,		&c.
Semiſſes, cubi & ipſi.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.	1331,		&c.

Eadem eſt quadratorum ratio.

XX. Inueniantur tres numeri, de quorum unoquouis detracto ſummæ ipſorum cubo, relinquatur ſemper cubus. Summa rurſum ſit 1 N. ipſi 2 C, 9 C, 28 C. ſumma horum 39 C, quod æquatur 1 N. ergo 39 Q æquantur unitati. Quod ſi fuiſſent 39 Q conflatum ex 3 C & 3*. Inueniendi ſunt ergo 3 C, quorum ſummæ addito 3 fiat quadratum. Sit primi latus 1 N, ſecundi 3 —— 1 N, tertij unitates. ac ſit 1. Summa trium cuborum 9 Q † 28. & additis 3, fit 9 Q † 31 —— 27 N. hoc æquetur quadrato lateris 3 N —7 N. & fit 1 N, $\frac{1}{2}$, alterius 9. reliqui 1. addo 1 cuiuis iſtorum cuborũ, & uenio ad propoſitum initio. Statuo quemuis cubum tantum, poſito omnium ſummam eſſe 1 N. reſtat ut hi tres iuncti æquent 1 N. ſumma ipſorum 2 $\frac{1}{2}$, æqualis 1 N. fit 1 N 3 $\frac{1}{2}$. ad poſitiones.

XXI. Inueniantur tres numeri æquales, ut qui fit à compoſito ex tribus cubis, quouis illorum adiecto fiat quadratus. Sit compoſitus è tribus, ut ſit quadratus, 1 Q. & eorum qui quæruntur, unus 3 C, alter 8 C, alter 15 C. & contingit, ut qui fit à cõpoſito ex tribus cubis, quouis eorum adiecto ſit quadratus. Reſtat ut hi tres æquentur 1 Q. at ſunt 26 C. ergo 26 C æquantur 1 Q. & depreſsis characteribus, 26 Q Q æquantur unitati. Habet autem unitas latus quadratum. ergo etiam 26 Q Q quadratus ſit oportet. At multitudo iſta Q Q, è tribus conflata eſt numeris, quorum quiuis unitate adiecta ſit quadratus. Porrò compoſitus ex tribus, quadratus ſit, latus habens quadratum. Eſto unus quæſitorum, 1 Q Q —— 2 Q, ſecundus 1 Q † 2 N, tertius 1 Q —— 2 N. & quiuis horũ adſcita unitate fit quadratus ac prætereà tres hi compoſiti, in ſumma quadratum exhibent. Ita in numeris infinitis ſoluta eſt quæſtio. Ponatur numerus trium unitatum. Eſto unus quæſitorum 63, alter 15, tertius 3. Recurramus ad initio propoſitum, & ſtatuamus ſummam trium horum 1 Q. ipſorum primum 63 C C, ſecundum 15 C C, tertium 3 C C. Reſtat ut eorum ſummam æquemus uni Q. Ergo 81 C C æquantur 1 Q. & 1 N eſt 3. reliqua ſunt euidentia.

XYLANDRI.

Cubocubus, κυβόκυβος, non eſt (ut alijs) Diophanto cubus de cubo, quales ſunt 512, 19683, 262144. ſed quadratus cubi, quem Zeuſicubum dicunt, ut 64, 729, 4096. Ita etiam initio operis. Itaq; cum C C noſter numero 6, Q autem 2 notetur, minore de maiore detracto, 4 relinquitur, quo notatur Q Q. ita 81 Q Q æquantur unitati. & 3 eſt latus quadrati 9, cuius quadratũ 81. Magis ergo de ſolutione conſtat nimirum, quàm de ipſa quæſtione. Cui enim tres numeri debent eſſe æquales? Quin pro C legendum ſit C C, uel æquatio inter 26 Q Q & 1 Q, eiusq; deminutio oſtendunt. Enimuerò re accuratè conſiderata, hoc inuenio flagitari, ut tres numeri dētur, quorũ ſummã oporteat eſſe quadratã: ſed eiuſdem ſummæ cubum ſingulis adiectũ, quadratũ efficere numerũ. Non abs re fuerit annotata ad quintã tertij ſuprà, recordari. Summã quidē quadratũ debere eſſe, æquatio primo loco oblata ſignificat. Callidè aũt pro numeris iſtis inueniendis

niendis uſurpauit 1 Q Q —— 2 Q. 1 Q † 2 N. 1 Q —— 2 N. Nam ſumma omnium eſt 1 Q Q, quadratus utiq. & unitas ſingulis adiecta, quadratos ab 1 Q —— 1, 1 N † 1, & 1 N —— 1, conficit. Arbitraria autem eſt harum poſitionum reſolutio, itaque Numerum tribus unitatibus cum Diophanto cenſemus, ut in minimis rem conficiamus. nam binarium 1 Q —— 2 N non admittit: fieret enim 4 —— 4. hoc eſt, nihil. 1 Q Q eſt 81, aufer 18, habes 63. adde 2 N, nempe 6 ad 9, habes 15. deme 6 de 9: reſtant 3. Ergo hi numeri ſeruient poſitionibus, 63, 15, 3. Si ſummam omnium poſuiſſes 1 N, eius cubus eſſet 1 C. poneres ipſos 3 C, 8 C, 15 C. fient 26 C æquales 1 N, uel 26 Q unitati. Inde uides rurſum, quadratum debere eſſe ſumma numerum. ac ſit 1 Q. eius cubus ergo erit, Diophanteo more, 1 C C, nobis ſexta (Numero pro prima accepto) quantitas Q C. Et cum 1 C C ſit addendus ſingulis poſitionibus, eæ erunt 63 C C, 15 C C, 3 C C. quorum ſumma numerum habet quadratum, 81 C C æquales 1 Q. id eſt, 81 Q Q æquantur 1. Numeri ergo æſtimatio eſt non 3, ſed $\frac{1}{3}$. Ergo 1 C C Diophanteus erit $\frac{1}{729}$. & 1 Q erit $\frac{1}{9}$. Primus quæſitorum $\frac{63}{729}$ (hoc eſt $\frac{7}{81}$) quibus ſi addas ſummæ omnium cubum, hoc eſt $\frac{1}{729}$, habes quadratum $\frac{64}{729}$. Secundus $\frac{15}{729}$ (ſiue $\frac{5}{243}$.) cui addito ſummæ cubo, fit $\frac{16}{729}$, quadratus. Tertius $\frac{3}{729}$ (hoc eſt $\frac{1}{243}$.) addito ſummo cubo fit $\frac{4}{729}$, quadratus utique. Iam 63. 15. 3. ſummam faciunt 81. ergo inuentorum ſumma $\frac{81}{729}$ ſiue $\frac{1}{9}$, quadratus eſt numerus, & 1 Q reſpondet: Nihil ergo in huius problematis demonſtratione non ritè eſt explicatum. Componi autem hoc loco, & in ſimilibus, non aliud quàm in unam ſummam colligi ſignificat. & pro τριῶν κύβων, legendum κύβος. Cætera emendentur ex noſtris. Reprehendatur nunc antegreſſum proximè problema, quod miſerrimè deprauatum quaſi pro deplorato reliqueramus. Dandi ſunt tres numeri, quorum ſummæ cubum ſi à ſingulis auferam, ſemper relinquatur cubus. Summa ſit 1 N. ergo 1 C erit auferendus de ſingulis poſitionibus, ut cubi relinquantur. Eæ ſunt 2 C, 9 C, 28 C. reſidua cubi 1 C, 8 C, 27 C. Summa poſitionum 39 C æqualis 1 N, hoc eſt 39 Q æquantur unitati. Heic quoque uidere licet, ſummam poſitionum numero quadrato oportere concipi, aliâs enim exitus ſolutioni quæſtionis non datur. Hinc ergo naſcitur iſtud lemma, quærendos tres cubos, quorum ſumma ternario aucta, quadratum exhibeat numerum. Latera 1 N, 3 —— 1 N (nam binarius, ut monui, eſt ſuſpectus. & —— 1 N ſumitur, ut in cubo ſit —— 1 C, & 1 C ita aboleatur) & 1. Cubi 1 C, 9 Q —— 1 C —— 27 N † 27. 1. Summa omnium 9 Q † 28 —— 27 N. adde 3, habes 9 Q † 31 —— 27 N. quadrato æquale. cuius latus ita fingendũ eſſe abundè conſtat, ut 9 Q abolitis, inter unitates & N fiat æquatio. Variè inſtitui latus hoc poſſe, ſatis eſt iam notum: nempe 3 N —— aliquot unitatibus. nam illud ἀριθμῶν γ̄ λείψει ἀριθμῶν ζ̄, falſum eſt. & μονάδων pro ἀριθμῶν reponendum. notā ζ retineamus. Eſto latus 3 N —— 7. quadratum 9 Q † 49 —— 42 N æquale 9 Q † 31 —— 27 N. denique 15 N æquantur 18. & 1 N eſt $\frac{6}{5}$. Latera itaq; cuborum ſunt $\frac{6}{5}$. $\frac{9}{5}$. $\frac{5}{5}$. Cubi $\frac{216 \quad 729 \quad 125}{125}$ His ita utemur, ut unitatem cuique addamus, & ſignum Cubi. erunt $\frac{341 \quad 854 \quad 250}{125}$ C. ſumma 1 N. eius cubus 1 C à ſingulis ſubtractus, relinquet ſcilicet cubos $\frac{216}{125}$ C. $\frac{729}{125}$ C. $\frac{125}{125}$ C. Sed uidendum eſt de ſumma poſitionum. Ea eſt $\frac{1445}{125}$. hoc eſt $\frac{289}{25}$, quadratus lateris $\frac{17}{5}$. ergo cum $\frac{289}{25}$ C æquentur 1 N, æquabitur $\frac{289}{25}$ Q cum unitate. & 1 N erit $\frac{17}{5}$ ſumma trium qui quæruntur numerorum. Reſolutionem & examen poſitionum tibi relinquo. deprehendes omnia congruere.

Præcedentis problematis explicatio.

XXII. Inueniantur tres numeri quadrato æquales, ut qui fit à ſumma eorum cubus, ſingulis ſeorſim detractis, quadratum relinquat. Rurſum nobis binarius eſt diuidendus, ut & antè. eſt autem eius cubus 8. oportet ergo ab 8 unumquenq; detrahere & facere quadratum. oportet igitur 28 diuidere in tres quadratos, quorũ quiuis maior ſit quàm 6. & ſi ab 8 quemuis horum detrahamus, inueniemus tres quæſitos numeros. Eſt autem hoc iam antè oſtẽſum, quomodo oporteat 26 diuidere in tres quadratos, qui ſinguli ſenario ſint maiores.

XYLANDRI.

Propoſitionem integram extuli. Cætera ad uerbũ. quid multis? nõ intelligo. Sed experiamur aliquid tamen. Summa ſit 1 Q (nã heic planè dicitur, quòd ſuprà in opere deprehendebatur, & proxima propoſitione mutilatum fuerat.) Eius cubus 1 C C Diophanticus. Si decimanonæ ſolutionem haberemus, etiam hanc ſolueremus utiq. Interim ampliùs.

XXIII. Partem datam diuidere in tres alias, quarũ quæuis detracto cubo ſummæ,relinquat quadratum. Sit pars data,4. & hic numerus ita ſit diuidēdus ut imperatum eſt. oportebit itaq; quamuis earum ſubtractis 64 quadratum facere. tres ergo hæ ——3 faciunt tres quadratos. & ſi cuiuis quadratorum adijciamus 64,inueniemus unumquemq; quæſitorum.Id autem facilè eſt.Eò enim res deducitur, ut 13 diuidamus in tres quadratos. quod eſt facilè.

XYLANDRI.

Quadrātem puto, $\frac{1}{4}$ diuidi debēre in tres partes,ut $\frac{1}{64}$ de quauis ſubtracto,reſidua ſint quadrata. ſed quid diuiſio numeri 13 huc pertineat,non uideo. Amplius.

XXIV. Inueniendi ſunt tres quadrati, ut qui ex his fit ſolidus,quouis ipſorũ adſcito fiat quadratus.ſit ſolidus ille 1 Q. & quærantur tres quadrati,quorum quilibet unitate adſcita fiat quadratus. Peti hoc poteſt è quouis triangulo rectangulo. Expo* no tria triangula rectangula,& àccipiens ab uno Quadratorum,diuido eum qui eſt à reliquo rectorum.& inueniemus quadratos,unum 9 Q, alterum 25 Q, tertium 64 N. quorum quiuis cum 1 Q facit quadratum. Reſtat ut ſolidum qui ex tribus fit, æquemus cum 1 Q. is autem ſolidus eſt 14400 C C. æqualis 1 Q. omnib. ſub eandem denominationem deuocatis,& characteribus deminutis, fiunt 14400 Q Q æquales unitati. Eſt autem unitas quadratus. quòd ſi etiam 120 Q eſſet quadratus, ſoluta eſſet quæſtio.non eſt autem. Eò itaque res eſt deducta,ut inueniēdi ſint tres trianguli rectanguli,ut ex tribus ſingulatim ijſdem ſolidus multiplicatus in ſolidũ qui ex baſibus eorum fit,faciat quadratum,cuius latus ſit numerus multiplicatione ortus laterum quæ circa rectum ſunt unius rectangulorum.Et ſi omnia diuiſerimus per numerum ortum ex multiplicatione laterum quæ ſunt circa rectum rectanguli inuēti,fiet ꝗ ex multiplicatione rectum continentium eius qui AD in eum qui eſt iuxta rectum alterius triangulorum.& ſi ex ijs conſtituamus factum γ δ ς χ: deuen* tũ eò eſt ut inueniant̃ duo trianguli rectāguli, ut qui ſub ijs quæ circa rectũ eius qui ſub ijs quæ circa rectum erat 12 N: itaque etiam area 12.Si autem 12, & 3.Hoc aũt facile,eſtq; ſimile triangulo 79,40,45. alterum 5,12,13.Cùm habeamus ergo tria triangula rectangula,reuertimur ad prim ò propoſitum. ſtatuimus trium quadratorum unum 9,alterum 25, alterum 81. & ſi ſolidum ex his æquemus 1 Q, exſiſtet numerus uerus. ad poſitiones.

XXV. Inuenire tres quadratos,ut ſolidus qui ex ijs fit,ſingulo ipſorum detracto maneat quadratus Statuatur ſolidus iſte 1 Q. & rurſum tres quadrati qui quæruntur,ſumantur ex triangulis rectangulis,unius 16,alterius 25,tertij 64 Hos coniungo Quadrato,& manet 1 Q—quouis ipſorum,quadratus. Supereſt ut ſolidum ex his tribus compoſitum,æquemus 1 Q. Is autem ſolidus eſt 25600 C C. denominatus à parte 122.1025.hæc æquantur 1 Q. omnia numero notæ Q denominantur. erunt 25600 Q Q ſub nomine partis 122.1025.æquales unitati. Eſt autē unitas quadratus, & habet latus ſuum. Ergo oportebat etiam 25600 ſub nomine partis 122,1025, eſſe quadratum. Itaq; res eò eſt deducta denuò, ut inueniamus tria triangula rectangula ea lege,ut qui fit è perpendicularib.ſolidus multiplicatus in ſolidũ qui fit è ſubtēſis,quadratũ faciat, qui latus habeat quadratum. & ſi omnia diuidamus per numerum ſubtenſæ & perpendicularis rectangulorum:oportebit eum qui fit à ſubtenſis * & perpendiculari ſubtenſæ & catheti multiplicatum per ſubtenſæ & perpendicularis cuiuſdam rectanguli. Sit unum triangulorum 3.4.5.Eò itaq; deuentũ eſt, ut duo rectangula triangula inueniantur,ut ſubtenſæ & perpendicularis ſubtenſæ ſit 20.illa uerò 20 & 5.& eſt facile. quippe maius erit 5.12.13. minus 3.4.5.Ab his ergo quærēda ſunt alia duo,ut ſubtenſę & perpendicularis ſit 6.Eſt aũt maioris quidem ſubtenſa * $6\frac{1}{2}$. perpendicularis 60. Minoris,qui eſt in ſubtenſa,$2\frac{1}{2}$. qui uerò in ᾱ rectangulorum,12. & accipientes minima ſimilium, recurrimus ad initiò propoſitũ. & ponimus ſolidũ qui fit è tribus,1 Q.ipſorum aũt quadratorũ unũ 16,alterũ 576,tertiũ 2* Q, ſub denominatiõe partis 28561. Supereſt ut ſolidus ille æquetur 1 Q. omnia deminutis characteribus, latusq; lateri.inuenitur numerus 65. ad poſitiones.

*aliàs 6.

XXVI. Inuenire tres quadratos,ut ꝗ ex ijs fit[ſolidus]à quouis ipſorũ detractꝰ,relinquat quadrātũ.Solidꝰ iſte rurſus ſtatuat̃ 1 Q:ipſi aũt à ꝗbuſcũq; petant̃ rectāgulis.

Atque

Atq; rurſum etiam heic eò res deuoluitur, ad ea quæ præcedente fuerunt quæſita problemate. Sic igitur in hac ijſdem utimur triangulis, ponimusq; eorum qui quæruntur quadratorum unum 25 Q, alterum 1 Q, tertium 625. alium 4784. & rurſum manet ſolido qui ex tribus componitur ſublato à quouis latere quadrati. ſupereſt * ut ſolidus ille æquetur 1 Q. unde inuenitur numerus maior quàm 8, & manet.

XXVII. Inuenire tres quadratos, ut qui fit à duobus quibuſuis, unitate adſumta ſit quadratus. Et quoniam quæro, ut qui à primo in ſecundum fit, addita unitate ſit quadratus: omnia in tertium qui eſt quadratus: itaq; oportebit eum qui eſt è primo * in ſecundum, id eſt ſolidum ex tribus cũ tertio facere, ut etiam cum primo & ſecundo. Id enim antè demõſtrauimus. itaq; etiam illi numeri ſatisfaciũt huic quæſtioni.

XXIIX. Inuenire tres quadratos, ut qui fit à duobus quibuſuis, * detracto 1 Q ſit quadratus. Omnia in tertium. itaq; quod fit è primo in ſecundum, in tertiũ: hoc eſt ſolidus qui fit ex tribus, detracto tertio facit quadratũ. Ergo etiã utroq;, tam primo quàm ſecundo detracto, ſolidus è tribus confectus erit quadratus. Hoc autẽ ſuprà eſt demonſtratum. Illi igitur numeri hoc quoq; præſtant.

* uel detractus ab.

XXIX. Inuenire tres quadratos, ut qui è quibuſuis duob. fit, ab unitate ablatus, quadratum relinquat. Rurſus quęrentes eum qui è duob. quibuſuis fit, ſublatum ab unitate, facere quadratum: ſi omnia ducamus in tertiũ, rurſum eò deducimur, ut inueniri debeant tres numeri, è quib. confectus ſolidus ſi tollatur à quouis, relinquat quadratum. Hoc autem ſuprà eſt demonſtratum.

XXX. Dato numero, tres alios inuenire quadratos, quorum bini quiq; eo adſcito quadratũ faciant. Sit datus 12. & unus quæſitorũ, 9. Quærendi ergo ſunt alij duo, ut uterq; eorum cum 24 faciat quadratum, & coniuncti ijdem cum 15 faciant quadratum. Quærendi ſunt ergo quadrati duo, quorum uterq; cum 24 faciat quadratum. Sumimus eos qui metiuntur 24, & trianguli rectanguli latera rectum angulũ facientia. ſit ſecundum N 3, oppoſitus N 8. ſimul iuncti ambo fiunt $1\frac{1}{2}$ N, & 4 N. Sit unius latus à differentibus 2 N & 3 N. & manet uterq; ipſorum cum 24 faciẽs quadratum. Reſtat ut ambo iuncti, adiectis 15 quadratum faciant. Fit autem $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$ Q. Ergo 25 Q —— 9 æquantur quadrato, æquales 25 Q. & fit Numerus $\frac{1}{8}$.5. ad poſitiones.

XXXI. Dato numero, tres alios inuenire quadratos, ut bini coniuncti, de ſumma ſublato dato, faciant quadratum. Eſto datus 12. Rurſum ponatur quadratorũ quæſitorum unus 25. Vterq; horum cum 12 faciat quadratum: & ambo iuncti, detractis 16, faciant quadratum. Rurſum ſumimus dimenſionem per numeros 3 & 4. Fit primi la- * tus à differentia 1 N & 2 N. alterius à differentia 2 N & $1\frac{1}{2}$ N. & manet utriuſq; horum quadratus, ut faciat cum 2 quadratum. Reſtat ut ſumma duorum —— 13, faciat quadratum. fit autem 6.4. Q —— 25 N Quadrat. Eſto N, 6.4. & fit 1 N, 2. ad poſitiones.

XXXII. Inueniantur tres quadrati, ut qui componitur ex eorum quadratis faciat quadratum. Quæſitorum ſtatuatur unus 1 Q, alter 4 Q, alter 9. & fit compoſitus ex eorum quadratis, 1 Q Q † 27 æqualia quadrato lateris 1 Q —— 1: & relinquuntur 20 Q æquales 3. & ſi uterq; eſſet quadratus, ſoluta erat quæſtio. Eò itaq; res redit, ut quærantur duo quadrati, & numerus quidam, ut qui ab ijs fit quadratus detractis quadratis quæſitorum, numerum faciat, qui ad duplum principio poſiti numeri eam habeat rationem, quæ eſt quadrati numeri ad quadratum. Ponantur quæſiti quadrati unus 1 Q, alter 4. & ab hoc quadratus ſi amittat illorum quadratos, relinquit 8 Q. & uolumus hæc ad 2 Q 1, unitates 4, hoc eſt ad 2 Q † 8 proportionem habere quæ eſt quadrati ad quadratum. Semiſſes ſumantur omnium, ut etiam 4 Q ad 1 Q † 4 N rationem quadrati numeri ad quadratum habeant numerum. ſunt autem 4 Q quadratus. Ergo & 1 Q † 4 æquantur quadrato lateris 1 N † 1. ergo 1 N, $1\frac{1}{2}$. Erit quæſitorum quadratorum alter $2\frac{1}{4}$, alter 4, alter oblatus $6\frac{1}{4}$. omnia quater. erunt unus 9, alter 16, oblatus autem 25. Recurramus ad initiò poſitum. Statuamus triũ quadratorum unum 1 Q, alterum 9, alterum 16. & fit qui ex eorum quadratis componitur 1 Q † 347. Hæc æquantur quadrato, cuius latus 1 Q —— 25. & 1 N eſt 12. Reliqua ſunt manifeſta.

XXXIII. Octodrachmas & quinquedrachmas choas aliquis miſcuit, obolis mandato ut bonũ facerẽt, & preciũ ꝑſoluit ſuper omnib. quadratis imperatas accipiens unitates, & facientẽ rurſus aliũ te ferre quadratũ, ſumẽtẽ pro latere ſummã choarũ. Itaq; diſtingue, octodrachmas fac, & rurſus reliquos puer dic quinquedrachmas. Epigrammate hoc id ſignificatur. Duos quidã emit cados uini, unius choam drachmis 8, alterius choam drachmis quinq;: & ꝑ omnib. perſoluit preciũ, numerũ quadratũ, qui ad 60 faciebat quadratũ, cuius latus numerus erat choarũ. Diſtingue nũc quinquedrachmas ab octodrachmis. Eſto choarũ multitudo 1 N, ergo preciũ erit 1 Q —— 60, æquale quadrato. cuius latus ponendũ eſt 1 N —— aliquot omnino unitatibus. Et quoniã 1 Q —— 60; cõſtat è duob. numeris, precij ſcilicet octodrachmarũ, & precij quinq; drachmarũ. * facit multitudinẽ quinquedrachmarum, & 8 facit multitudinẽ octodrachmarum, & multitudo choarum in ſummam contracta facit 1 N. oportebit 1 Q —— 60 diuidere in duos numeros, ita ut alterius quintans, alterius octans, iuncti 1 N conficiant. Atq; hoc nõ planè fieri undiquaq; poteſt, niſi 1 N ſtatuatur maior octante de 1 Q —— 60, minor autem quintante de 1 Q —— 60. Eſto 1 Q —— 60 maior atq; 5 N, & minor quàm 8 N. Quando itaq; 1 Q —— 60 maior eſt quàm 5 N, adijciãtur utrobiq; 60. ita 1 Q maius erit quàm 5 N † 60. ergo etiã 1 * Q † 5 N numero aliquo amplius ſunt quàm 60. & oportebit numerũ maiorẽ eſſe, non minorem quàm 11. Rurſum quando 1 Q —— 60 minus eſt quàm 8 N, additis u- * trinq; 60, 1 Q æquabitur 8 N & cuidam numero qui minor ſit quàm 60. Itaq; oportebit numerum inueniri non maiorẽ quàm 13. eundẽ uerò demonſtratũ minorem eſſe quàm 11 nõ debere. Eſt ergo inueniendus numerus maior quàm 11, minor quàm 12. Cum aũt quęrimus quadratũ æquale 1 Q —— 60, fingendũ eſt eius latus 1 N —— aliquot unitatibus. fitq; is numerus ex aliquo numero in ſeipſum ducto & aucto unitatib. 60, & diuiſo per ſui duplũ. Eò itaq; res deducta eſt, ut inueniendus ſit numerus, cuius quadratus ſi adſciſcat 60, & ſumma per duplũ numeri diuidatur, quotiẽs * maior ſit quàm 11, minor quàm 13. Et ſi hunc ſtatuamus 1 N, oportet 1 Q —— 60 diuidere in duos numeros, & quotientem inuenire maiorem quàm 11, minorem quàm 13. Et ſi quæſitum numerum ſtatuamus 1 N, oportebit 1 Q —— 60 diuidere per duos numeros, ut maior quàm 11 exeat. Ergo 1 Q † 20 maius erit quàm 22 N. ergo * 22 N æquantur 1 Q, & qui minorem unitatem 60 erit numerus, non debet eſſe minor 19. Rurſum oportet 1 Q † 20 diuidere per 2 N, & numerũ inuenire minorẽ 1 Q † * 80, itaq; 1 Q † 60 minus ſunt quàm 20 N. Ergo 26 N qui ſunt 1 Q & numero quodã maiori quàm 60. unde oportet numerũ minorẽ eſſe quàm 26. ſed & maior eſt atq; 19, maior 20. Ergo oportet quadratũ æquale 1 Q —— 60 parantes, latus ſtatuere 1 N —— 20. Ita inuenitur 1 N $11\frac{1}{2}$. Quadratus eius $132\frac{1}{4}$. tolle 60, relinquuntur $72\frac{1}{4}$. Hoc oportet diuidere in duos numeros, quorũ prioris quintans cũ poſterioris (octãte) faciat $11\frac{1}{2}$. Sit prioris Quintans 1 N. ergo alterius octans erit $11\frac{1}{2}$ —— 1 N. Ipſi ergo erunt alter 5 N, alter 92 —— 2 N. hæc æquantur cũ $72\frac{1}{4}$. Erunt ergo 79. ergo multitudo quinq;drachmarũ choarum 27, octodrachmarum 4, unitates 11. reliqua patent.

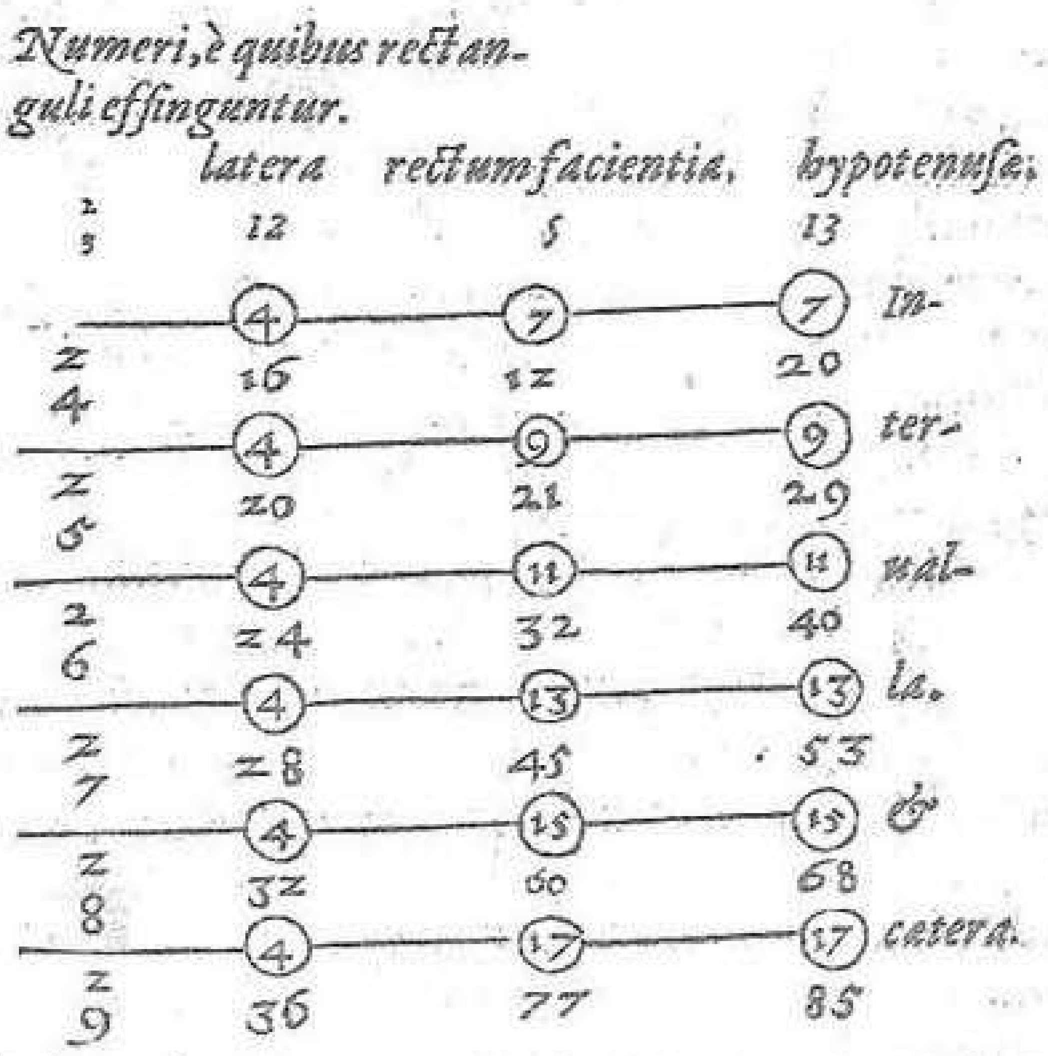
DIOPHANTI ALEXANDRINI RERUM ARITHMETICARUM LIBER SEXTUS.

1 INueniendum eſt triangulum rectangulũ, cuius ab hypotenuſa ſi ſubtrahatur alterutrum laterũ reliquorum, relinquatur cubus. Eſto illud triangulum effictum à duobus numeris, quorum alter 1 N, alter 3. Fit ergo hypotenuſa 1 Q † 9. perpẽdicularis 6 N. baſis 1 Q —— 9. Si alterum latus ab hypotenuſa ſubtrahatur, puta 1 Q —— 9, relinquentur 18. qui ſanè cubus non eſt. Vnde autem prouenit 18? Quadratus eſt de 3 bis ſumtus. Inueniendus eſt ergo numerus, cuius quadrati duplum, ſit cubus. Eſto is 1 N. erunt 2 Q æqualia cubo alicui. ſit is 8, fit 1 N, 2. Rurſus triangulum fingo ab 1 N & non 3, ſed binario. ita fit hypotenuſa 1 Q † 4, cathetus 4 N, baſis 1 Q —— 4. Et ſi hãc ab hypotenuſa detrahas, relinquitur 8, cubus. Reſtat ut cathetum ab hypotenuſa auferamus. relinquitur 1 Q † 4 —— 4 N, æquale cubo. Eſt autem hoc quadratum lateris 1 N —— 2. hoc ergo latus æquemus

quemus cubo, & ſoluemus quæſtionem. ſit numerus cubicus 8. erit 1 N. 10. Effingetur ergo triangulus à 10 & 2, fietq; hypotenuſa 104, cathetus 40, baſis 96. & cōſtat.

XYLANDRI.

Nam 40 ab 104 ſublatis, cubus reſtat 64. 96 de 104 ademptis, cubus relinquitur 8. Quadratum baſis eſt 9216, catheti 1600. ſumma 10816. & tantus eſt quadratus hypotenuſæ. Sanè quæ in Græco ſunt menda, difficile non fuit corrigere & quod de ultima æquatione dicitur, certiſſimū eſt. nam ſi quadratus aliquis numerus, cubus eſt: neceſſe eſt etiam latus eius quadrati, cubum eſſe: & cubi, quadratū. quod ex natura characterum coſſicorum colligere licet: & numero qui Q C noſtro additur, 6. nam latus quadrati quærere, eſt ſemiſſe numeri adiecti notatam quantitatem quærere, ſcilicet 3 heic: quo notatur cubus. Et ſi latus cubi quæritur, triente numeri notata quantitas quæritur, qui heic triens eſt 2, quadrati nota. Hæc ergo talia ſunt. Sed effictionem illam triangulorum uellem à Diophanto explicatam haberemus. Eam nos hic repetemus ex ijs, quæ in explicando ſuperioris libri problemate octauo, & tertij uigeſimoſecundo docuimus. Effingendus eſt quadratus ex 1 N, & 3. duplum eius quem multiplicando componunt, eſt 6 N unum latus. Quadrata 1 Q ac 9, differunt 1 Q —— 9, quod eſt alterum ipſorum numerorum quadrata coniuncta, ex quibus triangulum effingebamus, hypotenuſam ſufficere, ex ibi tractatis intelligi poteſt, magno ſanè compendio: cùm per 47 primi Euclidis methodum eam in tali genere numerorum inuenire nequaquam poſſis. Sed explicemus abſolutorum exemplò numerorum. Effingere libet triangulum rectangulum ex 3 & 8. erit unum latus 48, duplū ex ijs compoſiti. alterum 55, interuallum quadratorum. hypotenuſa 73, ſumma quadratorū. Et ut uideas idem fieri, quod per inuentum Pythagoræ. Quadrata laterum ſunt 2304, & 3025. ſumma 5329. atqui huius radix quadrata eſt 73. Et ſemel numerorū qui effictioni præſunt quadratis cognitis, res citra moleſtiam conficitur. Sint 3 & 97. latus unum 582. Quadratum de 97 eſt 9409. ergo alterum 9400, hypotenuſa 9418. quod ita habere, experitor ſi lubet. Idem etiam in fractis experieris. Porrò autem eodem modo ex 1 N & 2 latera orthogonij effinguntur 4 N. 1 Q —— 4. & hypotenuſa 1 Q † 4. & in ſolutione rectangulum à 10 & 2 (non 1, ut in Græco malè eſt μονάδος pro μονάδων β.) effingitur. Bis decem ſunt 20, duplū 40 eſt unum latus; quadrata 100 & 4. interuallum 96 alterum latus; ſumma 104, hypotenuſa: compendio inuenta. alioqui laterū quadrati inuenientur 1600, & 9216. ſumma 10816, cuius latus quadrati eſt 104. Et quando in hanc rectangulorum inuentionem denuò incidimus: libet heic typum ſubijcere, aut ſpecimen potiùs typi, unde mirabilis ſanè, & à nemine (quod ſciam) litteris uulgata progreſſio huius effictionis poſſit intelligi: & diametralium (quos uocant) numerorum ingens copia confici, ac immenſa potius.



Dato orthogonio, inuenire unde ſit effectus diagonali, quæ latera 7. 24. 25. 28. 45. 53. &c. 8. 15. 17. &c.
Data hypotenuſa inuenire latera.

Ex hoc cætera tuæ induſtriæ eſt colligere. Nam ſi ita diſponas 3. 4. & 3. 5. & 3. 6. ac deinceps, inuenies progreſſionem laterum primorum interuallo. 6. reliquorum ijſdem imparibus: ut additione etiam quotlibet diametrales cudere liceat.

Effictio triangulorum.

Compēdium ad 47. I. Eucl.

11. Quæ

II. Quæritur triangulus rectangulus, cuius hypotenuſæ alterutrũ latus ſi addatur, cubus cõfiat. Si multiplicemus quod quæritur à duob. N, ut in præcedente: quærendus eſt numerus quadratus, cuius duplũ ſit cubus. Eius quadrati latus erit 2. Fingimus igitur triangulũ ab 1 N & 2. Et fit ſimiliter hypotenuſa 1 Q † 4. laterũ reliquorũ alterũ 4 N, alterũ 1 Q — 4. Reſtat ut latus hypotenuſæ alterutro adſcito cubum præſtet. Sed cũ ad primas poſitiones redierimus, inuenimus 1 Q minus eſſe quàm 4, & maius quàm 2. minus eſt unitatib. duabus. & eò redacti ſumus, ut quærere oporteat
* cubum minorẽ quàm 4, maiorẽ quàm duo. is eſt 27. & ſit 1 N † 2, æqualis numerus
* 27. fit numerus 11. Ergo hypotenuſa erit 377. laterum alterum 135, alterũ $5\frac{1}{2}$. & per 64; erit triangulum contentum lateribus 377, 135, 352. & conſtat.

XYLANDRI.

Id quod potiſsimũ eſt in explicatione huius quæſtiõis, mutilatũ eſt, & reliqua uitiata: ſolutio nulla. Poſitis trianguli lateribus 4 N, 1 Q —— 4, & hypotenuſa 1 Q † 4: experiamur quid fiat. Quo aũt ordine erit utendũ? Si addatur latus 4 N, ad hypotenuſam 1 Q † 4, fiet quadratus 1 Q † 4 N † 4, lateris 1 N † 2. de quo quid eſſet ſtatuendũ, ſuperiore eſt oſtẽſum problemate. ſcilicet æquaremus cũ 8. & 1 N fieret 6. latera 24. 40. 32. & ſanè 24 cũ 40 cubũ cõficiunt 64. at 40 & 32 cubũ nõ conſtãt. Eodẽ redibit res, ſi cũ alio cubo æques. puta cũ 64. erũt latera 248, 3848, 3840. priora cubũ faciunt 4096. poſteriora nequaquã. nõ ergo hinc ordiendũ. At ſi addas 1 Q — 4 ad 1 Q † 4, cõficies 2 Q. hoc æquabitur etiam cubo. Cubus duplus quadrati nullus eſt præter 8. ut triplus quadrati nullus extra 27, octuplus quadrati nullus extra 512. quod coſsicarũ progreſsionũ rationes demonſtrãt. Si 2 Q æquamus 8, 1 Q erit 4; & 1 N, 2. At ſic reſolutæ laterũ poſitiones erũt 8, 4 — 48. ita ſcilicet nullũ eſſet tertiũ latus trianguli. quod eſt abſurdiſsimũ. Ergo ad prius redeamus & cõparemus 1 N † 2 cũ alio quodã cubo, eoq́ minore, & ſcilicet inter 2 & 4 interpoſito. qualis in integris eſt nullus, $\frac{27}{8}$ aũt, qui eſt $3\frac{1}{8}$ ei cõditioni ſatisfacit. Nãne in fractis quidẽ ullũ inuenies cubũ, qui duplus alicuius quadrati ſit: & hypoſtaſes ſaluas eſſe oportet, quod fieri nõ poteſt ſi 1 N, binariũ, 1 Q quaternionẽ æquet. Ergo 1 N † 2 æquẽtur cubo $\frac{27}{8}$. hoc eſt, 1 N ſit $\frac{11}{8}$.
Nota. *& reſoluãtur hypoſtaſes. 1 Q eſt $\frac{121}{64}$, adde 4, ſeu $\frac{256}{64}$. habes hypotenuſam $\frac{377}{64}$. Itẽ ſubtrahe 4 ab 1 Q; fieri hoc nõ poteſt. ſed uiciſsim (ut alibi quoq́ monui) $\frac{256}{64}$ à $\frac{121}{64}$ aufer, habes alterum latus $\frac{135}{64}$. deniq́ 4 N ſunt $\frac{44}{8}$, ſeu $\frac{352}{64}$ tertiũ latus. Cur abijciatur denominator cõmunis in hoc caſu, alibi eſt oſtẽſum. 377. 135. 352, latera ſunt quæ requirebãtur. et hypotenuſa cũ altero laterũ cõiuncta 512, cum altero 729 conficit, cubos ab 8, & 9. Subtile eſt hoc ſolutionis genus.*

III. Inueniatur triangulũ rectãgulũ, ut areæ eius numerus dato numero auctus cõficiat quadratũ. Addẽdus ſit 5. & triãgulũ cõſtituatur ſpecie hac, laterũ 3 N, 4 N, 5 N. Fit area cũ 5, 6 Q † 5, quod æquatur quadrato. Sit 1 N, Q 9. & à ſimilib. auferãtur ſimilia, ſuperſunt 3 Q æquales 5. & oportet ſpeciẽ ad ſpeciẽ rationẽ habere quadrati numeri ad quadratũ numerũ: ita oportebit etiã multitudinẽ ad multitudinẽ. Eſt ergo eò peruẽtũ, ut inueniendũ ſit triangulũ rectangulũ, & quadratus numerus, qui detracto numero areæ eius trianguli, præſtet quinq; quadratos. Cũ datus numerus ſit 5, fingamus uni 1 N, & fit areæ numerus 1 Q. ſit quadrati latus, 1 N, & tot numeri, quan-
1 Q ÷ 100 ÷ 20 N tũ eſt duplũ dati numeri, nẽpe 10 N. fit quadratus 1 Q † 100 Q † 8. Hoc quintuplicemus, & areæ numerum (1 Q.) auferamus: ſuperſunt 101 Q † 20. Hæc quinquies, ſunt 505 Q † 190, quadratus. & omnia in 1 Q, fiunt 100 Q † 505 æquales quadrato lateris 10 N † 5. unde inuenitur 1 N eſſe 24. Ad propoſita. Multiplicabitur ergo triangulus à 24 & 5, latus aũt quadrati 163. Si igitur rectangulũ ſtatuamus in numeris, & areã eius
* cum 5, faciemus 1 N, Q 8, 5569. & reliqua nobis erunt manifeſta

IV. Inueniendũ eſt triangulũ rectangulũ, ut numerus areæ, ſublato eo qui datur, relinquat quadratũ. Datur aũt 6. & ſtatuaẽ triangulũ datũ ſpecie & ob hypotheſin 80 Q — 6. numerus quadratus eſto N Q 30. Et rurſus res eò deducitur, ut inueniendũ ſit triangulũ rectangulũ, & quadratus numerus, ut ſi ab area tollatur quadratus, reliqua ſexies ſumta ſint quadrata. Fingamus rurſus triangulum ab 1 N & 1. & quadrati latus ſit 1 N. & erit ſemiſsis multitudinis dati numeri, hoc eſt 3 N † 3 Q —— 10 Q numerus quadratus. hoc ſexies, fit 36 Q —— 60 æquale quadrato, cuius latus 6 N —— 2. unde inuenitur 1 N, 8. Fingitur ergo triangulus ab 8, & fit. quadrati autem 37. & cũ inueniam triangulum, conſtituo in numeris, ſecutusq́; propoſitionem, inueniam

numerum

numerum rationalem;& conſtat.

V. Inuenire triangulum, cuius areæ numerus à dato ſubtractus, relinquat quadratum. Datus ſit 10. & rurſus ſtatuatur triangulum à N 1, N 5. fiunt 10 —— 6 Q æquales quadrato. Et ſi faciamus N Q quadratis, rurſum eò deuentũ eſt, ut inueniri debeat triangulum rectangulũ & quadratus numerus, ut quadratus areæ auctus numero, decem quadratos faciet. Fingatur quadratum ab 1 N & 1. latus autem quadrati 1 N. & 6,& 5. & fit cõpoſitus ex area & * 26 Q † 10. hæc decies, fiunt 260 Q † 100. & quadrans horum 65 Q † 25 æquatur quadrato lateris 5 N † 8. unde inuenitur 1 N eſſe 8. ad poſita perge, & inuenies ut in præcedentibus.

VI. Inueniatur triangulum rectangulum, ut areæ cum uno laterum quæ rectum faciunt angulum, datum numerũ faciat. Sit datus 7. Sit rurſus triangulus datus ſpecie 3 N, 4 N, 5 N. fiunt 6 Q † 3 N æquale 7. Oportebat autem ſemiſſe unitatum N in ſe ducto, additis Q unitatibus facere quadratum. id autem non fit. Oportebit ergo inuenire triangulum rectangulum, ut qui fit à ſemiſſi lateris circa rectum unius adſcitis 7 & area, faciat quadratum. Eſto * laterum, 1 N. qui in altero, 1. & fiunt N 3, $3\frac{1}{2}$ † 4. omnia quater, fiunt 14 N æquales quadrato. Vtq́; etiam triangulum rectangulum rationalibus lateribus conſtituamus, oportet N Q 1ſ † 4 eſſe quadratum. Exceſſus fit 1 Q —— 13 N. dimenſio 4 N ſecundum 1 N —— 14. dimidium exceſſus in ſe, fiunt 39 æquales minori. & fit 1 N, 24. Ad poſita. Pono unum latus trianguli 27. alterum 1. Omnia ſepties. fit unum 24, alterum 7. & hypotenuſa 25. Fit area cum duobus lateribus, 84 Q † 7 N, hæc æquantur 7. Ergo 1 N inuenitur 6,7,25, & manet.

VII. Inuenire triangulum rectangulum, cuius ab area ſi auferatur unum latus rectum angulum facientium, relinquatur datus numerus. Is ſit 7. Rurſum ſi triangulũ ſtatuamus data ſpecie, res eò demittitur, ut quæri oporteat triangulũ rectangulũ, ut lateris unius ſemiſſe in ſeipſum ducto, adiecto ei quod fit 7, & area, quadratus exſiſtat. Et inuentus eſt 7.24.25. Pono itaq; in Numeris, & area detracto uno laterũ fiũt 84 Q —— 17 N. æqualia 7. fit 1 N 5. ad poſitiones.

IIX. Inuenire triangulũ rectangulũ, ut area ambob. laterib. quæ ſunt circa rectũ angulum adſumtis, datum cõficiat numerum. atq; hic eſto 6. Rurſum ſtatuatur triangulum datum in ſpecie, & rurſum eò deuoluitur res, ut inueniendum ſit triangulum rectangulum, ut ſummæ laterum circa rectum in ſe multiplicatus ſemiſſis cum ſenario areæ faciat quadratum. Ponamus denuò latus alterum 1 N, alterum 1. fit ut quæramus 4 Q † 17 N † 4, æqualia quadrato. Omnia quater. fit 1 Q † 4 N † 4, ęqualia quadrato, & 1 Q † 1 æqualis. exceſſus 14 N, menſura 2 N per 7. huius exceſſus ſemiſſis fit 1 Q † $12\frac{1}{4}$ † 7 N, quod æquatur 1 Q † 1. fit 1 N, 45. Erit ergo triangulum 40, 1, 53. & omnia per 28. fit triangulũ 45 N, 28 N, 53 N. & fit area cũ ſumma duorũ iſtorũ laterum. 630 Q † 73 N æquale 6. ac Numerus exſiſtit rationalis. ad propoſita.

16. Omnium quadrans reduuia.

IX. Inueniatur triangulũ rectangulũ, cuius ab area ſi duorũ laterũ quę rectũ faciũt angulũ auferatur ſumma, datũ numerũ exhibeat. is aũt ſit 6. Rurſus ſtatuemus triangulũ qui quæritur datũ ſpecie. Fit ut quærendũ ſit triangulũ rectangulũ, ut ſummæ dictorũ laterũ ſemiſſi in ſe ducto, ei quod fit ſi 6 adimas areæ quadratũ fiat. Hoc iam antè eſt demonſtratum, & eſt 28.45.53. Pono itaq; latera in Numeris. fiunt rurſus 630 Q — 73 N æqualia 6. unde inuenitur 1 N, 6. Iam ad poſita hoc accommodemus.

X. Inueniamus triangulum rectangulũ, cuius area latere altero & hypotenuſa adſumtis, numerũ propoſitũ exhibeat. Detur 4. Rurſus triangulũ illud ſtatuemus datũ in ſpecie. Requirit̃ ꝓinde, ut triangulũ excogitemus rectangulũ, cuius areæ quadruplũ ad ſummã hypotenuſæ & alterius lateris ſi adiungatur, huius collecti ſemiſſis in ſe ductus, quadratũ cõficiat. Eſt aũt demonſtratum, latera eſſe 28.45.53. Hæc N notata pono. fiunt 630 Q —— 81 æqualia 4. fitq́; 1 N 6. ad poſitiones, &c.

XI. Inuenito triangulum rectangulum, cuius areæ ſi addatur hypotenuſa & laterum reliquorum unũ, datum numerũ ſumma repræſentet. Eſto is 4. Rurſum conſtituemus triangulũ illũ datũ ſpecie. & reliquũ eſt, ut indagemus triangulũ rectangulũ, cuius areæ quadruplũ ad ſummam dictorum laterũ ſi adijcias, ſemiſſis collecti in ſeipſum multiplicatus Q Q 1, C 4, Q 6, N 4, 1. At 111, 11, areę 1 Q Q, 12 Q, 8 N. Itaque oporque oportebit quærere 4 Q Q, 8 C, 18 Q, 12 N, 1. æquales quadrato, cuius latus ſit 6 N † 1 —— 1 Q. & ſit Numerus 4.5. Fingitur ergo triangulus à 9. & omnia quinquies fingentur. Rurſum tertiũ unũ (al. lectio, ab) 2 & 5. & ſumens minorẽ ſimilium, pono eum in Numeris. fiunt 28 N, 45 N, 53 N. fiunt area cũ ſumma laterũ dictorũ 630 Q † 81, æquale 4. & 1 N ſit 4. ad poſita.

XII. Inuenire triangulũ rectangulũ, ut & qui eſt in primo ipſum latus, ſit quadratus: * & præterea qui eſt areæ, cũ minore latere faciat quadratũ. Fingatur triangulus 1, 2 N. & ſupponatur maius latus factũ ex duplo eius, quem ipſi multiplicato uno in alterũ componũt. Oportet ergo inuenire duos numeros, quorum multiplicatione qui cōponitur, ſemiſſis ſit quadrati: & exceſſus dupli huius ſemiſſis, ſupra exceſſum quadratorũ qui ab ijs fiũt, faciat quadratũ. Hoc aũt in quibuſuis duobus numeris, ſi maior ſit minoris duplus. Reſtat ut quæramus aream trianguli, cũ minore laterũ facit quadratum. Fit aũt area huius, $4\frac{1}{2}$, à Q Q qui fit à numero. Itaq; ei ipſum latus ex tribus eũ qui fit à minore quadratũ. Et omnia per quadratũ à minore. Quatenus ergo numerũ aliquẽ, ita ut etiã quadrati qui ab ijs fiunt cũ tribus unitatibus faciant quadratũ. Eſt aũt unitas, & alij infiniti numeri. Ergo triangulus quem quærimus, effingetur ab 1 & 2.

XIII. Datis duob. numeris, quorũ ſumma quadratũ conficit: infiniti inuenientur quadrati, quorũ quilibet multiplicatus in alterum, altero ad prodnctũ adiecto quadratũ conflet. Numeri ſunto 3 & 6. & inueniendus ſit quadratus, qui per 3 multiplicetur, productumq́; 6 augeatur, atq; ita quadratus fiat. Sit quadratus ille 1 Q † 2 N † 1. fiunt multiplicatione, (& 6 additis) 3 Q † 6 N † 9 æquales quadrato. huiusq́; ſolutiones ſunt infinitæ, quia unitates habent latus quadratũ. Aequetur ſanè quadrato lateris 3 —— 3 N; fit 1 N, 4. latus ergo quadrati erit 5. ſed & alij innumeri inueniẽtur.

XIIII. Inueniatur triangulũ rectangulum, cuius area ſi augeatur utroq; laterum, fiat quadratus. Statuatur triangulũ datũ in ſpecie 5 N, 12 N, 13 N, fiunt 1 Q † 12 N æquales quadrato. & 10 Q † 5 N æquales quadrato. & æquetur Quadrato 36. fit 1 N, 1. & cùm 1 N ſit 2, oportebit ut etiã 1 Q † 5 N ſit quadratus. at non eſt. Itaq; eò compellimur, ut opus ſit inueniri quadratũ quendam, qui detractis 30, & reſiduo per 12 diuiſo quotientem edat, qui in ſe ipſum ducatur: & ita 30 ſumtus, ubi adiecerit ſibi numerum qui fit ab inuento numero, faciat quadratum. Eſto qui quæritur ut faciat quadratum, 1 Q, & numerus 12 denominatione partis 1 Q —— 3. Quadratus fit 144 denominatione partis, 1 Q Q —— 60. hæc tricies cũ quintãte ſuo fiunt 60 Q † 4320 ſub denominatione partis 1 Q Q —— 60 Q. & eſt pars quadratus. oportebit ergo 60 Q † 22560 eſſe quadratum. Eſt autem 60 ex quadrato quodam eum qui potentia ſexagies factum, & auctum unitatibus 22508, & facientem quadratũ. Si igitur minorem ipſi rectangulo conſtituamus 60 cum 22502 facientem quadratũ, ſoluimus quæſitũ. Fit autem 60 ex eo quod fit ex laterib. circa rectũ, uno in alterum ducto. At 22308 è ſolido continetur. Ex maiore continentium angulum & alterius exceſſu & area. Eoq́; redit res, ut quærendum ſit triangulũ rectangulũ, ut qui fit ex laterib. rectum facientibus, adſcito ſolido qui componitur ex maiore laterum, horũ interuallo, & area, faciat quadratum. Quod ſi conſtituamus maius latus quadratũ numerũ, omnia ad id comparabimus. quæremus minus latus, cũ eo quod facit ipſe ductus in laterũ interuallũ, quadratũ. Relinquitur, ut inueniamus duos numeros, areæ & interualli laterũ, & quæramus quadratũ, qui in unũ datũ multiplicatus quadratum faciat. Hæc aũt lemmata ſuprà ſunt demonſtrata. & eſt rectangulum 3, 4, 5. Statuo id in Numeris, ſitq́; ut quæramus 6 Q † 4 N æquales quadrato. & 6 Q † 3 N æquales quadrato. & rurſum ſi remittamus maiorem æqualitatem, fit 1 N, 4 in 1 —— 6. ergo Quadratus fit 16 in unitatib. Q Q 1 † 36 —— 12 Q. Erit ergo 6 Q † 3 N, fiunt 12 Q † 24 denominatione partis 1 Q Q † 30 —— 12 Q, 24. debent quadratum, qui ſæpe in minore datum adſciſcens numerum maiorem facit quadratum. Eſt autem 25. ergo 1 Q fit 25. ergo 1 N erit 5. Quærentes igitur 6 Q † 4 N æquare, facimus æquales Quadratos 25. & fit numerus datus. Erit ergo triangulum 12.16.20. & conſtat.

Inuenire triangulum, ut areæ eius numerus detracta laterũ ſumma quadratum relinquat.

relinquat. Rurſum ſi conſtituamus, id datū in ſpecie, ut in præcedente, eò rediјt res, ut quæri oporteat triangulū rectangulū ſimilē huic, 3, 4, 5. Ponatur in Numeris, 3 N, 4 N, 5 N. & 6 Q — 4 N æquantur quadrato. Et ſtatuamus hunc minorem quàm 6 Q. uenit 1 N 4, ſub ratione partis interualli quod eſt inter quadratum quendam. & ſi ſtatuamus quadratū 1 Q, fit tanto exſtante Numero 6 Q Q — 3 N facit æqualia quadrato. Et 6 Q † 96 quidē ſub ratione partis 1 Q Q † 36 — 12 Q. Interualli aūt fit 12 ſub ratione partis 6 Q Q — 1 Q, hoc eſt 72 — 12 Q eiuſdē partis ſub nomine. Quæ ſi tollamus à 36 ſub eiuſdē partis ratione: ſuperſunt 12 Q denominatæ à parte 1 Q Q † 36 — 12 Q. & pars eſt quadratus. ergo etiā 12 Q † 24 æquatur quadrato. & 1 N, eſt 1. Statuo 6 Q — 4 N æqualia 1 Q. fit 1 N, 4. latera ergo eius qui quæritur trianguli erunt 12, 16, unitates 4. & ſi nolis uti unitate, ſtatue minori 1 N † 1. itaq; 3 Q † 6 ualebūt 3 Q † 6 N † 9, eaq́; æqualia quadrato facere in procliui eſt. Et inuenietur N nō maior quàm 13, * autem, numerus 1 N † 1. Erit itaq; 1 N non tantum 22. & eius quadratus ſublatus à 6, rationalem relinquit numerum.

XV. Inueniatur triangulū rectangulū, ut numerus areæ tā hypotenuſæ quàm alterius lateris numero ſubtracto, quadratū relinquat. Sit triangulū datum ſpecie, 3 N, 4 N, 5 N. Rurſum quærēdū eſt 6 Q — 5 N æqualia quadrato. & 6 Q — 3 æqualia quadrato. Heic quidem 1 N fit 3 ſub ratione partis 6 — 1 Q. atq; hoc inuēto, 6 Q fiunt 54 ſub ratione partis 1 Q Q † 36 — 12 Q. Et oportet à 54 ſub ratione partis 1 Q Q † 36 — 12 Q. erūt ergo 90 — 15 Q denominatæ ab eadē parte, & reliqua æqualia facere quadrato. reſtant autem 15 Q — 36 Q ſub ratione partis 1 Q Q † 36 — 12 Q, æqualia quadrato. Pars aūt eſt quadratus. ergo etiā 15 Q — 36 quadrato æquātur. atq; hæc quidē impoſſibilis eſt æquatio: quia 15 in duos diuiditur quadratos. Nō omnino aūt impoſſibile eſt quod initio erat ꝓpoſitū. Oportet igitur determinare de quadrato. Facti ſunt enim 15 Q è quodā quadrato minore, quàm quod fit area multiplicata in hypotenuſam & unū laterū. at 36 quæ deſunt ex ſolido quē cōponunt area, unū latus, & interuallum inter hoc & hypotenuſam. Eò itaq; deducta eſt res, ut priùs oporteat inueniri triangulū rectangulū, & quadratū numerū minorē areæ numero, ut quadratus multiplicatus multā in hypotenuſam & unā laterū, ſolidas cōtenti ex area & dicto latere, & exceſſu hypotenuſæ ſupra illud latus factū eſſe ex duplo eorū qui fit ex ipſis. Omnia cōparemus cū interuallo dicto. Rurſus quæremus aliū quadratum multā in hypotenuſam & unū laterū, areæ in primā laterū exceſſus quadratum. Et ſi ſtatuamus eos qui triangulū effingūt ſimiles eſſe plano: diſſoluemus quęſtionē. Fingatur triangulus à 4 & 1. Quadratus aūt, ut minor ſit numero areæ, eſto 36, triangulū uerò effictū in Numeris ſtatuo 8 N, 15 N, 17 N. & fit numerus areæ, abiecto uno laterū, 60 Q — 8 N. hæc æquātur 36 Q. fit 1 N, 3. ad poſita. fit triangulus 8, 15, 17, & cōſtat.

XVI. Si dētur duo numeri, & in alterū eorū ducatur quadratus, alteroq́; de ꝓducto ſubtracto relinquatur quadratus: inueniet̃ etiā alius maior quadratus, ꝙ antè ſumtus fuerat, qui hoc idē præſtet. Sint numeri 3 & 11. Et primùm quadratus aliquis, utpote 25, multiplicet̃ in 3. à ꝓducto ſubducatur 11, relinquitur 64, quadratus lateris 8. Quæremus aliū quadratū, ꝗ maior ſit quàm 25, & tamen idē poſſit. Latus eius eſto 1 N † 5. huius quadratus 1 Q † 10 N † 25. Huius triplū, demto 11, 3 Q † 30 N † 64 ęquetur quadrato. ſit huius latus 8 — 2 N. Fit 1 N, 62. ergo latus eſt 67. quadratus 4489. qui poſtulata facit.

XYLANDRI.

Erant & hæc deprauata, ut uides, in Græco, ita tamē ut corrigi poſſint de noſtra uerſione. Eſt aūt theorema nō iniucundū: ſiue problema malis dicere. Exemplū quātum uoles, habebis: ſemper numero per quadratum multiplicato, & de producto abiectis tot unitatibus, quibus illud quadratum ſuperas, inq́; numerum, qui alter datorum ſit, contractis.

XVII. Inueniamus triangulū rectangulū, ut areæ eius numerus tā hypotenuſæ q̃ alterius lateris numero detracto relinquat quadratū. Hoc triangulū ſi ſtatuamus datū ſpecie, rurſum cogimur determinare, & quærere triangulū rectangulū, atq; numerū quadratū, maiorē areæ numero. ut quadratus in hypotenuſam multiplicatus & unū latus quæſiti rectāguli: ſolidi, qui cōtinet̃ area, dicto latere, & exceſſu hypotenuſæ ſuper iſtud, quadrati *. Fingat̃ itaq; triangulus ab 4 & 1. quadratus aūt 36. & non

Idem cum 15.

eſt maior numero areæ. Habent igit̃ duos numeros, maiorē qui fit ex interuallo & uno laterū: hoc eſt 136. reliquū utiq; qui continet̃ ſolidus ab area & uno latere, & interuallo iā nūcupato, 4320. Quādo igitur quadratus aliquis, unitatū 36, multiplicatus in 135, & multatus hoc, 4320, quadratū facit: quærimus aūt quadratū maius eſſe q̃ 36. ſi ergo ſtatuamus 1 Q † 12 N † 36, & ſubſequamur antè demonſtratā demonſtrationē: inueniemus infinitos quadratos qui ſatisfaciunt quæſtioni. quorum unus ſit 676. Ponamus igitur triangulum 8 N, 15 N, 17 N. fiunt 60 Q † 8 N æquales 676. Q. & fit 1 N, 77. ad poſitiones.

πολλάκις ſæpè.

6.8. Eucl. XIIX. Inueniendū eſt triāgulū rectangulū, ut acutis eius angulis in æqualia diſciſſis, numerus angulū ſecātis ſit rationalis. Sit quæ angulū in æquales diuidit partes, 5 N. una aūt ſectio baſis 3 N; ergo cathetus erit 4 N. Statuatur ergo baſis initio ſumta unitatū quotlibet, dummodo triens eius numeri haberi poſſit. Ac ſit 3. Itaq; ergo reliqua ſectio baſis, 3—3 N. Sed quoniā angulus in duos ſemiſſes eſt ſectus, & cathetus ad abſciſſam partē eſt ſeſquitertia: etiā hypotenuſa ad reliquū baſis erit ſeſquitertia. & ſtatutū eſt reliquū ſegmentum 3—3 N. ergo hypotenuſa—4 † 4 N. Reſtat ut huius quadratus, nempe 16 Q † 16—32 N æquet̃ laterū quadratis, uidelicet 16 Q † 9. Fit 1 N, 7. Reliqua ſunt euidētia. Et ſi omnia per 32 reducam: erit ſanè cathetus 28, baſis 96. hypotenuſa 100. & quæ angulum ſecat, 35.

Emendabile. XIX. Inueniamus triangulū rectāgulū, ut areæ numerus cū hypotenuſæ numero faciat quadratū. circūferentia aūt eius, octo cubos. Sit area 1 N. hypotenuſa numerus quadratus, priuatus 1 N. & ſit 16—1 N. Et cū poſuerimus areā 1 N: ergo qui fit ex laterib. circa rectū, fit 2 N. At 2 N cōtinent̃ ſub 1 N & 2. Ergo ſi alterū laterū ſtatuat̃ 1 N, erit alterū 2. & circūferētia erit 18. is uerò cubus nō eſt. At n. 18 ort⁹ eſt è quodā quadrato & unitatib. duabus. Inuēto opus eſt itaq; aliquo quadrato, qui binario adiecto cubus fiat. Statuat̃ latus quadrati 1 N † 1. & cubi latus 1 N—1 fit quadratus 1 Q † 2 N † 1. cubus aūt 10 N—3 Q † 1. Volo aūt cubū quadrato præſtare unitatib. 2. ergo quadratus cū binario, hoc eſt 1 Q † 2 N † 3 æquatur 1 C † 1 N. unde 1 N inuenit̃ 4. Erit ergo latus quadrati, 5. cubi, 3. & quadratus 25, cubus 27. Tranſmuto itaq; rectangulū, & aream eius pono 1 N, hypotenuſam 25—1: manet etiam baſis 2, cathetus 1 N. Reſtat ut hypotenuſæ quadratus æquetur quadratis reliquorum laterum. Fit 1 Q † 625—50, quod æquet̃ 1 Q † 4. Ergo 1 N eſt 251. ad poſitiones, & conſtat.

XX. Inuenire triangulū rectangulū, cuius areæ ſi hypotenuſa addat̃, fiat cubus. circūferētia aūt quadrato exprimat̃ numero. Si aūt, perinde ut in præcedēte, areæ conſtituamus 1 N, hypotenuſæ numerū aliquē cubicū—1 N, eò uenitur, ut quæſtio ſit, ecquis cubus binario auctus fiat quadratus. Statuatur cubi latus 1 N—1. fit cubus 1 C † 3 N † 1—3 Q. erit quadratus lateris 1 N. & fit 1 N, $24\frac{1}{4}$. erit ergo latus cubi 17. & ipſe proinde erit 4913. Pono rurſum aream 1 N, hypotenuſam 4913—1 N. ſed & baſin habemus 2, cathetū 1 N. Et ſi ęquemus hypotenuſę quadratum cū reliquorum quadratis laterum, rationalem depræhendemus numerum.

XXI. Inueniatur rectangulū triangulum, cuius areæ numero lateris numerus adiectus, cōficiat quadratū: & circūferentiæ numerus ſit cubus. Statuamus rectangulū ab aliquo numero indefinito impare. ſit 2 N † 1. Erit ergo cathetus 2 N † 1. Baſis 2 Q † 2 N. hypotenuſa 2 Q † 2 N † 1. Reſtat ut circūferētia ſit cubus. & area cū altero laterū faciat quadratū. Fit circūferentia 4 Q † 6 N † 2 Q æqualis cubo. Et eſt cōpoſitus numerus. cōtinet̃ enim ab 4 N & 2, & 1 N atq; 1. Si ergo ſingula latera partiamur per 1 N † 1, habebimus circūferentiā eorū 4 N † 2. ſitq; cubus. Reſtat ut area cū altero laterū, faciat quadratū. Eſt aūt areæ numerus 2 C † 3 Q † 1 N, ſub ratiōe partis 1 Q † 2 † 1. & ſi faciamus hæc duo ab eadē parte, fiūt 2 C † 10 † 4 N † 1 denominata à parte 2 N † 1. & habemus cōmunem partē 1 Q † 2 N † 1, ita ut duo hæc cōpoſita faciāt 2 N † 1 æquale quadrato. Quęrebamus aūt etiam 4 N † 2 ęquales cubo. Et res in eo ſita eſt, ut inueniamus cubum quadrati duplum. Eſt autem 8 reſpectu 4. Eſto 4 N † 2 † 8, & fit 1 N, 1. erit rectangulum 8. 15. 17. & conſtat.

XXII. Inuenire triāgulū rectāgulū, cuius areę numero ſi addat̃ alteri lateris numerus: fiat cubus. ſed & circūferētiā cubus numer⁹ notet. Si rurſus eodē utamur ductu,

quo

quo in præcedente,id tandem poſtulabitur,ut 4 N † 2 ęquemus quadrato. & 2 N † 1 æquantur 2 C.fit ut quæramus quadratum æqualẽ duobus cubis.ſunt 16 & 8. & rurſum æquamus 6 † 4 N † 2.& fit Numerus $3\frac{1}{2}$.Erit adhuc rectangulum 13.63.65.

XXIII. Inueniatur triãgulũ rectangulũ,cuius area numero exprimat̃ quadrato, & ſi ei adijciat̃ numerus areæ,fiat quadratus. Fingamus triangulũ ab 1 N † 1.fiet unũ laterũ 2 N,alterũ 1 Q † 1.hypotenuſa aũt 1 Q.Imponit̃ hoc nobis,ut quæramus æqualitatẽ inter 2 Q † 2 N & quadratũ, & 1 C † 2 Q † 1 N ęqualia cubo.Atq; hoc quidẽ,2 Q † 2 N,cõficere quadratũ,facile eſt.Nã ſi binariũ diuiſeris in quadratũ,diuidente binario,inuenies N eſſe 1.Oportet aũt talẽ inueniri,ut 1 ipſius cubus & ſemiſſis, quadratos ab ipſis & ipſam ſummã faciat cubũ.Eſt ergo 1 N ex binario diuiſo in 1 Q—2. fit cubus,8.denominatione partis ab 1 Q—2. & duo ab ijs quadrati,fiunt 8,ſub ratiõe partis ab 1 Q—2. quadratus.Ipſe aũt 2,ſub ratione partis 1 Q—2. & omnia habẽt eandẽ partis denominationẽ.fiunt Q Q 2 ſub denominata parte ab 1 Q—2,C * & eſt pars cubica.Eſto Q Q æquale 1 C. & omnia ad cubũ,fiunt 2 N æquales.Et ſi conſtituamus æqualia unitatibus cubicis,inuenit̃ 1 N eſſe cubi alicuius ſemiſſis.Eſto cubus unitatũ 8.Fit ergo ſemiſſis eius 4,quadratus.fit 49.& oportet hinc tollere unitatẽ.quãdoquidẽ alterũ laterũ eſt 1 Q—1.Et res eò deducit̃, ut inueniri opus ſit cubũ, ut quadrãs quadrati qui ab eo fit,maior ſit q̃ $2\frac{1}{2}$,minor quaternario. Et ſi ponamus CC,1.quæremus 4 CC,maiores quidẽ q̃ 2,minores aũt q̃ 4. Ergo cubus maior eſt q̃ 8,minor aũt q̃ 20.Eſt aũt 729. Ergo cubus 27 & 27.Statuo itaq; 2 N æquales 27.& fit 1 N,27.1 Q,729. Et ſi binariũ diuidamus in eum,qui hoc minor eſt unitate,inueniemus Numerũ eſſe 512. & habemus in quadrato qui ab eo fit quadrato utiq; unitatẽ.

XXIV. Inueniat̃ triangulus rectãgulus,cuius areę numerus ſit cubus.& adſcito numero areæ,faciat quadratũ. Primùm circũſpicere oportet duos datos numeros inuenire triangulũ rectangulũ,ut circũferentia quidẽ æquet̃ dato numero. Area aũt, alteri.Sint duo numeri,12 & 7.& imperatũ,quorũ ille circũferentiã,hic aream ſignificet.Ergo quẽ cõponunt multiplicãdo latera rectũ includẽtia,erit 14.eſto ſi conſtituamus latus ** 1 N,erit alterũ 14 N.At circũferentia eſt 12.Ergo hypotenuſa erit 12—1 N.& quatuor quod eſt ab eorũ qui ab ipſo quadratorũ,ſicut eſt 1 Q.196 Q † 172—24 N.N 336.æquare ijs qui fiunt in circa rectũ angulũ quadratorũ.hoc eſt uni Q,Quadratis 196.Defectus cõmuniter addatur, & à ſimilibus ſimilia. & omnia ad numeros.fit 170 N,ipſe N,24 Q † 336.Et nõ undequaq; poſſibile eſt:niſi dimidiũ Numerorũ in ſeipſum,detractis Quadratis,in unitates (ductũ) faciat quadratũ. Et ſunt numeri quidẽ ex eo qđ fit è circũferentia & quadrilatero qđ eſt in area. Quadrata aũt in unitates ex eo qđ fit octies à circũferentia in areã.Adeò ut huiuſmodi dentur numeri.Ac fit ſanè numerus areę 1 N.circumferẽtię autem numerus ſimul & cubus & quadratus:nimirũ 64.Atq; ut cõſtituat̃ triangulũ: oportet quadrati, qui fit à 64, itẽq; 4 Numerorũ ſemiſſe capto,inde auferre octuplũ circũferentiæ, uſq; ad 1 N. ac, qđ reliquũ eſt,quęrere ęquale quadrato.Fiũt 4 Q † 419 | | 20304—22576.& omniũ quadrãs.fiunt 1 Q | | † 10476—5624 N ęqualia quadrato.Porrò aũt & N † 64 ęquatur quadrato.Et exequent̃ Numeri,& exceſſus, & dimẽſio. & reliqua ſunt in prõtu.

XXV. Inuenire triangulũ rectangulũ, ut qui fit ab hypotenuſa,quadratus ſit,aliâs quadrilaterus regularis.& 80.diuiſus p unũ laterũ,faciat cubũ & latus.Vnũ latus ſtatuat̃ 1 N.alterũ 1 Q.& manet ꝙ fit ab hypotenuſa,ut latere quadrati. Reſtat ut 1 Q Q, æquemus quadrato.Diuiſis omnibus per Q:fit 1 Q † 1 N ęqualis quadrato,cuius latus ſit 1 N—2. Ergo 1 N fit 3.& reliqua ſunt manifeſta.

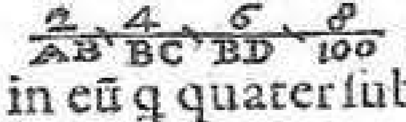
XXVI. Inuenire triangulũ rectangulũ, ut unius lateris numerus ſit cubicus.alterũ cubus extra latus.hypotenuſa aũt cubus & latus.Eſto hypotenuſa 1 C † 1 N. laterũ alterũ 1 C—1 N.reliquũ ergo latus erit 2 Q.Reſtat ut 2 Q æquemus 1 C.isq; fit unitas. fit N,2.Ad poſita erit triangulus.6.8.10.Et manet.

DIOPHANTI ALEXANDRINI DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER.

1 SI ab ternario numeri progrediantur,ſemper unitate, præcedentẽ ſuperãte po-

ſteriore numeri fiunt polygõi ſiue multãguli.& tot quiſq; habet angulos,quot conſtat ipſe unitatibus:latusq́; eius eſt proximus ab unitate numerus , puta 2. Eſt autẽ 3 triangulus,4 quadrãgulus quadratus,5 quinquãgulus : & ſic deinceps. Cum aũt de quadratis euidẽs ſit,ita eos cõſtitui, qᵈ naſcãtur numeri alicuius in ſeipſum multiplicatione:ꝓbatũ eſt,quẽuis multãgulũ multiplicatũ aliquo numero ſecũdũ ꝓportionẽ laterũ anguli eius, & adſumentẽ quadratũ quendã 81 iuxta proportionẽ multitudinis angulorũ eius uideri quadratũ.Atq; hoc nos demõſtrabimus, oſtẽdentes qũo dato latere inueniat̃ qui poſcit̃ multãgulus : & quo pacto dati multãguli latus depræhendatur.Priùs autem ea demonſtrabimus,quæ ad hanc rem ſumuntur.

II. Si tres numeri ſint ꝓgreſſionis arithmeticæ, octuplũ cõpoſiti ex maximo in mediũ,addito minimi quadrato fit quadratus numerus:cuius latus ęquat̃ cõpoſito ex maximo,& medij duplo.Sint tres numeri eodẽ interuallo ſe cõſequẽtes,a b,b c,c d. Dẽmõſtrandũ eſt id qᵈ octies fit ab a b in b c * & rurſum diuiditur quoq; eorũ bifariã,in eũ qui quater ab a b in c b, & in eũ qui quater b c quadratũ:hoc eſt qui quater à b c quadratus.& in eũ quidẽ qui quater ab a c c b,hoc eſt ꝗ quater à b c c d, æqualis fit à c huic c d,cũ eo qui à d b,fit quadratus ꝗ ab a b. At b eũ qui quater ab a c c b. mixtus uni eorũ ꝗ ſunt quater à c b , facit eũ ꝗ quater à b c.& quærit̃ qũo quadratus ab a b,& qui quater ab a b b c,& qui quater à b c,cõpoſiti faciant quadratũ.Si igitur ponamus ipſi b c æqualẽ a e, traijciemus eum ꝗ quater ſub a b b c, in eũ ꝗ quater ſub b a a e,ꝗ mixtus ei ꝗ quater à b c,hoc eſt quadrato a e,faciet ęqualẽ quadruplo eius ꝗ ab b e e a,ꝗ mixtus quadrato ab a b,fit æqualis ei qui à b e e a,ut quadrato ab una deſcripto linea.At b e e a æquant̃ a b & duobus e a, hoc eſt duobꝰ b c,ꝙ fuit demonſtrandũ.



XYLANDRI.

Aequatur cõpoſito.) *Intellige additionẽ.Numeri 2.4.6.Maximus in mediũ 24.eius octuplũ 192,cũ 4,ut quadrato minimi,fit 196.quadratus lateris 14. ſed duplũ quoq; medij,8,cũ maximo 6,tãtundẽ facit. Notandũ eſt,idẽ latus cõfici,ſi ſummã numerorũ , interuallo progreſſiõis augeas. Numeri 2.9.16. interuallũ 7,ſumma terminorũ 27. cũ interuallo 34. huius quadratus 1156.Maximus in mediũ facit 144.eius octuplũ 1152. adde 4,quadratũ primi,habes 1156 Porrò bis 9,cũ 16, itidẽ 34 cõſtituũt.Aliud.5.18.31. Octies 18 ſunt 144.per 31, fiunt 4464. adde 25, quadratũ minimi:habes 4489 quadratũ,cuius latus 67 Duplum medij 36,addito 31 maximo, tantundem efficit.Iam ſumma omnium 54.interuallum 13,ei additum,67 conſtat.*

III. Si ſint numeri quotcũq; arithmeticæ progreſſionis:interuallũ maximi & minimi eã habẽt rationẽ,q̃ terminorũ numero unitate multato exprimit̃. Sint ẽm quotcunq; numeri,a b,b c,c d,b e,interuallis æqualibus. demõſtrãdũ eſt interuallũ inter a b & b c,multiplex eſſe interualli a b & b c,numero ꝗ unitate minor ſit q̃ 4. tot enim ſunt a b,b c,c d,b e.Cùm enim ij ęqualib.interuallis progrediantur:ergo a c,c d, d e, ſunt æquales. ergo e a ad a c multiplex eſt , iuxta numerũ terminorũ a c,c d,d e.at is unitate minor eſt numero terminorũ propoſitorũ.ergo etiã e a ad a c multiplex eſt numero unitate minore q̃ propoſitorũ eſt terminorũ numerus. Eſt autem a e interuallum maximi & minimi:& a c unicum interuallum.

XYLANDRI.

Res ita habet. Septẽ numeri eodẽ interuallo ſe cõſequẽtes exẽpli gratia ponãtur 3.7.11.15.19.23.27.interuallũ 4.Inter maximũ & minimũ, 24,ſeſcuplus ad 4.nã 1 de 7 (ut terminorũ numero) ſublato,manet 6,proportionis index. ſint decem termini,5.8.11.14.17.20.23.26.29.32.Interuallũ 3 nouies (nã decẽ ſunt termini) 27. tãto 32 ſuperat minimũ 5.Magnus eſt uſus huius theorematis in progreſſionibus arithmeticis tractandis. Verbigratia.Sunt 581 numeri progreſſionis arithmeticę,incremẽto 28,quorũ minimus 19. quęritur eorũ ſumma. Quis neſcit,ultimo opus eſſe,heic maximo,ad ſummã indagandam? & ſequenti theoremate hoc demonſtratur. Sed quantę eſt moleſtię alios adhuc 580 numeros deſcribere,identidem 28 additis,dum ad ultimum peruenias? Nos ita multiplicabimus 28 per 580 , fiunt 16240. id adijciemus minimo 19,erit ultimus 16259. Quod ſi ita propoſitũ fuiſſet,numeros progreſſionis arithmeticę 56 dari, interuallũ 15,maximũ 857,& quęri minimũ ac ſummã,15 ꝑ 55 multiplicaſſemus, et ꝓducto 825 de maximo ſublato,minimũ reperiſſemus 32.Hoc nimirũ eſt magnis ſuperſedere moleſtijs, iiſq; ridiculis: cũm ad ſummã inueniendã ſufficiat extremos & terminorũ numerum habere.Proximè ſe-

Compẽdium progreſsionis arithmeticæ.

quentes canonem ſummæ progreſsionis arithmeticæ terminorum concipiendæ demonſtrant, de quo alibi actum eſt.

IV. Si ſint quotcunq; numeri progreſsionis arithmeticæ, ſumma maximi & minimi multiplicata in numerũ terminorũ, duplum ſummæ omnium terminorum producent numerum. Sint numeri eodem incremento progredientes quotcunq;, puta a, b, c, d, e, f. demonſtrandum eſt ſummam a f ductam in numerum terminorũ a, b, c, d, e, f, efficere duplum numerum ſummæ omnium iſtorum terminorum. Numerus ergo terminorũ aut par erit, aut impar. Eſto priore loco par: & quot ſunt termini, tot unitatib. conſtet numerus g h. Diuidatur in duas æquales partes in *k*. & g *k* diuidatur in ſuas unitates per l, m. Et quoniam quãto maior eſt f q̃ d, tanto & c q̃ a: ergo ſimul f a æquabitur iunctis c d. at ſimul f a ęquatur quòd ſub utroq; f a & g l; ergo etiam c d æquatur ijſdẽ. Ob hæc eadem etiã e b æqualis ambob. z a & g *k*. Ergo etiã compoſitus ex a b c d e f æquatur ei qui ſub ambob. f a & g k: at quod ſub ambob. f a & g k duplus eſt qui ſub ambobus f a & g h. ergo etiã cõpoſiti ex a b c d e f duplus eſt qui ſub ambob. f a & g h, hoc eſt numeri terminorũ a b c d e f. ꝙ fuit demõſtrãdũ.

V. His ijſdẽ poſitis, ſint termini a b c d e, numero terminorũ impare, & numerus f g cõſtet tot unitatib. quot ſunt termini. Eritq; impar. Ponatur in eo unitas ad f h, & g h ſecetur bifariam in k, diuidaturq; h k in ſuas unitates in l. Et quoniam quo c ſuperatur ab e, eodem a à c: iuncti ergo e a dupli ſunt ad c, hoc eſt ad id quod ſub c & c k. Ob eadem ſcilicet etiam iuncti b d duplus ad id quod ſub c & l & h. ergo a e b d dupli ſunt eius qui ſub c & h k. At g h duplus eſt ad h k: itaq; etiam a e b d æquales ſunt ei qui ſub c & h g. Eſt aũt etiam c æqualis ei qui ſub c & h f. itaq; cõpoſitus ex a b c d e æqualis ei qui ſub c & f g. At huius duplus eſt compoſitus ex iunctis a e & f g. itaq; etiam coniuncti ex a b c d e duplus erit qui ſub ambobus a e & f g, hoc eſt multitudine expoſitorum. quod fuit demonſtrandum.

VI. Si ſint ab unitate quotquot numeri eodẽ interuallo ſeſe cõſequẽtes: ſumma omniũ multiplicata in octuplũ interualli, ſi ꝓducto adijciatur quadratus numeri ꝗ ab interuallo duab. ſuperatur unitatib. quadratus numerus exſiſtit: cuius latus binario multatũ, multiplex erit ad interuallũ, totiesq; id cõtinebit, ut ſi rationis numero unitas adijciatur, numerus fiat duplus ad numerũ terminorũ, unitate etiã in ijs numerata. Sint enim ab unitate numeri eodẽ interuallo progredientes a b c d e f, dico id fieri quod eſt propoſitum. Quot enim ſunt progreſsionis termini, cũ unitate, tot unitatib. cõſtet numerus g h. Et quoniã interuallũ a b multiplex eſt iuxta unitate minorẽ ipſo g h: ſi ergo ponamus unũquenq; a c e l g m. habebimus l f ad k b multiplicem, ratione numeri m h. itaq; l f æqualis eſt ei qui ſub k b m e. Et ſi ponamus δυ k g, qui eſt eorũ interuallum, quæremus an ſumma multiplicata in g ipſos k b qui eſt interuallũ ipſorũ, & adſcito ꝗ fit ab n b, ꝗ ſit binario minor interuallo, fiat quadratus: cuius latus binario multatũ, numerum exhibeat, qui ad interuallũ ipſorũ k b ſit multiplex ratione numeri cõpoſiti ex ambob. g h h m. Et quoniã ſumma ſemiſsis eſt eiꝰ. qui ſub ambob. f e, e l, & ipſo h g, atq; in eũ qui ſub l f g h, & in eũ qui bis ſub e l, g h, hoc eſt duos g h. rurſum ſumma eſt eius qui ſub l f, g h, & duo g h. Atq l f æqualis demõſtratus eſt ei qui ſub k b, m h, h g ſolido, & duo f g. Si ergo mediũ diuidamus m h in o, habebimꝰ ſummã omniũ æqualẽ ei qui fit ex k b, g h, h o ſolido, & uni g h. Quęremus itaq; an ſolidus qui fit ex k b g h h o cũ g h multiplicatus in octo k b, & adſciſcens quadratũ ab n b, fiat quadratus. Verũ ſolidus ex k b g h h o multiplicatus in unũ k b, facit eũ qui ſub g h in eũ qui à *k* b quadratũ. Itaq; etiã ſolidus ex k b g h h o multiplicatus in octo k b, facit eũ qui ſub g h h o in octo quadratos à k b, hoc eſt eũ qui octies ſub g h h o in quadratũ à k b, hoc eſt eum qui quadruplicatus eſt ſub g h h m in eũ qui à k b quadratũ adſciſcens g h in octo k b, & porrò quadratũ ab n b, fit quadratus. Atq g h multiplicatus in octo k b, facit eũ qui octies ſub g h h k. ergo uiciſsim qui quadruplicatus eſt ſub g h h m, in quadratũ à k b, cũ octies eo qui ſub g h k b, qui ab n b quadratus, fit quadratus. Diuiditur aũt qui octies ſub g h k b, in quadruplicatum ſub g m k b, & in quadruplicatũ ſub ambob. iunctis g h h m in quadratum à k b, cũ quadruplicato ſub g m k b, & quadruplicatũ ſub ambob. g h h m & k b, & qui à n b facit quadratũ. At quadruplicatus ſub g m k b æqualis eſt ei qui bis ſub n k k b, & mixtus ei qui à k b, facit eos qui ſunt à k b n b quadratos. Si ergo etiam quadruplicatus ſub h g h m in quadratum à *k* g, & quadruplicatus ſub ambobus g h h m & *k* b cum quadratis à b *k* *k* g, fit quadratus. Rurſus autem quadratus à b *k*, tranſcendit in quadratum g m ad quadratum * à *k* b, & mixtus hic quadruplicato ſub g h h m in quadratum à *k* b. Si ergo qui ab ambobus g h h m in * *k* b quadratum. & quadruplicatus ſub ambobus g h h m & *k* b cum * *k* g fit quadratus. Si ponamus ergo ei qui eſt ſub utroq; g h & *k* b æqualem numerũ o. erit etiam * utriuſq; g h h m quadratus in quadratum *k* b ipſi * ipſius n o quadrato. quod deinde oſtendetur. Si ergo qui in ipſorum o n n *k* quadrati cum quadruplicato qui ſub ambobus g h h m & *k* b fit quadratus: quadruplicatus ſub g h h m & ipſius *k* b, æqualis quadruplicatus ipſius n o: quandoquidẽ & qui ſimul ei qui ſub ambobus g h h m & *k* b numerus poſitus eſt n o. quatuor autem n o æquales ei quod bis ſub n o n *k*. binarius enim ponebatur n *k*. Si ergo & qui * ipſorum n o n *k* quadrati, cũ eo quòd bis ſub n o n *k* faciunt quadratum, faciunt autem etiam ipſum * huius o *k*, cuius latus o *k* multatũ binario n *k*, numerum n o facit, qui ipſis maior eſt, ad n b multiplex eſt ratione eius quod ſub ambobus g h h m, qui adſcita unitate ipſorum g m eſt totius expoſitæ progreſsionis.

VII. Demonſtratio eius, quod dilatum huc fuerat. Sit ambobus g h h m æqualis a. & b æquetur *k* b. ei autem quod ſub ambobus g h h m & *k* b, æquetur c. Dico quod etiam * amborum g h h m, hoc eſt * ipſius a in * ipſius *k* b, hoc eſt in * ipſius b, æquatur ei qui à c. Ponatur ipſius a b æqualis in recta, qui ſint d e e f, & ſuper eo deſcribatur quadratum d e e l, & compleatur * ut utrique. ij autem. ſic * ut * ſic d o * ergo h * medium proportionale eſt inter quadratum d h f *k*. ergo quod fit ſub d h f *k* quadratis, æquale eſt *. Et eſt hoc quidem * quod ab ambobus g h h m. At f *k* quadratum æquale eſt ei quod à *k* b, huic autem h f * ei g o. & quod ab ambobus iunctis g h h m quadratum ductum in * quadrati *k* b * ipſius n o quadratorum.

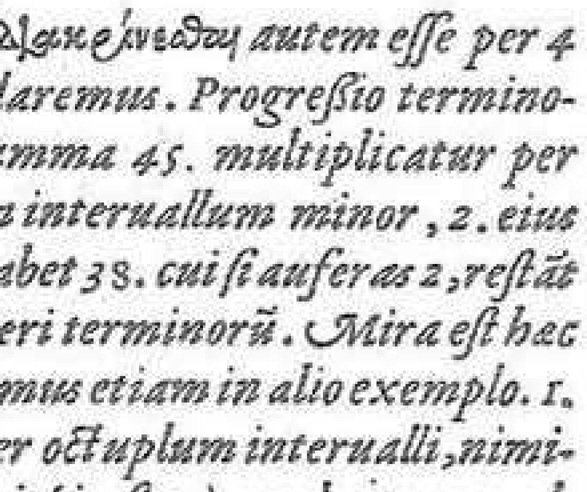
XYLANDRI.

Hæc ut inueni ita retuli, neq; libet oleum & operam perdere. Διακείνεσθαι autem eſſe per 4 multiplicari, aliâs oſtendimus. Rem tamen exemplis ſubiectis declaremus. Progreſsio terminorum (nam 1 iis annumeratur) 5 eſto 1. 5. 9. 13. 17. interuallum 4. ſumma 45. multiplicatur per 32, octuplum ſcilicet interualli, fiunt 1440. numerus binario quàm interuallum minor, 2. eius quadratum & 1440, faciunt 1444, qui eſt quadratus, & latus habet 38. cui ſi auferas 2, reſtãt 36, in quo interuallum nouies ineſt. adde 1, fiunt 10, duplum numeri terminorũ. Mira eſt hæc cùm progreſsionis arithmeticæ, tum octonarij proprietas. Exploremus etiam in alio exemplo. 1. 8. 15. 22. 29. 36. 43. 50. Interuallum 7, ſumma 204. multiplicatur per octuplum interualli, nimirum per 56. fiunt 11424. numeri binario quàm interuallum minoris (is eſt 5.) quadratus 25 addatur, fit 11449 quadratus lateris 107. aufer 2, reſtant 105, in quo interuallum præciſè ineſt quindecies. 1 & 15 ſunt 16, duplum numeri terminorum progreſsionis. ſunt enim octo. Habet & aliam octonarius proprietatem, à Plutarcho commemoratam, Platon. quæſt. IV. quod quemcunque triangulum numerum octonario multiplices, productu, unitate adſcita fit quadratus. cuius rei exemplum ſubieci.

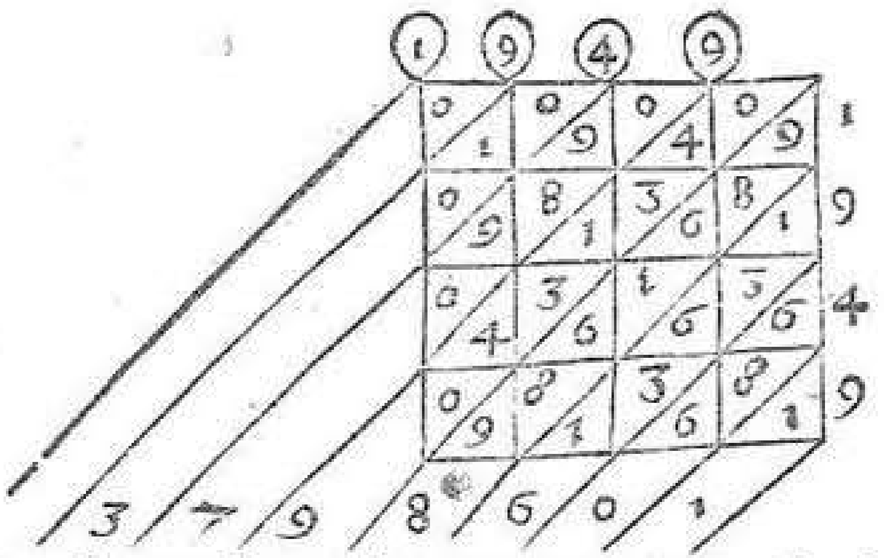
Octonarij, triãgulorum numerorũ proprietas.

Trigoni.	1	3	6	10	15	21	28,	&c.	500500.
octupli.	8	24	48	80	120	168	224,	&c.	4004000.
quadrati.	9	25	49	81	121	169	225,	&c.	4004001.
latera.	3	5	7	9	11	13	15,	&c.	2001.

Vnum adhuc theorematis Diophãtei exemplum addemus. Sint termini progreſsionis arithmeticæ, in qua unitas primus numeretur, 89. interuallum 11. Erit ergo ex præcedẽtiũ doctrina maximus 969, & ſumma omnium 43165. Octuplo interualli, hoc eſt per 88 ea multiplicetur, fiunt 3798520, adde 91 (quadratũ de 9, qui binario eſt numerus quàm interuallũ minor) habes 3793601, quadratum. Duplum numeri terminorum 178, hinc aufer unitatem, ſuperſunt 177. Ac toties oportebit numerum interualli ineſſe in numero, quẽ latus dicti quadrati duab. ſuperet uni-



peret unitatibus. Ergo 177 per 11 multiplica,habes 1947, adde 2,habes 1949 latus quadrati: quod ſiue hoc in ſe multiplicando, ſiue extrahenda è quadrato radice uerum eſſe deprahendes. Hac de conuerſione libuit monere rudiores.



IIX. Cùm ſint quæ propoſuimus, pronunciamus: Si quotcunq; numeri ab unitate exponantur in progreſsione arithmetica, ſumma eorum multangulus erit numerus. tot enim habebit angulos, quot unitates numerus interualli binario auctus:latusq́; eius erit numerus terminorum,unitate loco termini numerata. Cùm enim oſtenderimus ſummam omnium progreſsionis terminorum multiplicatam in *k* b,octonarium,& adſcito * de n b quadratum facientem * de o *k*. Sed etiam ſi aliam unitatem ponamus a o,habebimus *k* o binarium. & eſt autem etiam ſimiliter etiam *k* n binarius. erūt ergo p b,b *k*,b n ęquali interuallo inuicem ſe excedentes. Ergo g *k* ſub maximo p b,& medio b c ſumens eum qui * minimi b n quadratum facit quadratū latus habentē, compoſitum ex maximo p b,& duobus medijs,qui ſunt b *k*. Ergo etiam p b multiplicabitur in octuplum de *k* b, & adſcito * de n b quadratum æqualis eo qui fit ab ambobus, cùm p b æquale p b ipſorum *k* b. & latus abiecto binario p k,relinquet triplum de *k* b,qui tripli ſunt ad *k* b,rationem metiente ternario. At ternarius auctus duabus unitatibus,erit unitatis. Cùm ergo ſumma terminorū progreſsionis aucta unitate idem problema ſoluat p b,isq́; ſit oblatus utcunq;, & multangulus erit * * unitas:quoniam unitas eſt a p. At b numerus eſt ipſe a b,& habet latus binariū. itaq; etiam ſumma totius progreſsionis numerorum, multangulus numerus eſt, tot habens latera,quantus eſt qui binario quidem ipſius p *k* interualli eorum ipſum *k* b,& latus habet ipſum g h, qui eſt numerus terminorum, unitate etiam inter hos cenſa. Et demonſtratum eſt,qu od ab Hypſicle in definitione dicitur, Quòd ſi numerorū ſit ab unitate progreſsio arithmetica quotcūq;:interuallum ſi ponatur unitas, ſummam fore [triangulū:ſi binarius,quadratū:]ſi ternarius,quinquangulū: & angulorum multitudinem exprimi numero,qui interuallum binario excedat:latus aūt eſſe numerum terminorum,nō excluſa ex horum cenſu unitate. Itaq; quando trianguli * maiores exſiſtente interuallo fiunt,& latera ipſorum fiunt maximi expoſitorū: & eius qui ſub maximo expoſitorum,& qui unitate eum excedat, dupli ſunt ad triangulum ſignificatū. Et quoniā i b cùm ſit tot anguli quot in ipſo ſunt unitates,multiplicatus in g,eius minoris binario quàm eſt interuallū,hoc eſt in g. erit ipſum *k* b * accipient quadrato q̃ ipſe eſt minorem,hoc eſt eum * ipſius n b facit quadratū. Ea erit definitio multāgulorū, Quiuis triangulus multiplicatus per f binario minoris multitudine angulorum,& adſumēs eum qui * quaternario minoris multitudine triū, facit quaternariū. Simul ergo demonſtrata Hypſiclis definitione, & horum multangulorū:reliquum eſt ut demonſtremus,quo pacto ubi latus datur,is etiam multangulus,qui requiritur,inueniri poſsit. Habentes enim latus dati alicuius multanguli g h,& numerum angulorū eius,habemus etiam *k* b datorū. ac proinde etiā qui ſub ambobus,qui ſunt g h m & *k* b habebimus datū,qui æqualis eſt ipſi o. itaq; habebimus etiam *k* o datū,quando binarius eſt n *k*. itaq; etiam * ipſum *k* f habebimus datum. & ſi hinc ſubtrahamus ipſum * ipſius n b,qui eſt quadratus:habebimus etiam reliquū datū: ꝗ quęſiti multāguli eſt multiplex,ratione octupla ipſius *k* b. Ergo inueniri poteſt multangulus qui quęritur. Similiter etiā dato multangulo, inueniemus latus eius,ipſum g h. quod fuit demonſtrandum.

IX. Ad docendū accommodatiùs aūt oſtendemus hoc ijs,qui promtè uolūt audire ea,quæ quęrūtur per methodos. Latus enim multanguli acceptū ſemper geminabimus:hinc auferemus unitatem,& reliquū multiplicabimus per numerū qui binario abſit, minor ſcilicet, à numero multitudinis ipſo quadrato. ac qui fit, ei ſemper ad- *

per addemus binariū, quadratumq́; eius quod ſic fit ſumentes, ab eo ſubtrahemus quadratum eius, qui quaternio minor eſt quàm multitudo trium. reliquumq́; diuidemus in octuplū eius qui binario eſt minor, itaq́; inueniemus quęſitum multangulum. Rurſus aūt ipſo dato multangulo, latus ſic inueniemus. Multiplicabimus eum per numerum qui octuplus ſit ad numerum binario minorem eo numero, qui multitudinem angulorum opprimit. Ei qui ſic fit, addemus quadratum, qui fit à numero quatuor unitatib. minore, quàm eſt numerus angulorum. & inueniemus quadratū, ſi tamen datus, ſit multangulus. de huius autem quadrati latere ſemper auferemus binarium, reliquum diuidemus in eum, qui binario minus habet quàm angulorum numerus. inde orto unitatem addemus, ſummęq́; ſemiſſem arripiētes, latus quæſiti multanguli habebimus.

X. Dato numero, inueniendum eſt quot modis multangulus fieri poſsit. Sit datus numerus a b. multitudo angulorum b c. & ponatur in b c binarius quidem c d, quaternarius aūt c e. Et quoniam a b, qui eſt multangulus, totidem habet angulos, quantus eſt b c. qui ergo g k ſub a b b d, cum * b e facit quadratum. Sit eius latus f g. adeoq́; * ipſius f g quadratus: æqualis eiq́; f g ſub a b b d, & ei qui à b e quadrato. Ponatur in ipſo a b unitas a k. & diuiſus eſt g k ſub a b b d in eum qui d g ſub a h b d. & in * ſub ambobus a b h d * qui d g. & traijciemus ipſum * ſub utroq; qui ſunt a b h & qui b d in eum qui ſub k b. Quadruplicatum aūt ab a h b d in eum qui bis ſub b a d e. Binarius enim eſt e d, & à f g. Ergo quadrato æqualis eſt, ei qui ſub k d b, & ei q bis b d d e, & quadrato à b e. Verùm ipſi bis à b d e quadrato, & ei qui à b e, æqualis eſt qui in b d d quadratus. ergo & qui in f g quadratus, æqualis & ei qui ſub k b d, & quadrato à d e. Et quoniam a c æqualis cum eſſet quadruplicatus, utriq; ſimul a b & * b e, maior eſt d ipſius a h, hoc eſt quaternario ens d g * binarius. Reſtat c k maior binario quàm c d f. ergo ſemiſsis ipſius d k incidet inter c k. Eſto l. & traijciemus eū qui ſub k b b d, in eum qui eſt ipſorum * b l l d exceſſus. quandoquidem g d k per l eſt in ſemiſſes diuiſa. adiecta autem eſt a b. & eſt eius quod à k b d cum eo quod eſt à d l æquale ei quod eſt ab l b. & ipſum * l b igitur ipſo l d maius eſt eo, qđ ſub k b d. Proinde quadratus etiam ab f g, æquabitur & interuallo * ipſorum b l l d, & ipſi * autem quadrato adijciatur * d l. & ij * ipſorum f g d l. ergo æquales quadrati ſunt quadratis ab b l l e. Quòd ſi duo numeri unus etiā duobus numeris quadratis ſint: etiam uice uerſa exceſſus eorum æquales. Interuallum ergo iſtorum * l d d e, ęqualis interuallo l b f g. Et quoniam e d æqualis eſt d c, adijcitur autem c d. ergo e c l cū * c d æquatur * a l. illa ergo eorum * eorum l d d c intercapedo, hoc eſt quæ ab ipſis l d d e, quæ eſt ſub e l g, æqualis ei quæ eſt l b f g intercapedini. Ponatur ipſi b l æqualis f m. maior enim eſt b l quàm f g. Quando oſtenſum eſt quadrata quæ ſunt ſub f g d l ęqualia eſſe ijs quæ à b l e d quadratis: reliquū eſt, ut quod à b l, maius ſit quàm quod à d e: cum etiam eo maius ſit, quod fit à d c. itaq; & à b l maius erit, quā ab f g. Ponatur itaq; huic b l ille f m. Erit ergo etiam exceſſus eorum quæ ab f m f g, æqualis ijs quæ ſub e l l c. Et quoniam ille d k quadruplus eſt ad utrunq; iſtorum a b b h. at d k ſectus eſt in ſemiſſes in l. ergo & d l duplus erit amborum iunctim, a b b h. quorum d c duplus eſt ad a h. Reliquus ergo l b duplus eſt ad duo b h. Quadruplus ergo eſt c l ad h b. ergo prima pars ipſius l c eſt h b. Sed & unitas a h quadrupla eſt ad e c quaternionem. totus ergo a b, quadrans eſt ex e l. Demonſtratum eſt aūt, etiam h b quadrantem eſſe ex l c. igitur quod eſt ſub a b b h, decimaſexta pars eſt eius, qđ ſub e l l c. hoc ergo ſedecuplum eſt ad id, quod ſub a b b h. Demonſtratum uerò etiam eſt quod ſub e l l c eſt, æquale eſſe ipſorum * m f f g interuallo. Ergo quod ſedecies ſub a b b h, æquatur interuallo quadratorum à f g, & g m. hoc eſt ei quod ab m g, & bis eo quod ſub f g, g m. Ergo ſedecuplus eius quod eſt ſub a b b h, æquatur ei quod eſt à g m, & duplo eius quod ſub f g, g m. par eſt ergo g m. ſecetur in æquales partes, ad b.

FINIS DIOPHANTEORVM.

RERVM ET VERBORVM PRAECIPVE MEMORABILIVM, QVAE IN HVIVS VOLVMINIS PRIMO TOMO CONTINENTVR,

INDEX AMPLISSIMVS.

FINIS.

IMPRESSVM FRANCOFORTI AD
Mœnum, apud Iohannem Feyerabendt, Impenſis Sigiſmundi Feyerabendt.

M. D. LXXVIII.