528.44
GIO
tra

TRATADO

DE

AGRIMENSURA,

POR EL ILMO. SEÑOR

DON ISIDRO GIOL Y SOLDEVILLA.

Caballero de la Cruz de primera clase
de la órden civil de María Victoria, y Vocal de la Asamblea de la misma,
Caballero de la Real y Militar órden de San Fernando,
Jefe honorario de Administracion
de primera clase,
Director de Caminos vecinales y Canales de riego,
Profesor de Matemáticas,
Arquitectura, Dibujo y Comercio,
Vocal de uno de los Tribunales de oposiciones
á las cátedras de Matemáticas vacantes en los Institutos,
y Catedrático libre de Acotaciones y Topografía
en el Instituto
de San Isidro de Madrid.

MADRID.
IMPRENTA DE MANUEL MINUESA
calle de Juanelo, núm. 19.

1876.

402 C 13
18
600001767 3

R. 1781
863
528.44
GIO
tra

TRATADO

DE

AGRIMENSURA,

POR EL ILMO. SEÑOR

DON ISIDRO GIOL Y SOLDEVILLA,

Caballero de la Cruz de primera clase
de la órden civil de María Victoria, y Vocal de la Asamblea de la misma,
Caballero de la Real y Militar órden de San Fernando,
Jefe honorario de Administracion
de primera clase,
Director de Caminos vecinales y Canales de riego,
Profesor de Matemátiaas,
Arquitectura, Dibujo y Comercio,
Vocal de uno de los Tribunales de oposiciones
á las cátedras de Matemáticas vacantes en los Institutos,
y Catedrático libre de Acotaciones y Topografía
en el Instituto
de San Isidro de Madrid.

E.U.I.T. TOPOGRAFICA - BIBLIOTECA

MADRID.
IMPRENTA DE MANUEL MINUESA,
calle de Juanelo, núm. 19.

1876.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA TOPOGRAFICA - BIBLIOTECA
TOPOGRAFIA
113

cas de D. Juan Cortázar, y las citas de las *Acotaciones* se refieren á la segunda edicion de nuestro Tratado, publicada en 1873.

Respecto á la parte legal de la Agrimensura, debe consultarse la cuarta edicion del excelente *Tratado teórico-práctico de Agrimensura y Arquitectura legal*, de nuestro distinguido amigo y comprofesor el Sr. D. Marcial de la Cámara.

Para el dibujo topográfico y lavado de los planos, debe estudiarse el no menos excelente *Manual de dibujo topográfico-catastral*, *geográfico é hidrográfico* de nuestro apreciable amigo y comprofesor tambien, el entendido y laborioso Sr. D. José Pilar Morales y Ramirez.

Y por último, nuestros lectores encontrarán copia de datos y conocimientos útiles en el Tratado titulado *Estudios periciales*, que acaba de publicar nuestro comprofesor el Sr. D. Leonardo Crespo y Pozas.

Réstanos observar que la tasacion de los terrenos, que la juzgamos de tanta importancia, debe ocupar un volúmen aparte, pues es materia independiente de las demás, que por sí sola forma cuerpo de doctrina, y que por lo tanto no debe tratarse ligeramente.

ÍNDICE.

Páginas.

CAPÍTULO PRIMERO.

CAPÍTULO II.

CAPÍTULO III.

CAPÍTULO IV.

CAPÍTULO V.

CAPÍTULO VI.

CAPÍTULO VII.

CAPÍTULO VIII.

CAPÍTULO IX.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA TOPOGRAFICA - BIBLIOTECA -

ADVERTENCIAS.

1.ª Un número encerrado entre paréntesis, así (25), da á conocer que la materia de que se trata está fundada en lo dicho en el párrafo 25, el que se deberá tener presente para la mejor inteligencia.

2.ª Las citas de Matemáticas se refieren al tratado elemental del Sr. D. Juan Cortázar.

3.ª Las citas de Acotaciones se refieren á la segunda edicion de nuestro Tratado publicada en 1873.

4.ª Los que necesiten estudiar algunas teorías con mayor latitud, podrán consultar, en lo concerniente á la Topografía, la segunda edicion de nuestro *Curso elemental de Topografía* publicada en 1873, ó la segunda edicion de nuestro tratado extenso de la misma, publicada en 1874.

5.ª Algunas veces, para la mejor confeccion de las láminas, hemos tenido que poner salteada la numeracion de las figuras, y aun pasar algunas de una lámina á la inmediata.

AGRIMENSURA.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

1. **Definiciones é ideas generales.**—La palabra *Topografía* se compone de las dos griegas *Topos* y *graphos* ó *grafos*, que significan, la primera *lugar* ó *sitio*, y la segunda *dibujo* ó *descripcion*, y haciendo referencia á la superficie de la tierra podremos definir la Topografía diciendo, que es la *ciencia que se ocupa de la representacion geométrica de una parte de la superficie terrestre*.

Cuando se trata de representar una porcion muy extensa de esta superficie, recibe el nombre de *Geodesia* la ciencia que de ello se ocupa; el de *Geomorfia* cuando comprende una provincia ó un estado cualquiera; y de *Navegacion* si representa una porcion de la superficie del globo cubierta por las aguas, y sirve para determinar el punto que en un momento dado ocupa un buque y el rumbo que ha de tomar para dirigirse á otro punto determinado.

La Topografía enseña á determinar las posiciones relativas de varios puntos de la superficie de la tierra, á calcular las distancias que entre ellos median y á colocarlos sobre un plano en posiciones análogas á las que realmente ocupan.

La representacion de una parte de la superficie terrestre, se obtiene por medio del *sistema de las Acotaciones*, valiéndose del método de las secciones horizontales (Acots. 103), y presentando en las curvas proyectadas un sistema de puntos acotados, que pueda servir para determinar (Acots. 113 y 114) cualquier otro punto que no forme parte de dicho sistema.

La palabra *Agrimensura* se compone de las dos latinas *Ager* y *mensura*, que significan, la primera *campo* y la segunda *medida*, por lo que se define la Agrimensura diciendo, que es la *ciencia que se ocupa de la determinacion ó medida de las superficies de los terrenos.*

La palabra *Geometría* se compone de las dos griegas, *Geo* y *metro*, que significan, la primera *Tierra* y la segunda *medida*, entendiéndose por Geometría la *ciencia que se ocupa de la medida de la tierra*, por lo cual se llamaban en lo antiguo *geómetras* á los que tenian el oficio de medir las tierras, despues se les llamó *geómetras agrimensores*, y hoy se les dá el nombre de *peritos agrimensores* y *tasadores de tierras*.

Hoy se llama *Geometría práctica* la ciencia que se ocupa de las operaciones que conducen á la determinacion de la medida de los terrenos, y es una aplicacion inmediata de la que hoy se entiende por *Geometría elemental*, siendo aquella la que trata de la resolucion material de los problemas especulativos que forman el objeto de la segunda, elevada á una grande altura por las muchas teorías que forman su objeto.

La *Topografía* y la *Geodesia*, teniendo ambas por objeto la representacion de la superficie terrestre, tienen tantos puntos de contacto, que es difícil establecer hoy por completo la línea divisoria entre ellas en muchos casos, atendido el adelanto que una y otra han experimentado.

La Topografía, sin embargo, limita el terreno de cuya representacion se ocupa á una extension en la cual no es preciso tener en cuenta la esfericidad de la tierra para obtener la debida exactitud. Cuando la extension del terreno que debe representarse es tal, que no puede prescindirse de tener en consideracion la forma de la tierra sin cometer graves errores, las operaciones, que exigen además el empleo de instrumentos de mayor precision, y que conducen á cálculos superiores á los conocimientos elementales de Matemáticas, entran en el dominio de la *Geodesia*.

En las operaciones geodésicas se refiere la posicion de los puntos notables del terreno á la superficie de las aguas tranquilas del Océano; pero en la corta extension que ha de comprender un plano topográfico, se sustituye sin error sensible á la superficie oceánica el plano tangente á la misma.

La Agrimensura y la Geometría práctica, vienen á ser una misma cosa y tambien tienen bastante de comun con la Topografia, pues son realmente una parte de esta: de suerte que al tratar de una de ellas hay tambien que ocuparse de las otras. La Topografia determina la figura geométrica de un terreno ó *levanta su plano*, y la Agrimensura determina su *cabida* ó *mide su superficie* y rara vez se hace una operacion de estas sin ejecutar la otra.

Como la Topografía ha adquirido hoy, como ya hemos dicho, mayor extension, complicándose con métodos é instrumentos que suponen un conocimiento íntimo de las diversas partes de las matemáticas, solo tomaremos de ella en este tratado lo necesario para darla á conocer y comprender su importancia.

La extension de los terrenos, de que nos ocuparemos, no excederá de 300 hectáreas. Para los terrenos de mayor extension en que ya debe hacerse uso de las triangulaciones y que en realidad no son ya del dominio del Agrimensor y pertenecen al Topógrafo, puede consultar el lector nuestro *Curso elemental de Topografia*, ó para más latitud aún nuestro *Tratado completo* de la misma.

Respecto á la Agrimensura parece que solo debiéramos tratar de la medicion de las superficies; mas como sea necesario además al agrimensor resolver otras cuestiones propias de su profesion, como son la trasformacion y division de los terrenos ó heredades, su valoracion ó tasacion, los deslindes y apeos, y las escavaciones y desagües, nos ocuparemos de todas estas cuestiones, dando de este modo mucha más latitud á la palabra *Agrimensura*.

2. **Figura y dimensiones principales del globo terrestre.**—La tierra, convexa como lo acredita la sombra que proyecta sobre la luna en los eclipses de este astro, la observacion de un buque que se aleja de la costa por la ocultacion sucesiva del casco, los palos con sus velas y los topes, ó desde el buque en que los últimos objetos que dejan de percibirse son las veletas de las torres y las cimas de las montañas, y lo han confirmado hasta la evidencia los viajes marítimos, es un cuerpo redondo, aislado en el espacio y dotado de un *movimiento de rotacion*, en virtud del cual afecta la forma de un *elipsóide de revolucion, aplanado*.

Las observaciones astronómicas de Huyghens y Newton, y las mediciones ejecutadas por otros muchos sábios, entre los que se cuentan los españoles D. Jorge Juan y D. Antonio Ulloa, han determinado las siguientes dimensiones de los ejes que corresponden á la elipse generatriz de nuestro planeta:

Rádio ó semi-eje mayor del elipsóide...... 6376159^{m}.
Rádio ó semi-eje menor.................... 6356234^{m}.

El aplanamiento del globo, que es el cociente que resulta de dividir por el semi-eje mayor la diferencia de ambos rádios, es $\frac{1}{320}$, ó próximamente de $\frac{1}{309}$, como se ha empleado con éxito satisfactorio en la formacion de la carta de Francia.

3. **Forma que se atribuye á la tierra en las aplicaciones.**—A pesar del aplanamiento del globo terrestre, no hay inconveniente en considerarle como *esférico*. El error que de esta consideracion puede resultar es de todo punto inapreciable en las aplicaciones ordinarias de la Topografía.

Se ha adoptado para rádio de esta esfera el término medio 6366200^{m} entre los semi-ejes del elipsóide (2).

4. Las desigualdades que presenta la superficie terrestre no influyen en la forma general que afecta: puesto que si tratásemos de representar sobre un globo de 1^{m} de rádio la altura del Dawalagiri, que es el más elevado de los picos de Himalaya en Asia, y la mayor de las alturas conocidas, llegando á tener cerca de 8000 metros, la proporcion

$$6366200 : 8000 :: 1 : x = 0{,}00126,$$

nos daría á conocer que desigualdades que apenas exceden de milímetro y cuarto, no alteran la forma general de una esfera que tiene un metro de rádio; sucediendo una cosa análoga con la superficie de nuestro globo.

5. **Secciones y líneas principales que se consideran en el globo terrestre.**—El diámetro NS (fig. 1.^{a}) alrededor del cual gira la tierra en su movimiento diurno, se llama *eje de la tierra*, y es el eje menor del elipsóide. Su punto medio C es el centro de la misma, y los extremos N y S son los *polos*; uno de los cuales, el N, recibe el nombre de polo *norte* ó *boreal*, y el otro S, el de polo *sur* ó *austral*.

6. Toda seccion NMSQ causada por un plano que pasa por el eje es un círculo máximo, que se llama *meridiano* ó *seccion meridiana*. El plano secante es llamado *plano meridiano*.

7. Se llama *ecuador* al círculo máximo OMEQ perpendicular

al eje de la tierra y que pasa por su centro C. Cuando el plano secante es perpendicular á NS en otro punto cualquiera, la seccion recibe el nombre de *paralelo* por serlo al ecuador. Este último divide el globo en dos partes iguales llamadas *hemisferios*, que se distinguen entre sí por el nombre de su polo respectivo.

8. *Horizonte sensible* ó *aparente* de un punto A (fig. 2) de la superficie terrestre, es el plano tangente en él á la misma superficie. *Horizonte racional* es la seccion BDG producida por un plano que pasa por el centro C y es paralelo al horizonte sensible.

9. **Línea vertical.**—Se da el nombre de *vertical* de un punto cualquiera *m* (fig. 2) á la recta *m*C, indefinidamente prolongada, que este punto determina con el centro de la tierra. El extremo Z de la vertical es el *zenit* de todos los puntos de la vertical considerada, y el N' el *nadir* de los mismos.

10. Por un punto del espacio sólo puede pasar una vertical; pues cualquiera otra que se considerase tendria dos puntos comunes con la primera.

Dos verticales cualesquiera cortándose en el centro de la tierra, determinan un plano, cuya interseccion con la superficie terrestre es una circunferencia máxima.

11. Aun cuando las verticales todas concurren sensiblemente, se consideran como paralelas, atendiendo á la gran distancia de su punto de encuentro, relativamente á lo que distan entre sí en los límites que comprenden las operaciones topográficas.

12. **Determinacion de la vertical.—Perpendículo.—Plomada.**—La línea vertical se determina en la práctica por la direccion que toma un cordon *c* (fig. 3) sujeto por uno de sus extremos y unido por el otro á un cono de metal *p*, que atraido hácia el centro de la tierra por la accion de la gravedad hace tomar al cordon la posicion de la vertical que tiende á recorrer en su caida. El sencillo aparato que el cordon y el peso constituyen se llama propiamente *perpendículo*; y cuando le acompaña un cilindro *n* (fig. 4), llamado *nuez*, cuya altura es igual al diámetro de la pesa *p*, recibe el nombre de *plomada*. Con frecuencia se suele llamar tambien plomada al perpendículo.

13. **Plano vertical.**—Todo plano que pasa por una vertical (9) se llama *plano vertical*.

14. Por una vertical pueden pasar infinitos planos, que todos serán verticales (13).

15. **Determinacion del plano vertical.**—Un plano vertical se determina:

1.° *Por una vertical y un punto fuera de ella.*—Porque el plano que estos elementos geométricos determinan, es vertical (13.)

2.° *Por una vertical y otra recta cualquiera que la corte.*—Porque el plano de ambas rectas es tambien vertical (13).

3.° *Por dos verticales cualesquiera.*—(10).

16. El plano vertical que pasa por un punto dado *a* (fig. 5) y por la vertical marcada por la plomada *bc*, se determina en la práctica dirigiendo una visual *da* de manera que el cordon de la plomada cubra el punto *a*. La visual determina con la vertical *bc* el plano pedido (15—2.°)

El plano vertical que pasa por dos puntos dados *a*, *e* se determina haciendo pasar el cordon de la plomada por uno de ellos *e*, y queda reducido al caso anterior. Otro perpendículo que quede cubierto por el primero, constituirá una nueva vertical del mismo plano; en el que tambien se hallará otra recta cualquiera ó un punto, que queden igualmente cubiertos.

17. *La interseccion de dos planos verticales es una vertical.*—Porque pasando ambos planos por el centro de la tierra (13), su interseccion pasa tambien por este punto, y es por lo tanto vertical (9).

18. **Línea horizontal.**—Toda recta *ab*, *cd* (fig. 2) perpendicular á una vertical se llama *horizontal*.

19. **Plano horizontal.**—El plano que las horizontales *ab*, *cd*... (fig. 2) de un mismo punto determinan, perpendicular á la vertical del mismo, se llama *plano horizontal*. El horizonte sensible y todos los planos paralelos á él son tambien horizontales.

20. Para la determinacion del plano horizontal, basta tener dos rectas horizontales que se corten.

21. **Rectas y planos inclinados.**—*Recta inclinada* y *plano inclinado* son estos elementos geométricos cuando no son horizontales ni verticales.

22. **Determinacion de la horizontal.**—Una recta horizontal se determina en la práctica con auxilio de los instrumentos llamados *niveles*.

23. **Nivel de perpendículo ó de albañil.**—Se compone este instrumento de dos reglas de madera exactamente iguales *ab*, *ac* (fig. 6) ensambladas formando un ángulo, que generalmente es recto, y provistas de cantoneras metálicas en el vértice *a* y en

los extremos *b* y *c*. Un travesaño *ef* paralelo á la recta *bc* que determinan las cantoneras extremas, está dividido en su punto medio por una hendidura *n*, y del punto *m* pende el cordon de un perpendículo *p*. Cuando el cordon de este perpendículo coincide con la señal *n*, la bisectriz *mn* del ángulo *bac* es vertical, y la recta *bc*, perpendicular á ella por la propiedad del triángulo isósceles, ocupa la posicion horizontal.

24. Para marcar la línea de fé se coloca el instrumento sobre una regla inclinada *r* (fig. 7), señalando el punto *d'* en que el cordon toca al travesaño *ef*. Invirtiendo despues el instrumento de modo que cambie la posicion de las cantoneras *b*, *c*, con lo que se hallará en las mismas condiciones que si hubiese girado alrededor de *as*, perpendicular á *bc*, el punto *d'* irá á ocupar la posicion *d''* simétrica de la primera con relacion al eje del giro; marcando el punto que ocupa el cordon en el travesaño y dividiendo en dos partes iguales la recta *d' d''*, el punto medio *d* así obtenido marcará la verdadera línea de fé.

En efecto, concibiendo la horizontal *h*, el ángulo *n* que forma con la regla será igual al *m*, por ser *as* perpendiculor á *bc* y *h* á la vertical *ap*. Haciendo entonces girar á la regla *r* hasta que el ángulo *m* se haga nulo, su igual *n* se anulará tambien y la regla ocupará la posicion horizontal.

25. **Nivel de aire.**—Este nivel, llamado tambien de ampolla ó de burbuja y debido á Thévenot, se compone de un tubo *ab* (fig. 8), de longitud variable y ligeramente convexo en su parte superior, lleno de agua ó de alcohol, á excepcion de una pequeña porcion *m* ocupada por una ampolla ó burbuja de aire, y otras veces por el vapor del mismo líquido, que se ha hecho hervir á la lámpara dentro del tubo, y que al disminuir de volúmen despues de cerrado éste, ha ocupado el vacío producido por el enfriamiento del líquido. Son preferibles los niveles de alcohol, por resistir sin congelarse las temperaturas mas bajas de nuestros climas. El líquido está generalmente coloreado para que se destaque mas la burbuja.

El tubo que hemos descrito está encerrado en una guarnicion metálica *ab* (fig. 9), descubierta por su parte superior, y fija por medio de los soportes *s* á una regla metálica AB perfectamente plana.

26. **Nivel esférico.**—El nivel de aire, cuando su tubo es un casquete esférico, y señala la posicion horizontal de su base por

hallarse la ampolla en el punto mas distante de ella, se llama *nivel esférico*.

27. **Teoría del instrumento y señalamiento de los índices.**—Se funda el nivel de aire en la propiedad física que poseen dos fluidos de densidades diferentes contenidos en una misma capacidad de colocarse de modo que el menos denso ocupa la parte superior, y en la propiedad geométrica de que la tangente á un arco vertical en su punto más elevado es horizontal.

Disponiendo el tubo sobre una regla inclinada AC (fig. 10), la ampolla ocupará la parte superior *n'* en virtud del primer principio, y por el segundo la tangente *t* á su punto medio será horizontal. La normal *b* del punto *n'* será vertical y por consiguiente perpendicular á la horizontal AB que se concibe tirada por el punto A. Marcando *n'* ó mejor los extremos de la burbuja, é invirtiendo los extremos del tubo, lo que equivaldrá á haberle hecho girar alrededor de la normal *r* á su punto medio *m*, la señal *n'* irá á parar á *n*; marcando el punto medio de la parte ocupada por la burbuja y dividiendo en dos partes iguales el arco *n'n* se tendrá conocida la verdadera posicion del punto medio del tubo. Haciendo girar despues á la regla AC hasta que el centro de la burbuja ocupe el punto *m* así obtenido, el ángulo *c* se habrá hecho nulo, así como su igual *s*, y la regla AC en que el tubo se apoya será horizontal.

28. Los dos puntos *n'*, *n*, ó los cuatro que resultarian de haber marcado los extremos de la burbuja en ambas posiciones, sirven para fijar la posicion de los índices *i*, *i* (fig. 9) ó las divisiones simétricas respecto del punto medio del tubo, que se hacen en él por medio de un diamante. En el uso del instrumento la regla AB estará horizontal cuando los extremos de la ampolla equidisten de los índices ó de dos divisiones simétricas.

29. **Determinacion de un plano horizontal.**—Se coloca el nivel de perpendículo sobre el plano que se trata de horizontar, al cual se hace mover hasta que el nivel marque la horizontal *ab* (fig. 11).

Colocándole en direccion de otra recta *cd*, generalmente perpendicular á la primera, horizontándola tambien, se habrá conseguido la horizontalidad del plano (20).

Del mismo modo se emplea el nivel de aire.

30. **Propiedades de las rectas y los planos horizontales y verticales.**—La posicion vertical de una recta ó un

plano es *absoluta*, toda vez que tiene que satisfacer á la condicion de pasar por el centro de la tierra, y se comprende que existen infinitas rectas y planos que no pueden satisfacerla. La horizontalidad de estos elementos geométricos es *relativa* (18 y 19) á una vertical, y de aquí el que un plano, por ejemplo, sea al mismo tiempo horizontal con respecto á una vertical determinada, é inclinado con relacion á otra vertical distante. Con el objeto de evitar la vaguedad que de estas consideraciones pudiera resultar, y ciñéndonos siempre á la corta extension que la Topografía considera en la mayor parte de los casos, llamaremos *verticales* á las rectas que sean paralelas á una vertical determinada, en lo que por otra parte no hay error de consideracion (11), y referiremos á ellas la *horizontalidad* ó la *inclinacion* (21) de las rectas y de los planos, y haremos aplicacion á estos elementos de las propiedades geométricas que les pertenecen.

31. **Medida de la inclinacion de las rectas y de los planos.**—La *inclinacion* ó *pendiente* de una recta, es el ángulo que forma con su proyeccion sobre el plano horizontal que corresponde á uno de sus puntos, el cual tiene por medida su tangente trigonométrica, que es la relacion entre el desnivel d, que existe entre dos puntos cualesquiera de la recta, y la longitud l de la proyeccion horizontal correspondiente á la recta que los une. Llamando p á esta pendiente se tendrá (Acots. 25) la relacion

$$p = \frac{d}{l} \qquad [1].$$

La pendiente de un plano es la que corresponde á la línea de máxima pendiente de uno cualquiera de sus puntos.

32. **Líneas de máxima pendiente de los planos y de la superficie del terreno.**—La línea de máxima pendiente que corresponde á un punto de un plano dado de posicion, tiene las propiedades siguientes:

1.ª Es la que forma con la vertical del punto dado un ángulo menor que el correspondiente á otra recta que pase por el mismo punto en el plano. Si queremos determinar en virtud de esta propiedad la línea de máxima pendiente que corresponde al punto a (fig. 12) situado en el plano P, se tirará desde un punto c de la vertical ca correspondiente al punto dado una perpendicular cb al plano, y la proyeccion ab de la vertical sobre el plano será la línea de máxima pendiente pedida (Geom. Teor. 134). Si la perpendicular *cb* al plano estuviese determinada de antemano, bastaría hacer pasar por uno de sus puntos *c* el cordon de una plomada, y unir el punto *a*, en que el extremo inferior de la plomada encuentra al plano, con el pié de la perpendicular.

2.ª Es perpendicular á las horizontales del plano (Acots. 41). Bastará levantar en el punto dado *a* la perpendicular *ab* á la horizontal *mn* del mismo.

3.º Es la direccion que recorrería un punto material abandonado á su peso sobre el plano. La línea de máxima pendiente se hallaría, fundándose en esta propiedad, fijando en *b* el extremo del cordon de una plomada; con lo que el peso del perpendículo haría tomar al cordon la posicion *ab* de la línea de máxima pendiente.

33. La línea de máxima pendiente que corresponde á un punto de una superficie curva, como es en general la de la tierra, es la del plano tangente en este punto á la superficie (Acots. 108).

34. **Meridiana astronómica.**—Se llama *meridiana astronómica* de un punto A (fig. 2) de la superficie terrestre, á la interseccion *ab* del *plano meridiano* (6) y el *plano horizontal* (19) que corresponden á dicho punto.

35. **Trazado de la meridiana.**—La meridiana se determina por la sombra mínima de las que un objeto vertical arroja sobre un plano horizontal, en cierto espacio de tiempo próximo á las doce del dia. Esta sombra corresponde á la elevacion máxima del sol sobre el horizonte, ó á su paso por el meridiano. Para determinarla se elige un punto *a* (fig. 13) situado en un plano, lo mas horizontal que sea posible, y haciendo centro en él se trazan hácia el Norte varios arcos concéntricos, ó bien varias circunferencias completas: se fija despues en *a* una varilla *ab* de hierro ó de madera, á la cual se da una posicion perfectamente vertical (17) valiéndose de la plomada, con la que debe quedar cubierta en dos posiciones distintas, que determinan con la varilla dos planos verticales cuya interseccion será esta recta. Observando entonces la sombra que arroja sobre el plano, se verá que á la salida del sol se dirige al Occidente y tiene una longitud indefinida; que á medida que el sol se eleva sobre el horizonte, la sombra se dirige hácia el Este, precisamente en sentido contrario á la marcha del sol, pero sin dejar de ser occidental, y que va sucesivamente disminuyendo de longitud; que llegará un caso en que el extremo de la sombra tocará á la primera curva en un punto *n*, el cual se

marcará con cuidado; despues irá pasando por las demás circunferencias, y los puntos *o*, *p*, en que las corta, se marcan tambien del mismo modo. Al medio dia la sombra llega como hemos dicho á tener su longitud mínima, en un momento que pasa desapercibido para el observador: despues vuelve á crecer, haciéndose oriental, y su extremo va tocando sucesivamente á las mismas circunferencias en los puntos *q*, *r*, *s*, que se tiene cuidado de marcar con la posible exactitud. Dividiendo despues cada uno de los arcos *ns*, *or*, *pq* en dos partes iguales, y uniendo los puntos de division, la recta *am* que los une se aproximará á la verdadera meridiana del punto *a* lo suficiente para la aplicacion que de ella se hace á la Topografía.

36. **Longitudes y latitudes geográficas.**—*Longitud geográfica* de un punto de la superficie terrestre es la distancia de su meridiano á otro determinado de posicion y llamado *primer meridiano*, la cual se cuenta de 0 á 180° del ecuador ó de un paralelo cualquiera. En España se considera como primer meridiano el que pasa por el Observatorio astronómico de Madrid, ó por el de la isla de Hierro en las Canarias.

La longitud es oriental ú occidental, segun que se cuente al Este ó al Oeste del primer meridiano. Todos los puntos de este tienen longitud *cero*.

37. *Latitud geográfica* es la distancia al ecuador, contada en grados de meridiano. La latitud es *norte* ó *boreal*, *sur* ó *austral*, segun el hemisferio á que corresponde el punto de cuya latitud se trata. Los puntos del ecuador tienen latitud *cero* y los polos la de 90°.

38. **Determinacion geográfica de un punto de la superficie terrestre.**—Conocida la longitud de un punto puede trazarse el meridiano en que se encuentra, y por medio de su latitud el paralelo en que tambien se halla: la interseccion de ambas circunferencias será la situacion del mismo punto en la superficie.

Distancia geográfica de dos puntos de la superficie terrestre es el desarrollo del arco correspondiente al ángulo que forman las verticales de dichos puntos.

CAPÍTULO II.

Alineaciones y medida de las rectas.

39. **Division de la Topografía en Planimetría y Nivelacion y objeto que se propone cada una de estas partes.**—La Topografía se divide en dos partes bien distintas: una que tiene por objeto la determinacion de las posiciones que guardan entre sí las proyecciones horizontales *a, b, c, d, e,* (figura 14) de los puntos A, B, C, D, E mas notables del terreno que se trata de representar, para obtener su proyeccion horizontal *abcde*, y que se llama *Planimetría*; y la otra, que se ocupa de hallar las distancias respectivas ó cotas de los mismos puntos relativamente al plano horizontal PN de proyeccion, y que se distingue con el nombre de *Nivelacion* ó *Altimetría*.

40. *Objeto de la Planimetría.*—Si la figura del terreno fuese un triángulo, se sabe que sus tres vértices determinan un plano, que llamaremos el plano de los objetos situados en dichos vértices; pero si así no fuese, como sucede generalmente, imaginando unidos por medio de rectas los puntos A, B, C, D, E, resultará un polígono ABCDE, cuyos lados no están en general situados en un mismo plano, y sería por lo tanto muy difícil y casi imposible coordinar sobre el papel operaciones efectuadas sobre planos de diferente inclinacion; esta es una de las razones por qué en la Planimetría se ha convenido en considerar las proyecciones de los vértices de los polígonos sobre un plano horizontal determinado de antemano. Estas proyecciones, unidas por rectas, nos dan tambien las proyecciones horizontales de los lados del polígono.

En efecto, si proyectamos todos los vértices A, B, C, D, E sobre un plano horizontal PN, situado por debajo de todos ellos, el polígono *abcde* será la proyeccion del ABCDE. Los puntos *a*, *b*, *c*.... serán las de los puntos notables que se quiere determinar, las rectas *ab*, *bc*.... las de las distancias AB, BC... entre estos puntos, y los ángulos *a*, *b*, *c*, *d*, *e* serán tambien las proyecciones horizontales de los A, B, C, D, E, ó los ángulos planos correspondientes á los diedros que forman entre sí los planos verticales que pasan por las rectas AB, BC, CD, DE y AE, lados del polígono, y cuyas aristas son las verticales correspondientes á los puntos A, B, C, D, E.

Además de la razon expuesta para solo considerar la proyeccion horizontal del terreno, hay tambien la de que no influye en la valoracion de su superficie el tomar por ésta su proyeccion horizontal; pues en la agricultura se tiene en cuenta la circunstancia de que en un terreno inclinado AB (fig. 15) no aparecen los árboles en direcciones *a*, *b*, *c*.... perpendiculares á la línea inclinada AB; sino que tienen las posiciones verticales *a'*, *b'*, *c'*.... perpendiculares á la proyeccion horizontal AC, llamada *base productiva* de la línea inclinada AB: por consiguiente, la superficie real de un terreno no producirá mayor número de árboles ó plantas mayores que su proyeccion horizontal, aun cuando ésta es menor; pues si bien un terreno inclinado contiene en mas cantidad las mieses, yerbas y plantas rastreras que su correspondiente proyeccion horizontal, la experiencia ha probado que la diferencia es bien pequeña; si bien en los casos que convenga puede tenerse en cuenta. Por otra parte, un terreno inclinado tiene las desventajas de ser arrastradas por las lluvias la tierra vegetal y las simientes, ser mas costoso el labrarlas, mas penoso para el ganado, que padece mucho por las violentas posturas en que va con frecuencia fuera de su aplomo; y estos terrenos, unas veces sin bañarles el sol, otras abrasados por herirles de plano, no son ciertamente mas á propósito que aquellos que se aproximan á ser planos situados en posiciones horizontales.

Los franceses llaman *cultelacion* á la operacion que tiene por objeto sustituir á la superficie inclinada AB, la horizontal correspondiente AC; porque parece en efecto que se ha cortado la superficie inclinada con un cuchillo.

Consideraremos por lo tanto en Planimetría la proyeccion horizontal *abcde* (fig. 14) del polígono ABCDE del terreno, trazada sobre el plano PN; y como no sería posible presentar esta proyeccion en su verdadera magnitud, se trata de hallar sobre el plano, representado por el papel *pmno*, una figura *a'b'c'd'e'* semejante á la proyeccion horizontal *abcde* del polígono ABCDE del terreno. Este es el objeto que se propone la Planimetría.

41. *Objeto de la nivelacion*.—Por medio de las operaciones de que se ocupa esta parte de la Topografía, se determinan las alturas A*a*, B*b*, C*c*.... de los puntos A, B, C, D, E sobre el plano horizontal PN, refiriéndolas á una misma unidad, obteniendo de este modo las cotas de dichos puntos. (Acots. 3.) Estas cotas escritas al lado de las proyecciones horizontales *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, nos manifiestan las diferentes alturas de los vértices del polígono, dándonos una completa idea de la forma del terreno que se quiere representar; para lo cual se escriben dichas cotas en los puntos *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, *e'* de la figura semejante construida en el papel.

42. **Plano geométrico ó topográfico**.—El polígono *a'b'c'd'e'* que así se obtiene, semejante á la proyeccion horizontal del polígono del terreno é igualmente acotada, se llama su *plano geométrico* ó *topográfico*.

Las proyecciones acotadas de los lados que constituyen el polígono del terreno sirven para la determinacion de las curvas de nivel, que representan por completo la superficie que se considera. (Acots. 129).

43. **Señales para marcar en el terreno los lados y ángulos de los polígonos**.—Sirven para este objeto los *piquetes*, *jalones* y *banderolas*.

44. **Piquetes**.—Se llaman así unas estacas de madera que generalmente no llegan á medio metro de longitud, y de cuatro á seis centímetros de grueso, y aguzadas por un extremo, si bien es mejor armar uno de estos con un regaton de hierro terminado en punta para introducirla en el terreno, y el otro extremo lleva un cincho ó anillo de hierro á fin de que no se hienda á los golpes del mazo que se usa para clavarla. Otras veces se usan tambien clavos grandes de hierro; y cuando el terreno es duro, para clavar unos y otros hasta lograr enterrarlos, se le remueve por medio del zapapico, se clava el piquete con el mazo, y se apisona despues la tierra que le rodea, colocando encima, ó á su inmediacion si se ha enterrado todo, un monton de tierra, piedras ó ladrillos para poder encontrarle cuando sea necesario. El uso de estos piquetes es para fijar de una manera estable los extremos de las

líneas, y colocados en los vértices de los polígonos fijan tambien sus ángulos.

45. **Jalones.**—Enterrados los piquetes ó sobresaliendo muy poco del terreno, no serian visibles á cierta distancia; por lo cual se usan, cuando se opera, otros de forma cilíndrica y de mayor longitud, la cual ordinariamente es de dos metros, y se colocan en los puntos donde se hallaban los piquetes. Para hacerlos aun mas visibles se les pone en la parte superior una tablilla pintada de colores ó bien un pedazo de tela encarnada (fig. 16): los ejes de los jalones, cuando estos se han colocado bien verticalmente, determinan la vertical del punto del terreno en que se clavan.

46. **Banderolas.**—Cuando la altura de los jalones excede de los dos metros, reciben el nombre de *banderolas*, y sirven para colocarlas en los puntos que se hallan tan bajos, que no puede el observador distinguir punto alguno de la vertical determinada por un jalon. Muchas veces hay necesidad en la práctica de empalmar unos con otros los jalones y banderolas

47. *Plantar* en el terreno un jalon ó una banderola ab (fig. 16), es clavarle en tierra verticalmente: lo que puede comprobarse por medio de la plomada haciendo que quede cubierto por el cordon en las dos posiciones $a'b'$, $a''b''$ del cordon; porque ab será entonces la interseccion de los planos verticales $aba'b'$, $aba''b''$ (15—2.º), y por consiguiente vertical (17).

48. **Instrumentos topográficos.**—Los instrumentos empleados en la Topografía, son unos aparatos destinados á la determinacion de las longitudes, y de los ángulos que forman entre sí las rectas que unen puntos determinados del terreno.

Para la medida de la recta que une dos de estos puntos se emplea otra magnitud lineal determinada, que se elige por unidad. Cuando esta puede aplicarse sobre dicha recta en el sentido de toda su longitud, la medida se llama *directa*.

Existen tambien instrumentos, conocidos con el nombre general de *telémetros*, palabra griega que significa *medida á lo lejos*, por medio de los cuales pueden obtenerse las medidas de una manera *indirecta*, es decir, sin la aplicacion directa de una unidad lineal cualquiera.

Los instrumentos que se emplean para hallar *gráficamente* los valores de los ángulos, se conocen con el nombre de *goniógrafos*: y se llaman *goniómetros* los que dan dichos valores expresados en grados y sus divisiones.

49. **Verificaciones y correcciones**.—Las operaciones que tienen por objeto asegurarse de que cada una de las partes de un instrumento está convenientemente dispuesta para los usos á que se le destina, toma el nombre de *verificacion* ó *comprobacion*; y el de *correccion* la que se emplea en disponerlas convenientemente cuando no lo están.

Habiendo tenido que dar á conocer (23) y (25) los niveles de perpendículo y de aire, expondremos ahora sus verificaciones y correcciones.

50. **Verificacion y correccion del nivel de perpendículo**.—Se observa si en las dos posiciones opuestas que se le dan para marcar la línea de fé (24), y sin mover la regla, el cordon de la plomada coincide con esta línea. Si no, se marca su verdadera situacion como hemos dado tambien á conocer.

51. **Verificacion y correccion del nivel de aire**.—Para esto observaremos que cuando un nivel n (fig. 17) está sujeto á girar alrededor de una recta ab que sirve de eje y es perpendicular por construccion á otra recta inclinada cd, que puede estar sola ó situada en un plano inclinado, estando ambas en un mismo plano vertical abc, si se quiere que dicha recta cd tome la posicion horizontal, se hace girar al nivel n hasta que su eje se halle en el plano abc de dichas rectas y se le da la posicion horizontal n; dándole despues una semirevolucion vendrá á ocupar la posicion simétrica n': haciéndole tomar despues una intermedia m, que corresponde á la bisectriz del ángulo nan', quedará paralelo á cd, y moviendo todo el sistema hasta que el ángulo z se haga nulo, que será cuando la ampolla marque la posicion horizontal, tambien se habrá hecho nulo el ángulo $r = z$, y la cd tomará la posicion horizontal, en cuyo caso la ab toma la posicion vertical.

La verificacion y correccion del nivel de aire consiste, pues, en el paralelismo que debe existir entre el eje del nivel y la recta que pasa por su pié en la regla sobre que insiste y que se halla en el mismo plano que dicho eje, lo cual exige que las alturas de los soportes sean variables, á fin de poder hacer que sean iguales (45), y se consigue dando al nivel la disposicion que presenta la fig. 18. Para hacer la verificacion se observa si colocado el nivel sobre un plano y horizontada la burbuja, conserva esta la posicion horizontal despues de dar al tubo una semirevolucion, invirtiendo la situacion de sus extremos. Cuando se observa una desviacion, se corrige su mitad moviendo el tornillo t para hacer al eje del nivel paralelo á la regla, y la otra mitad moviendo ésta para disponer horizontalmente las líneas paralelas.

52. **Trazado y medicion de las alineaciones.—Definiciones.**—Se llama alineacion al plano que determinan las verticales de dos puntos dados A y B (fig. 19). La línea ondulada AEFB, interseccion del plano vertical de los puntos A y B con la superficie del terreno, constituyendo un perfil (Acot.—124) es la *distancia natural* entre A y B. La recta AB que los une, su *distancia geométrica*, y es la interseccion del plano vertical con uno cualquiera de los inclinados que pueden pasar por ellos. La *distancia horizontal* está representada por una de las horizontales AC ó BD tirada por uno de los extremos de AB hasta su encuentro con la vertical que pasa por el otro extremo; ó bien por una cualquiera GH paralela á las anteriores. Estas líneas son las intersecciones del plano vertical indicado con los horizontales que pasan por A, B, y otro punto cualquiera H.

La distancia horizontal es la proyeccion comun á la natural y á la geométrica. Estas últimas deben reducirse siempre á su proyeccion horizontal, como diremos mas adelante, considerando á la distancia natural como compuesta de elementos rectilíneos, cuyas pendientes deben conocerse.

Tambien se considera muchas veces en las operaciones de nivelacion, la distancia BC del punto B al plano horizontal que pasa por el punto inferior A, ó su igual AD, que va desde este último al plano horizontal de B.

53. **Trazado de las alineaciones.**—Se obtiene disponiendo verticalmente los jalones (47) en cada uno de los puntos que la determinan, y que pueden ser los extremos de la recta ó dos puntos cualesquiera de ella. Supongamos primero que los puntos A y E (fig. 20) sean los extremos de una línea AE situada en un terreno horizontal ó próximamente horizontal: se dispondrán en dichos puntos los jalones *a'* y *e'*, con lo cual se tendrá determinada la alineacion; para trazar la línea ó marcar otros puntos intermedios en el terreno, se plantará otro jalon *c'* de manera que la visual *a'e'*, dirigida desde uno de ellos *a'* al otro, pase por un punto del jalon *c'*, con lo cual este se hallará en el plano vertical de los *a'* y *e'* y se obtendrá el punto C del terreno. En efecto, los planos verticales AC*c'a'* y CE*e'c'*, que tienen comunes la recta C*c'* y la visual *a'e'*, son un solo y mismo plano vertical AE*e'a'*.

Valiéndonos despues de dos cualesquiera de los jalones dis–

puestos en la alineacion, podremos determinar mayor número de sus puntos. Las visuales dirigidas á derecha é izquierda del jalon que se halla á las inmediaciones del observador deben ser tangentes á todos ellos para que la alineacion esté bien trazada.

54. Cuando los accidentes del terreno ó la mucha distancia entre los puntos A y E impide el que se perciba desde uno de estos puntos el jalon dispuesto en el otro, se colocan dos observadores con jalones en dos puntos 1 y 2, proyecciones horizontales de dos puntos del terreno situados entre A y E, los cuales se proyectan en *a* y *e*. El primer observador, que debe ver el jalon fijo en *e*, hará que el segundo mueva el jalon 2 hasta que entre en línea con los 1 y *e*; con lo que vendrá á ocupar la posicion 3. Este hará á su vez que el primero mueva el jalon 1 hasta entrar en línea con los 3 y *a* en la posicion 4; y así se continúa hasta que los jalones ocupen las posiciones *b* y *d* tales, que dirigiendo la visual desde el *b* al *e*, el jalon *d* se halle en línea recta con ellos, y lo mismo se verifique con el *b* respecto á los *d* y *a*. Entonces los cuatro jalones *a*, *b*, *d*, *e*, que se proyectan verticalmente en a', b', d', e', estarán en un mismo plano vertical, por ser comunes á los planos AD$d'a'$ y BE$e'b'$ las verticales Bb' y Dd'.

Si no se hallan dos puntos intermedios desde los cuales puedan verse los jalones colocados en los extremos de la linea, habrá necesidad de trazarla por tanteos con mayor número de jalones.

Este mismo procedimiento se sigue cuando el operador se halla entre los extremos de la línea AE no pudiendo trasladarse á ninguno de ellos.

55. Cuando el terreno presenta una elevacion como sucede de E á K ó una hondonada, hay necesidad de colocar jalones muy próximos como f' respecto á e', ó banderolas e'', k'' en vez de jalones para conseguir el alcance de las visuales. Tambien pueden fijarse los g' y h' como hemos indicado (54).

56. **Prolongacion del trazado.**—Supongamos ahora que se tienen dos puntos de la recta, y se trata de prolongar el trazado de la misma en uno de los sentidos de su alineacion ó en ambos. Sean los puntos A y B (fig. 20): se colocarán los jalones a' y b', y por medio de ellos el c' en la alineacion que determinan: valiéndose despues de los b' y c' para alinear el d', y así sucesivamente hasta llegar á E donde cambia el terreno, como en el ejemplo actual en que empieza á elevarse, en cuyo punto se fijará el jalon e' ó la banderola e'' y otro f' próximo al e', continuando del

mismo modo hasta donde vuelva á cambiar el sentido de la inclinacion del terreno. Para comprobar el trazado se dirigirá desde un jalon *g'* por ejemplo, situado en la cumbre, una visual que pase por el *e'* ó la banderola *e''*, y si pasa tambien por un punto de un jalon *d'* del terreno llano, los dos planos verticales AE*e'a'* y EG*g'e'*, que tienen comunes la visual y la línea E*e'*, serán un solo plano vertical AG*g'a'*.

57. **Interseccion de dos alineaciones.**—Trazadas en el terreno dos líneas que se cortan, se halla su interseccion colocándose el observador en un punto extremo de una de ellas; y valiéndose de los jalones que la determinan ó de la alidada de un instrumento, esperará el momento en que un peon, caminando en la direccion de la otra alineacion primera entre en la línea: trasladándose el observador entonces á un extremo de la otra, hará disponer de la misma manera el jalon en esta línea. Se repetirá la observacion continuando del mismo modo hasta asegurarse de que dicho jalon ocupa una posicion que corresponde á ambas alineaciones. Colocados dos observadores, uno en cada alineacion, resolverian con más facilidad este problema, obedeciendo el peon alternativamente á las señales que le hiciesen.

58. **Medida directa de las líneas.**—Para la medida directa de una alineacion se emplean las *cadenas*, las *cintas* y los *reglones*; no siendo todos ellos otra cosa que múltiplos de la unidad lineal, que es el metro, y tienen por objeto abreviar la operacion y facilitar la apreciacion de las longitudes que se miden.

59. **Cadena.**—Se compone de eslabones de alambre de hierro no muy grueso, unidos por anillas de lo mismo, á fin de que no sea muy pesada. La longitud *bc* (fig. 21) de cada eslabon es de dos decímetros, comprendida entre los centros de las anillas que los unen, y de cinco en cinco eslabones las anillas *d'* son de laton para que se distingan los metros; á cada cinco de estos últimos hay unas medallas, tambien de laton, en las que va marcado el número de ellos que hay á partir de un extremo de la cadena. La mitad de la longitud de ésta se señala por un medio eslabon que pende de la anilla correspondiente, ó con una medalla de mayor tamaño que las que señalan los metros. Terminan las cadenas en ambos extremos por agarraderos dispuestos de manera que la distancia *ab* de su extremo al centro de la primera anilla, compone los dos decímetros que segun hemos dicho hay igualmente entre *b* y *c*. La longitud total de la cadena es ordinariamente de 10 ó de

20 metros. Tambien las hay de metal de estas dimensiones; unas y otras tienen estuches de cuero para el trasporte.

Acompaña á la cadena un juego de diez agujas formadas del mismo alambre que la cadena, y de una longitud variable de 0,m35 á 0,m40, y de 0,m004 de diámetro, aguzadas por un extremo, y terminadas en el otro por una anilla de 0,m03 á 0,m04 de diámetro.

60. *Verificaciones y correcciones de la cadena.*—El uso hace que la cadena aumente de longitud, por alargarse las anillas que unen los eslabones, ó disminuya encorvándose éstos por los golpes que suelen recibir; variando tambien en virtud de las influencias atmosféricas.

Para comprobar su longitud se marca con toda precision en un terreno llano, y mejor en el suelo ó en un muro de un edificio, la longitud exacta que deba tener la cadena, y se compara ésta de cuando en cuando con el marco ó patron establecido. Para corregirla si ha aumentado de longitud, se cerrarán bien las anillas que unen los eslabones, y si no es suficiente se encorvarán ligeramente uno ó algunos de éstos. Si ha disminuido la longitud, se recorrerán todos los eslabones para rectificar los que hayan podido torcerse.

61. **Uso de la cadena**.—Para medir una línea AB (fig. 22), que supondremos en un terreno llano y próximamente horizontal, son necesarios dos peones; despues de contadas las agujas, rectificada la cadena, y quitados todos los nudos que se suelen formar al extenderla, cogen los dos peones la cadena por sus agarraderos, colocándose todo lo posible en la alineacion; para lo cual el mas inteligente, que marchará detrás dirigiendo la medida, despues de haber entregado al otro las diez agujas, coloca el extremo de la cadena en el punto A, y hace señas al segundo para que entre en la línea: bien tendida la cadena horizontalmente, el segundo peon clava verticalmente en el terreno una aguja que enrase con el extremo de aquella.

Hecho esto, y levantando ambos la cadena con el objeto de no tropezar á la aguja, dan un paso á derecha ó izquierda de la línea, y siguen marchando en direccion de aquella hasta que el primer peon llega á la aguja clavada; entonces coloca el agarradero de la cadena de modo que enrase con ella y teniendo cuidado de no moverla, hace entrar en línea al segundo peon; clava éste la segunda aguja como hemos dicho, y cogiendo el primer peon la primera, teniendo siempre cuidado de no cogerla hasta que el otro haya puesto la suya, se continuará la operacion de la misma manera, hasta que el segundo peon haya clavado las diez agujas, cuidando de no levantar la última para no perder el punto donde concluye la medida; y debiendo tener recogidas el primero diez agujas, resulta que segun que la cadena es un decámetro ó dos, se habrán medido uno ó dos hectómetros.

El primer peon apunta en un cuaderno la medida, entrega despues al segundo las diez agujas, y se repite de nuevo la operacion explicada, hasta llegar al extremo B de la línea. En la última *tirada* ó *cadenada*, despues de contadas las agujas recogidas por el primer peon, se verá el número de eslabones comprendidos entre la última y otra que el segundo peon clava donde termina la línea, para añadir al número de hectómetros los decámetros, metros y dobles decímetros que resulten. Si además hubiese una fraccion de eslabon, se apreciaría por medio de un *doble decímetro de metal*.

La importancia que la medicion de las líneas tiene en las operaciones topográficas, exige que la cadena esté siempre bien tirante, perfectamente alineada, y que se lleve mucho cuidado con la cuenta de las *cadenadas*, contando tambien de tiempo en tiempo las agujas; pues la pérdida de una de ellas anularía la medida de toda la alineacion.

62. *Ejemplo de una medicion.*—Supongamos que en la medida de una línea se haya empleado la cadena de la longitud de un decámetro, que el peon que va detrás haya recogido y apuntado cuatro veces las diez agujas, y que al final tenga tres, habiendo además una fraccion de cadena compuesta de cuatro eslabones y una parte de eslabon valuada en $0,^{m}13$; resultará para el valor de la línea

$$100^{m} \times 4 + 10^{m} \times 3 + 0,^{m}2 \times 4 + 0,^{m}13 = 430,^{m}93.$$

63. *Medida de las rectas inclinadas.*—Puede obtenerse midiendo segun la inclinacion de la recta dada AD (fig. 23), aplicando la cadena al terreno, pero debe reducirse despues á su proyeccion A'D. Puede tambien obtenerse desde luego esta proyeccion disponiendo horizontalmente la cadena segun A*b*, y bajando desde *b* una plomada ó dejando caer verticalmente una aguja, se determina el punto B en que termina la porcion AB de la recta inclinada, que se proyecta horizontalmente segun A*b* ó su igual

A'B'; repitiendo la misma operacion desde B, se determinará igualmente la proyeccion B'C' de BC. La suma de las proyecciones que resulten será la total A'D que se trataba de conocer.

Cuando la pendiente es muy rápida ó se quiere evitar el error que proviene del pandeo de toda la cadena, se emplea una fraccion de ella en la medicion indicada.

64. **Cinta metálica**.—Es un resorte de acero empavonado de la longitud de 10 ó de 20 metros, siendo su ancho de 0,^{m}016, y su grueso y temple tales que se la pueda arrollar con facilidad para el trasporte, no presentando inflexiones ni dobleces cuando hay que extenderla para hacer uso de ella. Se hallan señalados los metros con discos *l* (fig. 24) de metal amarillo, de 0,^{m}015 de diámetro, unidos á la cinta, siendo sus centros, que se hallan bien marcados, los puntos de division; para señalar los dobles decímetros lleva otros discos *e* de 0,^{m}008 de diámetro, y los decímetros se marcan tambien por medio de unos agujeros pequeños *d* taladrados en la misma cinta y de 0,^{m}002 de diámetro. Una plancha *s* en figura de rombo indica con la interseccion de sus diagonales, que debe estar bien marcada, el punto medio de la cinta.

El agarradero (*m*,*m'*) en que termina por cada uno de sus extremos, forma parte del último doble decímetro, de modo que la longitud total de la cinta, inclusos los agarraderos, es la que le hemos asignado desde luego. En las caras extremas de estos agarraderos, y en sentido de su longitud y latitud, lleva dos canales semicilíndricas perpendiculares entre sí, y cuyo diámetro es igual al de las agujas que acompañan tambien á la cinta. La longitud del primer doble decímetro se hace variable por medio de un tornillo de paso muy pequeño que une el agarradero con la cinta, y que se puede fijar invariablemente cuando se quiera por medio de una tuerca *t*.

65. *Uso, verificaciones y correcciones*.—Se verifica como la cadena (60), comparando su longitud con el patron elegido de antemano, y se corrige por los tornillos, alargando ó acortando segun convenga los dobles decímetros extremos, y apretando despues fuertemente las tuercas.

El uso de la cinta es el mismo que el de la cadena, ajustando las canales de los agarraderos á la aguja, para evitar el error que por el grueso de esta última resulta en la medida cuando se hace uso de la cadena.

66. **Rodete**.—Es una cinta de hilo, de longitud variable,

barnizada y dividida en metros, decímetros y centímetros, con la expresion de los números que indican las divisiones de los metros y decímetros. El primer decímetro se halla dividido en milímetros, y antes de él hay un pequeño trozo que está en blanco y termina por una sortija de metal. La cinta está arrollada dentro de una caja cilíndrica de cuero (*c*, *c'*) (fig. 25) alrededor de un eje metálico *e*, que pasa por el centro de la caja y lleva en su extremo un pequeño manubrio (*m*, *m'*), el cual sirve para arrollar la cinta introduciéndola en la caja por una abertura lateral que presenta el canto de la misma; sirviendo para desarrollarla la anilla (*a*, *a'*), que no puede pasar por la abertura.

Esta unidad de medida se emplea lo mismo que la cadena y cinta de acero: es más cómoda, pero tiene grandes inconvenientes por su poca duracion, sus más frecuentes variaciones en sentido longitudinal, y la imposibilidad de usarla en terrenos algo húmedos, que quitándola el barniz y borrando la numeracion la inutilizan por completo.

67. **Cuerda métrica.**—En la medida de las líneas puede hacerse uso de una cuerda de cáñamo de 20 á 25 metros de longitud, y á fin de que sea invariable y no se acorte con la humedad, se prepara torciendo sus hebras hácia distintos lados, sumergiéndola en un baño de aceite hirviendo, pasándola por cera derretida despues de seca, y encerándola bien por último. Puede usarse despues con toda confianza, pues así preparada no se contrae aun cuando permanezca un dia entero dentro del agua. Las divisiones que han de marcar los metros se obtienen cosiendo trozos de cinta blanca, en los que se marcan los números correspondientes.

68. **Reglones.**—Los reglones que se usan para la medida de líneas de poca extension, tienen la forma octogonal, como se ve en la fig. 26; su longitud es de 4 metros y se hallan divididos en decímetros. En sus extremos llevan unas rodajas de hierro *r* con una ranura en sentido de su diámetro para colocar el hilo de la plomada. Se puede tender una cuerda á lo largo de la línea, que debe estar señalada por jalónes para que sirva de guia en la medicion, y dos peones la ejecutan con dos reglones iguales. Para esto colocan en el punto de partida A (fig. 27) el extremo del primer reglon; uno de los peones le mantiene fijo en esta posicion, y hace que el otro le coloque sobre la línea con el auxilio de uno de los jalones que la señalan; colocado este primer reglon, toman el segundo y le colocan del mismo modo á continuacion del primero,

procurando no tocar á este y poniéndole cuidadosamente en contacto con él. Se levanta despues el primero para colocarle del mismo modo á continuacion del segundo, que queda fijo, y así se continúa hasta llegar al estremo B de la línea.

En los terrenos inclinados se mide la AB (fig. 28), valiéndose de las agujas (fig. 29) ó de la plomada, y del nivel de aire que se coloca encima de los reglones.

69. **Reduccion de las distancias al horizonte.**—La distancia de un punto A (fig. 30) á otro B, medida con la inclinacion que tiene la recta AB que los une, debe reducirse, como hemos dicho (40), á su proyeccion horizontal. Suponiendo el plano horizontal que pasa por A, y bajando desde B una perpendicular á él, el pié C de esta perpendicular será la proyeccion de B, y la AC la proyeccion de AB. En el triángulo rectángulo ABC tenemos entonces

$$AC = AB \cos. A.$$

Llamando l á la distancia medida, x á su proyeccion, y p al ángulo A, que AB forma con el horizonte, y que es por lo tanto (Acots. 25) la pendiente de AB, la fórmula anterior se convertirá en

$$x = l \cos. p. \qquad [2]$$

Sea $l = 120^{m},4$ y $p = 10^{\circ}\,26'$; se tendrá

$$x = 120^{m},4 \times \cos.\ 10^{\circ}\,26' = 118.41,$$

apreciando hasta centímetros.

Cuando se hace uso de las líneas trigonométricas naturales, suele tomarse el coseno con cuatro ó cinco cifras decimales, aumentando una unidad á la del último órden decimal cuando la siguiente es 5 ó mayor que 5.

70. Para la reduccion de las distancias al horizonte, se ha calculado tambien haciendo uso de la fórmula [2] una tabla que insertamos á continuacion, y que da la distancia á que se reduce la longitud constante de 100 metros para las pendientes de grado en grado desde 0° hasta 45°.

TABLA de reduccion al horizonte de una longitud de 100 metros para las inclinaciones que varian de grado en grado desde 0° hasta 45°.

GRADOS DE INCLINACION.	DISTANCIA REDUCIDA.	GRADOS DE INCLINACION.	DISTANCIA REDUCIDA.	GRADOS DE INCLINACION.	DISTANCIA REDUCIDA.
1	99,985	16	96,126	31	85,717
2	99,940	17	95,631	32	84,805
3	99,863	18	95,106	33	83,867
4	99,757	19	94,552	34	82,904
5	99,619	20	93,969	35	81,915
6	99,452	21	93,358	36	80,902
7	99,255	22	92,718	37	79,863
8	99,027	23	92,051	38	78,801
9	98,769	24	91,354	39	77,347
10	98,481	25	90,631	40	76,604
11	98,163	26	89,881	41	75,470
12	97,815	27	89,101	42	74,314
13	97,437	28	88,295	43	73,135
14	97,030	29	87,462	44	71,934
15	96,593	30	86,600	45	70,710

Esta tabla no pasa de 45°, pues hasta este límite alcanzan las pendientes que el terreno presenta mas comunmente.

Tambien se observa que á medida que la pendiente aumenta, disminuye la longitud de la proyeccion de la recta dada.

71. Para el uso de esta tabla distinguiremos dos casos:

1.° *Que la pendiente dada sea un número exacto de grados.*

2.° *Que esté expresada en grados y minutos.*

Si tenemos por ejemplo $l = 120^{m},4$ y $p = 10°$, observaremos que siendo las distancias reducidas proporcionales á las distancias medidas, para una misma pendiente, hallaremos el valor de x para el ángulo de 10°, estableciendo la proporcion general,

$$100 : 98,481 :: l : x; \quad \text{de donde resulta}$$

$$x = \frac{98,481 \times l}{100} = 0,98481 \times 120,^{m}4 = 118,^{m},571124.$$

En el segundo caso se empleará la proporcion anterior, despues de haber calculado la proyeccion de 100 metros para el ángulo dado.

Si suponemos, pues, $l = 120^m,4$, y $p = 10^\circ\ 26'$, admitiremos que las diferencias de los ángulos son proporcionales á las diferencias de las proyecciones para la longitud constante de 100^m; principio que no es exacto, pero que puede admitirse en la práctica sin error sensible. En su consecuencia hallaremos la diferencia 0,318 que existe entre las proyecciones de dicha longitud constante correspondientes á las inclinaciones de 10° y 11°, que comprenden en las tablas á la inclinacion dada 10° 25'; y llamando z á la diferencia entre la proyeccion correspondiente á 10°, que dan las tablas, y la que resulta para 10° 26', hallaremos su valor por medio de la proporcion

$$60' : 0,318 :: 26' : z = 0,1378.$$

Siendo esta cantidad la diferencia entre la reducida de 10° que conocemos, y la de 10° 26' que se busca, y debiendo ser esta menor, restaremos 0,1378 de la reducida correspondiente á 10°, y obtendremos 98,343 para la que corresponde á 100 metros con la pendiente de 10° 26'.

72. Cuando no se conoce la pendiente y sí el desnivel BC = d (fig. 30) entre los extremos de la recta, se tendrá en el triángulo rectángulo ABC

$$x = \sqrt{l^2 - d^2} \qquad [3].$$

Para la aplicacion de esta fórmula se emplean ventajosamente las tablas de cuadrados de los números enteros desde 1 á 1000 que se publican en Paris todos los años en el *Carnet de l'Ingenieur*. Tambien son muy útiles las tablas de reduccion de D. Jacinto La Rua.

73. **Transportacion de las líneas.—Escalas.**—Debiendo ser el plano una figura semejante al polígono considerado en el terreno (40), los ángulos del plano serán iguales á los que se midan en el terreno, pero los lados de ambos polígonos serán proporcionales, por lo que se tendrá en la fig. 14 la série de razones iguales

$$\frac{a'b'}{AB} = \frac{b'c'}{BC} = \frac{c'd'}{CD} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{m}{M} \qquad [4],$$

representando por M la unidad de medida empleada para las líneas del terreno, y por m la magnitud adoptada para representar á M en el plano.

74. **Escala numérica.**—La *razon numérica* $\frac{m}{M}$, expresion constante de la relacion que existe entre una línea gráfica cualquiera y su homóloga en el terreno, se llama *escala numérica* ó simplemente *escala*.

Esta relacion puede ser inconmensurable cuando se toma para m una magnitud arbitraria; pero es mas conveniente que sea conocida su relacion con M. Tomando por ejemplo un decímetro para representar en el plano al metro tomado como unidad para las líneas del terreno, la relacion será

$$\frac{m}{M} = \frac{0,1}{1} = \frac{1}{10},$$

que se llama *escala* de 1 por 10.

Las relaciones $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.... son tambien las *escalas decimales de* 1 *á* 100, *de* 1 *á* 1000.... é indican del mismo modo que la magnitud real de un metro tomada en el plano representa 100, 1000.... metros en el terreno.

Las fracciones $\frac{1}{250}$, $\frac{3}{5}$ .... son tambien escalas. En la primera de ellas el metro en el plano representa 250 del terreno; y respecto á la segunda es preciso concebir al metro dividido en cinco partes iguales, y que de ellas se han tomado tres para representar la unidad lineal en el plano.

75. Concretándonos á las escalas generalmente adoptadas, que son las que tienen por numerador la unidad, y de preferencia á las decimales, y llamando l á la magnitud real de una recta cualquiera del plano, L á su homóloga en el terreno, y M al denominador de la escala, la série [4] nos dará la proporcion

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{M} \qquad [5].$$

de la que se deducen las igualdades

$$l = \frac{L}{M} \qquad [6], \qquad \text{y} \quad L = lM \qquad [7].$$

Estas igualdades nos sirven para determinar la magnitud real de una línea cualquiera del plano, conocida su homóloga del terreno y el denominador de la escala; y recíprocamente, la línea del terreno, conocida su homóloga gráfica.

Ejemplo 1.°—Averiguar la longitud de una *línea gráfica*, sabiendo que su homóloga *natural* vale 236 metros, y que la *escala* es de $\frac{1}{1000}$. La fórmula [6] nos da el valor

$$l = \frac{236}{1000} = 0^{m},236.$$

Ejemplo 2.°—Averiguar la longitud de una *línea natural*, sabiendo que su homóloga *gráfica* vale $0^{m},236$ en la misma escala.

La fórmula [7] nos da

$$L = 0,236 \times 1000 = 236 \text{ metros.}$$

76. **Escalas gráficas**.—La espresion gráfica de la *escala* (73) se obtiene dividiendo una recta en partes iguales, que representan la unidad de medida adoptada para las rectas del terreno y que se hallan con esta en la razon numérica adoptada. Por medio de la escala gráfica se pueden apreciar con el auxilio del compás las distancias del plano.

La construccion de una escala exige el conocimiento de la magnitud real que ha de representar en el plano la unidad lineal adoptada para las rectas del terreno. Para hallar en general esta magnitud dada la escala $\frac{m}{M}$, se dividirá la magnitud real del metro en M partes iguales, y se tomará el número m de ellas para la unidad lineal en el plano. En las escalas decimales se pondrá en forma de entero la razon numérica dada, y se obtendrá:

$$\frac{1}{10} = 0,1 \;;\quad \frac{1}{100} = 0,01 \;;\quad \frac{1}{250} = 0,004 \;;\quad \frac{1}{1000} = 0,001:$$

lo que da á entender en el primer caso, que el tamaño natural de un decímetro en el papel representa un metro del terreno; en el segundo caso que un centímetro en el papel representa un metro en el terreno; en el tercero, que 4^{mm} representan un metro, y así sucesivamente.

Conocida esta magnitud, nada mas fácil que la construccion de la escala.

Para construir, por ejemplo, la escala de $\frac{1}{1000}$, se formarán las equivalencias siguientes de las rectas del plano y del terreno:

1^m	....	1000 ;
$0^m,1$	....	100 ;
$0^m,01$	....	10 ;
$0^m,001$	....	1 ;

y marcando con *cero* el punto A (fig. 31) de una recta indefinida, se toma la magnitud AB de un decímetro exacto para representar 100 metros: repitiendo de B á la derecha esta magnitud se tendrian los hectómetros de la escala. Dividiendo cada uno de ellos en 10 partes iguales se tendrán los decámetros que se señalarán con los números 10, 20, 30.... Tomando por último un centímetro de A á C y dividiéndole en 10 partes iguales, se obtendrán segun las equivalencias que preceden, los metros de la escala, cada uno de los cuales tendrá la magnitud real de un milímetro.

77. La construccion de las escalas decimales se facilita mucho con el uso del papel cuadriculado, dividido en decímetros, centímetros y milímetros. Tambien se emplean con este objeto los *dobles decímetros* divididos que acompañan á los estuches de matemáticas, y las *escalas de metal, de boj* ó *de marfil*.

78. **Escala de transversales.**— Cuando se quiere llevar la apreciacion de las distancias mas allá de lo que permite la escala gráfica descrita, se empieza por construir esta sobre una recta AB (fig. 32), despues de determinar como hemos dicho (76) la magnitud de 2^{cm} que corresponde á 100 metros para la escala de 1 á 500: y levantando en los puntos A y B perpendiculares á la AB, se llevará sobre ellas á partir de los mismos puntos A y B diez veces una magnitud arbitraria, y se unirán los últimos puntos de division C y D, por medio de una recta CD, la cual se dividirá del mismo modo que la AB. Se tiran despues paralelas á la AB por los puntos de division de las AC y BD que se numeran, y tambien se trazan por último transversales desde los puntos de division de la parte CR á los de la AM como se ve en la figura. Por el empleo de las transversales se aprecian exactamente en esta escala hasta los metros que comprende una distancia cualquiera.

Para mayor inteligencia en la construccion, demostracion y uso de las escalas ordinarias y de transversales, véanse los párrafos 16, 17 y 18 de nuestro *Tratado de Acotaciones*.

UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA TOPOGRAFICA - ESCUELA - BIBLIOTECA

CAPITULO III.

Angulos y su medida.

79. **Clasificacion de los ángulos.**—Los tres puntos que determinan un ángulo y el plano donde se halla, á saber, el vértice y un punto de cada lado, pueden hallarse situados en un plano *horizontal, vertical* ó *inclinado*. Los *ángulos horizontales* reciben el nombre de *ángulos azimutales;* los que están situados en planos verticales el de *ángulos verticales* y los que se hallan en planos inclinados se llaman *ángulos inclinados* ó más bien *ángulos situados en el plano de los objetos,* por ser este caso el que con mas frecuencia se presenta.

80. Los ángulos azimutales y los rumbos se cuentan generalmente á partir de una recta cualquiera dada de posicion, desde 0 á 360°, determinando así por un valor angular perfectamente definido la direccion de cada una de las rectas, que pueden considerarse en una *vuelta* entera *de horizonte* alrededor del punto de observacion. Los ángulos azimutales así determinados se llaman *ángulos de direccion*. El valor del ángulo de dos de las rectas consideradas se obtiene hallando la diferencia de sus correspondientes ángulos de direccion.

81. Los ángulos situados en planos verticales se llaman *ángulos de elevacion* ó *altura* cuando se refieren á la horizontal OM (fig. 33) del vértice O y el otro lado ON va por encima de ella, como el NOM. El ángulo MOP, que forma con la misma horizontal la visual tirada al punto inferior P, es un *ángulo de depresion*.

El ángulo ZON, que forma la visual ON con la vertical ZO, y que es complemento del ángulo de elevacion MON, se llama *ángulo zenital*.

Si quisiéramos referir la direccion de la visual OP á la vertical OZ, la determinaríamos por el ángulo ZOP, cuyo exceso sobre el ángulo ZOM es el ángulo de depresion MOP.

Observaremos, que para referir á la vertical un ángulo de elevacion MON, basta restarle de 90°, y resultará el ZON; y si el ángulo es el de depresion MOP, se deben añadir 90° á su valor para obtener el ZOP.

82. Si cuando los lados del ángulo no tienen las posiciones indicadas movemos el plano sobre que insiste la alidada, hasta tanto que los extremos de los lados de dicho ángulo se hallen en la prolongacion del mismo plano, el ángulo resultará determinado en el plano de los objetos.

83. **Instrumentos para la medida de los ángulos.**—Antes de tratar de cada uno de ellos en particular, describiremos por separado cada una de las partes que los componen.

84. **Partes principales de los instrumentos.—Limbos.**—Se da el nombre de *limbo* en todo instrumento angular á un disco metálico, ó á la superficie lateral de un tronco de cono de muy poca altura, destinados á contener la division geométrica que sirve para la apreciacion de los grados y fracciones de grado de un ángulo dado AOM (fig. 34).

Los limbos que acompañan á algunos instrumentos son semicirculares; y en algunos solo comprenden la sexta, octava.... parte del círculo, y se llaman *sextantes, octantes*....

85. **Diferentes graduaciones de los limbos.**— Los limbos están generalmente arreglados á la division *sexagesimal*, ó sea divididos en 360 grados y cada grado en dos ó en tres partes iguales, siendo 30′ ó 20′ los correspondientes límites de apreciacion angular que proporcionan. En algunos instrumentos se extiende á 10′, estando el grado dividido en seis partes.

El sentido de la graduacion es en general de *izquierda á derecha*, y algunas veces presenta la direccion contraria ó ambas; y se refiere á la lectura de la numeracion á partir del cero y suponiendo que se observa desde el centro del limbo. Esta numeracion señala los grados de diez en diez; las divisiones que entre las numeradas corresponden á los cinco grados van señaladas con un trazo mas largo que las que indican las demás: siendo menores aún las que señalan las fracciones de grado.

Los limbos semicirculares están á veces numerados de manera que presentan la graduacion completa, repitiendo la numeracion á partir desde el cero y en el mismo sentido, con los números 180, 190, 200.....

86. **Alidadas**.—Se da el nombre de *alidada* á la parte de un instrumento destinada á determinar la direccion de la visual, en las distintas posiciones que deben ocupar las rectas que determinan los ángulos en el terreno (40).

Las alidadas son *fijas*, cuando ocupan una posicion invariable con relacion á las demás partes del instrumento que entran á constituir, y en los demás casos *variables* ó *giratorias*, y pueden ser de varias clases.

87. **Alidada de pínulas**.—Se compone de una regla de metal AB (fig. 35), ordinariamente de $0^m,55$ de longitud, en cuyos extremos se elevan perpendicularmente á ella otras dos reglas P, P′, cuya altura suele ser $0^m,2$, llamadas *pínulas*, las cuales se hallan unidas á la AB por las charnelas *c* y *c′*. Unas clavijas *t* y *t′* sirven para mantener las pínulas en la posicion perpendicular á la regla AB, oprimiendo los rebordes *a*, *a′* en que terminan.

Dando un cuarto de revolucion á las clavijas, dejan de oprimir los rebordes respectivos, y entonces las pínulas pueden unirse á la regla AB, doblándolas por las charnelas *c*, *c′*. En esta disposicion se prestan á encerrarse cómodamente en una caja rectangular, lo que facilita el trasporte de la alidada.

Las pínulas tienen por objeto determinar la direccion de las visuales que deben tirarse á los extremos de los lados de los ángulos que se han de medir; para lo cual, cada una de ellas presenta una hendidura longitudinal bastante estrecha, *e*, *e′* y un rectángulo vaciado *r*, *r′* y dividido en dos partes iguales por una cerda, la cual se halla en prolongacion de la hendidura practicada en la misma pínula, de manera que ambas forman una misma recta.

El rectángulo *r* de una de las pínulas corresponde á la hendidura *e′* de la otra, y el *r′* de esta á la hendidura *e* de la primera.

Para dirigir las visuales se toma siempre como *ocular* la hendidura de la pínula que se halla del lado del observador, y como *objetivo* la cerda que se le opone en la otra pínula.

Las pínulas deben tener bastante altura para distinguir los puntos muy elevados ó muy deprimidos con respecto al plano de la regla. Esta debe ser mas estrecha en la parte *mn*, hácia la cual presenta un canto rebajado, con objeto de trazar cómodamente por ella líneas de lápiz sobre el plano en que la alidada debe insistir, cuando se hace uso de ella para la medida de los ángulos.

La recta determinada por la hendidura y la cerda de cada una de las pínulas debe ser perpendicular al plano de la regla. De aquí se deduce que ambas son paralelas y determinan un plano, perpendicular tambien al de la regla, llamado *plano de colimacion*, el cual debe contener á la recta *mn*, llamada tambien *línea de fé ó de colimacion*.

El canto rebajado de la regla suele tener grabada una escala, y á muchas alidadas acompaña un nivel de aire fijo á la regla AB para que se la pueda dar la posicion horizontal (29).

88. **Verificaciones y correcciones de la alidada de pínulas.**—1.ª *Que el canto* mn *de la regla sea una línea recta.*—(Geom. 33.)

2.ª *Que las cerdas de las pínulas sean perfectamente verticales cuando la regla* AB *está sobre un plano horizontal* (29). Basta observar si cubren á la vez exactamente al cordon de una plomada en su posicion de equilibrio.

3.ª *Que el plano de colimacion* (87) *tenga por traza sobre el plano de la regla la línea de fé* mn. Se observa si la visual pasa á la vez por las cerdas y el cordon de una plomada distante en dos posiciones opuestas de los extremos de la regla, en las cuales coincide la recta *mn* con otra trazada préviamente en el plano horizontal en que insiste la alidada. De no suceder así, existe un *error de colimacion* que no influye en la determinacion gráfica de los ángulos, siempre que se tenga cuidado de señalar una de las pínulas para que sirva constantemente de ocular, como veremos más adelante.

89. Cuando la alidada no cumple con todas las verificaciones á que debe satisfacer, es necesario recurrir á un constructor si ha de emplearse ventajosamente el instrumento en las operaciones sucesivas.

90. **Anteojo astronómico.**—El anteojo astronómico es un instrumento de óptica destinado á producir la imágen perfectamente determinada de un objeto lejano. Se compone de un tubo cilíndrico A (fig. 36), en el cual entra á frotamiento otro tubo B, que lleva una lente convergente *o*, llamada el *ocular* del anteojo. Este segundo tubo, abierto por uno de sus extremos, está cerrado por el otro, por medio de una placa en la que hay practicado un taladro *a*, por el cual se dirigen las visuales.

Otro tubo C, provisto de una lente acromática O, que se llama *objetivo*, por hallarse del lado de los objetos que se miran, puede moverse á lo largo del tubo A para hacer variable la distancia entre las lentes.

El movimiento del tubo C se verifica por el tornillo exterior M, que lleva en el eje un piñon *m*, cuyos dientes engranan con los de una barra dentada *b* unida al tubo C.

El interior de los tubos está recubierto de un barniz negro y mate, con objeto de que sea absorbida la luz que llega á él y no haga confusas las imágenes. Al extremo del tubo C suele adaptarse á frotamiento una pieza cilíndrica, que impide á la luz solar herir al objetivo, molestando la vista del observador é impidiendo la percepcion distinta de las imágenes.

91. **Retículo.**—El *retículo*, cuya seccion en sentido del eje del anteojo está representada en *r*, se compone de un pieza metálica circular *a* (fig. 37) con un taladro concéntrico, en el cual y en la direccion de dos diámetros perpendiculares entre sí, se hallan colocados dos hilos metálicos sumamente delgados, ó bien dos hilos de tela de araña ó filamentos de seda. Estos hilos se llaman *cerdas ó hilos del retículo*.

La pieza *a* puede moverse con los hilos lateralmente, aflojando uno de los tornillos *t* y apretando el opuesto; y de un modo análogo puede subir ó bajar por medio de los *t'*. Todos estos tornillos tienen sus tuercas en el tubo *b* del anteojo, que con este objeto suele ensancharse á las inmediaciones del retículo.

Muchos retículos modernos tienen solo un tornillo lateral; ocupando el lugar del otro un resorte, que oprimido cuando se aprieta el tornillo, obra por su fuerza elástica moviendo la pieza *a* cuando el tornillo se afloja. El inferior *t'* está sustituido análogamente por otro resorte.

92. **Distancia variable entre el ocular y el objetivo.—Tiro del ocular.**—La aplicacion del anteojo á las operaciones topográficas exige que la imágen del objeto se obtenga con toda claridad, y que se forme exactamente en el plano del retículo. La primera circunstancia se obtiene (90) por el movimiento del tornillo que hace correr al tubo del objetivo y coloca á esta lente á la distancia conveniente del ocular; la segunda por lo que se llama *tiro del ocular*, el cual varía con la vista del observador, pero en los límites ordinarios es independiente de las distancias variables á los distintos puntos que se observen. Cuando la imágen *ab*

(fig. 38) no se forma en el plano R del retículo, las visuales tiradas desde los puntos *o*, *o'*, *o''* situados delante del taladro que tiene el tubo T del ocular, presentan al cruzamiento C de las cerdas del retículo cubriendo sucesivamente á los puntos *m*, *h*, *h'* de la imágen. Cuando por el tiro del ocular coincida *ab* con R, el punto C cubrirá al *m* en todas las posiciones del ojo del observador.

93. **Eje óptico del anteojo.—Direccion de la visual.** —*Eje óptico* del anteojo es el eje principal comun á ambas lentes, y contiene en su prolongacion al punto del objeto observado, cuya imágen se forma en él. El eje óptico coincide sensiblemente con el de figura del tubo del anteojo, y es la recta que determina la *direccion de la visual*, que se emplea en las observaciones topográficas.

94. **Centracion del retículo.**—Para la determinacion exacta de la visual es indispensable que el cruzamiento de las cerdas del retículo se halle precisamente en el eje óptico (93). Si por el contrario se halla en la posicion *a* (fig. 39), fuera del eje óptico BA, la visual sería *ao* para la posicion *o* del objetivo, y *ao'* para lo *o'*, yendo á parar á distintos puntos A', A'' del objeto, diferentes de A, que se halla en el eje óptico, y en el que concurririan todas las visuales, cuando el centro del retículo estuviese en *c*, cualquiera que fuese la posicion del objetivo en su movimiento á lo largo del tubo del anteojo.

Para *centrar* el retículo se dirige la visual á un objeto que presente una recta bien determinada *rs* (fig. 40), que se hace cubrir con la cerda *mm*, moviendo convenientemente el anteojo. Si suponemos que está fuera del centro de la seccion circular del tubo del anteojo, será una cuerda de igual magnitud en todas sus posiciones, y equidistará del centro. Dando una semirevolucion exacta al tubo irá á ocupar la posicion simétrica *m'm'*; y para hacer que la cerda ocupe la posicion *ab* de un diámetro, será preciso aflojar el tornillo *c* y mover el *d* hasta que equidiste de *mm* y *m'm'*, que pueden haberse señalado en un reglon, así como la paralela equidistante *ab*.

Haciendo despues coincidir el otro hilo con la misma recta *rs*, puede llevársele á ocupar la posicion del diámetro *cd*. Entonces el punto de interseccion de los hilos estará en el centro de la seccion del tubo y por consiguiente en su eje de figura.

Así, durante una revolucion completa ó un número cualquiera de revoluciones del anteojo, el cruzamiento de las cerdas cubrirá un mismo punto de observacion.

95. **Paralelismo de una recta con un plano dado de posicion.**—Para obtener una recta paralela á un plano T (fig. 41), de posicion dada, como por ejemplo la horizontal (29), se emplea el anteojo *b*, llamado *de verificacion*, cuyo tubo *s* está invariablemente situado entre dos cubos metálicos *c*, *c'* perfectamente iguales. Dirigiendo la visual por este anteojo á un objeto *a'* lejano y bien determinado, é invirtiéndole despues de modo que las caras superiores de los cubos vayan á ocupar la posicion inferior, se observará el punto *a''* en que generalmente va á parar la visual; y moviendo los tornillos del retículo hasta que termine en *a*, equidistante de *a'* y *a''* (94), la posicion *ba* del eje óptico del anteojo será la paralela al plano que tratábamos de determinar. Cuando en ambas posiciones la visual va á parar al mismo punto, como sucederia si desde luego el eje óptico ocupase la posicion *ba*, no hay que mover el retículo.

96. **Horizontalidad perfecta de una de las cerdas del retículo.**—Centrado el anteojo *b* (fig. 41) como acabamos de indicar (95), si le hacemos girar apoyándose constantemente en el plano sobre que insiste, el cruzamiento de las cerdas irá cubriendo sucesivamente los puntos *c*, *c'*, *c''* (fig. 42) de una horizontal cubierta constantemente por una de las cerdas del retículo si es tambien perfectamente horizontal; pero si no, solo cubrirá al punto *c* en la posicion oblícua *df* en que ahora suponemos á la cerda, y en las sucesivas *d'f'*, *d''f''* dejará descubierto á dicho punto. En este último caso se hace mover el tubo del retículo alrededor de su eje ó todo el tubo *s* si es posible alrededor de su eje de figura, hasta una posicion en que el punto *c* quede cubierto sucesivamente por los de la indicada cerda, mientras se halle en el campo del anteojo moviendo á este como hemos dicho.

97. **Alidada de anteojo.**—La alidada de anteojo está dispuesta de modo que sobre la regla AB (fig. 43) se eleva un soporte perpendicular á ella, al extremo del cual gira alrededor de su eje de figura y dentro de una anilla un eje paralelo á AB, á cuya extremidad puede el eje óptico del anteojo *m* describir un plano perpendicular á la regla. El plano descrito es el que hemos llamado (87) de colimacion.

Antes de proceder á las verificaciones y correcciones de la alidada de anteojo, expondremos los principios siguientes en que se fundan.

98. **Perpendicularidad de una recta con respecto á**

su eje de rotacion.—Cuando una recta *ab* (fig. 44) es oblicua con respecto á su eje de rotacion *cd*, describe en su movimiento alrededor de él una superficie cónica y al cabo de una semirevolucion exacta ocupa una posicion simétrica *a'b'*, resultando iguales los ángulos *m* y *m'*, y siendo por lo tanto el *a'tb* doble del complemento de uno de ellos, y su bisectriz *zx* la direccion perpendicular que ha de darse á la recta dada *ab*. Esto podrá conseguirse marcando los puntos *r'* y *r''* en las direcciones de las posiciones simétricas *ab* y *a'b'* y á igual distancia de *t*, y señalando el punto *r*, medio de *r'* y *r''*, que determinará con el *t* la direccion de la bisectriz.

99. Si *cd* es la recta que gira alrededor de *zx*, se puede hacer que *ab* coincida con el eje de rotacion, empleando el mismo procedimiento.

100. La disposicion de *ab* en ambos casos puede adoptarse, cualquiera que sea la posicion del eje *cd*, ya vertical, horizontal ó inclinada.

101. Tratándose de la alidada correspondiente á un limbo cualquiera, se pone en coincidencia con su cero el del nonius y se dirige la visual á un objeto *r'* (fig. 44); dando despues una semirevolucion exacta al nonius, la alidada ocupará la posicion simétrica *a'b'*, y el arco correspondiente al ángulo *a'tb*, y que la alidada recorre para pasar de nuevo á la posicion *ab*, es el duplo del que tendria que recorrer para tomar la direccion *zx* perpendicular á *cd*.

102. Cuando la alidada es excéntrica, despues de establecer la coincidencia de los ceros, se dirige por ella la visual á un punto muy lejano A (fig. 45) en dos posiciones diametralmente opuestas B y D, observando en el nonius si ha dado una semirevolucion exacta, en cuyo caso la alidada será perpendicular á su eje de rotacion; porque hallándose entonces sensiblemente DC en prolongacion de CB, y siendo el ángulo *m* muy pequeño por serlo tambien la base DB del triángulo isósceles ABD, los ángulos iguales ACB y ACD son sensiblemente rectos, y la alidada por lo tanto perpendicular á su eje de rotacion. De no verificarse la condicion expresada, se corrige la posicion de la alidada haciéndola girar hasta que el nonius señale la mitad de la diferencia á 180° observada (101) por exceso ó por defecto, variando la posicion de la visual en la alidada hasta que vaya á parar de nuevo al punto A de observacion.

Si, por ejemplo, la lectura del arco recorrido es 181° 26', se hará que el nonius marque para la correccion 180° 43′. Si es 179° 14′ se hará que señale 179° 37′.

103. El procedimiento que acabamos de dar á conocer puede aplicarse como una modificacion del anterior (101).

104. **Verticalidad del plano descrito por una recta que gira alrededor de otra á la cual es perpendicular.**—Dispuesta la alidada *ab* (fig. 46) perpendicularmente á su eje de rotacion *cd* (98) es preciso que describa en su movimiento un plano vertical; lo que tendrá lugar cuando dirigida una visual por ella á la vertical *v*, y haciéndola girar alrededor de su eje, vaya la visual á terminar á los distintos puntos del cordon de la plomada; variando en caso contrario la posicion de *cd* hasta que se verifique la circunstancia de que nos ocupamos. El plano descrito por la visual será vertical (13), y horizontal el eje de rotacion.

105. **Verificaciones y correcciones de la alidada de anteojo.**—1.ª Es la misma que en la alidada de pínulas (88).

2.ª *Que el eje óptico del anteojo* V (fig. 41) *sea perpendicular á su eje de rotacion.*—Se verifica como hemos dicho (99) viendo si antes y despues de una semirevolucion del anteojo entre sus collares, la visual va á terminar á un mismo punto *r* (fig. 44). En caso contrario será preciso mover el retículo por los tornillos que mueven la cerda vertical (91), hasta que termine la visual en *r* á igual distancia de los puntos *r′* y *r″* observados en las dos posiciones indicadas del tubo del anteojo.

Si el anteojo no puede girar dentro del collar ó abrazadera en que se encuentra y sí dar una semirevolucion completa alrededor de *cd*, se invierte despues de dársela el aparato, de modo que cambien de posicion los extremos *c* y *d* de este eje, y se ejecuta la misma verificacion y correccion.

3.ª *Que el plano descrito por el eje óptico del anteojo sea vertical.*—Se verifica como hemos dicho (104), y se dispone verticalmente una de las cerdas moviendo el anteojo dentro del collar, hasta que cubra exactamente la cerda al cordon de la plomada.

4.ª *Que el plano vertical que describe la alidada tenga por traza sobre el plano de la regla la línea de fé.*—Se ejecuta como hemos dicho (88—3.ª), teniendo en cuenta que al dirigir la segunda visual es preciso volver el ocular al lado del observador. El error de colimacion á que puede dar lugar la posicion del retículo, no influye tampoco en la apreciacion gráfica de los valores angulares.

5.ª *Que el eje óptico del anteojo sea horizontal cuando coincide el cero del nonius con el del arco vertical* sz (fig. 43).—La visual V*a* (fig. 41) será paralela al tablero T ó al eje *ba* del anteojo *s* de verificacion, dentro del límite de apreciacion del nonius, cuando concurra con ellos en un punto *a* situado á una distancia suficientemente grande. En efecto, llamando x á esta distancia, d á la altura *dr*, y m al ángulo *rad*, se tendrá $d = x$ tang. m; de donde se deduce la ecuacion

$$x = \frac{d}{\text{tang. } m} \quad [8].$$

Si suponemos por ejemplo $d = 0^m,3$ y $m = 1'$, resultará $x = 1031^m$.

Por consiguiente, tomando el punto *a* á una distancia mayor, el ángulo m no llegará á valer 1', y el error será inapreciable en el instrumento. Todos los ángulos de elevacion y de depresion que se observen en lo sucesivo, estarán afectados de este error inapreciable.

106. **Tornillos empleados en los instrumentos.**— Además de los tornillos que solo se emplean para unir las diferentes piezas entre sí y facilitar el desarmarlas, hay otros que sirven para variar convenientemente sus posiciones relativas y se llaman *tornillos de correccion;* así como otros que tienen por objeto modificar los movimientos de las partes giratorias del instrumento, con relacion á las que están destinadas á permanecer fijas en posiciones determinadas.

107. **Tornillos de presion, y de ajuste ó coincidencia.**—El movimiento de una pieza N (fig. 47), que puede girar alrededor de un eje, apoyándose siempre sobre otra L destinada á permanecer en una posicion invariable, puede impedirse apretando un tornillo *a*, que oprime entre sí, y contra la pieza L á dos placas proyectadas en *p*: una de las cuales, invariablemente unida á N, imposibilita su movimiento. El tornillo *a* se llama *de presion* por lo que acabamos de indicar; ó de *movimiento rápido*, porque aflojándole puede girar la pieza N libremente.

El tornillo *a* entra generalmente á formar parte de un sistema adecuado de movimientos, con otro tornillo *c*, llamado de *ajuste ó coincidencia*, y tambien de *movimiento lento*, en razon á la disposicion del sistema. Por ella, una vez oprimido el tornillo *a*, se hace girar al *c*, que avanzando en su tuerca practicada en una esfera dispuesta en la placa superior *p*, lleva consigo á la pieza *b* y á la N invariablemente unida á ella. El movimiento que les comunica es muy lento, en razon á que el paso del tornillo es muy pequeño con relacion al rádio de su cabeza, á la que se aplica la fuerza que le hace girar.

La disposicion explicada varía en los instrumentos alemanes, en los cuales el movimiento lento se efectúa moviendo un tornillo, que se halla en contacto con una pieza unida á la parte móvil del instrumento y la oprime contra un resorte que obra en sentido contrario.

108. **Nonius ó Vernier.**—Se da este nombre á una parte de los instrumentos, que tiene por objeto llevar la apreciacion de las longitudes y de los valores angulares más allá de lo que permite la que puede obtenerse por las divisiones de la unidad lineal ó del limbo de un instrumento.

La invencion de este ingenioso método de apreciacion es debida al español Nuñez, de quien ha tomado el nombre, y modificada y generalizada por Vernier, matemático francés.

109. **Nonius recto.**—Sea AB (fig. 48) una regla dividida en centímetros y milímetros: tomando otra regla *ab* de 9^{mm}, y dividiéndola en 10 partes iguales, cada division de esta regla, que constituye el nonius, es $\frac{9}{10}$ de milímetro y se diferencia de la menor division de AB en $\frac{1}{10}$ de milímetro. Haciendo correr el nonius en el sentido *ab* de la graduacion hasta que coincida la division 1 del nonius con la 1 de la regla, el canto *a* del primero se hallará separado del A de la segunda en $\frac{1}{10}$ de milímetro; y del mismo modo se hallarian estos cantos separados en $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$.... de milímetro, cuando coincidiesen las divisiones 2, 3.... de ambas reglas.

110. *Usos del nonius recto.*—1.° *Dada una longitud cualquiera, determinar su valor.*

Para hacer aplicacion del nonius á la medida de una longitud, supongamos que se trata de la de un objeto CD (fig. 49), la cual además de tener 3 centímetros y 6 milímetros de la regla que se toma por unidad, contenga una fraccion *ra* de milímetro que se trata de valuar. Si á continuacion de dicho objeto y en contacto suyo y de la regla se coloca el nonius *ab*, que tambien suele hallarse dispuesto de modo que pueda correr á lo largo de la regla AB, no habrá más que examinar con cuidado cuál de las divisiones del nonius coincide con una de las de AB; y si fuese la octava por ejemplo, entonces la division 6 de la regla unidad AB, que podemos suponer hace veces de línea cero, se hallará separada de la línea cero del nonius la distancia de $\frac{8}{10}$ de milímetro, y este será el valor de la fraccion *ra* de milímetro que se trataba de valuar; de modo que en el ejemplo actual la longitud del objeto CD es $0^{m},0368$.

111. 2.º *Determinar el valor de una longitud cualquiera en la medida adoptada, para referirla ó tomarla despues en el terreno ó en el plano.*

Sea la distancia $0^{m},0368$ la que queremos fijar en la regla unidad. Haremos correr al nonius á lo largo de la regla AB (fig. 49 sin el cuerpo CD), hasta que el cero del nonius coincida con la division 6 milímetros del cuarto centímetro, y tendremos desde el punto A de la regla hasta esta division, la distancia $0^{m},036$; para tomar además los $\frac{8}{10}$ de milímetro, haremos correr al nonius en el sentido AB hasta que coincida la division 8 del mismo con la primera que encuentre de la regla, y la parte *ra* será el valor de la fraccion $\frac{8}{10}$ de milímetro que queríamos apreciar; con lo que se habrá determinado la longitud A*a* de $0^{m},0368$.

112. **Empleo de los limbos y las alidadas en la determinacion de los valores angulares.**—Situado el centro del limbo en el vértice O (fig. 34) del ángulo, y dirigiendo al punto A una visual por las pínulas fijas situadas en la recta que une las divisiones 0 y 180° del limbo, cuyas pínulas constituyen entónces una alidada fija (86), y otra al M por medio de otra alidada, giratoria alrededor del centro O del limbo, la amplitud angular *m* obtenida en la graduacion de este será el valor en grados del ángulo AOM. Cuando el limbo esté horizontal (29), el ángulo obtenido será el de los objetos reducido al horizonte.

113. Para determinar gráficamente el valor de este ángulo se horizonta un tablero Q (fig. 50), y marcando en él un punto O se dirige por las pínulas de la alidada AB, dispuesta de manera que el canto de su línea de fé pase por dicho punto, una visual tirada por *ab* y *cd* al punto M; trazando despues una recta por el canto

de la línea de fé. Haciendo lo mismo respecto al punto N, el ángulo AOA' que resulta trazado en el tablero, será el ángulo plano correspondiente al diedro que forman los planos determinados por las verticales V, V' y el punto O, cuya interseccion es la vertical OP de este punto.

114. **Nonius circular**.—Haciendo aplicacion de lo dicho (109) á los valores angulares, supongamos el limbo L (fig. 47) dividido en grados y medios grados, y tratemos de apreciar fracciones de medio grado ó del arco de 30', que es el límite de apreciacion del limbo. Si se toman 29 de las menores divisiones del limbo, y se divide en 30 partes iguales el arco que comprenden, la diferencia entre una division del limbo y una de las del nonius N será $\frac{1}{30}$ de 30', y el nonius apreciará de minuto en minuto. Así cuando coincida con una division cualquiera del limbo la 1.ª, 2.ª, 3.ª.... del nonius, la fraccion que se trata de apreciar valdrá 1', 2', 3'....

115. *Usos del nonius circular*.—Aplicando á la medida del ángulo AOM (fig. 34), el procedimiento explicado (112), suponiendo que la alidada móvil va provista de un nonius cuyo *cero* se halla en el plano de colimacion de la alidada (87), y coincide con el del limbo en su posicion primera OA, el arco recorrido por el cero del nonius para pasar á la segunda OM y apreciado con auxilio del nonius, será el valor del arco *m* con menos error que 1'. Supongamos, en efecto, que el indicado cero ocupa entonces la posicion *s* (fig. 47): observaremos que ha pasado de la division correspondiente á 62° 30', y que esta es la apreciacion que el limbo proporciona; para conocer el valor del arco que media entre la division considerada en el limbo y el cero del nonius, no habrá más que buscar la division del nonius que coincide exactamente con una de las del limbo, y que en el caso que consideramos es la 17, para obtener como hemos indicado el valor 62° 47' del arco recorrido.

Cuando aparecen coincidiendo dos ó más divisiones, á causa de la excesiva pequeñez del arco que comprenden, se elige la que ocupa la mitad del arco en que dichas divisiones se confunden á la vista.

116. Recíprocamente, para resolver el problema análogo al indicado (111), se haria coincidir primeramente el cero del nonius con la division del limbo que señala los 62° 30', oprimiendo entonces el tornillo *a* de presion, y moviendo el *c* hasta que la divi-

sion 17 del nonius coincida exactamente con la primera que encuentre del limbo, marchando en el sentido de la graduacion.

117. *Disposiciones particulares que presenta el nonius.*—Algunas veces el nonius se halla dividido en dos partes iguales, que se hallan á uno y otro lado del cero (fig. 51), estando ambas numeradas en el sentido de la graduacion. Esta disposicion permite dar al nonius una forma simétrica respecto del cero.

Cuando el limbo á que acompaña el nonius presenta dos divisiones, el nonius se halla doblemente graduado, ó repetido en sentidos contrarios; y debe tenerse presente que en la apreciacion de un ángulo cualquiera, se emplea el nonius que está graduado en el mismo sentido que la graduacion de que se hace uso en el limbo.

118. **Apreciacion de los nonius en general.**—Si representamos por d el valor de la menor division de la regla ó limbo, por x la diferencia entre una division d de la regla ó limbo y una del nonius, $d-x$ será el valor de esta última division. Llamando además n al número de divisiones del nonius, el valor de la longitud ab (fig. 48) ó del arco sr (fig. 47), será $(d-x)\,n$. El mismo arco en la regla ó limbo estará expresado por $d\,(n-1)$ y podremos establecer la ecuacion

$$(d-x)\,n = d\,(n-1) \qquad [9]:$$

de la que resulta

$$x = \frac{d}{n} \qquad [10].$$

Para hallar por lo tanto lo que el nonius aprecia, bastará *dividir el valor de la menor division del limbo por el número de divisiones del nonius.*

119. Aplicando á varios ejemplos la fórmula [10], obtendremos los resultados siguientes:

1.° Si $d = 0{,}5$ y $n = 5$, se tendrá $x = \dfrac{0{,}5}{5} = 0{,}1$.

2.° Si $d = 60'$ y $n = 30$, resultará $x = \dfrac{60'}{30} = 2'$.

3.° Si $d = 20'$ y $n = 60$, se hallará $x = \dfrac{20'}{60} = \dfrac{1200''}{60} = 20''$.

120. **Aparatos de union de los instrumentos con los piés en que se apoyan.**—La parte que principalmente constituye un instrumento se une al pié sobre que se dispone en las operaciones, por medio de aparatos, que tienen además por objeto

disponer convenientemente el plano ó limbo que se emplea en la determinacion de los valores angulares (112 y 113), así como el eje principal de rotacion.

Estos aparatos son de varias clases.

121. **Cubos ó mangos huecos**.—Se da este nombre á una pieza cónica, hueca interiormente é invariablemente unida al instrumento, destinada á ajustarse por medio de un tornillo de presion *p* (fig. 52) á una espiga sólida de la misma forma, en la cual termina el pié sobre que aquel ha de disponerse.

122. **Rodillas**.—Los mangos ó cubos, cuando van acompañados de articulaciones que permiten colocar el plano del limbo en varias posiciones, se llaman *rodillas*.

123. *Rodillas de nuez*.—El mango *m* (fig. 53) va atravesado en su parte superior por un tornillo T, que sujeta dos piezas esféricas cóncavas *p* en forma de conchas, las cuales abrazan una esfera que lleva el limbo del instrumento en su parte inferior: esta esfera se puede mover dentro de las *conchas* en todos sentidos, deteniendo este movimiento para colocar el plano del limbo en la posicion conveniente, por medio de la presion que ejerce el tornillo T.

124. *Rodilla de cilindros ó de Cugneau*.—Se compone de dos cilindros que forman un solo cuerpo, y cuyos ejes, perpendiculares entre sí y proyectados en *z* y *z'* (fig. 54), proporcionan una doble articulacion, del cuerpo de los cilindrós alrededor de *z*, y de la parte del instrumento á que se hallan unidos alrededor de *z'*; por la cual se mueve el plano del limbo en dos sentidos diferentes.

125. **Plataformas**.—Las plataformas son unos aparatos de union, que permiten dar una posicion horizontal al plano del instrumento de que forman parte, por medio de tornillos ó de la combinacion de éstos con charnelas ó con muelles. Describiremos las mas comunmente usadas.

126. *Plataforma de cuatro tornillos*.—Se compone de una placa circular AB (fig. 55) en la cual se hallan las tuercas *s*, *s'* correspondientes á los tornillos *t*, *t'*, y que se une por medio de un pasador á la espiga que constituye el eje del instrumento. Los tornillos apoyan sus cabezas en la placa inferior CD, fija al pié del mismo. Cuando se hace girar á dos tornillos *t*, diametralmente opuestos, se obliga á las tuercas á recorrer los pasos de la rosca, y elevan ó deprimen á la placa AB juntamente con la espiga y toda la parte superior del citado instrumento. La espiga suele terminar en una superficie esférica, que roza suavemente con las pare–

des interiores de la pieza E, la cual forma parte de la placa inferior.

El centro de la superficie esférica es un punto constantemente fijo de posicion, para todas las que se den á la placa AB.

127. Por el movimiento sucesivo de cada par de tornillos, puede darse á la placa AB (fig. 56) la posicion horizontal valiéndose del nivel de aire (25), colocándole primero en la direccion *tt*, y horizontando esta línea por los tornillos *t*, y despues en la *t't'*, que se horizonta del mismo modo por los *t'*. Entonces el eje de rotacion del instrumento, que es por construccion perperdicular á la placa AB, habrá tomado la posicion vertical.

128. La plataforma de cuatro tornillos está dispuesta otras veces de modo que estos ocupan una posicion horizontal, disposicion casi abandonada hoy por defectuosa.

Tambien se ha modificado empleando dos tornillos, que con el auxilio de dos charnelas ó de dos resortes opuestos, proporcionan asimismo el movimiento del limbo en dos sentidos perpendiculares entre sí. La figura 57 es la proyeccion horizontal de la plataforma de resortes *r*, *r'*, que determinan con los dos tornillos respectivamente opuestos las rectas *rt*, *r't'* en sentido de las cuales tiene lugar el indicado movimiento.

129. *Plataforma de tres tornillos.*—En la plataforma de tres tornillos, el eje *m* (fig. 58) del instrumento de que forma parte, es perpendicular á la vez al plano A y á la pieza de tres brazos B, en cuyos extremos se hallan practicadas las tuercas de los tornillos T, T', T'', los cuales apoyan sus extremidades en el platillo C fijo al pié del instrumento.

Por medio de los tornillos T, T' (fig. 59) la inclinacion del plano de la pieza B, y por consiguiente la de su paralelo A, puede variar en el sentido de la recta TT' que une estos tornillos, y por el T'', en el sentido de la T''*h*, determinada por el pié del tornillo y el punto medio de la TT'.

130. **Piés de los instrumentos.**—Se llaman *piés de los instrumentos* los aparatos destinados á sostenerlos á una altura conveniente, para poder manejarlos y servirse de ellos con comodidad en las operaciones. El pié de un instrumento está formado algunas veces de un simple *baston* ó *chuzo*, terminado en su parte inferior por un regaton aguzado de hierro, y provisto en la superior de una espiga destinada á recibir el mango hueco de los instrumentos (121).

131. **Trípodes**.—El más sencillo de todos se compone de un prisma triangular terminado por una espiga. A cada una de las caras del prisma se adapta el extremo superior de un pié de madera por medio de un perno de rosca, y se asegura por una tuerca móvil. Los piés terminan en regatones de hierro armados de puntas, que se introducen en los terrenos blandos y se adhieren perfectamente á las rocas.

En los trípodes generalmente empleados hoy, cada pié se compone de dos piezas longitudinales unidas por travesaños, y en vez de espiga tienen un taladro en el centro de la meseta M (figura 60) por el cual pasa una varilla *v* terminada en rosca por sú extremo superior *r*, con su correspondiente tuerca *t* para que se apoye en la parte superior de la meseta. Un resorte en espiral contenido en el ciiindro *c*, oprime á la tuerca contra la meseta cuando se atornilla la rosca *a* al cilindro; y se eleva la varilla por el mango *m* á fin de introducir el tornillo *r* en una segunda tuerca, practicada en la parte inferior de la plataforma del instrumento.

132. El *trípode cónico* de los instrumentos ingleses, llamado así por la forma que toma cuando está cerrado con objeto de proporcionar un cómodo transporte, tiene armados los piés de regatones de hierro que juntos forman un cono *c* (fig. 61), y por la parte superior llevan unas piezas de cobre *p* sujetas por medio de tornillos y terminadas en espigas, las cuales entran en otras piezas unidas á un platillo ó meseta *m*, formando una articulacion ó juego de charnela. Sobre el platillo va la rosca *r*, que se introduce en la correspondiente tuerca de que va provista la parte inferior de la plataforma del instrumento.

Para que la rosca *r* no reciba golpes que la inutilicen cuando no se usa el trípode, hay otra tuerca practicada en una pieza adicional *s*, llamada *sombrerete*, la cual se atornilla á la rosca *r*. Tres anillas de metal de diferentes diámetros a, a', a'', sirven para mantener unidos los piés.

133. **Medida de los ángulos azimutales.—Error de colimacion**.—Ya hemos indicado (112) la manera de obtener los ángulos azimutales y los situados en el plano de los objetos; y lo dicho entonces supone que el plano de colimacion de la alidada giratoria coincide exactamente con el de la fija, ó tiene por traza sobre el plano del limbo la línea (0—180°) de su graduacion. Cuando no sucede así, el ángulo aCm (fig. 62) que entonces forman es el *error de colimacion*. Este error no influye en la deter-

minacion del valor de un ángulo cualquiera: pues haciendo coincidir esta línea de fé con la (0—180°) del limbo, y dirigiendo la visual al punto A, al mover despues la alidada para dirigirla al B, el arco *mn* recorrido por la visual es exactamente igual al *ab* que ha recorrido la línea de fé, y que mide el valor del ángulo: pues todos los puntos que giran alrededor de un eje comun describen arcos del mismo número de grados.

134. **Alidada excéntrica.—Doble nonius.**—Cuando la alidada no gira exactamente alrededor del centro O (fig. 63) del limbo, sino del punto *d*, y coincide además con la recta que une estos puntos, como sucede en la posicion AB, el arco CB será exactamente la medida del ángulo COB de las visuales. En otra posicion cualquiera A'B' de la alidada, el arco CB' que se obtiene con la lectura del nonius, difiere del C*b'* correspondiente al ángulo CO*b'*, que se hubiera obtenido en O sin la excentricidad del eje de rotacion, en una cantidad B'*b'* que es el *error de excentricidad* para la posicion en que consideramos á la alidada. Este error está en su máximum B''*b''* cuando ocupa la A''B'', perpendicular á AB; pues la separacion *d*O de A''B'' y el diámetro *a''b''* es mayor (Geom. Teor. 20) que la *ed* que media entre A'B' y *a'b'*, ó en otra posicion intermedia.

135. El error de excentricidad puede eliminarse cuando la alidada está provista de dos nonius diametralmente opuestos, como sucede en la mayor parte de los instrumentos angulares. En efecto, observando la fig. 63, se tendrán las igualdades

$$Cb' = CB' + Bb' \qquad y \qquad Da' = DA' - A'a';$$

de las que resulta, en virtud de ser $Cb' = Da'$ y $B'b' = A'a'$,

$$2Cb' = CB' + DA' = CB' + (CA' - 180°),$$

y por último

$$Cb' = \frac{CB' + (CA' - 180°)}{2} \qquad [11].$$

Bastará por lo tanto *restar* 180° *del arco* CA' *obtenido por el nonius* A', *y hallar la semisuma entre este resultado y el arco* CB' *observado en el nonius* B'.

136. **Medida del error de excentricidad.**—El error de excentricidad para una posicion dada A'B' (fig. 63) de la alidada, se obtiene por la igualdad

$$CA' = CB' + B'b' + 180^\circ + A'a',$$

de la cual se deduce

$$B'b' = \frac{CA' - 180^\circ - CB'}{2} \quad [12].$$

que da el error $Bb' = A'a'$, en funcion de los arcos CA' y CB'.

137. **Medida de los ángulos múltiplos ó repeticion de los ángulos.**—Con los limbos de círculo entero se puede ejecutar la operacion llamada *repeticion de los ángulos*, y debida al matemático francés Bordá.

Para la repeticion del ángulo AOM (fig. 34), medido como hemos indicado (112), se fija la alidada al limbo y se repite la operacion que hemos dado á conocer, llevando al limbo y la alidada unidos hasta que esta última se halle dirigida al punto A: fijando entonces el limbo y dirigiendo la alidada á M se hallará un ángulo doble del primero; pudiendo obtenerse del mismo modo el triplo y los demás múltiplos sucesivos.

138. La repeticion de los ángulos corrige en general los errores que provienen de la excentricidad de la alidada (134) y de los defectos que siempre tienen las graduaciones de los limbos, por esmerada que sea su construccion. Sirve además para llevar la apreciacion de los ángulos más allá de lo que permite el nonius del instrumento. En efecto, el valor de un ángulo de 16° 5′ 30″, que no puede dar un nonius que aprecia minutos, se obtendria hallando la mitad del arco de 32° 11′, que puede obtenerse por la repeticion.

139. **Medida y repeticion de los ángulos situados en planos verticales.**—Los ángulos de elevacion y depresion (81) se cuentan á partir del cero del limbo, con el que debe coincidir el del nonius cuando la direccion de la visual en la alidada es perfectamente horizontal, cualquiera que sea el error de colimacion (133).

140. Los ángulos zenitales se obtienen del mismo modo y referidos á la vertical del centro del limbo, por hallarse el cero de su graduacion dispuesto de manera que coincide con el de la alidada cuando la visual es vertical.

141. La repeticion de los ángulos zenitales se obtiene disponiendo el limbo vertical á la izquierda del observador con respecto al instrumento y dirigiendo la visual por la alidada *vm′* (fig. 64)

al objeto *a*, con los ceros en coincidencia: dando despues una semirevolucion al aparato así constituido alrededor de la vertical *zc* del centro *c* del limbo, la alidada tomará la posicion *mc*; y llevándola de nuevo al objeto *a*, el arco *mm'* recorrido en sentido de la graduacion, igual al recorrido por el cero del nonius, será el duplo del ángulo zenital *zca*. Repitiendo la operacion á partir del valor angular hallado se tendrán los múltiplos pares del ángulo zenital. Si la graduacion del limbo estuviese dirigida en sentido contrario, se empezarían las operaciones disponiendo el limbo á la derecha.

142. Con los instrumentos cuyo limbo vertical está dispuesto (139) para la medida de los ángulos de elevacion y depresion, puede hallarse por la repeticion indicada (141) cuando el limbo gira libremente y con ambas clases de movimiento; el complemento del ángulo zenital obtenido será (81) el de elevacion ó depresion que se trataba de conocer.

143. **Verificaciones y correcciones de los limbos y de los nonius.**—Antes de emplear un instrumento debe observarse: 1.° Si las divisiones del limbo son exactamente iguales entre sí, así como las del nonius; lo que puede tantearse con el auxilio de un compás.

2.° Si en varias posiciones del nonius coinciden sus divisiones extremas con otras del limbo, siendo una mas las del primero (114).

3.° Si las cerdas todas de las alidadas fija y móvil (112) se hallan en un mismo plano vertical, ó se cubren exactamente colocando el observador su vista en el plano de dos de ellas. Cuando no es así, se origina un *error de colimacion*, que segun hemos dicho (133) no influye en la determinacion de los ángulos.

4.° Si el limbo está bien centrado, así como la alidada giratoria (112). Se verifica esta circunstancia midiendo todos los ángulos de un triángulo ó los de direccion (80) que forman entre sí los lados de un polígono, y viendo si su suma es igual respectivamente á 2R ó á 2R $(n - 2)$ para un polígono de n lados (Geom. Teor. 26); ó bien resulta un error menor que n veces el límite de apreciacion angular.

144. **Reduccion de los ángulos al horizonte.**—Tres puntos A, B, C (fig. 65) del terreno, determinan un plano, en general inclinado al horizonte. Supongamos conocida la longitud de los tres lados de este triángulo, y medido el ángulo BAC ó S, formado en el plano de los objetos A, B y C por las rectas AB y AC.

Concibiendo un plano horizontal que pase por A, y hallando las proyecciones respectivas B′ y C′ de los puntos B y C sobre este plano, las rectas AB′ y AC′ que unen estas proyecciones con el punto A formarán un ángulo *s*, el cual será la proyeccion del ángulo S medido.

La determinacion del ángulo *s*, deducida del ángulo observado, es lo que se llama la *reduccion de un ángulo* S *al horizonte*. Para llevarla á cabo es preciso conocer de antemano los ángulos *m* y *n* que los lados del ángulo dado forman con el horizonte (31).

La resolucion de los triángulos rectángulos ABB′, ACC′ nos dará á conocer los lados AB′, BB′ y AC′, CC′. Considerando la paralela CD á C′B′, se obtendrá el valor de BD, diferencia entre BB′ y CC′; con lo cual podrá resolverse el triángulo CBD y obtener el valor de CD = C′B′. Conociendo entonces los tres lados del triángulo AC′B′, podrá obtenerse el valor de *s*.

Las resoluciones indicadas pueden ejecutarse gráficamente ó por el cálculo.

Para hacer aplicacion de este último á un ejemplo particular, supongamos que se tiene:

$$AB = 140^{m},2\,; \qquad S = 62^{\circ}\,25'\,;$$
$$AC = 119,4\,; \qquad m = 20^{\circ}\,16'\,;$$
$$BC = 135,7\,; \qquad n = 14^{\circ}\,40'\,.$$

Se tendrá desde luego:

$$AB' = 140,2 \times \cos.\ 20^{\circ}\,16' = 131,5\,;$$
$$BB' = 140,2 \times \text{sen.}\ 20^{\circ}\,16' = 48,56\,;$$
$$AC' = 119,4 \times \cos.\ 14^{\circ}\,40' = 115,5\,;$$
$$CC' = 119,4 \times \text{sen.}\ 14^{\circ}\,40' = 39,23\,;$$

de cuyos valores se deducirá

$$BD = 48,6 - 30,2 = 18,4.$$

Calcularemos el lado DC haciendo

$$DC = \sqrt{135,7^2 - 18,4^2} = \sqrt{18075,93} = 134,4.$$

Por último tendremos el valor de

$$\cos.\ s = \frac{131,5^2 + 115,5^2 - 134,4^2}{2 \times 131,5 \times 115,5} = \frac{12569,2}{30376,5} = 0,4137803;$$

que corresponde á un ángulo $s = 65^{\circ}\,33'$.

145. Cuando uno de los lados del ángulo S es superior y otro inferior al plano horizontal de su vértice, el lado BD del triángulo que da el valor de CD es la suma de los catetos verticales CC′ y BB′ calculados como en el caso anterior.

146. **Reduccion de los ángulos al centro de la estacion.**—En el curso de las operaciones ocurre á veces tener que hallar el valor de un ángulo cuyo vértice es inaccesible, en el cual no pueden establecerse por lo tanto los instrumentos para ejecutar las operaciones necesarias; pero que estando perfectamente determinado este vértice y prestándose por su disposion á ser observado con facilidad desde otros puntos, es de la mayor importancia su eleccion para figurar entre los principales del plano. Tales son las veletas de las torres y los picos elevados que presentan las cordilleras.

Sea, por ejemplo, C (fig. 66) uno de estos puntos, y supongamos que tratamos de hallar el valor del ángulo que forman en él las rectas CA, CB, tiradas á otros dos puntos A, B, del terreno, los cuales ocupan posiciones ya determinadas. Trazariamos una recta DP que marcase la direccion del punto elegido á otro punto fijo distante P, midiendo además el ángulo m que forma con el lado CB en que se encuentra el punto D. Determinando el D′ en que la recta DP corta al otro lado del ángulo C, se pasa á medir el ángulo m' que con este lado forma la misma recta DP. La diferencia $m-m'$ de los ángulos observados da el valor del ángulo en el centro. En efecto, considerando tirada por D′ la D′E paralela á CB, se tiene

$$c = c' = s - m' = m - m'.$$

147. Este medio de resolver el problema dista mucho de la exactitud que proporciona el cálculo en el empleo del procedimiento siguiente. Sea c (fig. 67) el ángulo que se trata de conocer por medio del ADB $= m$, obtenido desde el punto D, que se ha elegido para la observacion y es diferente del vértice C en el que no puede hacerse. La posicion de los ángulos que en la figura aparecen, da á conocer (Geom. Teor. 14. Cor. 1.°) las igualdades

$$M = c + n' = m + n,$$

de las que se deduce

$$c = m + n - n' \qquad [13].$$

Los valores de n y de n' se deducen de la relacion conocida entre los lados de un triángulo y los senos de los ángulos opuestos, que da

$$\text{sen. } n = \frac{d \text{ sen. } s}{a}; \qquad \text{sen. } n' = \frac{d \text{ sen. } t}{b}.$$

148. La ecuacion [13] resuelve el problema y nos dice: que *para hallar el valor del ángulo en el centro, habrá que añadir al ángulo observado* m, *el ángulo* n *bajo el cual se vería desde el extremo B del lado CB del ángulo en el centro más próximo al punto de estacion la distancia entre este y el centro del ángulo, y restando de esta suma el ángulo* n' *bajo el cual se vería la misma distancia desde el extremo A del otro lado del ángulo en el centro.*

149. En el caso particular de ser $n = n'$, el punto D está en la circunferencia que determinan los A, B, C (fig. 68). En efecto, los ángulos iguales n y n', teniendo sus vértices respectivos B y A en la circunferencia, serán ángulos inscritos; y como además sus lados se cortan dos á dos, en virtud de la construccion que se hace para reducir el ángulo al centro de la estacion, y es evidente que dos de ellos lo verifican en el punto C, el D en que los otros dos se cortan pertenecerá tambien á la misma circunferencia.

Entonces la correccion es nula: pues el ángulo m observado es igual al c del centro de la estacion, toda vez que ambos tienen la misma medida. (Geom. Teor. 50.) Esto resulta tambien en la fórmula [13]; pues siendo $n = n'$, se reduce á $c = m$.

La condicion de ser D un punto de la circunferencia puede siempre conseguirse midiendo el ángulo t, si no se conoce por observaciones ó cálculos anteriores, y buscando por tanteos un punto D tal, que las rectas tiradas desde él á los puntos A y C formen un ángulo $t' = t$.

150. **Aplicaciones de la fórmula general.**—Supongamos que conocidos los valores de $CB = a$; $CA = b$ (fig. 67), medidos directamente el lado $CD = d$, así como los ángulos t y m, y deducido $s = m + t$, se trate de hallar el valor de c. Sean:

$$CB = 300^{m},2 \; ; \; CA = 284^{m},8 \; ; \; CD = 15^{m},3 \; ;$$
$$t = 66^{\circ}\ 44' \; ; \; m = 61^{\circ}\ 11' \; ; \; s = 127^{\circ}\ 55'.$$

Empezaremos por calcular los valores de n y n' (147), para lo que tendremos:

$\log.\,\text{sen.}\,n = \log.\,15{,}3 + \log.\,\text{sen.}\,52^\circ\,5' + \text{C.}^{\text{to}}\log.\,300{,}2 - 10;$
$\log.\,\text{sen.}\,n' = \log.\,15{,}3 + \log.\,\text{sen.}\,66^\circ\,44' + \text{C.}^{\text{to}}\log.\,284{,}8 - 10;$

de estas expresiones se deduce

$$\log.\,\text{sen.}\,n = 8{,}6043056\,;\quad \log.\,\text{sen.}\,n' = 8{,}6933139\,;$$

que corresponden á los ángulos

$$n = 2^\circ\,18'\,;\quad n' = 2^\circ\,50'.$$

Aplicando entónces la fórmula [13] resultará

$$c = 61^\circ\,11' + 2^\circ\,18' - 2^\circ\,50' = 60^\circ\,39'.$$

151. En la resolucion del problema que nos ocupa suele ser difícil la determinacion del ángulo t y de la distancia d, cuando no se divisa desde D (fig. 67) el punto C, y no se puede llegar al pié de la vertical de este punto. Sea por ejemplo C (fig. 69) el centro de una torre redonda invisible desde D. Midiendo los ángulos z y z' de las tangentes á la torre con la visual DA se tendrán desde luego las expresiones

$$t = z - x;\qquad t = x + z' \qquad [14],$$

de las que resulta

$$t = \frac{z + z'}{2} \qquad [15].$$

152. La distancia d se obtiene añadiendo á DH el rádio r de la torre, que se deduce de la ecuacion

$$r = \text{ED tang.}\,x = \text{ED tan.}\frac{z - z'}{2} \qquad [16],$$

en la que el valor de x se deduce (151) de la ecuacion $z - x = x + z'$.

El rádio puede obtenerse tambien midiendo la circunferencia, ó tomando la mitad de la distancia que media entre los piés de dos tangentes á la torre, perpendiculares á una recta cualquiera trazada en el terreno.

153. La distancia total CD $= d$ se deduce de la relacion conocida (Geom. Teor. 76), DH : ED : : ED : DG, de la que resulta

$$DG = \frac{\overline{ED}^2}{DH} = 2r + DH;$$

y despejando r,

$$r = \frac{\overline{ED}^2 - \overline{DH}^2}{2DH}.$$

Conocido el valor del rádio, se tendrá:

$$d = DH + \frac{\overline{ED}^2 - \overline{DH}^2}{2DH} = \frac{\overline{DH}^2 + \overline{ED}^2}{2DH}.$$

154. Si el centro C (fig. 70) estuviese en la interseccion de las diagonales de un rectángulo ó de un cuadrado, elegiríamos un punto D, desde el cual se pudiesen ver los extremos de una misma diagonal, y mediríamos el ángulo EDF y los lados DE y DF.

Estos datos determinarían el triángulo DFE; resolviéndole, hallaríamos el valor del ángulo DFC y el del lado FE.

El triángulo DCF sería tambien conocido, pues sabemos el valor de DF obtenido directamente, el del ángulo DFC por la resolucion del triángulo DFE, y el de CF igual á la mitad de FE. Resolviendo este triángulo, hallaríamos CD $= d$, y el ángulo CDF; añadiendo á este ángulo el FDA medido directamente, se tendrá el valor de t.

CAPÍTULO IV.

Instrumentos para la medida de los ángulos.

155. **Generalidades.**—Entre los instrumentos que sirven para la medida de los ángulos, hay unos que dan sus valores reducidos á una proyeccion horizontal, y otros los dan en el plano de los objetos, siendo preciso en este último caso reducirlos al horizonte (144).

156. Entre los muchos instrumentos de que hoy se hace uso, solo describiremos los más principales, dando principio por la *Brújula*, que además de servir por sí sola para determinar los ángulos de direccion, forma parte además de casi todos los instrumentos topográficos.

157. **Brújula.**—Antes de dar la descripcion de este instrumento, observaremos que en el globo terrestre existe un fluido llamado magnético, que tiene su máximo de intensidad en dos puntos variables de posicion, próximos á los polos, á los cuales se les da el nombre de *polos magnéticos*, así como el de *eje magnético* á la recta que los une. El plano que este eje determina con un punto cualquiera de la superficie terrestre, recibe tambien el nombre de *meridiano magnético* del mismo punto.

158. **Meridiana magnética.**—**Aguja imantada.**—La interseccion del plano meridiano magnético con el plano horizontal de un punto cualquiera es la *meridiana magnética* de este punto. Se la determina por medio de la *aguja imantada*, que es una lámina *ab* (fig. 71) de acero templado, en forma de un rombo muy pro-

longado, á la que artificialmente se ha hecho adquirir las propiedades de un iman natural. Está provista de una armadura *c* con una piedra ágata en su interior, en la que está practicada una cavidad cónica, cuyo vértice, que corresponde al centro de gravedad de la aguja, se apoya sobre el extremo aguzado de un estilo vertical *cd*. La accion que la tierra ejerce sobre los imanes que pueden moverse libremente, hace que los extremos *a* y *b* de la aguja se dirijan á los polos magnéticos N y S, determinando así la meridiana magnética. El extremo *a* que se dirige al Norte, y conserva el color azul del temple del acero, se llama *polo norte ó boreal* de la aguja, y el *b*, *polo sur ó austral*.

159. **Declinacion de la aguja magnética**.—El ángulo *d* (fig. 72) que la aguja magnética *ns* situada en un punto A forma con la meridiana astronómica NS del mismo, ha recibido el nombre de *declinacion de la aguja magnética*. Como las rectas NS y N'S' son perpendiculares (18) á la vertical del punto A, interseccion de los planos meridianos, el ángulo *d* que forman es la medida del diedro de los planos.

160. La declinacion, variable de un tiempo á otro es oriental ú occidental, segun que el extremo *n* de la aguja se dirige al Este ó al Oeste de la meridiana astronómica. En 1580 era oriental y de 11° 30'; en 1663 era nula, y despues se hizo occidental creciendo hasta 1814 en que era de 22° 34'. A partir de esta máxima desviacion, la declinacion, occidental siempre, ha disminuido, siendo actualmente en Madrid de 19° 20' al Oeste.

161. Trazada la meridiana astronómica de un punto A, puede conocerse la declinacion disponiendo en él la aguja magnética y observando el ángulo *d* que forma con ella. Recíprocamente, conocida la declinacion, se obtendrá la meridiana astronómica trazando una recta, que forme con la direccion de la aguja y al Este de la misma el ángulo *d*.

Dados estos preliminares pasemos á la descripcion de la brújula.

162. La *brújula* es un goniómetro que se compone de una aguja magnética *ns* (fig. 73), la cual se apoya en un estilo situado en el centro de un limbo graduado y contenido en una caja cuadrada de madera (A, A'). En el fondo de esta caja se hallan trazadas dos rectas NS, EO, perpendiculares entre sí y paralelas á sus costados, representando la NS la meridiana astronómica, y N, E, S, O los puntos cardinales. La meridiana magnética lo está tambien

por la recta Ca, que forma con NS un ángulo igual á la *declinacion* de la aguja (159).

Lleva el limbo una sola graduacion completa de izquierda á derecha en grados y medios grados, y está un poco elevado sobre el fondo de la caja, á fin de que la aguja enrase perfectamente con él, y sea más fácil la apreciacion de las divisiones. El cero de la graduacion corresponde al norte N, y las divisiones 90°, 180°, 270° respectivamente al Este, Sur y Oeste de la caja. El cero se marca ordinariamente con el número 360.

El limbo se cubre con un cristal para evitar los movimientos que el viento imprime á la aguja; y el cristal se sujeta con un aro circular de cobre, que en virtud de su fuerza elástica oprime las paredes de un pequeño resalto de la misma forma, que presenta la caja, é impide que el cristal se levante.

Una palanca acodada *m* sirve para separar la aguja del estilo sobre que se apoya, y sujetarla contra el cristal; con lo cual se evita el desgaste del extremo del estilo cuando no se opera con la brújula.

La palanca tiene su punto de apoyo cerca del extremo *b* de la caja, y descansa por su propio peso sobre el fondo de la misma cuando una pequeña pieza metálica *c*, que se mueve dentro de una cavidad practicada en la caja, deja descubierto dicho extremo; pero cuando se la mueve hácia este extremo hasta oprimirle, la palanca gira alrededor de su punto de apoyo, y el otro extremo que abraza el estilo, se eleva sujetando la aguja contra el cristal. A fin de que entonces no pueda caer la aguja, el cristal se halla elevado sobre el extremo del estilo que la sostiene, en una cantidad menor que la altura que tiene la armadura de la misma aguja. Una tapa de madera cubre la caja A, entrando en unas ranuras que esta presenta al efecto.

En uno de los costados paralelos á la línea NS hay una alidada de madera de pínulas como la de la figura, ó de anteojo sujetas á girar alrededor de un eje *d*.

El instrumento puede moverse alrededor de otro eje *e*, que forma cuerpo con la placa *r*, y fijarse al pié del instrumento por el tornillo de presion *t* (107).

El pié es una rodilla de juego de nuez (123), provista de un tornillo *t'*, que sirve para sujetarle á la espiga de un trípode ordinario (131).

163. En algunas brújulas el limbo es susceptible de un peque-

ño movimiento alrededor de su eje de figura, por medio de un tornillo que se halla á la parte inferior de la caja, y está provisto de un piñon cuyos dientes engranan con los que lleva una parte del limbo. La amplitud del giro se mide por el arco recorrido ante un estilo que corresponde exactamente al punto N.

164. **Uso de la brújula**.—Los ángulos de direccion de las rectas, tomados con este instrumento y referidos á la *meridiana magnética*, que es en este caso la recta dada de posicion (80) y que es una recta fija, reciben el nombre de *rumbos* ó *azimuts*, pudiendo tambien referirse á la *meridiana astronómica*. Sirve, por lo tanto, la brújula para determinar el *rumbo* de la recta que une dos puntos dados A y B (fig. 74): para lo cual se la coloca de modo que el centro del limbo se halle en la vertical de uno de ellos A, y se horizonta la caja haciendo que enrase la aguja con el limbo por ambos extremos en dos posiciones distintas de la caja, con lo que se hallará la brújula *en estacion*. Dirigiendo entonces la visual por la alidada al punto B, la graduacion z que marque el extremo azul será el rumbo de la recta AB.

Los rumbos pueden apreciarse en el limbo á simple vista hasta tercios ó cuartos de grado: el mayor error que puede cometerse por lo tanto en la observacion provendrá de tomar un tercio de grado por un cuarto, ó al contrario, fracciones que se diferencian en $20' - 15' = 5'$, que es el *límite de apreciacion*.

165. **Error de excentricidad**.—El rumbo hallado para AB (fig. 74) como acabamos de indicar, está determinado por el arco Nz, correspondiente al ángulo NAz, igual al BMN′, que es el rumbo de la visual CB, y diferente del BAN′, que es el que se trata de determinar. La diferencia NAr = B es el *error de excentricidad*, cuyo valor puede determinarse en cada caso resolviendo el triángulo ABC, cuando se conoce el valor de la recta AB y el de la excentricidad constante AC de la alidada; pues se tiene la relacion

$$\text{sen. } B = \frac{AC}{AB} \qquad [17].$$

166. El error de excentricidad puede eliminarse separando la visual á la derecha del punto observado en una cantidad igual á la excentricidad AC; lo cual puede conseguirse marcando con un color vivo en el pié del jalon que ha de colocarse en B, la excentricidad indicada, con objeto de juzgar por comparacion á las di–

ferentes distancias la cantidad en que debe separarse la visual.

167. **Comprobacion de los rumbos.—Observaciones directas y observaciones inversas.**—Trasladando la brújula al punto B (fig. 74), y observando desde él el rumbo de la recta AB, se ve si el que entonces señala el extremo sur de la aguja es el mismo que se obtuvo por la observacion directa.

168. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Que la aguja en todas sus posiciones sea un diámetro del limbo*: lo que exige que el estilo sea perfectamente perpendicular al plano del limbo, y que el punto de suspension y los extremos de la aguja estén en una misma línea recta.

Cuando el estilo es perpendicular al plano del limbo, la proyeccion de su extremo sobre este plano es precisamente el centro del limbo; entonces todas las posiciones de la aguja serán diámetros del mismo, y la diferencia de las lecturas hechas con los extremos de la aguja será constantemente de 180°.

Pero si el estilo no es perpendicular á dicho plano y se proyecta segun O*d* (fig. 63), existe una sola posicion AB, en la cual la aguja ocupa la de un diámetro, que es la de la proyeccion *d*O; y en esta sola posicion la diferencia de las lecturas es exactamente 180°. A partir de ella, la lectura de un rumbo cualquiera A'B' está afectada en un error B'*b*' tanto mayor cuanto mas se separa de la posicion AB, y que está en su máximum en la A''B'', perpendicular á la AB (134).

En virtud de esto, cuando en dos posiciones perpendiculares entre sí, la aguja no marque rumbos que se diferencien exactamente en 180°, estará descentrada, y se corregirá dando al estilo la posicion perpendicular al plano del limbo por medio de unas pinzas, cuando á la vista parece que no la tiene, ó rectificando cuidadosamente la aguja con un mazo.

169. Puede tambien evitarse esta correccion siguiendo el método (135), tomando los rumbos marcados por ambas puntas de la aguja en cada una de las posiciones de esta. Sea AB (fig. 75) la recta cuyo rumbo verdadero seria el arco *am* que llamaremos *r*, si la aguja estuviese centrada, pero que en el caso de estar descentrada como se vé en la figura, será el arco *an* la lectura con la punta azul que representaremos por *a*; la lectura con la punta blanca será el arco *ann*' en la direccion que marca la flecha, que señalaremos por *b* y que es mayor que 180°. Tendremos las siguientes igualdades:

$$am = an - mn\ ;$$

$$am = ann' + m'n' - 180^\circ\ ;$$

y sumando ordenadamente resulta

$$2am = an + ann' - 180^\circ\ ;$$

de donde

$$am = \frac{an + ann' - 180^\circ}{2}, \text{ ó } r = \frac{a + b - 180^\circ}{2}; \quad [18]$$

En la figura 76, la lectura con la punta azul es el arco $am'n$ siguiendo la direccion de la flecha y la lectura con la punta blanca es el arco an' menor que 180°, á cuyas lecturas llamaremos como antes a y b, y r al rumbo que buscamos y que es el arco $am'm$, resultando del mismo modo las igualdades

$$am'm = am'n - mn\ ;$$

$$am'm = an' + m'n' + 180^\circ\ ;$$

de donde sumándolas tendremos

$$2\,am'm = am'n + an' + 180^\circ\ ;$$

de donde

$$am'm = \frac{am'n + an' + 180^\circ}{2}, \text{ ó } r = \frac{a + b + 180^\circ}{2}; \quad [19].$$

Reuniendo las expresiones [17] y [18] en una sola, tendremos la siguiente fórmula:

$$r = \frac{a + b \mp 180^\circ}{2}; \quad [20]$$

que nos dice que *para obtener con una brújula, cuya aguja esté descentrada, el verdadero rumbo de una recta, se sumarán las dos lecturas obtenidas con la punta azul y con la punta blanca, restando de esta suma* 180°, *si la lectura con la punta blanca es mayor que esta cantidad, ó añadiendo dichos* 180° *cuando dicha lectura no llegue á este valor, y dividiendo en ambos casos el resultado por* 2.

Ejemplos: 1.° Sea $a = 36^\circ\,45'$ y $b = 215^\circ\,45'$ (fig. 75), tendremos

$$r = \frac{36^\circ 45' + 215^\circ 45' - 180^\circ}{2} = \frac{72^\circ\ 30'}{2} = 36^\circ\ 15'.$$

2.° Sea $a = 274° 30'$ y $b = 93° 15'$ (fig. 76), resultará

$$r = \frac{274° 30' + 93° 15' + 180°}{2} = 273° 52' 30''.$$

170. 2.ª *Que el eje de la alidada sea perpendicular á su eje de rotacion.*—Se efectúa la verificacion como hemos indicado (102), observando los rumbos a y b' que marcan respectivamente en la primera posicion y en la segunda de la alidada el extremo azul y el blanco de la aguja, que son exactamente iguales cuando existe la perpendicularidad que se busca. En caso contrario, se corrige hallando la semisuma de los rumbos obtenidos, moviendo la caja hasta que la aguja marque el rumbo así deducido, y llevando el cruzamiento de las cerdas á cubrir de nuevo al punto observado, por medio del movimiento de la cerda vertical del retículo.

De no ser posible alterar la direccion de la visual, como sucede cuando la alidada es de pínulas, habrá necesidad de obtener en lo sucesivo los rumbos por la doble observacion y la semisuma, que acabamos de dar á conocer.

171. 3.ª *Que la línea norte-sur de la caja sea paralela al plano de la visual.*—Cuando esta circunstancia tiene lugar, los rumbos están referidos exactamente al meridiano magnético (158) y se dice entonces que la brújula está *orientada.*

Cuando la línea norte-sur del limbo no es paralela á la direccion de la visual, el ángulo de estas líneas, que se mide por el que forma la norte-sur con una paralela á la otra, es el error de declinacion: el cual no influye en la posicion relativa de las líneas del plano, pues tiene siempre lugar en el mismo sentido, como el error de colimacion (133); pero sí en la posicion absoluta, y se hace desaparecer este error de declinacion con la orientacion definitiva del plano.

172. **Orientacion de la brújula**.—Para conocer si una brújula está orientada, se traza la meridiana astronómica (35) y se observa si el rumbo de esta recta (164) es de 340° 40′ que señala la direccion de la citada meridiana para la declinacion media actual (160). Si marca otro rumbo, su diferencia al que debe señalar será el *error de declinacion*, que será preciso añadir ó restar de todos los rumbos que se observen en lo sucesivo, segun haya resultado por defecto ó por exceso.

173. Cuando la brújula es de limbo móvil puede orientarse con

relacion al meridiano astronómico, haciendo girar al limbo (163) hasta que el estilo señale la graduacion 19° 20′ que marca la declinacion.

174. Cuando solo se quiere conocer la diferencia de orientacion de dos ó más brújulas, basta tomar con todas ellas el rumbo de una misma recta del terreno. Toda brújula que dé un rumbo mayor que la elegida para término de comparacion, la cual es conveniente que sea una brújula orientada, indicará un error al Oeste, y será preciso restar este error de orientacion de todos los rumbos que con ella se observen. Si, por el contrario, el rumbo de una brújula es menor, el error será al Este, y será preciso añadirle á los rumbos observados.

175. **Aplicaciones de la brújula**.—La brújula se emplea en la orientacion de los planos, como veremos mas adelante, determinando (164) el rumbo de una de las rectas que en él se consideran.

Haciéndola girar de Este á Oeste á partir de la posicion *cero* de la aguja, en que determina la direccion de la meridiana, las divisiones del limbo que van enrasando con su extremo azul en el sentido de la graduacion, dan los rumbos de cuantas rectas quieran considerarse en una vuelta de horizonte (88).

La diferencia de los rumbos de dos rectas da el ángulo que forman entre sí, afectado de un error de excentricidad (134), que es inferior al límite de apreciacion del instrumento (164).

176. **Límites del empleo de la brújula**.—*Límite mínimo*.—El conocimiento de que el error de excentricidad disminuye á medida que aumenta la longitud de la recta cuyo rumbo queremos hallar, nos permite fijar la distancia á que corresponde un error de 5′, que es el mayor que resulta de la lectura de los rumbos (164). Para distancias mayores, el error de excentricidad será inapreciable; y para ellas no hay necesidad de la correccion indicada (166). Despejando AB en la fórmula [17] (165), y haciendo en ella $B = 0° 5'$, y $AC = 0^m,11$, que es la excentricidad de las brújulas ordinarias, resultará

$$AB = \frac{0,11}{\text{sen. } 0° 5'} = \frac{0,11}{0,0014544} = 75,63.$$

La longitud $75^m,63$ es pues el *límite mínimo* que corresponde á la *longitud* que debe tener la recta cuyo rumbo queremos hallar.

177. *Límite máximo*.—El límite de apreciacion (164) da lugar

tambien á un error de desviacion en la construccion de los planos, que depende de la escala en que cada uno de estos se construye, y no debe exceder en la práctica de la distancia 0,^{mm}2, la cual se considera como el límite inferior de las que la vista puede apreciar. La desviacion indicada es un cateto de un triángulo rectángulo que tiene por ángulo opuesto el valor 5', como límite máximo, y cuya hipotenusa x, que es la longitud máxima de las rectas en el plano, se halla por la expresion

$$x = \frac{0{,}0002}{\text{sen.}0^{\circ}\,5'} = \frac{0{,}0002}{0{,}0014544} = 0{,}1375.$$

Este valor de x representa en la escala de $\frac{1}{1000}$ la longitud de 137,^{m}5, que es la mayor que debe tomarse para una recta cualquiera del plano referida á la meridiana por medio de la brújula.

En las escalas de $\frac{1}{5000}$ y $\frac{1}{20000}$, los límites correspondientes son 687,^{m}5 y 2750,^{m}0.

La magnitud real de 0,^{m}1375, límite de las rectas en el plano, es poco diferente de la que tiene la aguja magnética en las brújulas ordinarias.

178. **Brújula de limbo zenital.**—Esta brújula difiere de la explicada (162) en la pieza de union con el trípode, que es una plataforma de tres tornillos (129): lleva además fijo á la caja un nivel n (fig. 77) con sus tornillos de correccion b, un limbo dividido (l, l') susceptible de un pequeño movimiento por el tornillo de correccion r, que está á la parte posterior del instrumento representada en L, alrededor de un eje perpendicular á él, y fijo á la caja perpendicularmente á uno de sus costados. El tornillo r, semejante á los de ajuste ó coincidencia (107), gira sin avanzar en la pieza k unida al limbo, y su rosca se introduce en una tuerca fija invariablemente á la caja. Un segundo nivel (m, m') unido á la parte posterior del limbo, tiene su tornillo de correccion s, igualmente dispuesto que el r, estando una de sus esferas fija al limbo y la otra al tubo del nivel. Ambos tornillos se ponen en movimiento por medio de una llave.

La alidada de esta brújula es un anteojo astronómico (90) sujeto por las abrazaderas (h, h') á una pieza de metal que gira alrededor del eje del limbo (l, l'), y la cual lleva tambien los nonius v. El movimiento de la alidada puede ser á voluntad rápido ó lento por el sistema de los tornillos de presion a y de coincidencia c (107).

Todo el instrumento puede girar alrededor de una espiga fija á la plataforma, con movimiento rápido que puede impedirse por un tornillo de presion, ó bien puede hacerse el movimiento rápido ó lento á voluntad por el sistema de los a' y c'.

Los tornillos t de la plataforma descansan en la meseta del trípode (131).

179. El limbo zenital está dividido en medios grados, y el nonius aprecia minutos (114). El cero del limbo se halla en la parte superior del mismo; lo que no es un inconveniente para la medida de los ángulos de elevacion y depresion (133). Las graduaciones son dos, simétricas á partir del cero: la que está hácia la parte del ocular sirve para la apreciacion de los ángulos de elevacion, y la de la parte del objetivo para los de depresion. Cuando el eje del anteojo es horizontal, el cero del nonius coincide con el del limbo zenital.

Otras brújulas dan directamente los ángulos zenitales, que pueden deducirse (81) en la explicada. En ellas está el cero dispuesto de modo que el eje del anteojo es vertical cuando los ceros coinciden.

180. **Usos de la brújula de limbo zenital.**—Con el instrumento de que nos ocupamos puede obtenerse á la vez el rumbo y la pendiente de una línea AB (fig. 78) del terreno. Para esto se coloca la brújula en estacion en el extremo A de dicha línea, disponiendo verticalmente el eje de rotacion del instrumento: para lo cual se hace girar á la brújula alrededor de este eje, hasta que el nivel n (fig. 77) se halle en direccion de dos tornillos de la plataforma, y moviendo estos hasta que la ampolla acuse la horizontalidad: se coloca despues en la direccion del tercer tornillo de la plataforma, horizontándole por el movimiento de este solo tornillo: se repite la misma operacion hasta que el nivel permanezca horizontal en ambas posiciones, con lo que el eje será vertical. La operacion de disponer verticalmente el eje de rotacion se llama en general *horizontar el instrumento*.

Dirigiendo la visual al pié de un jalon situado en B, para lo que se hace uso del movimiento del instrumento alrededor de su eje vertical y del de la alidada por medio de los tornillos a y c (107), se obtendrá (164) el rumbo de AB: para hallar su pendiente se dirigirá la visual á un punto b elevado sobre B en una cantidad igual á la altura A*a* del instrumento; y el ángulo de elevacion *m* que se leerá entonces en el limbo zenital será la pendiente de AB (Acotaciones 34), á causa del paralelismo de *ab* y AB (Geom. Teor. 30).

181. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Consiste en la verticalidad del eje de rotacion de un nivel de aire. En efecto, si el eje *ab* (fig. 79) es perpendicular por construccion á un plano P, se pondrá horizontal una recta *cd* que pase por su pié, análogamente á como hemos dicho (51) y haciendo despues girar al nivel hasta que sea paralela segun *n'* á la *ef*, perpendicular á la *cd* del plano P, en el punto *b*, bastará hacer girar al sistema de las rectas *ab*, *n'* y *ef* alrededor de la *cd* hasta que el nivel acuse la horizontalidad; en cuyo caso el eje *ab* será vertical.

Esta operacion que tiene por objeto poner horizontales las dos rectas *cd* y *ef*, y por consiguiente el plano P que determinan, de donde resulta quedar vertical el eje *ab* que es por construccion perpendicular al plano P, se llama horizontar el instrumento (180), ó *determinacion de la verticalidad de su eje de rotacion.*

De una manera análoga se procede y se demuestra cuando el nivel está sujeto á girar tangente á una circunferencia de radio cualquiera cuyo centro esté en el eje, en cuyo caso se dice que el nivel es *excéntrico*, como en la fig. 80, que es la disposicion en que se halla el instrumento que nos ocupa (fig. 77). En virtud de lo expuesto, para determinar la verticalidad del eje de rotacion de este instrumento, se coloca el nivel paralelamente á dos tornillos de la plataforma y se horizonta por ellos, dándole despues una semirevolucion hasta que quede paralelo á los mismos tornillos y corrigiendo la desviacion que pueda haber en la burbuja, mitad por los tornillos *b* de correccion del nivel, y mitad por los indicados de la plataforma: se le lleva despues á su posicion primera, repitiendo la misma operacion anterior hasta que la ampolla no acuse desviacion alguna en dos de sus posiciones sucesivas, con lo que el nivel estará corregido. Disponiéndolo despues paralelamente á la recta determinada por el tercer tornillo de la plataforma y el punto medio de la que une los dos primeros, se le horizonta por el solo movimiento del tercero, y el eje de rotacion del instrumento será vertical.

182. 2.ª *Que la aguja en todas sus posiciones sea un diámetro del limbo.*—(168).

183. 3.ª *Que el eje del anteojo sea perpendicular á su eje de rotacion.*—(170).

184. 4.ª *Orientacion de la brújula.*—(171 y 172).

185. 5.ª *Que el plano descrito por el eje óptico del anteojo sea vertical.*—Esta verificacion es la explicada (104). La correccion se hace en algunas brújulas por el movimiento de unos tornillos que unen el limbo vertical á la caja de la brújula.

186. 6.ª *Que el eje óptico del anteojo sea horizontal, cuando se halla en coincidencia el cero del limbo zenital con el del nonius correspondiente.*

Para determinar en general la horizontalidad de una recta sujeta á girar alrededor de una vertical, supongamos que sea xz (fig. 81) el eje de rotacion, at la horizontal de t, y bc la recta inclinada que se trata de horizontar: se dirige por ella la visual á un reglon vertical Aa' y se marca el punto a' en que termina. Dando una semirevolucion, tomará la alidada la posicion $b'c'$ simétrica de la primera con relacion á xz, resultando iguales los ángulos m, m' como complementos de los iguales $c'tx$, xtc; y por consiguiente tambien lo son los m, y m''. Los triángulos rectángulos taa', taa'' resultan tambien iguales, y dan $aa' = aa''$: bastará por lo tanto dirigir la visual al punto a equidistante de los a', a'' observados en las dos posiciones de la alidada, para dar á esta la posicion horizontal.

187. La altura Aa de este punto medio sobre el pié A del reglon se halla en funcion de las alturas Aa', Aa'', observando que se tiene

$$Aa = Aa' - aa' \; ; \; Aa = Aa'' + a''a \; ;$$

que sumadas dan $2Aa = Aa' + Aa''$, en virtud de ser $aa' = aa''$; deduciéndose de aquí

$$Aa = \frac{Aa' + Aa''}{2} \qquad [21].$$

188. Para hacer ahora en el instrumento que nos ocupa que el eje óptico del anteojo sea horizontal, se establece la coincidencia de los ceros en el limbo zenital y se observa el punto en que termina la visual dirigida á un objeto vertical lejano, dando despues una semirevolucion exacta á la alidada y otra al instrumento, para dirigir la visual al objeto observado primeramente y ver si

va á parar al mismo punto: moviendo en caso contrario todo el limbo por su tornillo *r* (fig. 77) de movimiento general hasta que ocupe una posicion equidistante de los dos puntos observados (186 y 187). Despues se horizonta el nivel (*m*, *m'*) por su tornillo *s* de correccion particular, á fin de que pueda dar á conocer en lo sucesivo las descorrecciones del limbo.

189. **Declinatoria.**—Se compone de una caja rectangular de madera, en cuyo interior y hácia los lados menores se hallan dos arcos divididos *m*, *m'* (fig. 82) : los ceros de ambas divisiones corresponden á los puntos medios de los arcos, y determinan una recta paralela á los lados mayores de la caja. La graduacion de cada uno de los arcos se extiende hasta 40 ó 45° á uno y otro lado del cero. En el centro *a* comun á los dos arcos se halla un estilo que sostiene á la aguja magnética *ns*. La letra N indica la parte á que ha de corresponder el extremo *n* de la aguja, y sirve para colocar el instrumento orientado siempre de la misma manera.

El error de declinacion de que el costado *cb* de la caja puede hallarse afectado, no influye como hemos visto (171) en la determinacion de las posiciones relativas de las rectas cuyos rumbos se tomen con el auxilio de este instrumento.

190. **Usos de la declinatoria.**—Se emplea para hallar la declinacion de la aguja, y para trazar en un plano la meridiana magnética ó la astronómica. Para hallar la declinacion, es preciso que se tenga trazada en un plano la meridiana astronómica (35): se hace coincidir con esta línea el canto *bc* de la caja de la declinatoria, y entonces el extremo *n* de la aguja marca la declinacion.

Para trazar la meridiana magnética basta mover la caja hasta que la aguja coincida con la línea de los ceros, y trazar una línea por el canto *bc* de la caja.

La meridiana astronómica se traza moviendo la caja hasta que la aguja señale el ángulo de declinacion, que se supone conocido, quedando el punto N al Este del extremo *n* de la aguja: la línea trazada por el canto *bc* será la meridiana pedida.

191. **Plancheta.**—La *plancheta* es un goniógrafo por medio del cual se obtiene desde luego, representada en una hoja de papel, la proyeccion horizontal del polígono semejante al del terreno. Se compone de un tablero *mm'* (fig. 83) rodeado de un marco metálico para que no se alabée y destinado á que se coloque sobre él el papel en que ha de hacerse el dibujo del plano; y para cuando este ha de tener mucha longitud lleva el tablero en su parte inferior

unos cilindros *r*, *r'* dispuestos de modo que puedan girar alrededor de su eje en un solo sentido, y cuyo movimiento puede detenerse á voluntad, manteniéndolos en la posicion en que se quiera; en uno de ellos va arrollada una tela fina, á la cual se pegan de antemano, unos á continuacion de otros, los pliegos de papel necesarios. De esta manera, cuando el dibujo no puede estar contenido en el papel que ocupa el tablero, se arrolla en uno de los cilindros, y queda sobre el tablero el papel en blanco que se desarrolla en el otro.

En el marco suele estar señalada la graduacion de la circunferencia en que puede suponerse inscrito el cuadrado ó el rectángulo de la plancheta.

El tablero descrito es susceptible de un *movimiento de traslacion* en la direccion de la recta *mm'*, deslizándose una ranura longitudinal del reglon *pp'*, que forma cuerpo con él por medio de los tornillos *t*, *t'*, á lo largo de un reborde saliente de la pieza *oo'* que le forma con la parte inferior del instrumento. El movimiento de traslacion puede ser rápido ó lento por el sistema de los tornillos M y E (107). Toda la parte superior ya descrita es susceptible de un *movimiento de rotacion*, que puede impedirse apretando el tornillo de presion T. El instrumento que nos ocupa puede ocupar una posicion cualquiera, ya horizontal, vertical ó inclinada, por el juego de la rodilla de Cugneau (124) que le une á un trípode cónico (132). La rodilla se sustituye á veces por una plataforma de tres ó de cuatro tornillos (129 y 126).

192. La plancheta más generalmente usada (fig. 84) se compone sencillamente de un tablero susceptible del movimiento de rotacion indicado (191) con auxilio de una espiga metálica *e*, que se introduce en un cilindro hueco provisto de un platillo circular metálico y terminado por una esfera, la cual forma parte del juego de nuez (123) de la rodilla que une el instrumento á un trípode de tres brazos (131). El movimiento de rotacion que hemos indicado puede impedirse por medio de un tornillo de presion, que entonces sujeta el tablero al disco mencionado. Tambien puede darse á este tablero una posicion cualquiera, por el movimiento de la esfera dentro de las conchas de la rodilla.

193. *Partes accesorias.*—Al instrumento descrito acompaña un nivel de aire (25) destinado á horizontar el tablero, una declinatoria (189), la alidada de pínulas (87), ó de anteojo (97), y además una pieza curva de acero llamada *compás curvo* ó *compás de espesor*, provista en su parte inferior de una plomada, y en la superior

de un pequeño taladro circular c (fig. 85), en prolongacion del cordon de la plomada.

194. **Verificaciones y correcciones.**—Están reducidas á las del nivel (216), y de la alidada (231 y 233), ejecutando esta última sobre el tablero dispuesto horizontalmente (30).

195. **Orientacion de la plancheta.**—Se dice que se orienta la plancheta, cuando dada una línea en el terreno, y trazada su homóloga en el papel del tablero, se coloca éste en estacion de modo que uno de los extremos de la línea trazada en él se halle en la vertical del extremo correspondiente de su línea homóloga del terreno; hallándose además toda la línea del tablero situada en el plano vertical de la del terreno. Para conseguirlo, se colocará la plancheta en el extremo A (fig. 86) de modo que el punto a se halle próximo á la vertical del A, disponiendo tambien el tablero á ojo próximamente horizontal por medio de los piés del trípode, y rectificando despues la horizontalidad con el nivel de aire. Hecho esto, se coloca el compás de espesor de modo que su taladro se halle coincidiendo con a, y la alidada de manera que el canto de la línea de fé se ajuste exactamente á la recta trazada ab.

Valiéndose despues de los movimientos de rotacion y traslacion del tablero, se hace que la plomada caiga exactamente sobre el punto A, y que la visual vaya á parar á un jalon situado préviamente en el extremo B de la línea del terreno, sin que el compás de espesor ni la alidada dejen de ocupar en el tablero la posicion que se les habia dado. Para lograr que todas estas circunstancias se verifiquen hay necesidad de varios tanteos, teniendo que mover á veces todo el instrumento, en lo que suele emplearse mucho tiempo. Cuando se ha conseguido, se dice que la plancheta se halla *en estacion y orientada.*

196. Disponiendo la declinatoria sobre la recta ab (fig. 86) trazada en la plancheta, y moviendo su caja hasta que la aguja coincida con la línea *norte-sur*, se traza una recta por uno de sus lados mayores, con lo que se tendrá en el plano la direccion de la meridiana (190) y la plancheta estará orientada con respecto al meridiano magnético. Trasladando la plancheta á otro punto de estacion, haciendo que coincida uno de los lados mayores de la citada caja con la meridiana trazada en el tablero, y dando á este el movimiento de rotacion hasta que la aguja marque la graduacion cero, las rectas trazadas en el tablero ocuparán posiciones paralelas á las que tenian en la primitiva.

UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA TOPOGRAFICA - BIBLIOTECA - ESCUELA

197. **Usos de la plancheta.**—Se emplea este instrumento en la determinacion gráfica de los ángulos (113), orientando la plancheta (195) con respecto al vértice O (fig. 50) y á uno de sus lados OM, y dirigiendo despues la alidada al extremo N del otro lado. Del mismo modo que para M y N podrian determinarse las direcciones de O á otros puntos en una vuelta de horizonte (80). A veces basta obtener una orientacion aproximada, con el objeto de evitar los tanteos que hemos indicado; originándose un error de excentricidad, que no tiene influencia apreciable en el valor del ángulo, atendiendo al corto espacio en que puede tener lugar relativamente á la longitud de las rectas que en el terreno se consideran.

198. Disponiendo verticalmente el tablero de la plancheta y una recta trazada en él con el auxilio de la plomada, pueden obtenerse tambien los ángulos zenitales y deducirse los de elevacion y depresion (81).

199. **Escuadra ó cartabon.**—Se llama *escuadra* ó *cartabon* á un instrumento que tiene por objeto determinar en el terreno alineaciones perpendiculares entre sí. De las varias disposiciones que se dan á este instrumento, las mas usadas son la *escuadra prismática* (fig. 87) y la cilíndrica (fig. 88). Consta la primera de un prisma octogonal regular, con pínulas opuestas que determinan dos planos perfectamente perpendiculares entre sí, llamados *planos de colimacion*. Las caras laterales del prisma situadas entre las que van provistas de pínulas, lo están de unas hendiduras longitudinales, determinando así los planos bisectores de los ángulos diedros formados por los primeros; pudiendo obtenerse por lo tanto con la escuadra ángulos de 90, de 45 y de 135°.

Cuando la escuadra lleva en su parte superior una brújula, ésta se halla dispuesta de modo que la línea *norte-sur* de la caja está en el plano vertical de dos pínulas opuestas.

La escuadra cilíndrica está igualmente dividida por planos que pasan por el eje de figura del instrumento, así como lo está otra escuadra de forma *esférica*, que tambien se usa, por planos que son meridianos de la superficie y que forman entre sí los mismos ángulos que en las otras escuadras.

Un mango hueco une el instrumento á la espiga de un baston ó chuzo, que puede clavarse en el terreno.

Sería conveniente que la escuadra se moviese independientemente del mango: lo que se consigue en las escuadras modernas haciendo que el cuerpo de la escuadra se una con el mango por medio del tornillo *t* (fig. 52), que está fijo á la parte superior *m* de este último; y unido como acabamos de indicar puede girar con la pieza *m* alrededor de un eje *rs*, que forma cuerpo con la pieza inferior *n* del mango, la cual se puede afirmar á la espiga del chuzo ó á la de un trípode por el tornillo de presion *p*.

200. **Problemas que se resuelven con la escuadra.**—Con las escuadras se pueden resolver los dos problemas siguientes:

1.° *Formar un ángulo recto en un punto dado de una recta ó levantar una perpendicular á esta última.*

Se fija el instrumento verticalmente en el punto dado C (figura 89), moviéndole alrededor de su eje hasta que el plano de colimacion determinado por la hendidura *b* y la cerda *a* se halle en el plano vertical de AB; lo que tendrá lugar cuando la visual vaya á parar exactamente al punto A. Se mirará despues por la hendidura *m* y se hará colocar un jalon D que quede cubierto por la cerda *n*; haciendo señas á izquierda y derecha hasta conseguirlo, en cuyo caso con una nueva seña se mandará clavar el jalon de modo que se halle vertical: con lo cual los puntos C y D pertenecerán á la perpendicular pedida, por ser AB y CD las trazas sobre el terreno de los planos de colimacion de la escuadra, perpendiculares entre sí por construccion.

De un modo análogo se obtiene el ángulo de 45°.

2.° *Desde un punto dado fuera de una recta tirar otra que forme con ella un ángulo recto, ó bajarle una perpendicular.*

Se busca por tanteos un punto C de la recta AB desde el cual las visuales dirigidas sucesivamente desde *b* y *m* vayan á parar exactamente á los jalones situados en los puntos A y D.

201. Puede además determinarse el rumbo de la recta AB, en la que se halla el cero *a* del limbo de la brújula, observando el valor del arco *as* (164).

202. **Verificaciones y correcciones.**—Consisten las verificaciones en cerciorarse de que los planos verticales de las pínulas, así como los de las hendiduras, se cortan á ángulo recto; y si además los ocho ángulos que estos planos forman entre sí son de 45°.

Para lo primero se observará con la escuadra, que supondremos descorregida, un punto *r'* (fig. 44), y haciendo que la alidada ab tome la posicion de la cd, para lo cual tiene que recorrer el arco m, esta última pasará á ocupar la $a'b'$ recorriendo el arco $m'=m$ y la visual irá á parar á otro punto distinto r''. Podrá entonces corregirse la alidada si la disposicion del instrumento lo permite, haciendo (98) que $a'b'$ pase á la posicion xz, ó de no ser así será preciso hallar el punto r equidistante de r' y r'', que determinará con el de estacion t la perpendicular á cd.

Cuando la visual termina en el mismo punto en ambas posiciones de la escuadra, los planos de colimacion son exactamente perpendiculares entre sí.

203. El procedimiento que acabamos de emplear para la correccion, sirve además para resolver el problema 1.° (200) con una escuadra descorregida.

204. Puede tambien bajarse análogamente una perpendicular á una recta desde un punto dado exterior á ella, aplicando el procedimiento explicado (200—2.°), haciendo coincidir sucesivamente con la recta los dos planos de colimacion y hallando el punto medio de la porcion de recta comprendida entre los dos puntos así determinados, el cual será el pié de la perpendicular pedida.

205. Con respecto á las hendiduras que determinan los ángulos de 45°, puede trazarse un ángulo recto con las pínulas ya rectificadas, tomar longitudes iguales en sus lados, y colocando en uno de sus extremos el cartabon, orientarle con un jalon situado en el vértice del ángulo recto, y ver si la visual tirada por las hendiduras próximas va á parar á un segundo jalon dispuesto en el extremo de la otra distancia medida.

206. **Grafómetro.**—Es un goniómetro por medio del cual se obtiene la *amplitud*, ó el valor en grados, de los ángulos formados por las líneas que se consideran en el terreno. Consta de un limbo semicircular (l, l') (fig. 90) de doble graduacion en grados y medios grados. Dos pínulas (a, a') (b, b') fijas á las extremidades de la regla m, constituyen con ella una alidada fija. Otra alidada (n, n'), giratoria alrededor del centro del limbo, lleva en las extremidades de su regla los nonius, que aprecian minutos (114). Cada uno de los nonius sirve sólo para una de las graduaciones del limbo.

A este último acompaña una brújula, cuyo limbo está ordinariamente dividido de 2 en 2°; y algunos grafómetros llevan además uno ó dos niveles situados en prolongacion del plano del limbo.

La parte inferior del instrumento es una rodilla de juego de nuez.

207. **Usos del grafómetro.** — El grafómetro se emplea para la medicion de los ángulos en el plano de los objetos (82), y tambien para la de los ángulos azimutales (79], y los de elevacion y depresion; pudiéndose deducir de estos últimos los ángulos zenitales (81).

Los ángulos se miden en el plano de los objetos colocando el grafómetro en estacion en el vértice, y moviendo á la vez el limbo por medio del juego de la rodilla, y la alidada móvil alrededor de su punto medio, hasta que la visual tirada por cada una de las pínulas vaya á parar á uno de los puntos en que terminan los lados del ángulo que se mide: leyendo despues su valor en la primera ó en la segunda graduacion (85), segun que la alidada fija esté dirigida al objeto de la izquierda ó al de la derecha del observador.

Para la medida de los ángulos azimutales se dispone el limbo horizontalmente por medio de los niveles que le acompañan, ó por un nivel de mano (29) en caso contrario. En la práctica es suficiente la horizontalidad que proporciona la aguja de la brújula (164); procediendo en lo demás como hemos dicho (112).

Los ángulos de elevacion y depresion se obtienen dando al plano del limbo una posicion vertical por el movimiento de la rodilla, y haciendo al mismo tiempo que la línea (0°—180°) del mismo sea horizontal; todo lo cual se habrá conseguido cuando el centro C del limbo (fig. 91) y la division 90° queden cubiertos á la vez por el cordon de una plomada *p*, que se coloca delante del primero.

Con la plomada se juzga al mismo tiempo de la verticalidad dada al limbo, mirando á éste de canto, y observando si el cordon de la plomada queda paralelo á su plano.

Haciendo girar á la alidada móvil *ab* hasta dirigirla al punto M, extremo de la recta CM cuya pendiente se quiere determinar, el arco *ma* dará esta pendiente, que no es otra cosa que el ángulo de elevacion M*Cn*. El ángulo de depresion *n*CN, estaría medido por el arco *nr*.

208. Tambien puede emplearse el grafómetro para hallar una línea que forme un ángulo dado con otra línea tambien dada. Bastará para ello colocarle en el punto de ésta que ha de ser vértice del ángulo, dirigir la alidada fija al extremo de la misma línea, y to-

mar en el limbo (116) el ángulo dado. Un jalon colocado en la direccion que tiene entonces la alidada móvil determina con el punto de estacion la línea pedida.

Cuando el ángulo así determinado es de 90°, la segunda recta es perpendicular á la primera; y cuando es de 180°, se hallan en prolongacion una de otra.

209. **Verificaciones y correcciones**.—Las verificaciones y correcciones son las explicadas para los limbos (143), las cuales tienen en el grafómetro una aplicacion completa.

210. **Límite del empleo del grafómetro**.—Supongamos que el arco *rs* (fig. 92) es el límite 1′ de la apreciacion de los ángulos. Es evidente que en el espacio angular que comprenden las líneas *ar*, *as* indefinidamente prolongadas existen infinitos puntos, tales como el *c*, que determinan con *a* una recta *ac*, cuyo ángulo con *ab* no puede obtenerse con exactitud.

En efecto, el valor de este ángulo estará dado por el arco *mr* ó el *ms*, cometiéndose un error *rt* ó *ts*, que tiene por límite máximo 1′. Este error produce una desviacion en la direccion de la recta *ac*, que crece con la distancia, y vamos á determinar el límite máximo de la que puede mediar entre los puntos *a* y *c* en el terreno, para que al transportar el ángulo en una escala dada, la desviacion *dc* en el plano sea menor que el límite $0,^{m}0002$ de las longitudes apreciables á la vista.

Para conseguirlo, supongamos que el triángulo *adc* es rectángulo, y tendremos:

$$ac = \frac{dc}{\tan.\ 1'} = \frac{0^{m},0002}{0,00029} = 0,^{m}68965 \qquad [22]:$$

magnitud que corresponde á 3450 ó á 7000^{m} próximamente en las escalas respectivas de $\frac{1}{5000}$ ó $\frac{1}{10000}$.

211. **Pantómetra**.—Este instrumento, conocido tambien con el nombre de *goniasmómetro*, y debido á Fouquier, se compone de un cilindro (fig. 93) semejante al de la escuadra, y dividido en dos partes: la inferior está unida al trípode por medio de una rodilla de juego de nuez, y presenta en su superficie el limbo, que está dividido generalmente en grados, de derecha á izquierda; una hendidura corresponde al cero del mismo, y una ventanilla con su cerda á la 180, constituyendo ambas la alidada fija como en el grafómetro. Esta parte del instrumento se mueve alrededor de su eje

de figura dentro de las conchas de la rodilla, y se fija por el tornillo de presion de ésta. La parte superior del cilindro gira alrededor del mismo eje, é independientemente de la que lleva el limbo, por medio del tornillo *t*, fijo á esta parte, y provisto de un piñon cuyos dientes engranan con los de una rueda fija interiormente al cilindro superior. Este lleva el nonius *n*, y está provisto tambien de dos niveles tangentes en la base superior, y de una brújula dispuesta como la de la escuadra. Otra alidada cuya hendidura corresponde al cero del nonius, sirve de alidada móvil, y dos hendiduras determinan un plano perpendicular al de colimacion de esta última alidada. El nonius está dividido en 30 partes, por lo que aprecia de 2 en 2′ (119).

La pantómetra presenta otras disposiciones más sencillas que la que acabamos de describir, las cuales consisten en la supresion de los niveles ó de la brújula; y la más elemental se compone tan sólo de los cilindros y la rodilla.

212. **Usos, verificaciones y correcciones.**—Este instrumento se emplea para la medida de los ángulos azimutales, disponiendo verticalmente el eje del cilindro por medio de los niveles y el juego de la rodilla: despues se dirige la alidada fija al objeto de la derecha y la móvil al de la izquierda, observando el arco comprendido entre el cero del limbo y el del nonius, y que expresará el valor del ángulo (133).

Las verificaciones y correcciones son análogas á las del grafómetro (209).

213. **Límites del empleo de la pantómetra.**—Introduciendo en la fórmula (210) [22] el valor de la tangente del arco de 2′, se obtienen análogamente los límites de 1700^m y 3500^m.

214. **Teodolito de Trougthon.**—Este instrumento difiere en general del grafómetro y la pantómetra en la mayor apreciacion angular y en los detalles de su construccion, que hacen del teodolito un goniómetro mas á propósito que aquellos, para los usos á que se les destina. Sirve para la medida de los ángulos azimutales y los de elevacion y depresion; pudiendo deducirse de estos últimos los ángulos zenitales, aun cuando algunos permiten su determinacion inmediata.

El teodolito más sencillo de este constructor se compone de dos placas superpuestas *b* (fig. 94): en la inferior está el limbo azimutal, y en la superior dos nonius *n* en unos rebajos practicados en el borde de la plancha, los cuales forman una superficie cónica, que es prolongacion de la lateral del limbo que tiene la misma forma; esta disposicion hace más cómoda la observacion de las divisiones, que se facilita con la ayuda de una lente.

La plancha inferior forma cuerpo con una columna cilíndrica *d*, perpendicular á ella; esta columna es hueca y recibe en su interior otra tambien cilíndrica dispuesta perpendicularmente á la plancha superior, y en el centro de la misma; pudiendo así girar ambas planchas alrededor de un eje comun, ya unidas, ya independientemente la una de la otra, y en ambos casos con movimiento rápido ó lento á voluntad. Para que giren unidas se aprieta el tornillo de presion *a'*, y se hace uso del sistema de tornillos *a* y *c* (107): este movimiento puede tambien servir para hacer girar á la placa inferior independientemente de la otra, aflojando préviamente el tornillo *a'*; pero esto se ejecuta raras veces, y no es indispensable para los usos á que se destina el teodolito.

Fijo el tornillo *a*, se puede hacer girar á la plancha superior por el sistema de los *a'* y *c'*.

Sobre la plancha superior, y participando de todos sus movimientos, se halla una brújula cuyo centro está en el eje de rotacion de las planchas, dos niveles de aire cuyos ejes son perpendiculares entre sí, y los cuales se hallan provistos de tornillos de correccion particular, así como tambien dos caballetes sobre los que se apoyan los extremos de un eje paralelo al plano de la plancha. Alrededor de este eje gira un limbo semicircular graduado, perpendicular á él en su punto medio. El canto exterior de este limbo, que sirve para la determinacion de los ángulos de elevacion y depresion, es dentado y engrana con un piñon que da movimiento al limbo. Este piñon, que está oculto en la proyeccion vertical y se proyecta horizontalmente en *v*, se apoya en una pieza *h*, en la cual está tambien el nonius del limbo zenital. La plancha del nonius puede correr lateralmente cierto espacio, aflojando los tornillos que la sujetan; con este objeto las ranuras por las cuales pasan estos tornillos son bastante prolongadas lateralmente.

Paralelamente al diámetro (0 — 180°) del limbo zenital é invariablemente unida á él, se halla una regla *f* sobre la cual se elevan dos soportes que terminan en los collares de un anteojo astronómico, el que puede girar dentro de ellos alrededor de su eje de figura; los collares se cierran por unas clavijas *g*.

El retículo del anteojo en el teodolito tiene por lo regular tres cerdas; una está destinada á ocupar la posicion horizontal, y las otras dos forman un ángulo agudo, cuya bisectriz es perpendicular á la primera cerda.

Un nivel *m* unido al anteojo por su parte superior, y más generalmente por la inferior como representa la figura, puede variar de inclinacion con respecto á él por el movimiento de los tornillos *r*: otros tornillos *z*, dobles para cada extremo del tubo del nivel, sirven para hacer variar lateralmente la direccion de su eje.

La columna *d* termina por su parte inferior en una placa paralela á la plancha del limbo azimutal. Esta placa es á la vez la superior de una plataforma de cuatro tornillos *t* (126): la placa inferior de la misma se atornilla á la rosca en que termina el trípode (132).

La caja en que se trasporta el instrumento encierra además un segundo ocular con lentes azules para las observaciones solares, la plomada, un destornillador, y una palanca para mover los tornillos de correccion.

215. Los teodolitos de mayores dimensiones que el modelo descrito, tienen un tercer sistema de tornillos de presion y de coincidencia destinado á los movimientos del limbo zenital, en vez del engranaje que lleva el citado modelo; y en los más modernos la plataforma es de tres tornillos (129). Un segundo anteojo, llamado *de prueba*, puede fijarse á la columna *d* ó girar alrededor de ella, por un sistema de tornillos de presion y de coincidencia. Tiene además cada anteojo un segundo ocular que le convierte en anteojo terrestre. Un segundo microscópio está dispuesto para la lectura de las divisiones del limbo y nonius zenitales.

216. *Graduacion del instrumento.*—Los limbos azimutal y zenital están divididos en grados y medios grados, y los nonius correspondientes aprecian minutos (114), ó en tercios de grado con una apreciacion de 20″ (119).

El sentido de la graduacion es el de izquierda á derecha; y el limbo zenital presenta dos graduaciones que parten del cero situado en la parte inferior, y crecen á derecha é izquierda hasta 90°.

En la parte posterior del limbo zenital hay otra graduacion que da la *diferencia entre la hipotenusa* AB (fig. 30) *y la base* AC del triángulo rectángulo que forman estas líneas con la vertical BC, cuando la primera tiene una longitud de 100 metros.

217. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Que el eje óptico del anteojo coincida con su eje de figura ó de rotacion dentro*

de los collares.—Se sujetan todos los tornillos para que el anteojo no pueda tener otro movimiento que el de rotacion dentro de los collares, y se corrige la posicion de la cerda horizontal y de la bisectriz de las inclinadas, como hemos explicado (94).

218. 2.ª *Que el eje de rotacion del instrumento sea vertical.*—Se sigue un procedimiento análogo al que hemos dado á conocer (181), disponiendo uno de los niveles de la plancha superior en direcciones paralelas á la recta que determinan dos tornillos opuestos de la plataforma y corrigiendo las desviaciones de la burbuja, mitad por los tornillos de correccion particular del nivel y mitad por los que ántes hemos considerado en la plataforma. Colocando despues el mismo nivel en la direccion de los otros dos, se le horizonta por ellos, con lo que el eje de rotacion será vertical (181). Hecho esto, se hace desaparecer la desviacion que puede existir en el segundo nivel de la plancha superior, empleando para ello el solo movimiento de sus tornillos de correccion particular.

Si el instrumento está provisto (215) de un tornillo de aproximacion para el movimiento del limbo zenital, puede empleársele ventajosamente para la aplicacion del procedimiento anterior observando el nivel unido al anteojo, y corrigiendo despues particularmente los de la plancha superior.

219. 3.ª *Paralelismo del eje del nivel superior y el eje óptico del anteojo.*—Se da á este último la posicion horizontal (186), dirigiendo la visual á un punto, sacando el anteojo de los collares para colocarle de nuevo en ellos invertido, dándole una semirevolucion alrededor del eje vertical, y observando el punto en que va á parar la visual en la vertical del primero; despues se mueve el anteojo por el tornillo *v* (214) ó por el de coincidencia del limbo zenital (215), hasta que vaya á cubrir al punto equidistante de los dos primeros, en cuyo caso será horizontal: entonces se lleva la ampolla del nivel á su mitad por los tornillos *r* de correccion particular.

Por la correccion hecha sólo se consigue situar el nivel en un plano paralelo al eje del anteojo; pero entonces puede ó no serle perfectamente paralelo, considerados los ejes en el espacio: nos cercioraremos de que lo es, dando al anteojo dentro de los collares todo el giro que permita observar la burbuja del nivel, y viendo si equidista constantemente de las marcas del tubo; corrigiendo en caso contrario la posicion del eje del nivel por los tornillos *z* que le mueven lateralmente.

En efecto, cuando el nivel *mn* (fig. 95) está sujeto á girar alrededor de un eje de rotacion *ab*, el eje del nivel que le es exactamente paralelo, ocupa en el giro las distintas posiciones de la generatriz de una superficie cilíndrica, cuyo eje es *ab*, siendo por lo tanto paralelas y horizontales: la ampolla ocupará por esta razon en todas ellas el punto medio del tubo, siendo en nuestro caso, el eje de rotacion el eje óptico del anteojo. Pero si el eje del nivel es oblicuo al de rotacion, la superficie engendrada es un *hiperbolóide de revolucion* de una hoja, y la ampolla variará continuamente de posicion durante el giro, variando tambien la inclinacion de la generatriz.

El método expuesto es por lo tanto el que se emplea para cerciorarse del *paralelismo del eje del nivel con su eje de rotacion.*

220. El paralelismo de los ejes á que nos referimos puede obtenerse antes de la verticalidad del eje colocando el plano del limbo zenital en la direccion de dos tornillos de la plataforma, horizontando por ellos el nivel y viendo si la ampolla marca la horizontal, despues de haber sacado el anteojo de los collares y haberle colocado de nuevo en ellos invertido con relacion al collar que ocupaba cada uno de sus extremos en la posicion primera: la correccion necesaria si el nivel no queda horizontal, se efectúa con sus tornillos de correccion particular y los que hemos considerado en la plataforma. Se funda este procedimiento en lo que hemos expuesto (51).

221. 4.ª *Que el plano descrito por el eje óptico del anteojo sea perpendicular al eje de rotacion del limbo zenital.*—Esta circunstancia exige que el eje de rotacion sea horizontal, lo que tendrá lugar cuando sea paralelo á las planchas de los nonius. Nos aseguraremos de que así se verifica, dirigiendo la visual á una plomada, haciendo que el cruzamiento de las cerdas del retículo cubra uno de sus puntos, y viendo si cubre á los demás girando en el plano que describe alrededor del eje de rotacion á que nos referimos (104). La correccion, que es innecesaria generalmente por la esmerada construccion del instrumento, sólo puede tener lugar en algunos teodolitos en que los soportes del eje del limbo zenital están dispuestos sobre una placa, que puede variar de posicion relativamente á la plancha superior, con el auxilio de unas roldanas de tuerca que se ponen en movimiento por medio de una palanqueta.

222. 5.ª *Que el cero del nonius coincida con el del limbo zenital cuando el nivel, y por consiguiente el eje óptico del anteojo, sea ho-*

rizontal.—Si hechas las correcciones anteriores no existe la coincidencia de los ceros, se aflojan los tornillos que sujetan la plancha del nonius, y se la corre hasta lograr la coincidencia exacta, apretándolos de nuevo. Si no puede hacerse esta correccion, se tiene en cuenta el error de desviacion al apreciar los ángulos verticales; sumándole ó restándole de todos ellos, segun el sentido de la misma y el del ángulo que se lee.

Si el nonius marca, por ejemplo, 12′ subiendo cuando el nivel está horizontal, será preciso restar esta cantidad de todos los ángulos de elevacion y aumentarla á todos los de depresion. Lo contrario habría que hacer si el ángulo de error fuese bajando.

223. **Usos del teodolito.**—El teodolito se emplea para la medida de los ángulos azimutales, horizontándole por los tornillos *t* (fig. 94); para lo cual se dispone cada uno de los niveles de la plancha superior paralelamente á la direccion de dos tornillos opuestos, y se horizonta alternativamente cada nivel por los tornillos que determinan la indicada direccion paralela: con lo que las planchas quedan horizontales (127). La plataforma de tres tornillos se horizonta como hemos dicho (180), moviendo alternativamente los dos que son paralelos á uno de los niveles de la plataforma y el tercero que sirve para la horizontalidad del otro nivel, sin tener que dar giro alguno á las planchas del teodolito. Para medir un ángulo (112) se hace la coincidencia del cero de uno de los nonius con el del limbo azimutal, y en esta disposicion se dirige primeramente la visual al objeto de la izquierda, empleando para ello el sistema de tornillos *a*, *c* y el piñon que mueve el limbo zenital, ó bien el sistema análogo dispuesto para el movimiento de la alidada: fijo el limbo entonces por el tornillo de presion *a*, se afloja el *a′* para dirigir la alidada con la plancha de los nonius al objeto de la derecha, empleando ahora el sistema de los tornillos *a′* y *c′* juntamente con los de movimiento del limbo zenital.

Puede tambien obtenerse la medida del ángulo sin la prévia coincidencia de los ceros (80), y con más exactitud en caso necesario, tomando el término medio de las lecturas obtenidas en los nonius (135).

Se comprueban aproximadamente los ángulos por medio de los rumbos, y se orientan las líneas, valiéndose de la brújula; para todo lo cual se debe disponer el anteojo entre los collares de modo que el objetivo esté á la parte que corresponde al norte en el limbo de la brújula.

224. Medido el ángulo, y aflojando el tornillo de presion *a* puede dirigirse de nuevo la alidada al objeto de la izquierda, exactamente lo mismo que cuando los ceros coincidían y obtenerse (137) el duplo y los demás múltiplos del ángulo. Y cuando el instrumento tiene anteojo de prueba se puede aplicar el procedimiento que se llama de los múltiplos pares.

Con el teodolito se obtienen tambien las vueltas de horizonte (80) sirviendo el anteojo de prueba para dirigirle á un punto fijo lejano en cada posicion del limbo, y asegurarse de que no ha tenido éste movimiento alguno durante los que se dan á la alidada para dirigirla á los diferentes puntos de observacion.

225. Los ángulos verticales se obtienen como con la brújula de limbo zenital (180), leyendo los ángulos de elevacion en la graduacion que está á la parte del ocular, y los de depresion en la que se halla á la del objetivo del anteojo: apreciando siempre los minutos en la graduacion que se halla en el sentido de la correspondiente del limbo (117).

226. *Reduccion de las distancias al horizonte.*—Puede obtenerse esta reduccion observando la graduacion posterior del limbo zenital. Supongamos que la recta dada tiene 120,^{m}4 de longitud, y que su pendiente es 10° 26′ (71): observando la graduacion indicada, veremos que marca 1,52 próximamente; hallaremos entonces la diferencia correspondiente á la distancia dada, por la proporcion

$$100 : 1{,}52 :: 120{,}4 : x = 1{,}830;$$

y restando este resultado de la distancia medida, se obtiene tambien 118^{m},57 para la reducida al horizonte.

227. **Límites del empleo del teodolito.**—Hallando la tangente de 20″ que es 0,00009696, y sustituyéndola en la fórmula [22] (210), resulta para la escala de $\frac{1}{5000}$ la distancia de 10313,^{m}5, y la de 20627^{m} para la de $\frac{1}{10000}$, cuando el nonius aprecia de 20 en 20″. Respecto á la apreciacion de minutos, los límites son los mismos del grafómetro.

228. **Empleo de los instrumentos angulares en el trazado de las alineaciones.**—La determinacion de los puntos intermedios en el trazado de una recta cuyos extremos son dados, se facilita extraordinariamente, y se hace con más exactitud,

empleando cualquiera de los instrumentos angulares que tienen un anteojo susceptible de moverse en un plano vertical, como la brújula de limbo zenital, el teodolito y la alidada de anteojo cuando se hace uso de la plancheta. Para ello se coloca el instrumento en estacion en uno de los puntos extremos de la alineacion, se dirige la visual al otro, é impidiendo todo movimiento que no sea el del anteojo en sentido vertical, se colocan en la alineacion á partir de este segundo extremo y haciendo señales convenidas de antemano al auxiliar de la operacion, los jalones intermedios que sean necesarios; haciendo que sus piés coincidan sucesivamente con la direccion de la visual.

Tambien puede resolverse este problema con las alidadas de pínulas, cuando la alineacion es de corta extension.

229. **Determinacion de la meridiana astronómica por medio del teodolito.**—Sea M (fig. 96) el punto en que se quiere trazar la meridiana y ABCD el limbo horizontal del teodolito dispuesto de manera que su centro se halle en la vertical del punto M, y supongamos que la operacion se practica á las nueve de la mañana. Presentando el observador su hombro derecho al sol. tendrá á su derecha el Oriente ó Este, á su izquierda el Poniente ú Oeste, á su frente el Norte y á su espalda el Sur, estando representada por la curva E*abc*O la marcha del sol en su movimiento aparente. Disponiendo tambien el observador el cero del limbo horizontal á su izquierda en una posicion cualquiera, tal como la AC, se dirigirá la visual al astro y se tomará el ángulo horizontal AM*a*, que supondremos sea de 125° 20′, y el vertical correspondiente al mismo punto que supongamos sea de 25° 30′. Anotados estos ángulos, como desde las nueve hasta las doce van tres horas, se dejará pasar otro tanto tiempo, es decir, hasta las tres de la tarde, y volviendo á dirigir la visual al sol, conservando en el instrumento el mismo ángulo vertical de 25° 30′, se esperará á que el sol descienda hasta descubrirle por el anteojo y se tomará el nuevo ángulo horizontal AM*c* que supongamos sea de 85° 16′. Restando este ángulo del AM*a*=125° 20′ se tendrá el ángulo *c*M*a* de 40° 4′, y tomando su mitad resultará el *c*M*b* de 20° 2′. Se añadirá este valor al del ángulo AM*c* que tenía 85° 16′ y resultará el AM*b* de 105° 18′, que tomándole en el teodolito y plantando jalones en la direccion de la visual M*b* (228) dirigida por el anteojo, se tendrá trazada en el terreno aproximadamente la meridiana NS del punto M.

En la práctica para hallar por este método la meridiana, que se-llama por *las alturas de sol correspondientes*, se tomarán varias alturas de sol por la mañana y sus correspondientes por la tarde, con el fin de hallar el término medio de los resultados obtenidos, lo que dará la meridiana con más exactitud y tambien pudiera suceder, si se tomase una sola altura por la mañana, que un obstáculo cualquiera, como una nube, un pico elevado de una montaña ó algun árbol frondoso, impidiesen tomar la altura correspondiente de la tarde.

Para dirigir las visuales al sol se hará uso del cristal oscuro que lleva el teodolito (214) y en las observaciones se colocará el disco tangente á los lados de los ángulos que forman los hilos del retículo.

230. **Instrumentos empleados en la medida indirecta de las alineaciones.—Estadia.**—Un anteojo astronómico, con un retículo de dos cerdas paralelas, fijas ó de distancia variable, constituye este *telémetro* (48), para cuya explicacion supongamos que sea AB (fig. 97) un objeto, cuya imágen ab se forma en el foco de la lente objetivo L que suponemos sea el h, y que en los puntos a y b se proyectan los hilos del retículo, situados en un diafragma. Sean además d y d' las distancias del objeto y de su imágen al centro óptico o de la lente, y m el ángulo micrométrico formado por las rectas tiradas por los extremos del objeto y el centro óptico o de la lente. La semejanza de los triángulos oAB, oab nos dará AB : ab : : d : d'; de la que se deduce

$$d = \frac{d'}{ab} \times \mathrm{AB}.$$

Si suponemos constante á la relacion $\frac{d'}{ab}$, lo que tiene lugar sensiblemente para los objetos muy lejanos, no habrá más que multiplicar esta razon por la magnitud AB interceptada en la mira para tener la distancia que se busca.

Sea por ejemplo $0,^{m}004$ la separacion de los hilos del micrómetro, y $0,^{m}4$ la distancia d'; se tendrá

$$d = 100 \times \mathrm{AB} \qquad [23];$$

y para una longitud de $2,^{m}37$ por ejemplo, interceptada en la mira, la distancia que se trata de medir será de 237^{m}.

231. La aplicacion de esta fórmula está muy lejos de ser exac-

ta, dependiendo del valor de d', cantidad variable con la distancia al objeto AB.

Para atenuar el error en lo posible, se gradúa la mira, colocándola á una distancia media de las que su longitud permite apreciar con el micrómetro.

232. Además de esta causa de error, hay otra que proviene de que el ángulo visual ó micrométrico varía con el tiro del ocular (92); y como éste es diferente por lo general para dos observadores que traten de hallar la longitud de una misma distancia, claro es que no deberá nunca emplearse la estadia, sin haber dispuesto convenientemente las cerdas del retículo si son variables de posicion, ó de haber dividido la regla en caso contrario.

Para lo primero, despues de haber medido exactamente en un terreno horizontal una alineacion de 100 metros por ejemplo, se observa con la estadia desde uno de sus extremos una regla dispuesta verticalmente en el otro, y se marca la parte interceptada en ella por las cerdas, la cual se divide en 100 partes iguales, cada una de las cuales corresponderá á un metro de distancia horizontal.

Para lo segundo se hará la misma observacion, haciendo uso de una regla dividida, y moviendo el tornillo que separa ó acerca una de las cerdas del retículo á la otra, hasta que el ángulo visual intercepte en la regla la distancia que en ella marca los 100 metros. Esta distancia puede ser la magnitud real del metro, en cuyo caso cada centímetro de la regla corresponde á un metro de la distancia horizontal; y apreciando en la regla los milímetros, se llevará hasta decímetros la apreciacion de las distancias.

233. **Uso de la estadia.**—Se disponen en los extremos de la alineacion la estadia y la regla, como hemos indicado para la correccion (232), y la simple lectura de la parte interceptada en el reglon dará (230) la medida de la distancia entre ambos extremos. Se hace uso de este instrumento con preferencia cuando dichos extremos son accesibles, pero existe entre ellos un obstáculo como una laguna ó un rio que no se puede atravesar.

234. **Reduccion de las distancias al horizonte por medio de la estadia.**—Cuando la recta que se trata de medir es inclinada como la AB (fig. 98), sería preciso colocar la mira en una posicion Bc, perpendicular á ella; pero como sería difícil conseguirlo con la prontitud y la exactitud necesarias, se la coloca verticalmente, obteniendo una lectura Bb que designaremos por

M. Esta lectura no es la verdadera B*c* ó m, la cual se obtiene observando que en razon á que el ángulo dcB es poco diferente de 90° por la pequeñez del ángulo micrométrico d en el triángulo dcB, resulta en el Bbc

$$m = \text{M} \cos. a \qquad [24],$$

siendo a el ángulo formado por las dos posiciones de la regla, igual al ABC que indica la pendiente de la recta dada, por tener el mismo complemento.

Si representamos ahora respectivamente por L y l la recta AB y su proyeccion CB, se tiene tambien

$$l = \text{L} \cos. a;$$

y poniendo en vez de L su valor representado por m en la ecuacion [24], se tendrá

$$l = \text{M} \cos.^2 a \qquad [25].$$

CAPITULO V.

Planimetría.

235. **Problemas.**—La medida de los ángulos y el trazado y medicion de las alineaciones suministran medios para la resolucion de muchos problemas, importantes los unos como auxiliares en el levantamiento de los planos, y los otros como destinados á la determinacion geométrica de los puntos del terreno. Nos ocuparemos por lo tanto de los más principales, indicando los procedimientos diferentes y los distintos instrumentos con cuyo auxilio pueden resolverse. Advertiremos que en todos ellos se suponen medidos horizontalmente los ángulos, así como las alineaciones, ó bien reducidos por el cálculo (69 y 144) á sus proyecciones horizontales.

236. **Por un punto de una alineacion, trazar otra que forme con la primera un ángulo dado.**—Bastará medir el ángulo azimutal (207), si no es conocido su valor, y construirle desde el punto dado (208). Con la brújula se halla tambien su amplitud (175); y determinando desde dicho punto el rumbo de la alineacion (164), se mueve la caja en el sentido conveniente, hasta que haya pasado por debajo de la aguja el número de grados que marca el valor del ángulo que se trata de obtener.

237. Con la escuadra, se mide una distancia cualquiera AD (fig. 99), así como la perpendicular DE á esta recta en el punto D. Tomando desde el punto dado A′ y en la recta dada A′C′ la magnitud A′D′=AD, así como la D′E′=DE en la perpendicular á la A′D′ en su extremo D′, la alineacion A′E′ determinará el ángulo pedido. Si el ángulo dado es obtuso se construirá su suplemen-

to. Cuando se tiene en grados el ángulo $A=27^\circ\ 13'$ que se trata de formar en A', se tomará una magnitud dada $A'D'=10^m$, por ejemplo, y se calculará la perpendicular por la ecuacion

$$D'E'=A'D'\times \text{tang. } 27^\circ\ 13' = 10\times 0{,}5143 = 5{,}^m143,$$

cuya longitud se tomará en ella desde D' para obtener el punto E' que unido con A' resuelve el problema.

La misma fórmula se empleará para hallar el valor del ángulo A, si no es conocido numéricamente, midiendo AD y DE, sustituyendo sus valores en la fórmula y despejando tang. A.

238. Se resuelve este problema con solo el auxilio de una cuerda y tres piquetes, clavando éstos en el vértice A (fig. 99) y en otros dos puntos D, E, tomado cada uno de ellos en cada uno de los lados del ángulo; y rodeándoles de una cuerda tirante, se determinará así el triángulo ADE y por consiguiente el ángulo A. Señalando los puntos en que la cuerda toca á los piquetes y trasportando el triángulo al punto A' en que se quiere construir el ángulo, en el cual se clava el piquete A, se fija el D con la cuerda tirante en D' que corresponde á la alineacion dada A'C'; y atirantando las porciones A'E' y D'E' de la misma, se fija la posicion del piquete E en E', que determinará con el A' la nueva alineacion.

239. **Levantar una perpendicular en un punto dado de una alineacion.**—Este problema es un caso particular del anterior (236), que se resuelve haciendo que la graduacion del instrumento marque para las alidadas el ángulo de 90°. Con la plancheta bastará orientarla con la alineacion (195) y levantar por una construccion geométrica una perpendicnlar á su homóloga en el tablero por el punto homólogo al del terreno; colocando despues jalones en la direccion de la visual dirigida por la alidada, cuya línea de fé se hace coincidir con la perpendicular trazada en el tablero.

240. Ya hemos dicho (200.—1.°) el modo de resolver este problema con la escuadra.

241. La cuerda, ó mejor la cadena, se emplea tomando las distancias AB, AC y BC (fig. 100), de las longitudes respectivas 4 metros, 3 y 5, con las que se formará un triángulo rectángulo en A á causa de ser (Geom. Teor. 71) $CB^2=CA^2+AB^2$ ó $5^2=3^2+4^2$. El punto A se coloca en el punto en que se ha de levantar la perpendicular, y AB en la línea dada.

Tambien se puede resolver tomando á ambos lados del punto dado D (fig. 101) las distancias iguales AD y DB, y fijando en A y B los extremos de una cuerda, que se pone tirante cogiéndola por su punto medio C, en el que se clava un piquete. Este punto da, unido con el D, la perpendicular pedida; que se determina mejor marcando análogamente el punto C'.

242. **Trazar una perpendicular á una alineacion dada, desde un punto exterior á ella.**—Puede resolverse hallando por tanteos, con las alidadas dispuestas como en el problema anterior (239), el pié de la perpendicular, como se dijo para la escuadra (200—2.º); pero es preferible medir la distancia del punto dado C (fig. 102) á un punto cualquiera B de la alineacion, medir el ángulo CBA y determinar la distancia de B al pié de la perpendicular por la relacion

$$DB = CB \times \cos. B;$$

tomando el valor hallado en la alineacion AB, se tendrá el punto D que determina con C la perpendicular pedida.

243. Tambien se aplica este procedimiento á la plancheta, orientando con la alineacion AB su homóloga trazada en el tablero (195), dirigiendo la alidada por el punto de esta recta que se halla en la vertical de A al punto dado C, y trazando una línea de lápiz por el canto de la línea de fé. Midiendo la recta AC se tomará su magnitud con arreglo á escala en la recta acabada de trazar, determinando así el punto homólogo de C: bastará bajar desde él una perpendicular á la recta del tablero orientada con AB, medir la distancia del pié de la perpendicular al punto que se corresponde verticalmente con A, y tomarla desde este punto en la alineacion, con lo que se tendrá el pié D de la perpendicular.

244. Con la brújula podrá tomarse el rumbo de AB, y estacionando el instrumento en C, marcar con jalones la direccion del rumbo que forma un ángulo de 90° con el hallado para AB.

245. Tratándose de la escuadra hemos dicho ya (200—2.º) el modo de resolver este problema; pero cuando el punto C no es visible desde el paraje hácia el cual debe resultar el pié de la perpendicular, se levanta en C una perpendicular CA á la recta que une este punto con uno cualquiera B de los de la alineacion conocida, determinando su interseccion A con esta alineacion y midiendo los lados AB y CB: entonces podrá determinarse la posicion del pié D de la perpendicular, calculando BD por la proporcion conocida (Geom. Teor. 70—1.º)

$$AB : BC :: BC : BD = \frac{\overline{BC}^2}{AB}.$$

Si se quiere conocer además la longitud de la perpendicular CD, se la deducirá de la proporcion

$$AD : CD :: CD : BD.$$

246. Con la cuerda ó cadena, se afianzará en el punto dado C (fig. 101) el punto medio de una porcion ACB de ella; despues se extenderán las dos partes AC y CB hasta que sus extremos terminen en la EF en dos puntos A y B, que se señalarán en el terreno; se dividirá despues la distancia AB en las dos partes iguales AD y DB, lo que se puede siempre ejecutar marcando con un piquete D el punto medio de una cuerda igual á AB: los piquetes C y D determinarán la perpendicular.

La division de la recta AB en dos partes iguales se puede ejecutar cogiendo la cuerda ó cadena por el punto medio C, estando sujeta por sus extremos en los A y B, transportando el punto C al C′, y clavando el piquete C′ de modo que la cadena quede bien tirante; la recta CC′ determina la perpendicular, y divide además á la AB en dos partes iguales.

Si el punto dado fuese el extremo A de la línea AB (fig. 103), que no se puede prolongar á la izquierda de A, se elegirá un punto C, en el cual se clavará un jalon; tomando despues una cuerda de la longitud CA se llevará de C á D, y en sentido de la alineacion CD se tenderá la misma cuerda de C á E; los puntos A y E determinarán la perpendicular (Geom. Teor. 50.—Corol. 2.º), por ser CD = CA = CE.

247. **Por un punto dado fuera de una alineacion, trazar otra paralela á la primera.**—Se mide el ángulo BFE (fig. 104) que forma con la alineacion dada AB la que determina uno de sus puntos F con el exterior dado E; y trasladándose á este último punto se trazará una alineacion EC, que forme con la FE un ángulo FEC = BFE, la cual será la paralela pedida. (Geom. Teor. 7.)

248. Con la plancheta se resuelve este problema gráficamente siguiendo el mismo procedimiento.

249. Empleando la brújula, bastará trazar desde E una alineacion del mismo rumbo que el obtenido préviamente para AB.

250. Con la escuadra se bajaría una perpendicular desde el punto dado D (fig. 105) á la alineacion AB, se levantaría otra á esta recta desde uno cualquiera G de sus puntos, y tomando en ella desde G una magnitud GE igual á la longitud de la primera perpendicular, se determinaría el punto E, que unido con D daría la paralela pedida.

251. Haciendo uso de la cadena, trácese desde el punto dado E (fig. 104) una oblicua EF á la recta dada AB; por un punto G tomado en esta recta, y por O medio de EF tírese la GH, tomando con la cadena ó cuerda OH = OG, y los puntos E y H determinarán la paralela CD.

252. **Dividir una recta dada en un cierto número de partes iguales ó proporcionales.**—Sea la recta AB (figura 106): por los extremos A y B de esta recta se tiran las paralelas indefinidas AC y BD, sobre las cuales se toman á partir de A y B tantas partes de igual magnitud como expresa el número en que se ha de dividir la AB, colocando jalones en los puntos de division. Estos jalones determinarán un sistema de rectas paralelas entre sí, cuyas intersecciones *a*, *b*.... con la AB resuelven el problema.

Cuando sólo se trata de dividir una recta en dos partes iguales, se puede conseguir por una perpendicular (246).

253. Esta misma marcha se sigue para dividir una recta en partes proporcionales. En el caso en que haya que dividirla en dos, proporcionales á números dados, 3 y 5 por ejemplo, se toman estos mismos números de partes iguales en las paralelas AC y BD (figura 107), uniendo despues los puntos C y D. La interseccion M de CD con la recta dada divide á ésta en la proporcion pedida.

254. **Dadas dos rectas que se cortan en un punto, trazar por otro invisible desde él la recta que los une.** —Tírese por el punto dado D (fig. 108) la línea arbitraria BC, que cortará á las rectas dadas en los puntos B y C; tómese en la BD otro cualquiera *b*, y determínese el *c* por la proporcion

$$BD : DC :: Db : Dc\ ;$$

en el punto *b* fórmese el ángulo $Dbb' = DBA$, y en el *c* el $Dcc' = DCA$: el punto de interseccion *a* de las rectas bb' y cc' pertenecerá á la recta DA; pudiéndose determinar del mismo modo los puntos que se quiera.

255. Con la escuadra se resolveria tirando desde el punto dado D (fig. 108) perpendiculares á las rectas dadas, las que se dividi-

rían como hemos indicado para los segmentos BD y DC, y levantando perpendiculares á las primeras por los puntos de division, que determinarían con su punto de encuentro la alineacion pedida.

256. **Dividir un ángulo en dos partes iguales.**—Se mide el ángulo CAB (fig. 109), y tomando su mitad en el instrumento haciendo con precision la coincidencia del nonius, se asegura la alidada móvil en esta posicion y se coloca un jalon D en la direccion de la visual. Este jalon determina con el punto de estacion la direccion de la bisectriz del ángulo. Para comprobar se dirige la alidada fija al punto D, y si la visual tirada entonces por la móvil va á parar á B, el ángulo estará bien dividido. En el caso contrario, se dirige esta última al punto B, y se planta otro jalon por la alidada fija. Un tercer jalon equidistante de los dos que se han situado dará el punto de la bisectriz, que puede comprobarse como en el primer caso.

Aplicando el mismo procedimiento á cada una de las mitades halladas, se tendrá dividido el ángulo BAC en cuatro partes iguales; y así sucesivamente en 8.... 16.... 32....

257. Se resuelve gráficamente este problema con la plancheta siguiendo la misma marcha.

258. Con la cuerda ó cadena, tómense á partir del vértice A (fig. 109), en los lados del ángulo las distancias iguales AB, AC, y hállese despues el punto medio D de la BC, el cual, unido con el A, da la direccion de la bisectriz del ángulo BAC.

259. **Aplicacion de los problemas precedentes al trazado y medicion de las alineaciones.**—Muchas veces se hace imposible la aplicacion de los procedimientos explicados en el capítulo anterior para el trazado y medicion de las alineaciones, ya por ser inaccesible alguno de los puntos que las determinan, ya por obstáculos que las interceptan, impidiendo recorrerlas en toda su extension, ó bien ocultando á la vista las señales que determinan sus diferentes puntos. Es preciso entonces obtenerlas de una manera indirecta con el auxilio de los problemas que acabamos de resolver. Pasemos á la exposicion de los casos que con mas frecuencia ocurren en la práctica.

260. **Medida indirecta de una alineacion interceptada por un obstáculo ó inaccesible por uno de sus extremos.**—Se determina la magnitud de AB (fig. 110) eligiendo un punto exterior C y resolviendo el triángulo ABC, despues

de haber medido el ángulo C y los lados AC y CB; ó bien el lado AC y los ángulos adyacentes A y C, si el lado CB no puede medirse porque algun obstáculo lo impida. El mismo procedimiento se seguiría con la brújula determinando los ángulos como hemos dicho (175).

261. Con la plancheta, despues de medida una línea cualquiera EF (fig. 111) homóloga de la *fe* que se toma con la escala, y tomados con la plancheta en *f* y *e* los ángulos DFE y DEF, se verá el valor de *de* en la escala adoptada para la transportacion de la EF á la plancheta, y se tendrá la medida indirecta de la parte interceptada DE.

262. Con la escuadra pueden emplearse los procedimientos siguientes:

1.° Para determinar la YL (fig. 112) se levantará en L una perpendicular LN, que se medirá, otra perpendicular MN á la YN, y se hallará su punto de interseccion M con la LM: midiendo esta última línea se tendrá la proporcion

$$ML : NL :: NL : YL;$$

que nos dará la medida indirecta de la YL.

2.° Para la OQ (fig. 113) se puede tambien trazar una recta OP y sobre esta la perpendicular PQ; se medirán OP y PQ, y el triángulo rectángulo OPQ dará

$$OQ = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2}.$$

Si el obstáculo fuese de tal naturaleza que no permitiese trazar la OP, se bajarían las perpendiculares OO′ y QP′ sobre otra base O′P′, y midiendo estas tres líneas se tendría:

$$OQ = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{\overline{O'P'}^2 + (QP' - OO')^2}.$$

3.° Para medir la RZ (fig. 114) se levantará en R una perpendicular RT, y en T otra TX á la RT; trazando la alineacion que pasa por Z y el punto medio S de la RT, y prolongándola hasta que encuentre á la perpendicular TX, los triángulos iguales RZS y STX darán TX que se podrá medir, y se tendrá el valor de su igual RZ. Puede hacerse á XT la parte alícuota cualquiera de RZ que ST lo sea de SR.

4.° Tambien puede buscarse por tanteos un punto S (fig. 114) desde el cual se divisasen R y Z por las alidadas que forman el ángulo de 45°; con lo que resultaría RS = RZ.

263. Por alineaciones, supongamos que se trata de conocer la longitud de QR (fig. 115): tómese en la parte accesible y en su prolongacion una longitud cualquiera QP, y trácese á arbitrio en direccion y magnitud la PZ; por el punto S medio de la PZ y por el Q trácese la QSX tomando SX igual á QS, y se tendrán los puntos X y Z para trazar una recta ZXT hasta que encuentre á la RS prolongada en el punto T; los triángulos iguales STX y SQR dan TX = QR.

264. **Medida de las alineaciones completamente inaccesibles.**—Para hallar la longitud de una recta AB (figura 116) completamente inaccesible, se mide en el terreno accesible una base CD, cuyos extremos sean visibles entre sí y se vean desde ambos los puntos A y B. Mídanse además los ángulos ACD, BCD, CDA, CDB, que forman con la base las visuales tiradas á los extremos de AB. Resolviendo los triángulos ADC, BDC se hallarán los valores de los lados CA, CB y el del ángulo comprendido ACB = ACD — BCD; con lo que podrá resolverse el triángulo ACB y obtener el valor de AB. Supongamos que ha resultado CD = 394,^{m}82; BCD = 28° 40′ 50″; ACD = 75° 28′ 40″; CDA = 41° 10′ 30″ y CDB = 83° 11′ 20″. Se obtendrá AC = 290,^{m}74; CB = 422,^{m}37; ACB = 46° 48′, y AB = 307,^{m}89.

265. La construccion geométrica de los triángulos, nos daría para los datos tomados con los goniómetros, y con la brújula construyendo los rumbos, la medida gráfica de la alineacion; la cual se obtiene directamente con la plancheta trazando en ella la base *cd* (fig. 117) y construyendo los ángulos (197) haciendo estacion sucesivamente en los extremos *c* y *d* de la base medida en el terreno: las intersecciones de las rectas que los determinan, darán la *ab* homóloga de AB, y podremos apreciar su longitud en la escala elegida para trazar la base *cd*.

266. La escuadra puede tambien emplearse en la resolucion del problema que nos ocupa. Sea AB (fig. 118) la recta dada: se elegirá una base CD en la parte del terreno en que se pueda operar libremente, y se bajarán sobre ella desde los puntos A y B las perpendiculares AC y BD que se prolongarán hasta su encuentro en los puntos E y F con las líneas AF y BE, trazadas por los puntos A y B y el medio O de la base CD. Se trazará y medirá la EF, que es igual y paralela á la AB. En efecto, los triángulos rectángulos

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA TOPOGRAFICA - BIBLIOTECA

iguales AOC y ODF dan AC = DF, y los BOD y COE tambien iguales dan CE = BD; de donde se deduce AE =BF, siendo además paralelas estas rectas por ser perpendiculares á CD; luego ABFE es un parelelógramo.

Si el terreno no permite operar con esta extension, se toman O*c* y O*d* iguales á las mitades de OC y OD, se levantan las perpendiculares *ac* y *bd* á la CD prolongándolas hasta su encuentro con AO y OB tambien prolongadas, y resultará *ab* igual á la mitad de AB, por la semejanza de los triángulos O*ca* y OCE, O*bd* y ODF, de la que resulta la de O*ab* y OEF ó su igual OAB. Los puntos *c* y *d* pueden ser en caso necesario otra parte alícuota cualquiera de OC ó de su igual OD.

Tambien puede resolverse haciendo que OB y OA (fig. 118) sean perpendiculares entre sí, y eligiendo los puntos E y F, que formen ángulos de 45°, con lo que se tendrá

$$OA = OE \text{ y } OB = OF \qquad (262 - 4.^{\circ})$$

y por tanto

$$AB = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}.$$

267. Por alineaciones, se trazarán desde el punto C (fig. 119) dos rectas CD y CE, y se dirigirán las alineaciones CA y CB, así como las DA y BE desde los puntos D y E; tomando C*m* y C*n* que sean respectivamente la misma parte alícuota de CD y CE, y tirando por *m* y *n* las paralelas *am* y *nb* á las AD y BE (251) y uniendo los puntos *a* y *b* por una recta, esta será la misma parte alícuota de AB. Midiendo por lo tanto la *ab*, no habrá mas que multiplicar el resultado por el número que indique las veces que deba estar contenida en la AB, y se tendrá el valor de esta recta.

268. **Determinacion de puntos intermedios de una línea cuyos extremos son invisibles entre sí.**—Sean A y B (fig. 120) los extremos de la alineacion: se hará estacion en un punto C desde el cual se vean estos extremos; se medirán el ángulo ACB y las líneas AC y BC, y se calculará el ángulo BAC del triángulo ACB para conocer la direccion de AB: marcando con jalones una línea indefinida cualquiera C*d*, se medirá el ángulo AC*d*, con lo cual se podrá calcular el lado CD del triángulo ACD; y tomando en C*d* una parte igual á CD, el punto D pertenecerá á la línea AB; pudiéndose determinar del mismo modo otro punto cualquiera E.

Si no se hallase un punto de estacion desde el cual pudieran verse los A y B, se elegirá uno C desde el cual pueda verse uno de los extremos B, y otro F desde el cual se vean el otro extremo A de la recta y el punto de estacion C. Se medirán las distancias AF, FC, BC y los ángulos AFC y FCB: se calcularán el lado AC y el ángulo ACF del triángulo AFC, y como entonces tendremos conocidos en el triángulo ACB los lados AC y BC y el ángulo ACB=BCF—ACF, se reducirá la cuestion al caso anterior.

La resolucion del triángulo ACB nos dará la medida indirecta de AB. Si el ángulo A fuese de 45°, y la BC perpendicular á la AC, se tendría

$$AB = BC, \text{ y } AB = \sqrt{2\overline{AC}^2}$$

269. Con la brújula se trazan desde A las rectas AD y AC (fig. 121) anotando sus correspondientes rumbos, y trasladando la brújula al punto B, trácense tambien líneas del mismo rumbo en el sentido conveniente para que corten á las primeras, determinando los puntos de interseccion D y C, con lo cual se tendrá el paralelógramo ACBD. Trazando la diagonal CD, su punto medio E pertenecerá á la recta AB; dividiendo en dos partes iguales las BC y DB, se trazarán por sus puntos medios H y F las rectas CF y DH, se hallará su interseccion G y este será otro punto intermedio de la recta AB. Conocidos los puntos E y G y colocando en ellos jalones se podrá trazar la recta AB.

270. Para hacer uso de la escuadra, elíjase un punto C (figura 105) desde el cual se descubran los extremos A y B de la recta, y trácense las CA y CB; en los puntos D y E medios de AC y BC colóquense jalones que servirán para trazar una recta HM, que será paralela á AB, sobre la cual se bajarán las perpendiculares AH y BM, que medidas deben resultar iguales; levantando despues en los puntos D y E perpendiculares á la HM y tomando en ellas las partes DF y EG iguales á AH ó BM, tendremos los puntos intermedios F y G de la recta AB, que nos servirán con los A y B para completar el trazado á derecha é izquierda del obstáculo.

La medida de la HM nos dará la longitud de AB.

271. Por alineaciones se pueden determinar las partes AF y GB (fig. 105) de la línea AB tomando un punto C en el terreno desde el cual se vean los extremos accesibles A y B; se trazarán y medirán las AC y CB, y tomando las EC y CD iguales á la mitad de

CB y CA, y trazando la DE, no habrá más que tirar á esta por A y B las paralelas AF y GB, que estarán en la alineacion AB. Midiendo además la DE, la proporcion

$$DC : CA :: DE : AB$$

nos dará la medida indirecta de la alineacion AB.

272. **Caso en que la extension de la línea es considerable.**—Si la naturaleza del terreno ó de los obstáculos no permite descubrir uno de los extremos desde el otro, ni hallar puntos intermedios desde donde se descubran los A y E (fig. 122) de la alineacion AE, se envía un peon á uno de los extremos E de la recta, con el fin de que á una hora dada haga una señal, bien disparando un arma de fuego ó haciendo una hoguera. El otro peon que se halla en A ó próximo á este punto, coloca un jalon A, y otro a de modo que se halle en la direccion probable de la señal, y por medio de ellos irá estableciendo los demás jalones c, d... procurando que las visuales tiradas en sentido perpendicular á la alineacion aproximada $Aabc$... que se va trazando y midiendo al mismo tiempo, salven los obstáculos. Cuando se llegue á un punto desde el cual se descubra el E, se bajará con la escuadra una perpendicular Ee á la AB que se medirá, concluyendo tambien la medida de la base Ae. Falta solamente rectificar las posiciones de los jalones a, b, c... para lo cual se levantarán en los puntos a, b, c... las perpendiculares indefinidas aa' bb'... moviendo en sentido de la línea AB cualquier jalon d desde el cual la perpendicular dd' no salve el obstáculo, y haciéndole tomar una nueva posicion d'' para levantar la perpendicular $d''d'''$; entonces por medio de las proporciones

$$Ae : Ee :: Aa : aa' \quad [26]:$$

$$Ae : Ee :: Ab : bb';$$

. . . .

se tendrán hallados los puntos a', b'... de las perpendiculares donde se habrán de trasladar los jalones a, b, c... debiendo examinar despues si se hallan colocados en el mismo plano vertical.

Lo mismo resultaría teniendo la Ee una posicion oblícua á la AB, trazando las aa', bb'... paralelas á la Ee.

La operacion se simplifica y basta sólo la primera proporcion [26] cuando al establecerse los jalones a, b... se pueden colocar de 50 en 50 ó de 100 en 100 metros, de modo que $Aa=ab=bc=$... pues entonces se tiene $Ab=2Aa$, y $bb'=2aa'$; $Ac=3Aa$, y $cc'=3aa'$... y así sucesivamente.

La medida indirecta de la recta AE se obtendrá, despues de medir Aa', por la proporcion $Aa : Ae :: Aa' : AE$.

273. **Prolongacion de las alineaciones á través de un obstáculo.**—Puede conseguirse por medio de resolucion de triángulos de un modo análogo al que hemos indicado (268), y tambien se puede prolongar la AB (fig. 123) sin resolver el triángulo BEC: formando un ángulo cualquiera CBE y tomando un punto E á arbitrio en la BE, se hará el ángulo BEC=ABE−CBE; tomando CE=BE y haciendo en C el ángulo BCE=EBC ó ECD=ABE, se tendrá la CD prolongacion de la AB. Para la mayor exactitud conviene tomar el punto E á bastante distancia de la AB.

Si se quiere además conocer la longitud de la BC se podrá resolver por el cálculo ó por la geometría el triángulo BEC. Tambien se podrá evitar la resolucion de este triángulo haciendo el ángulo CBE de 45°, y trazando la CE perpendicular á la BE; pues entonces resulta CE=BE, hallando BC como se ha dicho ya (268).

274. Con la brújula trácese un triángulo BFC (fig. 124) y una recta FD que vaya á parar al otro lado del obstáculo. Mídanse las BF y CF y tómense los puntos medios b y c, por medio de los cuales se trazará la bcd determinando su punto de interseccion d con la FD; tómese $Dd=Fd$, hállese el rumbo de la AB, y trasladando la brújula al punto D se establecerán jalones en direccion de la visual que forme el mismo rumbo. Midiendo la cd y doblando su valor se tendrá la medida indirecta de la parte CD interceptada por el obstáculo.

275. En el caso particular de hallarse en la alineacion un objeto muy elevado como la veleta de una torre M, se suspende el trazado en un punto C antes del obstáculo, y trasladando la brújula al otro lado se busca por tanteos otro D desde el cual la visual dirigida á M tenga el rumbo hallado, prolongándola con el mismo rumbo. Este procedimiento es expedito cuando no se trata de conocer la magnitud CD interceptada por el obstáculo.

276. Haciendo uso de la escuadra para prolongar la AF (figura 105), se levantará en el punto F una perpendicular FD á esta línea, dándole la longitud necesaria para que la perpendicular DE á ella resulte trazada fuera del obstáculo. Se elige despues un punto E de esta última de modo que satisfaga tambien á la condi-

cion de que la perpendicular EG á DE salve el obstáculo: y haciendo EG=FD, se tirará por el punto G la perpendicular GB á EG, la cual resultará en prolongacion de AF. En efecto, siendo AF y GB paralelas entre sí por serlo ambas á la DE, distando igualmente de ésta y hallándose situadas en la misma region del plano con respecto á ella, no son mas que una sola y misma recta AB. Tambien se puede resolver este problema levantando en A y F las perpendiculares iguales AH, DF, trazando la alineacion HD, y levantando perpendiculares á ella en los puntos E y M de su prolongacion. Haciendo EG=MB=DF, los puntos G, B así obtenidos determinarán la prolongacion pedida.

277. Este problema se aplica en las poblaciones á la rectificacion de las calles tortuosas, y al establecimiento de las líneas de fachada de los edificios con arreglo al plano de las alineaciones préviamente establecido.

278. Tambien se puede hacer uso de la escuadra levantando en B (fig. 125) una perpendicular BC á la alineacion dada AB y la CD á la AC; los triángulos semejantes ABC y ACD dan la proporcion

$$AB : BC :: AC : CD:$$

y se obtendrá el punto D, pudiéndose hallar otro nuevo punto del mismo modo.

La medida de la BD se obtendrá por la proporcion

$$AB : BC :: BC : BD;$$

que resulta de los triángulos ABC y BCD, semejantes tambien.

279. Con el auxilio de las alineaciones, se prolongará AB (fig. 126) trazando dos rectas AE y BE, que se encuentren en un punto E desde el cual se vea la parte que se halla al otro lado del obstáculo; se tomarán las EF y EG que sean la misma parte alícuota de las AE y BE, y los jalones colocados en los puntos F y G servirán para el trazado de la FL, que será paralela á la AD. Se trazarán las EC y ED en una direccion cualquiera al otro lado del obstáculo, se hallarán sus puntos de interseccion H y L con la FL, y en la série de razones iguales

$$EF : EA :: EG : EB :: EH : EC :: EL : ED$$

se podrán conocer EC y ED, y por lo tanto los puntos C y D de la prolongacion, supuesto que todas las demás líneas se pueden medir.

El valor de BC se determinará por la proporcion

EG : GH : : EB : BC.

280. **Prolongacion de una recta completamente inaccesible.**—Si AB (fig. 127) ha de prolongarse en el terreno accesible, se podrá hallar otro punto cualquiera E de la prolongacion, resolviendo como auxiliar el problema de medir la AB con los goniómetros ó con la plancheta (264), y al resolver el triángulo ABH con este fin, hallaremos tambien el ángulo ABH, y entonces como el HBE es igual á 180°—ABH y el BHM se puede medir, se conocerá en el triángulo BHE la base BH y los ángulos adyacentes; resolviéndole para hallar HE, se tomará esta distancia horizontal en el terreno, se formará en el punto E el ángulo DEH, suplemento de la suma de los otros dos, y se tendrá la prolongacion DE de la recta AB.

281. **Problemas acerca de la determinacion de rectas y de ángulos inaccesibles.—Medir un ángulo horizontal cuyo vértice es inaccesible.**—Sea el ángulo ABC (fig. 128) en cuyo vértice no es posible colocar el instrumento; se levantarán en uno de sus lados AB dos perpendiculares de igual magnitud *mn*, *m'n'*, y por los puntos *n* y *n'* se trazará la *ab*, que será paralela á AB, y midiendo el ángulo *ab*C se tendrá conocido su igual ABC.

Haciendo uso de la brújula no hay necesidad de establecer primero la paralela á uno de sus lados; pues bastaría tomar los rumbos de los AB y BC, de los que se deduciría (175) el valor del ángulo ABC.

Tambien se resuelve este problema con mucha facilidad estableciendo una base AB (fig. 129), y hallando el valor de los ángulos A y B, cuya suma, restada de 180°, da el valor del ángulo inaccesible C.

282. **Medir un ángulo horizontal en que el vértice y uno de los lados son inaccesibles.**—Sea el ángulo ABG (fig. 127) siendo sólo accesible el lado BG en su extremo G: elíjase un punto H desde el cual sean visibles los A, B y G; determínese la base GH, y háganse las mismas operaciones que para medir la recta inaccesible AB; y al resolver el triángulo AGB se hallará el valor del ángulo ABG que se buscaba.

283. **Medir un ángulo horizontal completamente inaccesible.**—Supongamos primero que el ángulo ACB (figu-

ra 130) sea saliente: se elegirán en el terreno accesible dos puntos D y E visibles y accesibles entre sí, tales que desde el punto D sean visibles los B, C y E, y que además dicho punto D se halle en el plano vertical que pasa por BC; debiendo reunir tambien el punto E las mismas condiciones respecto á los A, C y D. Mídanse los ángulos horizontales CDE y CED, y restando de 180° la suma de estos ángulos se tendrá el valor del DCE ó de su igual ACB.

Tambien puede hallarse en su caso más general, averiguando la magnitud de los tres lados del triángulo determinado por los puntos A, B y C (264), con lo que podrá resolverse el triángulo y hallar el valor del ángulo que se necesita conocer.

284. **Dada una recta AB** (fig. 131) **accesible solamente por uno de sus extremos B, determinar la direccion y magnitud de la perpendicular DC, bajada á dicha recta desde un punto accesible C.**—Mídase el ángulo horizontal ABC, y suponiendo trazada la CD se conocerá el ángulo BCD del triángulo rectángulo DCB; fórmese este ángulo en el punto C y se conocerá la direccion de la CD. Midiendo la distancia horizontal BC se podrá resolver dicho triángulo, y se tendrá la magnitud de la CD.

Las partes AB y AD se pueden conocer tambien: la primera por el triángulo BCD, y la segunda resolviendo el ADC en el cual se conoce DC, el ángulo recto ADC y el ACD, que es igual al ángulo horizontal ACB, que se puede medir, menos el DCB que ya se conoce.

285. **Dada una recta AB** (fig. 131) **accesible solamente por uno de sus extremos B, determinar la magnitud de la perpendicular DC, bajada á la misma desde un punto inaccesible C.**—Tómese otro punto E desde el cual se descubran los A, B y C, y sea visible y accesible el punto B: midiendo la base horizontal BE, háganse las mismas operaciones que si se tratase de medir la AC que tiene sus extremos inaccesibles. Cuando se tenga resuelto el triángulo ABC se determinará la magnitud de la CD y tambien se podrán hallar las partes AD y DB.

286. **Dada una recta inaccesible AB** (fig. 116), **tirarle una paralela por un punto accesible C.**—Elíjase un punto D desde el cual sean visibles los A, B y C: tomando la CD como base, háganse las mismas operaciones que si se tratase de medir la AB y en el triángulo ABC determínese el ángulo ABC, por

medio del cual se podrá tirar en el punto C la paralela CE (247).

287. **Hallar la bisectriz de un ángulo inaccesible.**— Tírese una línea cualquiera AB (fig. 129) determinando sus intersecciones con los lados del ángulo, y mídanse los ángulos CAB y CBA, teniéndose entonces

$$\mathrm{CAB} + \mathrm{CBA} = 180^\circ - \mathrm{C}.$$

Para determinar el punto D que satisfaga á la condicion de ser CA = CD, será preciso calcular el valor del ángulo CAD ó de su igual CDA; pero en el triángulo isósceles ADC se tiene que verificar la ecuacion

$$2\mathrm{CAD} = 180^\circ - \mathrm{C};$$

y de las dos ecuaciones halladas resulta entonces

$$\mathrm{CAD} = \frac{\mathrm{CAB} + \mathrm{CBA}}{2};$$

formando este ángulo en el punto A, se tendrá la verdadera direccion de la AD y se podrá hallar su interseccion con la CD. Dividiendo la AD en dos partes iguales, su punto medio E determinará con C la bisectriz pedida. Si C no es visible desde E se podrá tirar una paralela á la AD desde otro punto cualquiera de la CA, y se hallará su punto medio que con el E dará la direccion de la bisectriz.

288. **Levantamiento de los planos.**—Hemos dicho (42) lo que se entiende por *plano geométrico ó topográfico*, y el objeto que se propone la *planimetría* (40). Para obtener el plano de un terreno, la cuestion está reducida á la determinacion absoluta y relativa de cierto número de sus puntos principales, por medio de los cuales sea fácil hallar las de todos los demás; pero antes nos ocuparemos de dar una idea de los varios métodos que están en uso para conducirnos al objeto que nos proponemos.

289. **Determinacion de la posicion absoluta y relativa de un punto del terreno con relacion á dos puntos dados.—1.º Por el trazado y medicion de dos rectas perpendiculares entre sí.**—Sean A y B (fig. 132) los puntos dados, y C el que se trata de determinar, designando del mismo modo estos puntos en todos los casos que vamos á considerar. Se bajará desde C una perpendicular CD á la AB, que une los puntos dados, y se medirán las distancias AD y CD.

E.U.I.T. TOPOGRAFICA BIBLIOTECA

Si no se tuviese en cuenta más que el valor de estas líneas, para hallar en el papel que ha de contener el plano la proyeccion del punto C, se trazará una recta *ab* que contenga tantas partes de la escala adoptada como unidades tiene la AB, y á partir de los puntos *a* y *b* las *ad* y *bd'* que representan del mismo modo á la AD; por los puntos *d* y *d'* se levantarán perpendiculares indefinidas á la *ab*, y la proyeccion del punto que buscamos deberá hallarse en las intersecciones de estas perpendiculares con una de las dos paralelas tiradas á la *ab* á una distancia $cd = dc'$, que represente en la escala á la CD; con lo que los puntos c, c', c'' y c''' satisfarán á la cuestion.

Pero si se expresa además que la magnitud *ad* que ha de representar á la AD ha de contarse desde el orígen ó punto de partida *a*, y que *c* ha de hallarse á la izquierda de *ab*, como sucede para C, suponiendo que las operaciones se ejecuten en el sentido AB, como haremos siempre en lo sucesivo, la posicion de *c* quedará completamente determinada.

La línea AD y su proyeccion *ad* se llaman *abscisas*, las CD, *cd*, *ordenadas*, y ambas las *coordenadas* respectivas de los puntos C y *c*. Las líneas AB y *ab* se llaman *ejes de las abscisas*, y tambien *directrices*.

Del modo explicado se habrá obtenido la posicion relativa de los puntos A, C y B; y para obtener la absoluta ó su *orientacion*, será necesario hallar el rumbo *r* de la AB, para conocer la direccion que esta línea tiene en el terreno. Cuando los dos puntos dados A y B se hallan en una línea AB situada en la direccion Este-oeste, la perpendicular CD representa la meridiana del punto C.

290. Recíprocamente, dada en el papel la proyeccion *c*, conocidos en el terreno los A y B, se obtendrá el punto C en la hipótesis del caso directo relativa á su situacion, trazando por dichos puntos A y B la recta AB, ó bien desde uno de ellos A la que forma el rumbo *r*, la cual pasará por el otro punto B. Tomando con la cadena la longitud AD que tiene *ad* en la escala, y levantando en D la perpendicular DC de la longitud que marque la *cd*, su extremo C será el punto pedido, en el cual se colocará un jalon ó piquete para fijarle en el terreno. En general, la operacion por medio de la cual se fijan en el terreno y en su verdadera posicion los puntos y rectas cuyas proyecciones se hallan en el plano, se llama *replanteo*.

291. Esta resolucion es propia de las escuadras, y debemos en-

tenderla en el supuesto de ser accesibles los puntos dados y el que se trata de determinar, y además visibles entre sí.

El método expuesto, aplicado á la determinacion de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, y en el cual vemos que solamente hay que trazar y medir líneas perpendiculares entre sí, le llamaremos por *alineaciones perpendiculares*.

292. 2.º—**Por el trazado y medicion de dos rectas cualesquiera.**—Se trazarán y medirán las dos rectas AC y BC (fig. 133) desde el punto C á los dos dados A y B.

Si solo se tuviese en cuenta el valor de las distancias AC y BC para hallar en el papel la proyeccion del punto C, vemos tambien que habría cuatro soluciones: los dos puntos de interseccion *c* y *c'* de las dos circunferencias trazadas, la una desde el extremo *a* de la *ab*, que representa en la escala á la AB, con un rádio *ac* que equivalga á AC, y la otra desde el otro extremo *b* con el rádio *bc* que represente á la BC; los otros dos puntos serán los *c''* y *c'''*, intersecciones de otras dos circunferencias iguales á las anteriores y trazadas desde los mismos puntos *a* y *b*, pero tomando los rádios en sentido inverso del anterior. Pero se tendrá una sola solucion, la *c* por ejemplo, si se indica además que el punto C se halla á la izquierda de la AB y mas cerca de A que de B. Conocida su posicion relativa, y hallando el rumbo *r* de la AB se tendrá la absoluta que le corresponde.

Recíprocamente, para hallar el punto C del terreno, dada su proyeccion *c* en el papel, se fijarán en los extremos A y B de la AB, determinada como hemos dicho en el caso anterior, los extremos de dos cuerdas cuyas longitudes sean las que indiquen en la escala las *ac* y *bc*; y poniéndolas tirantes á la izquierda de la AB hasta que se unan los otros dos extremos, el punto de union será el punto pedido C.

Esta resolucion es peculiar de la cadena ó cuerda, piquetes y jalones; debiendo entenderse en el supuesto de ser los tres puntos accesibles y visibles entre sí, y cortas además las distancias que median entre ellos cuando han de replantearse de la manera que acabamos de indicar.

El mismo método, aplicado á la determinacion de los vértices y otros puntos cualesquira de un polígono, cuyas proyecciones pueden obtenerse trazando y midiendo rectas como las AC y BC, suele llamarse *por alineaciones oblícuas*.

293. *Casos particulares.*—Si el punto C (fig. 134) se halla si-

tuado en una alineacion AB cuya proyeccion *ab* se conoce, así como la *d* de un punto accesible D, para hallar la proyeccion *c* del punto C puede trazarse y medirse la CD, y haciendo centro en *d* con esta distancia reducida á escala, describir un arco que corte á *ab*; el punto *c* de interseccion será la proyeccion pedida.

Si el punto C (fig. 135) pertenece á una sola AB de dos alineaciones AB y DE, y se conocen las proyecciones *ab* y *de*, se prolongará en el terreno la DE hasta su encuentro en C′ con AB, y se medirá CC′; se prolongará la *de* en el papel hasta encontrar á *ab* en *c′*, se tomará *c′c* que represente en la escala á CC′ y se obtendrá la proyeccion *c* de C.

Cuando el punto C′ pertenece en el terreno á dos alineaciones AB y DE, cuyas proyecciones *ab* y *de* se conocen, prolongando estas líneas ó solo una de ellas como en el caso actual, hasta su encuentro, el punto *c′* de interseccion será la proyeccion de C′.

Si el punto se halla fuera de las dos alineaciones AB y DE (figura 136) como en C ó C′ y se conocen las proyecciones *ab* y *de*, se bajará en el terreno sobre la AB una perpendicular CM′ ó C′M′, y se medirán MM′ y CM′ ó C′M′; se tomará *mm′* que represente á la MM′, y levantando en *m′* una perpendicular, se tomará *cm′* ó *c′m′* que represente á CM′ ó C′M′.

Si el punto C se halla fuera y es inaccesible, pero visible desde otro punto N (fig. 137) y se conocen en el papel *ab*, *ed* y *n*, se determinará la alineacion CN y se medirán CP y MP; se llevará la MP reducida á escala de *m* á *p*, se trazará la *np* indefinida, y tomando *cp* que represente á CP se tendrá la proyeccion *c* de C. En el caso de poderse medir la MC no se necesita conocer la proyeccion *n*; pues midiendo además una parte arbitraria MP de la AB y la CP, se tomará la *mp* equivalente á MP, y haciendo centro en los puntos *m* y *p* con las *mc* y *pc* que representen á MC y PC se obtendrá la interseccion *c*, que será la proyeccion que se busca.

294 3.°—**Por la medicion de una recta y un ángulo.** —*Con los goniómetros.*—Se trazará y medirá la BC (fig. 138) que va desde el punto dado C á uno de los extremos B de la AB, y se medirá tambien el ángulo ABC que forman entre sí estas dos rectas.

Para hallar en el papel la proyeccion del punto C, si solo se diesen los valores de la recta y el ángulo, podrian satisfacer á la cuestion los cuatro puntos *c*, *c′*, *c″* y *c‴*, que son las intersecciones de los arcos trazados desde los puntos *a* y *b* de la *ab*, que representa en la escala á la AB, siendo el rádio una recta que representa á la BC, con las líneas *bc*, *bc'*, *ac''* y *ac'''*, las cuales forman con la *ab* en sus extremos ángulos iguales al ABC; pero si se dice además que el ángulo se ha de formar en el punto B y á la izquierda de la AB, entonces no habrá mas que una sola solucion que será el punto *c*, el cual representará la verdadera proyeccion del C; con lo que tendremos la posicion relativa de dicho punto: hallando el rumbo *r* se tendrá la posicion absoluta. Dado el sentido AB de la marcha, el vértice B y el ángulo de direccion, la indeterminacion cesa por completo.

Recíprocamente, para hallar en el terreno el punto C, conocida en el papel su proyeccion *c*, despues de determinada la AB como ya se ha dicho, se formará en B el ángulo ABC igual al *abc*, y tomando la BC de la longitud que marque en la escala la *bc*, su extremo C será el punto pedido.

295. *Con la brújula.*—Los rumbos de las BA y BC darán la posicion relativa de estas líneas, y tambien la absoluta si la brújula está bien orientada (171). El punto C se determina por la longitud de BC.

296. *Con la plancheta.*—Conocida la *ab* (fig. 139), proyeccion de AB y su rumbo *r*, se hace estacion en B, colocando *b* en la vertical de B; se declina *ab* sobre AB, se dirige la visual *bc*, y se mide BC: tomando en la escala la longitud *bc* que la represente, el punto *c* será la proyeccion de C.

Puede aplicarse esta resolucion no solo al caso en que los tres puntos A, B y C son accesibles y visibles entre sí, sino tambien para cuando solamente lo sean los B y C, pudiendo ser accesible ó inaccesible el otro punto A, pero visible solamente desde B. Cuando es invisible tambien, se orienta *ab* por la declinatoria (195 y 196).

297. La aplicacion de este método á la determinacion de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, en el cual se conoce de antemano ó se mide una recta AB, despues el ángulo ABC, y por último la recta BC como hemos indicado en los párrafos que preceden, repitiéndose estas operaciones para la determinacion de los demás puntos, se llama *levantamiento del plano por rodeo*, en atencion á que se ejecuta recorriendo el contorno del polígono.

298. 4.º—**Por la medicion de dos ángulos haciendo estacion en los puntos dados.**—*Con los goniómetros.*—Para determinar la posicion absoluta y relativa del C (fig. 140), no

habrá mas que medir los ángulos CAB y CBA y determinar el rumbo *r*; expresando además que el punto C se halla á la izquierda de la AB, para que análogamente á los casos anteriores veamos que de las dos soluciones *c* y *c'* que presenta este caso en el papel, el punto *c* resuelve la cuestion y es la verdadera proyeccion del C. Pudiera haber cuatro soluciones si no se sabe á qué extremo de la AB corresponde cada ángulo. La necesidad de tomar en el caso actual y en todos los expuestos anteriormente el rumbo *r* de la línea que une los puntos dados, ó el de otra cualquiera, es la razon de que hasta los instrumentos mas sencillos vayan acompañados de su correspondiente brújula.

299. *Con la brújula.*—Conocida y orientada la base AB, basta hallar los rumbos de las líneas AC y BC. Si los puntos dados A y B fuesen inaccesibles, se podrian tomar los rumbos de estas líneas desde el C que se trata de determinar; advirtiendo que las observaciones son *inversas* (167), y deben hacerse con el extremo blanco de la aguja. Esta circunstancia coloca á los rumbos en las mismas condiciones que si se hubiesen obtenido directamente desde los puntos dados, y la determinacion de *c* se consigue del mismo modo que en el caso general de ser A y B accesibles.

300. *Con la plancheta.*—Colocaremos este instrumento en el extremo A (fig. 141) y hallaremos la proyeccion *a* de este punto en el tablero: dirigiendo la alidada á B, y trazando *ab* que represente en la escala á AB, dirigiremos la visual *a*C y trazaremos *ac'*. Trasladando despues la plancheta á B, se colocará *b* en la vertical de B, se declinará *ba* sobre BA, y trazando *bc''* se obtendrá la proyeccion *c* del punto C por la interseccion de las *ac'* y *bc''*. Se hallará además el rumbo *r* por medio de la declinatoria.

301. Este método, aplicado á la determinacion de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, en el cual queda fijo el punto que se busca por la interseccion de dos rectas, se llama propiamente *por interseccion*, y se aplica cuando el punto accesible ó inaccesible C, que se quiere determinar, es visible desde los puntos A y B. Se puede comprobar trazando una nueva línea DE desde un punto D, que se refiere á *ab* por su distancia AD á uno de los puntos dados, orientando en D la plancheta con relacion á la base AB, y viendo si la línea *de* tirada segun la visual dirigida á E pasa por el punto *c*, interseccion de las *ac'* y *bc''*.

302. Se comprende fácilmente la manera de hacer el replanteo en los casos 3.° y 4.° explicados (294 y 298).

303. 5.º—**Por la medicion de dos ángulos haciendo estacion en uno de los puntos dados y en el que se trata de determinar.**—*Con los goniómetros.*—Cuando conocida la proyeccion *ab* (fig. 142) de la AB, no se puede hacer estacion en uno de los puntos dados A por ser inaccesible, pero sí en el otro B y en el que se trata de hallar C, siendo los tres visibles entre sí, y queriendo evitar la medida de la recta BC, se tomarán los ángulos en B y C, y restando su suma de 180º se tendrá el valor del ángulo A para hacer en el papel la construccion como anteriormente.

Tambien se puede hallar la proyeccion *c* en el papel formando en *b* el ángulo *abd*=ABC, tirando la *ae* paralela á *bd*, y formando sobre ella el ángulo *eaf*=ACB: el punto de interseccion *c* de *bd* y *af* será la proyeccion que se busca; puesto que se tiene *eac*=*acb*=ACB.

Por último, se puede hacer la construccion tomando *ab* (figura 143) que representa á AB (fig. 142); se construirá entonces el ángulo *abc'*=ABC y en un punto cualquiera *c'* de la recta *bc'* se formará igualmente el ángulo *a'c'b*=ACB; por el punto *a* se tirará una paralela *ac* á la *a'c'*, y se tendrá el punto *c* hallado tambien por la interseccion de las *ac* y *bc* como en los casos anteriores.

Obsérvese que como las BC y AC se obtienen en el papel sin medirlas en el terreno, este problema resuelve el de hallar la posicion de un punto C con respecto á otros dos dados A y B, siendo inaccesible uno de dichos puntos A y las distancias del punto C á los dos dados.

304. *Con la brújula.*—Hállese desde C (fig. 142) el rumbo de CA como observacion inversa (299) y tírese *af* desde *a* con el rumbo hallado: su interseccion *c* con la recta *bc* obtenida directamente dará la proyeccion buscada.

305. *Con la plancheta.*—Despues de tomado en la plancheta el ángulo en *b* (fig. 144) igual al B del terreno y *ab* equivalente en la escala á AB, se trasladará el instrumento al punto C que se quiere determinar, y como la longitud BC no se ha podido medir ó no se ha creido conveniente, no se conoce en la línea indefinida *bc'* el punto que es la proyeccion de C, por lo que se hará corresponder un punto cualquiera *c'* de dicha línea con el del terreno C, y se declinará *bc'* sobre BC; por el punto *c'* se dirigirá la visual *c'*A por medio de la alidada, y la línea *c'd* trazada en la plancheta

no pasará por *a*; tirando por este punto una paralela *ac* á *c'd*, cortará á la *bc'* en un punto *c*, que será la verdadera proyeccion de C; en términos que si ahora se mueve la plancheta para hacer corresponder *c* con C y se declina *cb* sobre CB, quedará *ca* en el plano vertical de CA.

Este método aplicado á la determinacion de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, en el cual se determina primero un punto *c'* por la interseccion con la *bc* de una línea auxiliar, y despues se la vuelve á cortar con la *ac* paralela á la anterior, resultando dos puntos de interseccion, de los cuales el segundo es la proyeccion que se busca, le llamaremos *por doble interseccion*. Los franceses le llaman *par recoupement*. En la construccion de la fig. 142 vemos sin embargo que el punto *c* se ha obtenido por una sola interseccion.

Este método podría comprobarse tambien por una nueva línea que pasase por la interseccion de las dos que dan el punto *c*.

El método por doble interseccion sirve para auxiliar al método *por rodeo* en el caso de no poderse medir directamente la BC (figura 138) y de no convenir la aplicacion de ninguno de los métodos establecidos para medirla indirectamente como una línea inaccesible.

305. Obsérvese que los métodos acabados de exponer para la determinacion de un punto con relacion á otros dos dados, no son otra cosa que los distintos casos de resolucion de triángulos. Advertimos de paso, que si bien hemos asignado los instrumentos mas propios para cada uno de los dichos métodos, se pueden emplear todos con un mismo instrumento.

306. **Determinacion de la posicion absoluta y relativa de un punto del terreno con relacion á dos rectas que se cortan y cuyo ángulo es conocido.**—Sean AB y BD (fig. 145) las rectas dadas, y C el punto cuya proyeccion se busca: se bajarán desde este punto las perpendiculares CC' y CC'' sobre las AB y BD, y se medirán las distancias AC' y BC'', pues suponemos conocidos el punto de partida A y el de interseccion B, así como el ángulo ABD. Tomando además el rumbo *r* de una de ellas AB, se podrá hallar en el papel la proyeccion de C en su posicion absoluta y relativa.

En efecto, se trazará en el papel *ab* que represente en la escala á AB, se formará en *b* el ángulo *abd*=ABD, se tomarán *ac'* y *bc''* que equivalgan á AC' y BC'', y levantando las perpendiculares *c'm* y *c''n* estas se cortarán en un punto *c* que será la proyeccion de C en su posicion relativa; pues se demuestra en Geometría que si dos rectas se cortan, sus perpendiculares se cortan tambien. Por medio del rumbo *r* se podrá colocar el punto *c* en el plano en su posicion absoluta.

Si las líneas AB y BD (fig. 146) se eligen perpendiculares entre sí, la figura CC'BC'' será un rectángulo, y nos dará CC'=C''B y BC'=CC'', y entonces midiendo BC' y BC'' tendríamos conocidas las longitudes de las perpendiculares CC'' y CC'. Si la línea AB se elige en el terreno en direccion de Este á Oeste, la DB representará la meridiana del punto B, y se tendrá conocida la distancia CC'' á la *meridiana*, así como la CC' á la *perpendicular* á esta en el punto B.

En el replanteo se seguirá una marcha análoga á la seguida en la construccion.

Como en los dos métodos acabamos de exponer nos valemos de *abscisas* y *ordenadas*, llamaremos al primero por *coordenadas oblícuas*, y al segundo por *coordenadas rectangulares*. Se puede observar, sin embargo, que en la construccion de este problema la proyeccion del punto se determina por la interseccion de dos rectas.

307. **Determinacion de la posicion de tres ó más puntos con relacion á otro cuya proyeccion es conocida.**—Este problema puede resolverse como vamos á exponer cuando son visibles desde el punto de estacion los que se quiere determinar, no presenta dificultades el trazado y medicion de las rectas tiradas desde dicho punto á los demás, y la longitud de estas líneas no excede de los límites asignados para los valores angulares que deben observarse con cada instrumento. El método que vamos á indicar se llama *por radiacion*.

Con los goniómetros.—Mídanse los ángulos ADB, BDC (figura 147) que forman las visuales tiradas desde el punto dado á los A, B y C que se trata de determinar, así como las longitudes DA, DB, DC de estas visuales, que pueden obtenerse directa ó indirectamente. El rumbo de una de ellas determinará las posiciones absolutas de los puntos A, B y C.

Con la brújula.—Se determinan las direcciones de las visuales por los rumbos que les corresponden.

Con la plancheta.—Se coloca *d'* (fig. 148), proyeccion de D, en la vertical de este punto, orientando la plancheta por medio de la

UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA TOPOGRAFICA - BIBLIOTECA - ESCUELA

declinatoria si se quiere hallar la posision absoluta de los puntos A, B y C, y se trazan en el tablero las direcciones de las visuales tiradas á estos puntos, tomando en ellas las distancias *d'a'*, *d'b'*, *d'c'*, que representan á las DA, DB y DC.

Con las escuadras.—Pueden determinarse los ángulos ADB y y BDC (fig. 147) midiendo las abscisas DP, DQ y las ordenadas EP, QE, y proceder como con los goniómetros; ó bien trazando desde D (fig. 149) las rectas *mn* y *rs* perpendiculares entre sí, que pasen lo mas cerca que sea posible de los puntos A, B y C. Trazadas estas alineaciones, se bajan las ordenadas A*a*, B*b*, C*c*, las cuales se miden, así como las abscisas correspondientes. Cuando se aplica este procedimiento á la determinacion de mayor número de puntos pueden evitarse las ordenadas demasiado grandes, trazando los ejes que forman ángulos de 45° con los primeros.

Con la cadena ó cinta, piquetes y jalones.—Se resuelve como con los goniómetros, determinando los ángulos por la medida de las rectas iguales DF, DE, DH (fig. 147) y las FE y EH (238).

308. **Determinacion de la posicion de un punto con relacion á tres puntos dados.—Problema de la Carta.**—Este problema, llamado por los autores franceses *problema de la Carta*, porque se aplica á la determinacion de un punto con relacion á tres situados en sus posiciones relativas y absolutas en una carta ó plano topográfico, se resuelve tambien cuando se trata de conocer la posicion de un punto accesible D (fig. 150), referida á la de otros tres A, B, C inaccesibles, pero visibles desde el primero.

Resolucion gráfica.—*Con los goniómetros.*—Mídanse los ángulos ADB=m y BDC=n, y construyendo sobre la recta *ab* del papel, homóloga á la AB del terreno, el ángulo *hab*=m, se traza sobre ella el arco capaz de este ángulo (Geom. Probl. 19) tirando la *ao*, perpendicular en *a* á la *ah*, y la perpendicular en el punto medio de *ab*; ambas perpendiculares determinan en su interseccion *o* el centro del arco capaz. Trazando despues sobre *bc* el arco capaz del ángulo n, la interseccion *d* de estos arcos será la representacion en el plano del punto D del terreno. Es, en efecto, el único punto que satisface á la condicion de que las rectas tiradas desde él á los puntos dados *a*, *b* y *c*, forman los ángulos consecutivos m y n, como tiene lugar en el terreno para D con relacion á los puntos A, B y C.

Si se unen los *a* y *c*, y se construye sobre la recta así determinada el arco capaz del ángulo $adc=m+n$, este tercer arco pasará tambien por *d*, lo cual puede servir de comprobacion.

Cuando las circunferencias descritas tienen hácia *d* muchos puntos comunes, se halla el verdadero punto de interseccion tirando desde *b* una perpendicular *be* á la línea *oo'* que une los centros, y prolongándola hasta los arcos. En efecto, la línea que une los puntos de interseccion *b* y *d* es perpendicular á la línea que une los centros (Geom. Teor. 45).

309. *Caso excepcional.*—Puede suceder que las dos circunferencias se confundan: entonces todos los puntos de la que así resulta satisfacen á la doble condicion exigida, el punto *d* (fig. 151) corresponde á la circunferencia que pasa por *a*, *b* y *c*, y queda indeterminado; se ve en la figura que *d'* satisface á las mismas condiciones que *d*. Se recurre entonces á un nuevo punto, cuya posicion respecto á dos de los dados primitivamente sea conocida, fijando la de *d* con relacion á los tres acabados de mencionar: y en el caso de no existir el cuarto punto fijo á que nos referimos, se elige en su lugar otro cualquiera, determinándole con relacion á los tres primeros.

310. *Con la brújula.*—Puede resolverse como con los demás goniómetros, hallando *m* y *n* (fig. 150) por la diferencia de los rumbos de las rectas DA, DB, DC; pero si las AB, BC y sus homólogas *ab*, *bc* están orientadas, bastará hallar por observaciones inversas (167) los rumbos DA, DB, DC, y marcarlos directamente desde *a*, *b* y *c* en el plano por medio de rectas, cuya interseccion dará la posicion absoluta y relativa del punto *d*. Se comprende que lo estaría solamente por la interseccion de dos de estas rectas; pero como ellas se cortarían en general aun cuando se hubiese cometido algun error en la determinacion de los rumbos, la tercera visual da á conocer que esto no ha sucedido, cuando pasa por el punto de interseccion de las primeras. Muchas veces se refiere un punto á cuatro, cinco ó mayor número de puntos fijos.

311. *Con la plancheta.*—Se coloca un punto cualquiera *d'* (figura 148) del tablero en la vertical del punto de estacion D, y se trazan las rectas *d'a'*, *d'b'*, *d'c'* en direccion de las visuales tiradas desde D á los puntos dados, con lo que se conocerán gráficamente los ángulos *a'd'b'*, *b'd'c'* de estas visuales. Construyendo sobre *ab* y *bc* trazadas en el tablero los arcos capaces de estos ángulos (308), se determinará el punto *d*.

Se podrá evitar el trasladar los ángulos *m* y *n*, construyéndolos desde luego en el lugar que deben ocupar para la determinacion de los arcos capaces. Con este objeto se hace corresponder al punto *a* (fig. 152) del tablero y al de estacion D del terreno en una misma vertical, declinando *ab* sobre DB: se traza entonces una línea *ah* en la direccion de la visual DA, pudiendo hallar entonces como hemos indicado, el centro *o* correspondiente al arco capaz del ángulo ADB. Se mueve despues la plancheta haciendo que *c* ocupe la posicion *c'* en la vertical del punto de estacion D, y *cb* la *c'b'* en la direccion DB, con lo cual el ángulo *abc* se hallará en *a'b'c'* y *o* habrá pasado á *o'*: se halla entonces el centro *o''* del arco capaz del ángulo BDC, determinando este ángulo por la recta D*m* en direccion de la visual DC. La interseccion de las circunferencias dará como en los problemas anteriores el punto *d*.

Tambien se puede resolver el mismo problema disponiendo en el tablero un papel de calcar, determinando el punto *d'* (fig. 148) que se halla en la vertical del de estacion, y marcando con lápiz las direcciones *d'a'*, *d'b'*, *d'c'* de este punto á los puntos dados. Trasladando el papel al sitio del tablero en que se hallan las proyecciones *a*, *b*, *c* de estos últimos, se le mueve sobre ellos hasta que las rectas trazadas pasen respectivamente por estos puntos, calcando entonces el punto *d'*; con lo que se tendrá la proyeccion de su homólogo D en el terreno. Cuando haya más de una posicion en que se verifique la circunstancia acabada de indicar, estaremos en el caso de indeterminacion de que ya nos hemos ocupado (309).

312. El uso del papel transparente permite resolver este problema con las escuadras acompañadas de la cadena ó cinta, piquetes y jalones, ó solamente con estos últimos medios. En el primer caso está reducida la cuestion á establecer alineaciones desde el punto D (fig. 147) á los A, B y C, midiendo únicamente las abscisas PD y DQ, y las ordenadas EP y EQ á fin de que hecha la construccion en el papel de calco, se coloque este sobre el plano moviéndole hasta que las tres líneas pasen por los tres puntos dados, cuyas proyecciones se conocen.

313. En el segundo caso, despues de establecidas las alineaciones, está reducida la cuestion á medir los tres lados de los dos triángulos isósceles DEF y DEH para hacer la construccion en el papel de calco y proceder despues como en el primero.

No creemos conveniente ocuparnos del método de tanteos, indicado por algunos autores, en razon al mucho tiempo que exige, sin proporcionar mayor exactitud que los que hemos dado á conocer.

Cualquiera que sea el procedimiento empleado, se tiene una comprobacion, disponiendo el punto *d* en la vertical de D, y declinando una de las líneas *da*, *db*, *dc* sobre su homóloga en el terreno: haciendo coincidir sucesivamente con las otras dos la línea de fé de la alidada, las visuales deben ir á parar á los puntos dados correspondientes.

314. La *resolucion analítica* de este problema, que no creemos conveniente poner aquí, pueden verla los lectores en el *Tratado de Topografía* ó en el *Curso elemental* de la misma, que tenemos publicados.

315. **Consideraciones acerca de los métodos expuestos y del levantamiento de los planos en general.**— Los procedimientos empleados en la resolucion de las cuestiones anteriores, determinan los puntos de una manera exacta bajo el punto de vista geométrico; pero en la práctica solo se obtienen resultados más ó menos aproximados que, aparte de los medios más ó menos á propósito de que se pueda disponer y del cuidado que se emplee en la ejecucion de las operaciones, dependen en general del mayor ó menor número de rectas medidas directamente y de los valores de los ángulos. De aquí la tendencia de los geómetras á medir el menor número posible de rectas, á fin de evitar la acumulacion de errores que produce la dificultad en la exactitud de su medida; reduciendo la cuestion en general á la medida de una sola línea, *base* de las operaciones, haciendo depender de ella por medio del cálculo los valores de las demás, que se obtienen así con mayor exactitud. Con respecto á los ángulos, debe tenerse presente que no deben ser menores que 30°, con objeto de evitar la indeterminacion de los puntos por la interseccion de rectas que formen ángulos muy agudos; pues esta interseccion no queda entonces bien marcada en las construcciones gráficas, resultando indecisa la posicion del punto de que se trata.

A pesar de esto, las dificultades que á cada paso se presentan en el terreno, obligan á separarse de estas indicaciones generales, combinando los distintos métodos expuestos y empleando diversos instrumentos.

316. Las mismas consideraciones pueden hacerse extensivas al levantamiento del plano de un polígono, tomando como base la distancia horizontal entre dos puntos préviamente elegidos, y en

virtud de los cuales pueden determinarse otros varios por los métodos expuestos anteriormente; estos últimos sirven á su vez para determinar la de nuevos puntos, continuando del mismo modo hasta conseguir la determinacion de todos aquellos que deban figurar en el plano. Todos los ángulos y los lados deben hallarse reducidos á su proyeccion horizontal, así como tambien deben estarlo al centro de la estacion los ángulos en cuyo vértice no pueda colocarse el instrumento.

317. Prévios estos antecedentes, y teniendo además presente cuanto hasta aquí llevamos dicho, pasaremos á ocuparnos de la determinacion de las proyecciones horizontales de los polígonos y de la construccion de sus figuras semejantes en el papel.

Las operaciones que se necesita ejecutar en el campo, á fin de tomar los datos necesarios para obtener dichas proyecciones, se llaman *operaciones ó trabajos de campo*, y tambien *levantamiento de los planos*. Las que se ejecutan para la formacion en el papel de las figuras semejantes á las proyecciones horizontales de los polígonos, se llaman *operaciones ó trabajos de gabinete, ó construccion del plano.*

Para proceder con órden en el levantamiento y construccion de los planos de los terrenos, haremos una clasificacion que se refiere á su extension, dividiéndolos en terrenos de corta, de mediana y de mucha extension: se suele entender por terrenos de corta extension los que no pasan de 50 á 60 hectáreas; de mediana los que no exceden de 300, y de aquí en adelante se llaman de grande extension.

No debe creerse que esta division es absoluta, ni que pueden fijarse sus límites con exactitud; muchas veces la adopcion de los medios empleados para el levantamiento de un plano, depende de su importancia y de la naturaleza del terreno, y los procedimientos empleados para los terrenos de mucha extension se aplican á los que la tienen mediana y aun á los de corta extension.

En el levantamiento y construccion de los planos nos ocuparemos:

1.° De los terrenos de corta extension, empleando la cadena ó cinta, piquetes y jalones, ó la escuadra ó cartabon acompañada de los mismos medios.

2.° De los terrenos de mediana extension, haciendo uso de la brújula, de todos los demás goniómetros, y de la plancheta, acompañados tambien de la cadena ó cinta, piquetes y jalones.

No nos ocuparemos de los terrenos de grande extension en los que se hace uso de la *triangulacion*, por no ser ahora de nuestro objeto, y pueden consultarla los que la necesiten en nuestro *Tratado de Topografía* ó en el *Curso elemental* de la misma.

Una vez hallada la proyeccion horizontal de todo polígono, cualquiera que sea su extension comprendida en los límites marcados, trataremos de la medida de las superficies y de la transformacion y division de los polígonos.

318. **Idea de las operaciones que constituyen el levantamiento de un plano.**—Habiendo enseñado á medir toda clase de rectas y de ángulos, y el uso de todos los instrumentos, poco habría que decir en el levantamiento de un plano si los terrenos que el geómetra tiene que determinar fuesen, como en la geometría elemental, polígonos terminados por líneas rectas y situados sus vértices en un solo plano, sin presentar ningun otro género de dificultades. Es cierto que algunas veces, aunque son las menos, se presenta llano el terreno, y que tambien ocurre tener que considerar figuras rectilíneas regulares ó irregulares; pero consiste en que entonces ha intervenido la mano del hombre, como sucede en la construccion de los estanques, cercas de las propiedades y plantas de los edificios y jardines. La naturaleza, caprichosa en las formas de la superficie terrestre, no presenta esta regularidad, afectando por el contrario una asombrosa variedad de figuras en todos los campos y terrenos; siendo por lo tanto sus contornos líneas tortuosas compuestas de todo género de curvaturas y zig-zacs, aunque se encuentren algunos lados que se aproximen más ó ménos á la línea recta. Esto en cuanto al contorno; pero el geómetra tiene que luchar con nuevas dificultades debidas á los accidentes de los terrenos, unas veces accesibles, ó pudiéndose recorrer en todos sentidos, pero cuyas desigualdades hacen que unos puntos sean ó no visibles desde otros, y otras acompañando á esto último inconveniente el de ser completamente inaccesibles por hallarse cercados, estar cubiertos de bosque, ó ser extensas lagunas ó pantanos; y por último, pueden ser en parte accesibles y en parte inaccesibles, resultando á cada paso de aquí el empleo de distintos procedimientos para lograr satisfacer con la eleccion del más á propósito las dos condiciones esenciales de pronta y más exacta ejecucion.

Además, no es sólo la determinacion del contorno de un polígono lo que ocupa la atencion del geómetra, sino tambien aquella multitud de objetos diseminados sin órden que se hallan en su interior, como son los arroyos, los caminos, los árboles, los edificios y jardines, bosques, plantaciones y manantiales, cada uno de los cuales necesita ser determinado con separacion y situado despues en el plano, guardando con los demás la misma relacion de posicion que tienen en el terreno, y constituyendo así lo que se llama la determinacion de los detalles interiores y su colocacion en el plano.

319. **Reconocimiento del terreno.**—La primera operacion que siempre debe practicarse, es elegir el punto más elevado, sea una torre, un cerro ú otro objeto cualquiera, desde el cual se descubra mejor la extension del terreno que se quiere representar, para formarse de él una idea lo más exacta posible, fijando la atencion en todos sus accidentes, así como en los diversos objetos que comprende, y con especialidad en la direccion de los caminos, rios, canales, arroyos..... debiendo además valerse de personas prácticas del país que le puedan suministrar todos los datos necesarios, como son entre otros los nombres de las distintas localidades, eligiendo sucesivamente nuevos puntos, desde los cuales se vayan descubriendo los objetos restantes. En el caso de no ser posible hallar estos puntos, desde los cuales pueda ponerse en práctica este exámen, ó de que la porcion que se ha de representar sea muy reducida, una tierra de labor por ejemplo, se reconocerá el terreno en todos sentidos, con el objeto de establecer en uno y otro caso, qué método es el más á propósito para obtener aquellos datos que puedan despues servir en la construccion sobre el papel, para determinar con más exactitud y claridad y con menor trabajo, la verdadera posicion de los puntos más principales, tanto del contorno como los interiores y exteriores al polígono que deban tambien ser representados. El resultado de este reconocimiento debe llenar las condiciones siguientes:

1.ª La eleccion del terreno más llano é igual para el establecimiento de la base ó bases que se necesiten medir; que deben ser, si es posible, en sentido de la mayor longitud.

2.ª El que sean visibles desde dichas líneas elegidas el mayor número de puntos notables.

3.ª Que el número de rectas que se establezcan para hacer depender de ellas las demás sea el menor posible, á fin de evitar los errores que producen las medidas.

320. **Canevás topográfico.**—Una vez reconocido el terreno,

se colocan jalones ó banderolas en aquellos puntos que no están determinados por otros objetos, como árboles, casas, torres..... y valiéndose del instrumento ó instrumentos de que quiera hacerse uso en la operacion, se procede á establecer aquel conjunto de rectas, convenientemente dispuestas y determinadas con toda la posible exactitud, por ser las bases principales de todos los trabajos sucesivos, que el geómetra haya juzgado más á propósito, para que formando entre sí una red ó una especie de entramado, puedan relacionarse con ellas los diversos puntos del terreno, y sirvan para la mas exacta reproduccion en el papel de todas las partes que le componen. Este sistema de rectas ha recibido el nombre de *canevás topográfico*.

Cuando se han de medir ángulos cuyos vértices sean los puntos elegidos, no convendrá en muchos casos que estos sean de los objetos que se hallan en el terreno, para evitar la reduccion de los ángulos al centro de la estacion.

321. **Cróquis ó bosquejo**.—A medida que se van estableciendo en el terreno las rectas que componen el canevás, deben irse figurando y disponiendo *á ojo* de una manera análoga en un papel, así como dibujando con el mayor cuidado y en las mismas relaciones de posicion que guardan entre sí todos los objetos y accidentes del terreno y la configuracion de su contorno, anotando en cada una de las líneas y ángulos que se midan los valores obtenidos.

No hay un sistema fijo en la formacion del cróquis ó borrador para la representacion de las distintas líneas que le constituyen, resultando de aquí con frecuencia que no pueda entenderle otro que el que le ha formado, y nosotros haremos uso de aquellos medios que creamos mas convenientes y que se hallen en armonía con los sistemas de representacion mas generalizados. Es de la mayor importancia poner todo el esmero posible en su buena ejecucion; pues figurando con exactitud, así el contorno del terreno como el de los demás objetos, caminos, arroyos.... que han de formar parte del plano, y haciendo con claridad las correspondientes anotaciones, será tanto mas fácil la reproduccion verdadera del terreno en el papel, cuanto mas esmero se haya puesto en la claridad y precision de la colocacion de las líneas en el cróquis, evitándose de este modo tener que volver de nuevo al campo á rectificar y aclarar las dudas que de otro modo ocurririan á cada paso en la construccion. Por estas razones creemos que no es conveniente trazar desde luego á ojo todo el plano del terreno que se trata de determinar, indicando desde luego los accidentes de su contorno y de todos los demás objetos que le constituyen, para despues ir haciendo las correspondientes anotaciones, pues es tarea inútil en los terrenos de alguna extension; salvo á trazar desde luego el sistema de rectas que han de constituir el canevás, deben dibujarse los diferentes objetos y la disposicion y figura de todas las partes del terreno, á medida que se van presentando al relacionarlas con las líneas de aquel.

322. **Eleccion de las escalas.**—Entre las diferentes escalas que pueden adoptarse, suele elegirse á arbitrio la que permita incluir en un papel de tamaño regular el plano que ha de contener, ó bien se procura que sea lo mayor posible para la mayor exactitud, á excepcion de los casos en que está determinada por la Administracion, segun el ramo á que el trabajo pertenezca.

Una vez delineado el canevás, es decir, puesto el cróquis en limpio, formando las líneas los mismos ángulos que en el terreno, despues de sujetas á la escala elegida, y marcada la posicion de todos los objetos y puntos principales con signos establecidos al intento, ó escribiendo sus nombres, y dispuestos lo mas aproximado al contorno con arreglo á la figura sacada en el cróquis, el dibujo de las montañas, rios, puentes, plantas de edificios... todo lo demás corresponde exclusivamente á los cursos de dibujo lineal y topográfico, en los cuales puede consultarse tambien el cuadro de los signos topográficos convencionales empleados para la representacion de los objetos.

323. **Registros.**—Son unos estados compuestos de varias columnas, en las que se inscriben los valores de los lados y de los ángulos, la designacion de los puntos de estacion y demás datos y observaciones que sea necesario tomar en el campo, para reproducir en el papel el polígono del terreno. Deben hallarse dispuestos con claridad y de modo que conduzcan sin dificultad á la buena y más exacta construccion. En los casos complicados un solo registro presentaría bastante confusion, por lo que se llevan con separacion registros del canevás, del contorno, de los detalles, etc., que deben hallarse sin embargo relacionados entre sí.

Los registros sustituyen al cróquis, y cada geómetra sigue el medio que le parece más conveniente. Ambos son buenos, si el geómetra acompaña á su práctica en cualquiera de ellos el órden constante en el modo de inscribir los datos que juzgue mejor para no confundirse en los trabajos de gabinete; y hay geómetras que adoptan ambos, disponiendo los cuadernos ó *libretas de campo*, dejando en blanco las llanas de la izquierda para trazar en ellas los cróquis y rayando en columnas adecuadas á cada caso las de la derecha para la formacion de los registros; pudiendo así comprobarse y ayudarse ambas indicaciones, proporcionando mayor seguridad en la construccion del plano. Creemos este método preferible, pues todo es poco cuando se trata de asegurar el buen éxito de una operacion; y aunque largo, no lo es tanto ni tan costoso como cuando las dudas dan lugar á volver de nuevo al terreno, para tomar otra vez estos mismos datos. Estos estados ó registros varían segun la naturaleza de la operacion y deben formarse sus modelos de modo que abracen todas las circunstancias, y á un golpe de vista puedan comprenderse.

324. **Transportacion de los ángulos.—Transportadores.**—El *plano geométrico ó topográfico*, debiendo ser una figura semejante á la proyeccion horizontal del polígono del terreno, ha de tener sus lados proporcionales á los de esta proyeccion, lo cual se consigue valiéndonos de las *escalas*, y sus ángulos iguales que se determinan por la *transportacion*. La *transportacion de los ángulos* en general, es una operacion que tiene por objeto construir sobre el papel ángulos iguales á los observados en el terreno, y averiguar el valor de un ángulo cualquiera trazado en el papel. Los sencillos instrumentos que para conseguirlo se emplean se llaman *transportadores*, y no son otra cosa que unos limbos graduados del mismo modo que los de los instrumentos (85). Se construyen de metal, de talco y de papel. Los de metal son generalmente semicirculares de un rádio de $4^{cm}.5$: tienen el inconveniente de manchar el papel, y no son tan flexibles como los de talco, los cuales reunen la ventaja de ser transparentes, á la de su flexibilidad, que permite el que se adapten mejor al papel. Los de talco, de círculo entero, suelen tener un rádio de 7^{cm}. Conviene que el rádio del transportador sea bastante grande, á fin de que puedan marcarse bien las menores divisiones, y trazar los ángulos con precision; condicion que llenan cumplidamente los transportadores de papel, cuyo rádio suele ser de 16^{cm}; lo que permite que se pueda escribir la numeracion de cinco en cinco grados, sin perjudicar á la claridad.

Para la transportacion de los ángulos, conviene que el transportador que se emplee esté igualmente dividido que lo está el limbo empleado en el terreno, y por consiguiente pueda apreciarse del mismo modo el ángulo.

325. **Transportacion de los rumbos observados con la brújula.**—Con el *transportador semicircular.*—Si dado el rumbo, 38° por ejemplo, de una línea, queremos determinar su posicion con respecto á la meridiana, trazaríamos una recta NS (fig. 153), para representar esta última línea: marcando un punto *a* de la meridiana, y haciendo coincidir con él el centro del transportador, le haríamos girar alrededor de este punto en el sentido conveniente, hasta que la division 38° coincidiese con un punto *m* de la meridiana, sin que el centro del transportador hubiese dejado de coincidir con *a*. El diámetro *ns* marcará entonces la direccion pedida; marcando el punto *n* y tambien el *s* para mayor exactitud, se ajusta una regla á los tres puntos *n*, *a* y *s*, y se traza por su canto la recta *ab*, que es la que queríamos determinar.

Tambien puede disponerse el transportador de modo que hallándose en la meridiana el punto que marca la division 38°, y el centro *a* del transportador, el canto recto *rz* de este, pase por el punto *a'*, por el que suponemos ahora que queremos hacer pasar la recta pedida; la cual será la *a'b'*, trazada por dicho canto recto.

Para trazar la línea *ab* (fig. 154) cuyo rumbo es 150°, haríamos girar al transportador del modo indicado, hasta que la division 150° coincidiese con la NS. Si el rumbo dado es mayor que 180°, se restará esta cantidad de su valor, y se hará girar al limbo del modo indicado hasta que la division que exprese la diferencia hallada coincida con la parte *a*S de la meridiana. La fig. 155, indica la posicion del transportador para la construccion del rumbo de 210°, en la cual la division 30°=210°—180°, coincide con la parte *a*S de la meridiana; y la fig. 156 la del rumbo de 320°.

326. El método que hemos explicado, consiste como hemos visto en dar al transportador el mismo movimiento que al limbo cuando se opera en el terreno (164); puede tambien hacerse la transportacion fijando el transportador de modo que la línea (0—180°) coincida con la meridiana NS (fig. 157), y que el cero se halle en *m* hácia el Norte, como sucede con el cero del limbo de la brújula cuando se marca en el terreno la direccion de la meridiana. Empleando el transportador graduado en el mismo sentido que lo está el limbo de la brújula, y que hemos visto que generalmente es de izquierda á derecha, la division 30°, que corresponde por ejemplo al rumbo hallado, determina la direccion de la recta *ac*, la cual

es simétrica de la *ab* (fig. 158), que se obtendrá por medio de un transportador graduado de derecha á izquierda; y en efecto, la recta cuyo rumbo es 30° debe quedar al Oeste de la meridiana. De aquí deducimos que *para la transportacion de los rumbos observados con la brújula, cuando la línea* (0—180°) *del transportador se hace coincidir con la meridiana, la graduacion del mismo ha de ser inversa de la del limbo de la brújula*. Así, si el limbo presenta la primera graduacion que es la de *izquierda á derecha*, el transportador deberá tener la segunda que es la de *derecha á izquierda*, y al contrario.

Si el rumbo es mayor que 180°, se colocará el transportador como indica la figura (159), en la que el cero está hácia la parte Sur de la meridiana. Si el rumbo dado es 210°, la recta *ab* se tirará por el punto *a* y la division 30°=210°— 180°.

327. *Con el transportador de círculo entero.*—Empleando el transportador de círculo entero puede seguirse el método explicado (325), evitando las sustracciones que es preciso ejecutar con el de semicírculo cuando el rumbo pasa de 180°. Para marcar el rumbo 220° por ejemplo, haríamos girar el limbo hasta que la division 220 coincidiese con la parte Norte de la meridiana; la línea *ab* (fig. 160) tirada por *a* y por la division *cero*, marcará el rumbo pedido.

Con el transportador de círculo entero puede tambien seguirse el procedimiento indicado (326), fijándole de modo que la línea (0—180°) del mismo coincida con la meridiana, estando el cero hácia el Norte de la misma, y marcando el punto á que corresponde la division que expresa el valor del rumbo que se quiere determinar. Este punto, unido con el que ocupa el centro del transportador determina la recta pedida. Conviene recordar que la graduacion del transportador ha de ser en este caso inversa de la que tiene el limbo de la brújula empleada en el terreno.

328. **Determinacion del rumbo de una línea trazada en el papel.**—Se determina el rumbo de una línea trazada en el papel, hallando el ángulo que forma con la meridiana, valiéndose de un transportador, cuyo centro se hace coincidir con el vértice de dicho ángulo, y haciéndole girar hasta que el cero coincida con la línea cuyo rumbo se trata de hallar; la division que coincida entonces con la meridiana dará el valor del rumbo que se pide. Si se hace coincidir con la meridiana la línea (0—180°) de un transportador graduado en sentido contrario al del limbo de

la brújula, la division que coincida con la recta dada, marcará el rumbo que se pide.

329. **Transportacion de los ángulos medidos con el grafómetro, pantómetra y teodolito.**—Para la transportacion de los ángulos cuando se han obtenido con estos instrumentos, se sigue un procedimiento análogo al empleado para su medida en el terreno. Supongamos medido uno de estos ángulos, y sea *ab* (fig. 161) una línea trazada en el papel, y que es la homóloga de una de las que forman el ángulo medido en el terreno; para construir la homóloga de la segunda se colocaría el transportador de modo que su centro coincidiese exactamente con el punto *b*, homólogo del vértice, y que el cero de la graduacion estuviese en un punto *o* de la *ab*; marcando el punto *m* en la division que señalase el número de grados que corresponde al ángulo, la recta *bc* determinada por los puntos *m* y *b* será la recta pedida.

Lo que acabamos de decir supone que el ángulo de que se trata es menor que 180°, y que empleamos un limbo semicircular graduado del mismo modo que el limbo del grafómetro si tiene una sola graduacion y es la primera (326): ó bien que siendo ambos de doble graduacion hemos empleado para las dos operaciones la primera. Si nos hubiésemos valido de la segunda, la transportacion se obtendría del mismo modo, haciendo que el cero se hallase en un punto de la primera línea, que en este caso sería la de la derecha.

330. Si el ángulo dado fuese mayor que 180°, dispondríamos el transportador del mismo modo, y marcaríamos el punto *m* (figura 162) extremo del arco *om*, obtenido de restar 180° del ángulo dado, trazando despues la recta *bc* por el canto de una regla apoyado en los puntos *m* y *b*. Empleando un transportador semicircular de doble graduacion (fig. 163), el punto *m* estaría dado por la division que marcase el ángulo que se trataba de construir.

El arco correspondiente al ángulo obtenido es el *omn*. Tambien pudiéramos haber determinado la direccion de la recta *bc*, marcando el punto *n*, extremo del arco $osn = 360° - omn$, tomado en la graduacion inversa.

331. Es preferible el empleo del transportador de círculo entero, el cual se dispone de la misma manera, marcando el punto *m* (fig. 164), extremo del arco *orn* correspondiente al ángulo dado, y trazando la recta *bc* por los puntos *b* y *m*.

En la práctica se acostumbra señalar el extremo *r* del arco *or*=*orm*—180°, y apoyar la regla en los puntos *r*, *b* y *m* para trazar la recta pedida. La circunstancia de hallarse estos tres puntos exactamente en línea recta determina mejor su direccion.

332. **Orientacion de los planos.**—Cualquiera que sea el método que se adopte, de los varios que hemos indicado y que despues esplanaremos, para tomar en el campo los datos necesarios á fin de tener los medios suficientes para construir en el papel el plano *abcdef* (fig. 165) del polígono del terreno ABCDEF, habremos conseguido obtener siempre la *posicion relativa* de los puntos A, B, C, D, E, y F.

Para obtener *su posicion absoluta*, es necesario conocer la direccion de una de las rectas del plano. En efecto, si sólo se expresase en él que el punto *a* es la esquina sur de una casa A del terreno, este punto estaría completamente determinado: y no estándolo la direccion del lado AB, el polígono podria ocupar distintas posiciones, correspondientes á las AB′, AB″... del lado AB en las cuales los demás vértices no ocuparían las posiciones absolutas que les corresponden.

La posicion de AB quedaría determinada, si además de conocer A, se supiese que B estaba en línea recta con A y otro punto determinado, por ejemplo, un árbol G notable por cualquier circunstancia.

Generalmente la posicion de AB se determina por el ángulo *m* que forma con la meridiana NS del punto A, contado desde dicha línea AB hasta la AN que se dirige al Norte, como hemos visto siempre.

La orientacion puede hacerse con relacion á la meridiana astronómica (34) ó á la magnética (158): si bien se acostumbra señalar en el plano las direcciones de ambas.

333. Cuando se ha determinado la direccion de AB, ó se ha trazado la meridiana, se dice que el plano está *orientado*, y esta operacion se conoce con el nombre de *orientacion del plano*.

Al trazar en el papel la figura *abcdef* semejante á la proyeccion horizontal del polígono del terreno ABCDEF (fig. 165), hay la costumbre de dividir en dos partes iguales por medio de la recta NS (fig. 166) el rectángulo *mnop* que representa el papel en que el plano ha de dibujarse. Esta recta señala la direccion del meridiano; y la OE, perpendicular á ella en su punto medio sirve para determinar con NS los cuatro puntos cardinales *norte*, *sur*, *este* y *oeste* en las posiciones en que ordinariamente se consideran.

Hecho esto, se situará la línea *ab* homóloga de la AB de manera que forme con la meridiana NS un ángulo *m'* igual al *m*; y una vez situada esta línea, la construccion sobre ella de la figura semejante á la proyeccion del terreno, nos dará determinada la *posicion absoluta* del polígono *abcdef*.

Generalmente se borran despues las lineas NS y OE (fig. 166) y solamente se traza una recta *ns* paralela á la NS en uno de los ángulos del papel, que regularmente suele ser en el que indicamos en la figura, y que representa la direccion de la meridiana. Se la suele dar la figura de una flecha, siendo la punta *n* la que se dirige al norte.

Este convenio de representacion tiene la ventaja de dar á conocer la situacion de los diferentes elementos geométricos del plano, con relacion á los puntos cardinales del globo.

La orientacion de los planos, y el convenio que acabamos de hacer, tienen aplicaciones importantes; un agricultor puede servirse de un plano orientado para conocer los parajes más á propósito para la produccion de plantas determinadas; los dueños de fincas ó los fabricantes para la disposicion que deben dar á las distintas partes de un edificio, á fin de que llene las condiciones necesarias al objeto á que se destina.

Al dibujo así obtenido acompaña siempre la escala que ha servido para la construccion del plano, disponiéndola en su parte inferior.

Pasemos ya al levantamiento de los planos de corta extension.

334. **Levantamiento de los planos de corta extension.—Con la escuadra.—Terrenos accesibles en su interior.—Contornos rectilíneos.**—Consideraremos en primer lugar el caso en que la figura del terreno es un polígono rectilíneo, compuesto de un corto número de rectas.

335. Sea ABCDEFG (fig. 167) el polígono del terreno y al mismo tiempo su cróquis, supuesto que todas sus líneas y las que hemos de establecer se han de hallar respectivamente situadas en ambos, por lo que siempre consideraremos que las figuras representan ambas cosas. Se verá si es posible trazar una diagonal ó directriz AE, desde la cual sean visibles todos los vértices del polígono, y que reuna tambien la condicion de ser la mayor, cuyo caso se presenta cuando el terreno es llano y no hay obstáculos, pudiéndose operar en todos sentidos ó en el mayor número de ellos por no estar sembrado ni haber otra circunstancia que lo impida.

Sobre dicha línea AE tomada como eje de las abscisas, se bajarán las ordenadas BH, GY, CJ, FL y DM que se medirán con exactitud, anotando los números que resulten como se vé en el cróquis, en sentido perpendicular á las longitudes respectivas. Las abscisas que se deben medir son las AH, AY, AJ... á partir todas del punto A; pero como sería penoso empezar siempre de nuevo desde dicho punto, lo que se hace es determinar el valor de la AH, y continuar midiendo sin levantar la cadena hasta tener del mismo modo la AY, despues la AJ, y así sucesivamente, hasta llegar al punto E. Los números que indican los valores de las abscisas se inscriben en el cróquis en sentido de la directriz y próximos al pié de las ordenadas á que corresponden, y al mismo lado de la directriz que se halla la ordenada correspondiente. Señalaremos los ejes con líneas de trazos, y las ordenadas con líneas de puntos. Como comprobacion se mide despues otra vez sin detenerse toda la AE para ver si resulta la medida indicada por el último número, ó se diferencia en una cantidad insignificante y sujeta á los límites de apreciacion; pues en el caso contrario debe procederse de nuevo á las operaciones. Se cuidará asimismo de tomar en el punto A el rumbo de la AE para orientar el plano. Por último, las diferencias AY—AH, AJ—AY..... dan las distancias HY, YJ..... entre los piés de las ordenadas en caso de ser necesarias. Para que la operacion sea más expedita, mientras unos auxiliares del geómetra miden las abscisas y levantan y trazan las perpendiculares, otros se ocupan de medir estas con todo el cuidado posible.

Para mayor sencillez y mejor comprension del cróquis, consideraremos siempre como positivas á todas las abscisas AH, AY.... tomadas desde A á E en sentido de la marcha, por lo que no hay necesidad de acompañarlas de signo alguno. Las ordenadas GY, FL situadas á la derecha las llamaremos positivas, señalándolas con el signo +, y las BH, CJ y DM tomadas á la izquierda, serán negativas y se marcarán con el signo —. Este método tiene la ventaja de que los signos de las ordenadas indican en el cróquis el sentido de la marcha en la operacion; pues mirando la figura se conoce que para levantar el plano se ha caminado desde A hácia E. Si al contrario se hubieran empezado las operaciones en el punto E para dirigirse al A, las abscisas serían EM, EL, EJ..... siempre positivas, las ordenadas positivas serían las DM, CJ y BH, y las negativas las FL y GY, al contrario que en el primer caso. En otra clase de operaciones en que la marcha se sigue por el contorno, se puede emprender en cualquiera de los cuatro sentidos AGFE, ABCD, EFGA y EDCB, tomando por punto de partida los vértices A y E, y en general empezando en cualquier punto del polígono y siguiendo la marcha en cualquiera de los sentidos expuestos; pero á fin de evitar confusion, nosotros supondremos siempre que se camina desde un punto elegido A, y en el sentido AGFE.

336. *Construccion del plano*. —Para construir, valiéndonos del cróquis, la figura semejante en el papel, se trazará una línea *ac* de la longitud total con arreglo á la escala elegida, se tomarán en ella las *ah*, *ai*, *aj*.... que representen á las AH, AI, AJ.... y levantando perpendiculares en los puntos *h*, *i*, *j*.... en el sentido que indica el cróquis, se tomarán en ellas las longitudes *bh*, *ig*, *cj*.... que representen á las BH, IG, CJ.... y uniendo los extremos *a*, *b*, *c*.... por medio de las rectas *ab*, *bc*, *cd*.... se tendrá la figura *abcdefg* semejante á la ABCDEFG por hallarse compuesta de porciones semejantes y semejantemente dispuestas á las del terreno. Uniendo tambien entre sí de tres en tres de una manera análoga los vértices del polígono del terreno y del construido en el papel, se demuestra fácilmente que son semejantes por hallarse compuestos del mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos. Se trazará por último en el punto *a* la direccion de la aguja con arreglo al rumbo de la AE para la colocacion de la figura (332) cuando se dibuje en limpio; con lo que quedarán concluidas las operaciones que constituyen el levantamiento del plano del contorno del polígono.

En el método que acabamos de exponer, el error de medicion ó construccion cometido en una abscisa *ah*, aunque acumulado al de la ordenada *bh* si tambien ha tenido lugar, da por resultado la colocacion de *b* en *b'*; pero este error es parcial y no influye en los demás vértices: debiendo tenerse presente que siendo casi imposible el evitar totalmente los errores, el geómetra debe siempre procurar que sean parciales los que pueden resultar de los medios que elija para el levantamiento del plano.

337. La série de líneas que constituyen la directriz y las ordenadas que fijan los vértices del polígono, forman en este caso lo que hemos llamado el canevás topográfico, que ha sido despues reproducido en el papel para la construccion del polígono, y que si se quiere puede dejarse de trasladar cuando se pone el plano en limpio.

338. *Registro.*—Se formará como el que presentamos á continuacion, compuesto de cinco columnas para consignar en ellas los datos adquiridos en el campo, con arreglo á lo que hemos dicho (323).

Registro del contorno del polígono ABCDEFG.

RUMBO DE LA BASE AE = 257° 30′.

Abscisas á partir del punto A.	Ordenadas.	Vértices á que corresponden.	Designacion de los vértices.	Observaciones.
1	2	3	4	5
0	0	A	»	
19,5	—27,6	B	Arbol.	
41,0	+31,7	G	Jalon.	
62,0	—38,0	C	»	
85,4	+24,0	F	»	
95,3	—23,4	D	»	
107,0	0	E	»	

En la primera columna se colocan las abscisas á partir del punto A: en la segunda las ordenadas á la izquierda y derecha de la directriz AE con el signo que les corresponde, siendo *cero* la abscisa y la ordenada del punto de partida del eje AE y tambien la ordenada de su extremo E: en la tercera los vértices del polígono á que pertenecen: en la cuarta los nombres de los objetos que constituyen dichos vértices, y en la quinta aquellas observaciones que merezcan consignarse para que concurran á evitar las dudas que por cualquier causa pudieran presentarse despues en la construccion; así como las noticias ó circunstancias que se quiera tener presentes por su interés, sean de localidad, de situacion, calidad del terreno ú otras cualesquiera.

339. Para la construccion en el papel valiéndose del registro, no habrá más que trazar una línea indefinida, y poniendo en contacto con ella la escala elegida de boj ó marfil, se marcarán con un lápiz cuya punta sea muy fina el punto de partida *a* y los demás que indiquen los valores consignados en la primera columna del registro; se levantarán perpendiculares á la derecha de la *ae* en los puntos *i* y *l*, dándoles los valores 31,^{m}7 y 24,^{m}0 que en la segunda columna tienen el signo +; se levantarán igualmente per-

pendiculares á la izquierda de la *ae* en los puntos *h*, *j* y *m*, tomando en ellas con la escala los valores 27,^{m}6, 38,^{m}0 y 23,4^{m} que se hallan en la segunda columna con el signo —: y uniendo con rectas los extremos de la directriz *ae* y los de las ordenadas, se tendrá la figura *abcdefg* semejante á la del terreno, en la cual se marcará el rumbo de la *ae*, para su colocacion en el papel cuando se dibuje en limpio.

340. *Replanteo en el terreno.*—Recíprocamente, para trazar el polígono en el terreno, dada su proyeccion *abcdefg*, y colocados en el punto A que se sabe ser el de partida, se trazará una recta al punto E si este se halla señalado, y en el caso contrario se traza desde A una recta indefinida cuyo rumbo sea el que marque el cróquis ó registro: se medirán con la cadena las abscisas consignadas en él, y levantando perpendiculares con la escuadra en sus extremos y en el sentido que se halle indicado, se tomarán en ella las longitudes que deben tener, colocando jalones ó piquetes que señalen los vértices, ó introduciendo estacas en el terreno si se quieren tener señalados para otras operaciones. Cuando el extremo de alguna ordenada es un objeto del terreno, como un árbol, la esquina de un edificio, etc., servirá de comprobacion ver que efectivamente termina en él dicha ordenada.

341. **Contornos rectilíneos de muchos lados.**—Pasemos ya al caso en que el contorno del polígono siendo rectilíneo se halla compuesto de un gran número de rectas.—Sea por ejem. plo el que representa la fig. 168. Se empezará por escribir en él otro polígono ABCDEFGHY, que estando compuesto de pocas rectas se pueda determinar por el método que acabamos de exponer; y como este polígono es arbitrario, deben elegirse para vértices puntos que lo sean tambien del polígono dado, como C, H... ó pertenezcan á sus lados, como los B, Y... reuniendo todos ellos la circunstancia de ser visibles desde un solo eje AE establecido en sentido de la mayor alineacion que pueda trazarse. Este polígono inscrito se llama *polígono principal*, y se procura determinarle con toda precision, como se ha dicho (335), formando cuidadosamente su cróquis y registro, por ser la base de las operaciones sucesivas.

Tomando despues por nuevos ejes los lados AB, BC, CD... del polígono principal, que se llaman entonces *ejes secundarios*, para distinguirlos del AE, que se llama *eje principal*, y bajando sobre ellos perpendiculares sobre todos los otros vértices del polígono dado, se concibe que la série de líneas que constituyen las del polígono principal con las perpendiculares bajadas sobre sus lados, formarán esa especie de entramado propio para fijar y relacionar entre sí los puntos todos del contorno, y á que damos como hemos dicho el nombre de canevás topográfico.

Además del cróquis, se llevará el registro del polígono principal, como se ha explicado (338), y otro registro auxiliar llamado del contorno, como se ve á continuacion: en el cual, así como en la figura, numeramos para más comodidad los vértices del polígono dado, que no forman parte del principal del canevás.

Registro del contorno del terreno referido al del polígono principal ABCDEFGHY del canevás.

Lados del polígono principal, tomados por ejes.	Abscisas.	Ordenadas.	Vértices.	Nombres.	Observaciones.
1	2	3	4	5	6
AB	0,0	0,0	A		
	12,7	+ 10,2	1		
	40,5	0,0	B		
BC	10,0	+ 10,8	2		
	30,3	0,0	C		
CD	16,4	+ 6,6	3		
	31,7	0,0	D		
DE	11,8	+ 9,3	4		
	32,0	0,0	5		
	43,0	+ 9,0	6		
	61,5	0,0	E		
....	....	....	....	....	....

Este segundo registro es tanto más importante cuanto más irregular es el polígono y contiene mayor número de lados y en el caso actual, se consideran como positivas todas las ordenadas sobre los lados del polígono principal.

La marcha de las operaciones para la construccion del plano, es enteramente la misma que se sigue en el terreno, pues se empezará como ya sabemos por la construccion del polígono principal, y despues por medio del cróquis y registro del contorno se irá construyendo este con la mayor facilidad partiendo del punto A y siguiendo en el sentido ABCD... hasta volver de nuevo al punto de partida.

Esta manera de proceder presenta muchas ventajas, pues evita el inconveniente de medir tantas perpendiculares como seria necesario bajar desde todos los vértices del polígono dado, siempre mucho más largas que las bajadas sobre los lados del polígono principal. Por otra parte, muchos vértices podrían no ser visibles desde la AE, y habria que adoptar el medio de establecer muchos ejes á partir de un solo punto; medio mas complicado que el actual, en que se toman por tales los lados consecutivos del polígono principal, los cuales, como su disposicion es arbitraria, siempre se podrán colocar de modo que vayan siendo visibles desde ellos todos los puntos del contorno del polígono en cuestion. Además en la construccion del plano se habrá conseguido que los errores inevitables en la mayor parte de las ocasiones sean parciales, tanto los que se cometan en el polígono principal, como en el contorno del propuesto. Pueden conocerse estos errores comprobando el mayor número de puntos, si algunos vértices del primero de estos polígonos se hallan situados en los lados del segundo, como en la figura actual; pues al hacer la construccion y unir los extremos de todas las ordenadas, los puntos 1, B y 2 deben hallarse en línea recta, así como los 6, E y 7, del mismo modo que cada tres puntos que reunan la misma circunstancia.

Servirá igualmente de comprobacion, cuando se miden en el terreno las abscisas de cada lado, como por ejemplo las del DE, y se ha obtenido la del último punto 6, concluir ya de medirle y anotar este valor en el registro del contorno, cuya ordenada será *cero*; lo cual tiene por objeto el que al hacer la construccion en el papel, se vea si el valor que da la DE tomada en la escala es igual á la medida total obtenida en el terreno. Se observará en el registro que la última abscisa de cada lado es la longitud del mismo desde el vértice del polígono principal; siendo *cero* las ordenadas correspondientes. El punto 5 tiene tambien ordenada *cero*.

342. No es precision absoluta que el polígono principal se halle siempre inscrito; pues sucede muchas veces que pudiéndose operar tambien en el exterior, se salvan mejor las dificultades y se llenan mas completamente las condiciones de visibilidad de los puntos y de trazado del menor número de perpendiculares y de la menor longitud posible sobre los lados del polígono principal, estableciendo este de modo que parte se halle inscrito y parte circunscrito, como se ve en la fig. 169, en la cual el lado AG es comun al polígono dado y al principal ABCDEFG del canevás. La parte ABC de este último se halla inscrita; el lado CD corta al contorno del polígono dado, estando parte inscrito y parte circunscrito, y por último, la parte DEFG del canevás se halla circunscrita al mismo polígono.

Las operaciones de campo y de gabinete, así como las de replanteo son idénticas á las explicadas anteriormente; debiendo solamente observar, que en el registro del contorno habrá en este caso ordenadas positivas y negativas sobre los lados del polígono principal. Las de los puntos 1, 2 y 3 serán positivas y las de los 4, 5, 8, 9, 10 y 11 negativas. Los puntos 6 y 7 tienen ordenada *cero*. En la construccion del plano deberán resultar en línea recta los tres vértices 1, B y 2.

343. **Contornos curvilíneos.**—De los dos casos acabados de exponer en las figuras 168 y 169 para los polígonos cuyo contorno se halla compuesto de un gran número de rectas, se pasa sin ninguna dificultad y procediendo exactamente de la misma manera al levantamiento del plano de aquellos cuyo contorno es curvilíneo ó mistilíneo, como los representados en las figuras 170 y 171, que conservan respectivamente la misma forma que los de las 168 y 169, y cuya sola inspeccion basta para comprender todo cuanto á ellos se refiere; pues cada trozo de curva A*m*B (fig. 170) puede considerarse como una porcion de contorno rectilíneo compuesto de rectas sumamente pequeñas, por lo que la operacion será tanto más aproximada á la exactitud, cuanto mayor sea el número de ordenadas que se levanten sobre cada uno de los lados del polígono principal; pero con objeto de llevar los trabajos con órden y evitar equivocaciones, es preferible hacer que todas las abscisas sean múltiplas de la primera, levantando por ejemplo una perpendicular á cada diez metros, que se determinarán al tiempo

mismo de medir con la cadena el lado correspondiente AB del polígono principal, apreciando con exactitud la medida de la última fraccion. Dibujando despues cuidadosamente en el cróquis la parte de curva comprendida entre los extremos de cada dos ordenadas, se obtendrá la figura del contorno con aquella aproximacion que es dable en esta clase de operaciones.

Cuando el terreno es tan irregular como el representado en la fig. 172, y presenta dificultades la inscripcion del polígono principal, se podrá establecer una série de ejes AB, BC, CD y DE perpendiculares entre sí, que se comprobarán repitiendo la operacion en sentido de E á A, y referir á ellos como se ve en la figura, los puntos del terreno. Este método se puede emplear tambien entre otros en el levantamiento del plano de una isla pequeña.

Observaremos que en el caso de los contornos curvilíneos se obtiene mayor expedicion, puesto que se determinan levantando perpendiculares, lo que no exige tanteos; al contrario de lo que se verifica con los rectilíneos, los cuales se hallan bajando perpendiculares.

344. **Terrenos inaccesibles en su interior.**—*Contornos rectilíneos.*—Cuando el polígono es rectilíneo y está compuesto de un corto número de rectas, como el ABCDEF (fig. 173), se elegirán los ejes en el exterior de modo que formen un cuadrado ó un rectángulo MNPQ, que es lo más general, para lo cual se trazará una recta ME que pase por uno de los vértices A, sobre la cual se bajará la perpendicular PN desde el punto más saliente C; sobre la NP se bajará la PQ, y sobre esta la MQ, con lo cual se tendrá el rectángulo circunscrito MNPQ. Bajando ahora perpendiculares sobre los lados de este rectángulo tomados por ejes, desde los otros vértices B y D, y procurando referirlos á aquellos con respecto á los cuales resulten menores las perpendiculares, se tendrán todos los datos necesarios para la determinacion del contorno valiéndose del cróquis.

El registro es muy fácil; se toma el M como punto de partida siguiendo los lados del rectángulo en el sentido que ya otras veces hemos indicado, observando que en este caso todas las ordenadas son negativas, y *cero* las de los puntos A, C, E y F.

345. *Contornos curvilíneos.*—Si el polígono es curvilíneo ó mistilíneo, como en la fig. 174, se seguirá el mismo procedimiento, dibujando en el cróquis con exactitud las diferentes porciones curvas AB, BC, CD... pero si se desea obtener con más precision

puede emplearse el procedimiento siguiente, cuando el contorno no presenta tránsitos violentos en sus curvaturas.

Despues de circunscrito el rectángulo MNPQ (fig. 175) como en el caso anterior, se tantearán cuatro puntos A, B, C y D desde los cuales las perpendiculares bajadas desde cada uno de ellos, B por ejemplo, sobre los lados contiguos MN y NP del rectángulo sean próximamente iguales, con el fin de evitarse el tener que medir despues perpendiculares mucho más largas. Entre las bajadas desde los puntos A y B, se levantarán sobre la A'B' á distancias iguales otras varias, cuyos extremos servirán para fijar mejor la curva que empieza en A y termina en B; repitiendo la misma operacion sobre los demás lados. Si las circunstancias impidiesen dividir las A'B', C'B'' D'C'' y A''D'' en partes iguales, se dividirían en partes desiguales del modo más conveniente.

Si las curvas que forman el contorno son de la naturaleza de la que representa la fig. 176, en que los tránsitos de un punto á otro son violentos, entonces será preciso bajar perpendiculares sobre la AB, que representa uno de los lados del polígono principal inscrito ó circunscrito al contorno del terreno, desde los puntos 2, 6 y 8 que se hallan á mayor distancia de la AB, y que se llaman *de máxima*, desde los 1, 4 y 9 que están más próximos y se llaman *de mínima*, y desde los 3 y 5 en que la curvatura cambia de sentido y que se llaman *puntos de inflexion*, así como desde el 7 que es *de retroceso*; salvo á fijar además aquellos otros puntos que puedan servir para la reproduccion más exacta de la curva en el papel.

El modo de llevar el registro y el de hacer el replanteo en los últimos casos expuestos no presenta dificultad alguna.

346. **Terrenos accesibles solamente en las proximidades del contorno.**—El método que vamos á explicar, y que puede adoptarse cuando el terreno es llano y accesible en su interior y su exterior, tiene su principal aplicacion en el caso de ser solamente accesible en las proximidades del contorno, siendo inaccesible en su parte interior A (fig. 177) por ser el terreno pantanoso, estar cubierto de bosque espeso ó ser un pueblo, representando la figura el contorno de los alrededores cuyo plano se quiere levantar.

Para esto se colocará la escuadra en un punto E desde el cual se vean á ángulo recto dos puntos notables A y 1 del contorno, trazando y midiendo las rectas AE y E1; se hará estacion en el punto 1 y se levantará á la E1 la perpendicular F1, sobre la cual se bajará otra F2 desde otro punto notable 2, y así se seguirá sucesivamente como indican las líneas de trazos de la figura, unas veces caminando por el interior como en la parte que hay desde A hasta H, otras por el exterior como desde H hasta M, y otras por el interior y el exterior como desde M hasta D, segun sea más conveniente y permitan las condiciones del terreno, hasta volver de nuevo al punto de partida A. Esta operacion puede comprobarse volviéndola á repetir desde este mismo punto, pero en sentido contrario; abreviándose cuando se usan dos escuadras partiendo en sentidos contrarios desde el mismo punto A hasta encontrarse en el opuesto B ó en otro cualquiera.

Se aseguraría más el éxito de la operacion, si el terreno fuese llano ó aunque desigual y montañoso, no estuviese poblado de árboles y permitiese trazar un eje principal AB en sentido de la mayor dimension y otros varios perpendiculares á él, como se ve en la figura, trazándolos y midiéndolos horizontalmente, como hemos explicado en los terrenos inclinados (63); pues fijos entonces los puntos extremos de estos ejes, se podria hacer, independientemente una de otra, la comprobacion de cada una de las partes AH comprendida entre cada dos de ellos.

En ambos casos puede calcularse tambien si la suma de las distancias horizontales medidas á un lado de la recta mayor AB equivale á la de las medidas en el lado opuesto, y lo mismo respecto de las distancias medidas á uno y otro lado de la mayor recta CD, perpendicular á la primera AB, combinándolas en uno y otro caso de la manera conveniente; de modo que deberá resultar:

1.° $AN' + 22M' + 21L' + J'Y' + H'G' + F'E' + D'C' + B'A' + ZY = AE + 1F + 2G + HY + JL + MN + OP + QR + ST + XB = AB$.

2.° $H'Y' + J'L' + 21M' + 22N' + E1 + F2 + (NO - GN'') = PQ + (XT - RS) + YB + (G'F' - E'Z'') = CD$.

Obsérvese que para hacer la comprobacion ha habido que prolongar MN hasta N″, y ZY hasta Z″.

Si ahora se quisieran fijar otros nuevos puntos del contorno, se haría la referencia por medio de ordenadas á las rectas trazadas, como se ve entre D y 4, 6 y 7, 20 y 21.

347. Las distintas precauciones tomadas en los varios casos expuestos y las que tomemos en lo sucesivo, no tienen otro

fin que poder lograr que cierrè el polígono al construirle en el papel, lo que sólo puede conseguirse cuando se tiene ya bastante práctica así en los trabajos de campo como en los de gabinete; pudiendo establecerse por regla general que dicha construccion tiene por objeto reducir á los menores límites posibles las diferencias que resultan de la imperfeccion de los instrumentos, unidas á las dificultades locales que pueden ofrecerse en las medidas de las líneas y los ángulos que han de servir para la construccion de las figuras semejantes á las del terreno, combinándolas de modo que puedan resolver de una manera conveniente la cuestion.

348. **Con la cadena ó cinta, piquetes y jalones.**—Empleando tan sólo estos medios puede determinarse tambien el contorno de un polígono, si á la circunstancia de ser el terreno de corta extension, reune la de ser llano y despejado, trazando una red de triángulos y midiendo todos sus lados, para construir despues el polígono en el papel, por el trazado de cada uno de los triángulos que le componen y cuyos lados se conocen.

349. **Levantamiento del plano de los objetos interiores de un polígono.**—Operaciones análogas á las expuestas se practican con los diversos objetos que se hallan en el polígono, y que pueden formar parte de su contorno, sean interiores ó exteriores. Daremos ligeramente una idea del modo de levantar el plano de los objetos que se presentan con más frecuencia.

350. **Lagunas.—Pantanos.**—Cuando en el interior de un polígono se encuentran pequeñas lagunas, ó porciones de terrenos cercados ó pantanosos, se procederá como en los casos á que se refieren las figuras 174 y 175.

351. **Rios.—Caminos.**—Se empezará por establecer una alineacion ADEH (fig. 178) en sentido de la longitud del rio ó camino: sobre las partes AD y EH, que pueden considerarse como los ejes principales de polígonos terminados por las curvas del rio, se bajarán las perpendiculares de los puntos B, C, F y G, uniendo estos entre sí y con los D y E donde el eje AH corta al rio, por medio de las AB, BC.... á fin de tener los lados de los polígonos principales inscritos en las curvas ABCD y EFGH. En los puntos A y B se levantan las perpendiculares AY y BL y en un punto Y de la AY la perpendicular YL á esta recta, poniendo despues jalones en los puntos Y y L equidistantes de A y B, con lo que tendremos construido un rectángulo ABLY que encerrará una parte del rio, cuyo contorno quedará determinado bajando ordenadas,

como se ven indicadas algunas en la figura sobre los dos lados AB y LY de dicho rectángulo. Para determinar el valor de BL = AY se buscará un punto L' en la AB desde el cual se vea bajo el ángulo de 45° el jalon L, y se tendrá BL' = BL. La anchura aproximada del rio sería igual á BL — (L*d*+B*e*) y la verdadera, que es la tomada en el sentido de la normal á la curva del rio, puede determinarse por medio del triángulo rectángulo, formado por la normal *ac*, la *ab* y la perpendicular *bc*, en el cual se conocen el ángulo recto y las *ab* y *bc*, que se pueden hallar; buscando, pues, el valor de *ac* se tendrá para la anchura del rio *ac'*=*ac*—*cc'*: ó bien despues de establecida con jalones la normal *ac'*, se podrá medir por cualquiera de los métodos expuestos (260).

Repitiendo el estudio hecho en el primer rectángulo en todos los demás y uniendo los puntos L y M, y los N y O... para referir por ordenadas á las LM, NO.... las partes de curva comprendidas entre las BL y BM, y las CN y CO.... tendremos el polígono YLMNOPQ y el RSTXJZV circunscritos á las porciones correspondientes del rio.

Si la línea AH prolongada no volviese á cortarle, se cambiará tambien de direccion, siguiendo su curso, y trazando una segunda línea principal HH' que forme con la primera AH uno de los ángulos que permite la escuadra, ó bien valiéndose del *abrazadero* para fijarla.

Antes de abandonar el terreno se ensayarán las comprobaciones siguientes: 1.ª Si los ángulos de los rectángulos que no se han tomado primeramente con la escuadra, como el L, son rectos. 2.ª Si cada dos lados opuestos de los mismos son iguales. 3.ª Si resultan tambien PQ=RS, PR=QS, y rectos aquellos de los ángulos P, Q, R y S que no se han tomado entre los datos necesarios para la construccion del plano.

352. La construccion en el papel por medio del cróquis ó registro no presenta dificultad, y habiendo procedido en el terreno del modo expuesto, los errores serán parciales, pues no traspasarán los límites del rectángulo á que corresponden, y para la comprobacion se verá si los valores que dá la escala para las rectas correspondientes á las LM, NO.... representan las medidas halladas para estas en el terreno.

Si se tratase de un camino irregular, despues de establecida la AHH', bastaría trazar solamente las líneas quebradas ABCD y EFGH que hacen veces de polígonos inscritos, y levantar sobre sus lados AB, BC.... ordenadas como la B*d*, que terminan en la orilla opuesta, marcando en el cróquis las distancias B*d* y B*e* del punto B á los jalones colocados en los *e* y *d*.

Si es una carretera como representa la fig. 179, bastará establecer en sentido de su eje la línea quebrada ABC, haciendo los ángulos B de 45° ó 135°, ó fijándolos cuando no tengan estas graduaciones por medio de abrazaderos formando triángulos; se tomará además el valor de la perpendicular *ab* á la AB, que representa la anchura de la carretera. Un punto cualquiera C del eje se determina tomando la mitad de la distancia *mn* entre dos puntos cualesquiera de las *aristas* ó *bordes* de la carretera.

354. **Arroyos.—Veredas.**—Si los arroyos son estrechos y se pueden salvar sin dificultad, se seguirá en estos y las veredas el método expuesto (353). Pero muchas veces es tal su figura y presenta curvaturas é inflexiones de tal naturaleza, que es mas conveniente en muchos trozos establecer como se ve en la figura 180 una línea quebrada ABCDE en sentido de una sola de sus orillas, siguiendo su curso lo más aproximadamente posible, y valiéndose de las ángulos que permite la escuadra, ó de los abrazaderos en caso necesario. Para determinar la curvatura de la parte F se ha tomado como eje la ordenada *de;* para la de la G los lados del rectángulo *r*, y para la de la H los del triángulo rectángulo isósceles *t* construido sobre el eje auxiliar *fg*. En el trozo anterior se han tomado como más convenientes por ejes los lados del triángulo *abc*.

355. **Edificios.**—El contorno poligonal, cualquiera que sea su forma, de un edificio aislado ó de una manzana de casas, se determina por cualquiera de los métodos expuestos (344), y tambien por el de rodeo, determinando los valores de los ángulos por medio de sus opuestos por el vértice.

Puede tratarse además de conocer la distribucion interior del edificio, la construccion de que se ha hecho uso y la decoracion ó aspecto exterior, así como tambien las formas, dimensiones y proporciones de las diferentes partes que le componen para representarlo todo en el papel.

Desde luego se comprende que no bastaría un sólo plano para el conocimiento de todas las circunstancias dichas, por lo que se usan varios, horizontales y verticales, dispuestos de la manera más conveniente para obtener las proyecciones de una y otra clase.

356. *Plantas ó secciones horizontales*.—Se conciben planos horizontales que cortan á los diferentes pisos del edificio y sobre los cuales se obtienen sus proyecciones horizontales ó *plantas*. Las figuras semejantes á estas proyecciones, trazadas en el papel con arreglo á una escala dada, se llaman los planos de las *plantas*.

En cada una de estas secciones se ha adoptado el convenio de representar todos los objetos situados en el mismo piso inferiores al plano de proyeccion, figurando además en las piezas abovedadas las aristas entrantes y salientes de las bóvedas, y en las escaleras los escalones ó peldaños situados encima del plano hasta el suelo del piso superior inmediato. Debe advertirse que todas las líneas situadas en el plano de la seccion ó debajo del mismo y que han de representar la distribucion interior, se trazan con *líneas llenas*, adoptando el que sean de *trazos* cuando indican las líneas situadas encima de dicho plano, y haciendo de *puntos* las que han de representar líneas ocultas.

El plano horizontal se traza en los sótanos ó cuevas donde empieza el arranque de las bóvedas; en los pisos bajos, principales y sotabancos á la altura de un decímetro sobre el dintel inferior ó batiente de los balcones ó ventanas, y en los desvanes ó boardillas trasteras, sobre el mismo suelo.

Para formarse una idea completa al concebir un edificio cortado por un plano horizontal, debe suponerse que se puede separar la parte superior para que quede al descubierto todo lo que debe representarse de la inferior.

La primera operacion es determinar el contorno exterior por el método más á propósito de los que llevamos expuestos, á fin de que los lados del polígono obtenido representen todas las líneas de fachada si el edificio está aislado, ó las que sólo presente al exterior en el caso contrario; pues las demás que se llaman *laterales* ó *de costado* hay que deducirlas despues de las operaciones en el interior. Se empieza la medicion por el exterior, anotando, á partir del extremo de cada línea, la distancia hasta el primer hueco de puerta ó ventana, llamado *entrepaño*; despues la anchura del hueco, y así sucesivamente hasta el otro extremo de cada línea de fachada. Las dimensiones obtenidas en la planta baja para el contorno, ligeramente modificadas, sirven para el exterior de los demás pisos.

Para hacer estas operaciones se usan los rodetes de cinta de hilo, las reglas y reglones, el nivel de albañil y el de aire.

En la distribucion interior se da principio por la planta baja y los sotabancos ó cuevas: despues se determina la planta principal y así sucesivamente, hasta la más elevada. La primera operacion es recorrer toda la planta baja, examinando todas las piezas que la componen, su disposicion y dimensiones respectivas, á fin de distribuir y figurar convenientemente dentro del contorno ya trazado en el cróquis los muros ó paredes de fachada, las paredes maestras y los tabiques, de modo que la figura terminada por el contorno quede dividida en tantas partes como piezas tiene la habitacion. Examinando despues pieza por pieza, se marcarán en el cróquis los huecos de las puertas y ventanas, la figura de sus alféizares, las escaleras, etc., y se empezará la medicion tomando primero los datos para determinar las figuras de las piezas, y despues en sentido de su contorno los necesarios para poder construir la figura con todas las circunstancias señaladas en el cróquis, anotando en este cuidadosamente y con claridad los resultados de las medidas obtenidas, y procurando no olvidar ninguna, á fin de no pasar á otra pieza sin haber concluido por completo la anterior.

Cuando las piezas son rectangulares como la número 1 (figura 181) bastará medir su largo y ancho; bien que para la comprobacion convendría medir tambien las dos diagonales. Si las piezas fuesen trapecios ó cuadriláteros cualesquiera irregulares, como la número 2, se medirán sus cuatro lados y una de las diagonales, y se tendrán los datos necesarios para la construccion en el papel; aun cuando se medirá tambien la otra diagonal para que sirva de comprobacion.

Si son poligonales como la número 3, se medirán las diagonales *ac* y *ad* y todos sus lados, á fin de construirlas en el papel por medio de triángulos. Puede medirse además otra diagonal *be* para la comprobacion.

Si la pieza tiene una parte curva GF como la número 4, se medirá la diagonal *mr* y se trazará, valiéndose de un reglon y de un yeso ó un lápiz blanco, la cuerda *mn*, que se medirá para construir los dos triángulos que se ven en la figura, y para obtener la parte curva, se trazarán ordenadas con el yeso, valiéndose de una escuadra grande de madera y de una regla, ó haciendo que sirva de escuadra el nivel de perpendículo, midiendo las abscisas y ordenadas con el metro de bolsillo. Tambien se puede hacer el trazado de las líneas, cuando tienen bastante longitud, valiéndose de una cuerda impregnada de blanco ó de almazarron.

Por último, cuando la disposicion del interior de alguna pieza sea tal que no se pueda medir alguna de sus diagonales, se hará uso de triángulos auxiliares para fijar los ángulos, como se ha dicho ya: lo cual no viene á ser otra cosa que seguir el método de rodeo.

Los gruesos de los muros de fachada como el AB y los de las paredes maestras como las que separan las piezas 1 y 2 de las 3 y 4, así como los tabiques de estas últimas que presentan huecos de puertas ó ventanas, se pueden medir directamente. Respecto á los que no presentan huecos, habrá que deducir sus gruesos, combinando las otras medidas que se conozcan. El grueso del muro AG será igual á $3,^{m}20 - (2,^{m}50 + 0,^{m}10) = 0,^{m}60$, como el de fachada; el del tabique P será $3,^{m}20 - (0,^{m}10 + 2,^{m}50 + 0,^{m}35) = 0,^{m}25$.

Las medidas deben hacerse en general con independencia unas de otras, es decir, sin hacer combinaciones para deducir unas de otras, excepto en aquellos casos en que no se puede pasar por otro punto, y de que acabamos de poner ejemplos; pues de este modo se podrán hacer comprobaciones, viendo si las longitudes totales de los lados de cada pieza resultan iguales á las sumas de las medidas parciales de puertas, ventanas y entrepaños.

Levantado el plano de la planta baja, se procede á levantar el de los sótanos, procurando establecer con precision la correspondencia de sus muros con los del plano de aquella, lo que se consigue por medio de señales hechas en las fachadas ó en otras partes del edificio y relacionadas con los huecos de la planta baja y de las cuevas. Se representará tambien la disposicion de las escaleras como en los demás pisos, y los sitios ó parte ocupada por las obras subterráneas, como son alcantarillas y tajeas, que se construyen para las conducciones de las aguas. Pasando despues á los pisos superiores y las boardillas, cuyos planos se levantan por los mismos procedimientos, se obtiene el de las armaduras proyectando sobre los suelos ó pisos de las últimas las diferentes piezas de madera que las componen, empleando en esta operacion la plomada, las reglas, el yeso y las cuerdas impregnadas; debiendo advertirse que la uniformidad en tamaño y disposicion de las partes que constituyen este género de construcciones, facilita la operacion.

Por último, para obtener la planta de los edificios ó posesiones de grande extension, en los que se hallan patios de varias figuras y tamaños para distintos usos, terrenos cercados para servir de huertas y jardines y otras dependencias, se hará uso de los métodos explicados en este capítulo para levantar el plano de los terrenos de corta extension.

357. *Alzados ó elevaciones.*—Para los alzados se conciben planos verticales que dejen todo el edificio á un mismo lado, sobre los cuales se proyectan las caras principales ó fachadas, teniendo no sólo por objeto su representacion, sino la determinacion de todas las alturas de las distintas partes del edificio y la elevacion total del mismo. El plano en que se proyecta cada fachada se supone paralelo á ella.

Los cróquis de las elevaciones ó alzados se hacen con facilidad, pues todo lo que se ha de dibujar se halla á la vista, y la mayor parte de las dimensiones horizontales se deducen de las plantas de todos los pisos, teniendo que determinar solamente las que puedan faltar, así como todas las verticales. Es preciso tomar con precision los detalles de arquitectura; teniendo que colocar andamios cuando el edificio es de consideracion.

Para obtener las dimensiones verticales, se hace uso de un reglon que se coloca verticalmente, y por medio de una plantilla ó escuadra se van tomando las diversas alturas directamente y con independencia unas de otras para que haya lugar á verificaciones, y dividiendo la operacion por pisos; comprobando despues con la altura total del edificio, que en general hay que obtenerla de una manera indirecta, como más adelante veremos; ó bien no comprobando más que hasta el vuelo de las cornisas ó alero de los tejados, suspendiendo una plomada y midiendo despues la longitud del hilo.

Observaremos con este motivo, que la apreciacion de la longitud del hilo ha de hacerse procurando que tenga la tension que experimentaba al tomar la medida, lo que se consigue con facilidad disponiendo horizontalmente la unidad de medida en una ventana ó balcon de los pisos altos, á fin de tomar su longitud en el hilo, empezando por la parte superior de este último, en tanto que queda suspendida la restante al exterior del edificio y en estado de tension por el peso del perpendículo. De lo contrario la contraccion del hilo alteraría la medida de la altura.

Como las escalas adoptadas al tratarse de los planos generales son muy pequeñas para presentar con claridad todos los detalles, se adoptan escalas quíntuplas ó décuplas de las primeras para dibujar en mayor tamaño los objetos que merecen mencionarse especialmente. El plano que contiene estas figuras se llama *plano de detalles*.

358. *Cortes ó secciones verticales.*—Para formarse una idea de estas secciones se concibe cortado el edificio por varios planos verticales, unos perpendiculares y otros paralelos á la linea de fachada y en sentido de las mayores dimensiones. En cada uno de estos planos se proyectarán solamente los objetos comprendidos entre él y las paredes más próximas al mismo. Para formarse una idea exacta, es fácil concebir, que seccionado el edificio por un plano vertical se quita ó separa la parte anterior para dejar al descubierto la que debe ser representada.

Por medio de estas secciones se conoce tambien el espesor de los muros ó paredes y el de los suelos, y se representan los materiales de que se hallan formados y sus diversas disposiciones, asi como tambien la direccion que tienen en cada piso los cañones de las chimeneas y otros que puedan existir en el interior de los muros.

En la formacion del cróquis de las secciones verticales se debe proceder con el mayor acierto, pues la importancia de ellas es fácil de concebir; logrando por su medio conocer la naturaleza de la construccion del edificio. Esta parte exige, para ser desempeñada cual corresponde, mucha práctica y otros conocimientos agenos de este lugar. Respecto á las dimensiones, se deducen fácilmente en cada piso de las respectivas plantas y alzados. Los gruesos de los entramados horizontales que constituyen los techos de las habitaciones inferiores, y los suelos de las superiores inmediatas, se determinan indirectamente, como hemos dicho para las paredes que contenían huecos.

Con el objeto de que los edificios tengan mayor estabilidad, no se construyen los muros ó paredes de fachada de modo que los planos que los limitan sean ambos verticales, sino que se da al paramento exterior una ligera inclinacion hácia el interior del edificio, á fin de que vaya disminuyendo gradualmente el grueso desde la base donde es mayor hasta que en el último piso quede con el que le deba corresponder. Al mismo tiempo se va disminuyendo el grueso en cada piso, retirando un poco en cada uno hácia la parte exterior los paramentos interiores, que siempre son verticales. Las paredes divisorias disminuyen de grueso, aproximándose ambas caras una misma cantidad. La disposicion de esta clase de muros se representa en la fig. 182, que es la seccion vertical de una pared de fachada; y con el objeto de obtener su figura verdadera en el plano de la seccion vertical del edificio, hay que medir la inclinacion del paramento exterior, valiéndose de una plomada, dispuesta de modo que, suspendida de la parte superior del muro, vaya á tocar con su extremo inferior el pié del mismo: tomando entonces la distancia *ac*, su relacion con la longitud *ab* del hilo dará la inclinacion que se deseaba. Esta relacion, que es la tangente del ángulo *abc* que forma con la vertical el paramento del muro, se llama el *talud* de este último. Si suponemos que se tiene $ac = 0,^{m}1$, y $ab = 5,^{m}$ el talud será de $0,^{m}02$ por metro. Respecto á la disminucion *rs* de los gruesos en el interior, se obtiene fácilmente por las medidas tomadas en las plantas de los pisos respectivos.

Una disposicion análoga á la de los muros de fachada de los edificios se da á los *muros de sostenimiento* ó *de contension de las tierras*, siendo mayores los taludes ó escarpes, y tambien los retallos que forman el escalonado interior, á los que se da el nombre de *zarpas* ó *bermas*.

Las dimensiones interiores de las cañerías ó tubos de las chimeneas se deducen de las que tienen en el exterior, en especial á su salida en las boardillas, y de los demás indicios á que da lugar la naturaleza y dimensiones de la construccion.

Para tener una idea de las dimensiones de los cimientos, no hay otro medio que practicar *sondeos* en los sótanos y por la parte exterior del edificio.

Para completar la operacion se hace uso de los *perfiles*, llamándose así las secciones de los detalles de Arquitectura, como cornisas, molduras, etc., causadas por planos, en los cuales sólo se consideran las líneas situadas en ellos.

359. *Ejemplo de los planos de un edificio.*—La figura 183 representa el sencillísimo ejemplo de la *planta* ó *seccion horizontal* de una casilla para dos peones camineros, en virtud de la seccion dada segun AB en la fig. 184, que representa el *alzado* ó *elevacion*. La fig. 185 manifiesta el *corte* ó seccion vertical por un plano cuya traza horizontal es la recta CD en la fig. 183.

Por medio del cróquis se procede sin dificultad á la construccion del plano en el papel con arreglo á la escala elegida.

360. *Replanteos.*—Recíprocamente, formado el proyecto de un edificio en el papel y bien estudiado en su conjunto y detalles, para trasladar su planta al terreno en sus dimensiones na-

turales, lo que se llama *trazado del proyecto*, se procede de la manera siguiente: una vez elegido el sitio donde ha de construirse el edificio, se empieza por desembarazar el terreno de todos los obstáculos, dejándole lo mas horizontal que sea posible ó *banqueado*, segun las circunstancias, con el objeto de que pueda hacerse el trazado con exactitud, con lo cual se tendrá hecha la *explanacion*.

Despues se traza como base de las operaciones una recta que sea la más principal del proyecto, ó las que determinen naturalmente las circunstancias locales. En efecto, en un edificio aislado, cuya posicion no ha de estar sujeta á ninguna condicion, se puede tomar por base una de las líneas de fachada, ó bien si es simétrico, el eje de simetría; pero si el edificio ha de llenar ciertas condiciones, como en el caso de formar parte de una calle sujeta á rigurosa alineacion, se tendrá que tomar como base la línea de fachada; resultando que la figura del edificio y las circunstancias locales son las que determinan aquella línea que está llamada á ser la principal en el trazado, y á la cual deben referirse todas las demás del proyecto.

Trazada la direccion de la base con toda la exactitud posible, se procede á medir la longitud total que debe tener, fijando bien sus límites y repitiendo la operacion varias veces; por lo que no se hará uso en estas ocasiones de la cadena, sino de reglones bien construidos, colocados al tope y dispuestos horizontalmente (68). Se marcan despues sobre la base los puntos por donde pasan los ejes secundarios del edificio, trazándolos y midiéndolos con las mismas precauciones; y se vá continuando el trazado y medicion de las demas líneas, procediendo de las mayores á las menores, determinándolas en su totalidad y tomando despues en cada una las partes de que consten para que las diferencias parciales que puedan resultar se distribuyan entre todas y se hagan inapreciables; lo que no sucedería si se procediese de las partes al todo, pues entónces se irian acumulando los errores parciales.

Cuando ya se han señalado las distancias á que deben hallarse los muros y demás partes del edificio y sus direcciones respectivas, se marcan los espesores por medio de piquetes clavados de trecho en trecho, y formando líneas paralelas á los ejes correspondientes, los cuales se unen por cuerdas de cáñamo llamadas de *atirantar*. En Madrid se usan cuerdas delgadas de esparto llamadas *tomizas*.

Con el fin de que no desaparezcan estas líneas del trazado, como sucede al abrir las zanjas ó practicar los desmontes, se hace uso para señalar los anchos y las distancias de unos listones de madera MN, RS (figura 181) llamados *camillas*, que se colocan horizontalmente á mayor altura que el terreno y se sujetan á estacas verticales clavadas en este, de modo que se hallen unas de otras á mayores distancias que los anchos de las zanjas. Al principio se trazan con lápiz las dimensiones en las camillas por si hubiese necesidad de alguna rectificacion, y cuando ya se tiene seguridad en el trazado del proyecto, se fijan con cortes de sierra las verdaderas magnitudes. Para referir al terreno las dimensiones señaladas en las camillas se emplean las plomadas, y se pueden señalar líneas horizontales en las estacas que sostienen las camillas, ó bien valerse del terreno mismo, si está bien horizontal ó nivelado, para la referencia de las profundidades respectivas de las zanjas.

361. **Situacion de los objetos interiores ó detalles en el plano.**—Sea el terreno que representa la figura 186, cuyo contorno se ha levantado con la escuadra, valiéndose de un eje AD y de varias ordenadas al mismo. Para colocar en su interior los varios objetos que contiene, y que se llaman tambien *detalles*, en sus verdaderas relaciones de posicion, se referirán á los lados, al eje y á las ordenadas del polígono principal ABCDEF.

Cuando el objeto es sencillo, como por ejemplo un árbol L, bastará medir con exactitud una perpendicular bajada desde él á la recta que más se le aproxime de las tres AF, FG ó AG, lado del polígono principal la primera, ordenada la segunda, y parte del eje AD la tercera, midiendo tambien la abscisa correspondiente.

Si fuese una casa como R, bastaría bajar dos perpendiculares desde los extremos de la línea de fachada que estuviese mas próxima á una de las rectas fijas del canevás, como se ha explicado antes, y que es la FE.

Para fijar la laguna N se han referido á la ordenada BH los extremos de una de las rectas del polígono circunscrito á la misma para levantar su plano.

El rio y puente P se refieren á la línea quebrada FGMC, compuesta de la parte MG del eje y de las ordenadas FG y CM.

Valiéndose del cróquis, que debe hallarse anotado con claridad y exactitud, es fácil la reproduccion de la figura en el papel. Si se tratase de formar registro para la situacion de los objetos interiores ó detalles, se empezará por los de mas importancia hasta concluir con los mas sencillos, poniendo en la primera columna las líneas del polígono principal, lados, ordenadas ó directrices á que se hallen referidos; en la segunda las abscisas; en la tercera las ordenadas con su signo; en la cuarta el nombre de los objetos, y en la quinta y última las observaciones: separando con líneas horizontales las partes del registro correspondientes á cada uno de los objetos.

Entre las líneas elegidas para la situacion de los detalles, la quebrada FGMC que parte de un vértice F y vá á parar á otro C del polígono principal atravesándole, recibe particularmente el nombre de *transversal*.

Si el plano del terreno se hubiese levantado con la escuadra por otro método, como el de rodeo, ó con la cinta, entonces seria preciso para fijar los objetos anteriores, como por ejemplo los de la fig. 187, trazar la transversal GHYLS que en este caso parte de un punto G del lado FE y va á parar al S del AB. Las rectas GH, HY.... que componen la línea quebrada GHYLS, se pueden enlazar entre sí por ángulos de 90° ó de 135°, y en caso de necesidad por abrazaderos, que es el único camino que puede seguirse cuando se emplea sólo la cinta. Estableciendo otras nuevas transversales que puedan ser necesarias, se conseguirá fijar en el plano la posicion de todos los objetos que deba comprender.

La casa R se ha situado valiéndose de una nueva línea establecida MN. Los grupos de casas ó pequeña poblacion P se ha situado relacionando uno de los lados del polígono principal circunscrito á la misma, que en el caso actual es un trapecio, con el CD del polígono principal correspondiente al terreno, por medio de dos ordenadas.

Otros varios medios pueden emplearse para la situacion de los objetos, que podrán ser útiles segun las circunstancias de las localidades. En la fig. 188 para fijar el objeto M se han prolongado las ad y bc hasta la AB que representa parte de una transversal ó de un lado de un polígono, y medido las aa' y bb', con lo cual en la construccion despues de obtenida la $a'b'$ se hará centro en los extremos de esta con los rádios aa' y bb' y trazando dos arcos, la parte ab de la tangente á los mismos, comprendida entre los puntos de contacto, representará la longitud y posicion de la fachada del objeto M.

Para determinar el N se ha prolongado la ad midiendo la aa', se ha bajado la perpendicular cc' y prolongado la ab hasta b', con lo cual, midiendo las bb' y $b'c'$, despues de obtener en la construccion la $a'c'$, se trazará desde el punto a' un arco con el rádio aa', se levantará en c' una perpendicular, en la cual se tomará la parte $b'c'$, y tirando por b' una tangente $b'a$ á dicho arco, no habrá más que tomar en ella la bb' y se tendrá en magnitud y posicion la ab que representa la fachada del objeto N.

Por último, un objeto P puede ser inaccesible, pero visibles sus cuatro fachadas desde cuatro directrices distantes que formen parte del canevás. Para determinar su posicion se han establecido alineaciones en sentido de sus líneas de fachada, que terminen en las directrices. Tomando en estas las medidas necesarias para obtener los puntos a', b', c', d' y a'', b'', c'', d'', y trazando rectas por estos puntos, sus intersecciones a, b, c, d determinarán en magnitud y posicion el objeto P.

362. Para la formacion del registro de las transversales, como la GHYLS de la fig. 187, tanto para su determinacion y situacion como para las de los detalles que á ellas se refieren, se consignará á la cabeza del mismo la distancia á que el punto de partida G se halla de uno de los vértices F ó E del lado FE del polígono principal, así como tambien la posicion del punto de arribo S. Despues en las columnas del registro se consignarán: en la primera las longitudes de las GH, HY, YL y LS; en la segunda los ángulos que estas líneas forman entre sí; en la tercera las abscisas de cada una de ellas; en la cuarta las ordenadas correspondientes con su signo; en la quinta los nombres de los objetos, y en la sexta y última las observaciones, pudiendo expresar en esta ó en una nueva columna establecida al intento, la circunstancia cuando ocurra, de tener que valerse de los abrazaderos para la disposicion entre sí de las rectas que componen la quebrada elegida por transversal.

363. **Levantamiento del plano de varios terrenos contíguos ó adyacentes.—Parcelacion.**—Ocurre muchas veces tener que situar en los planos las líneas sinuosas que separan unos de otros los terrenos contiguos, ya por pertenecer á distintos propietarios, ya por ser de diferentes calidades ó destinarse á cultivos de distinta clase.

364. **Con la escuadra.**—Supongamos que se trata, por ejemplo, de levantar el plano de la porcion de zona, cuyos límites naturales son el rio y el camino representados en la fig. 189, comprendida entre las líneas AB y CD, elegidas convenientemente. Esta parte de zona ABCD se halla compuesta de cinco porciones,

y se quiere obtener en el plano el contorno de cada una de ellas.

En vez de ir determinando uno por uno estos cinco polígonos, como ya se sabe, conviene, para abreviar, considerar al conjunto de ellos, ó sea á la parte ABCD, como un solo polígono en el cual se trata de fijar las líneas que le dividen formando en su interior varias ramificaciones, como si se tratase de situar las márgenes de rios y caminos que le atravesasen. Empezaremos por lo tanto trazando un eje principal MN, al cual se referirán por ordenadas los puntos B, E, F y C en sentido de la direccion del rio, y los A, G, H, J y D del camino. Se relacionarán despues las líneas poligonales interiores que dividen al polígono ABCD en otros cinco, bajando ordenadas desde sus vértices, ya al eje MN, como se ha hecho desde los puntos R, Z y T, ya á alguna de las ordenadas, como se ve en los puntos L y Q con respecto á la del punto H, y en P con relacion á la de J; ya, por último, á los ejes secundarios del polígono principal, como en los S y X que están referidos á los BE y FC, así como tambien á estos y al EF los demás puntos de la orilla del rio; con lo cual se habrán tomado todos los datos necesarios para hacer la construccion total en el papel, pudiendo copiar con separacion si es necesario, porque sean tierras de distintos propietarios, los planos de las cinco porciones. En el *Catastro* reciben estas porciones el nombre de *parcelas*: y cuando se levanta el plano de una cierta extension de terreno, con el objeto de detallar en el mismo todas las parcelas que comprende, se le denomina *plano parcelario.*

365. La fig. 190 manifiesta un nuevo ejemplo, en el cual se han dispuesto las operaciones de modo que pueda haber lugar á mayor número de comprobaciones que las que permite la figura anterior, en la cual hubiera podido seguirse el mismo procedimiento. En efecto, trazada una recta AB por el vértice saliente Q, se ha levantado en el punto B una perpendicular BC que pasa por el vértice entrante N y otra AD en el punto A, y suponemos que las condiciones de localidad han obligado á trazar la oblícua DC, que pasa por el punto saliente Z, con lo que se tendrá un trapecio ABCD, en el cual se podrá comprobar la DC ; en el punto G de la AB se ha levantado la perpendicular GH, cuya posicion podría comprobarse en el caso de que el punto G dividiese á la AB en dos partes iguales, lo que hubiera podido prepararse así, viendo si resultaba la GH igual á la mitad de AD+BC. Se elegirá despues en la GH un punto O, tal que colocando en él la escuadra, y

levantando la perpendicular EF á la GH, esta corte en el mayor número posible de puntos á la línea quebrada que separa las parcelas 1 y 2 de las 3 y 4; se referirán los vértices de esta línea tales como los P y R á la EF, y los de la otra línea quebrada que separa las parcelas 1 y 3 de las 2 y 4 á la GH, como se ve en los S y T.

Los demás vértices de las parcelas se hallan referidos á los lados del trapecio ABCD. Pueden tambien comprobarse como se hace con este, los lados DH y HC de los dos trapecios AGHD y GBCH en que aquel queda dividido; así como tambien los lados opuestos de los rectángulos AEOG y GOFB y los ángulos rectos en E y F que no se han tomado directamente.

366. **Con la cadena ó cinta, piquetes y jalones.**—Por iguales consideraciones á las expuestas para la escuadra, no se determinarán separadamente las siete parcelas que componen el polígono que representa la fig. 191. En efecto, considerando la operacion como si se tratase de un solo polígono en el cual se hubieran de detallar despues las líneas situadas en su interior, se trazará una diagonal BD, y prolongando la BJ se acabará de trazar el triángulo BDC, que se podrá construir, así como el ABD, midiendo sus lados. Se referirán despues á los lados de estos triángulos las líneas que dividen las parcelas, de la manera siguiente: se medirán las RD y DS y los puntos R y S fijarán la RS; y midiendo ST se tendrá el punto T que con el X extremo de la AX, que se medirá tambien, nos darán la direccion de la XT, la cual prolongada deberá pasar por el punto P, lo que servirá de comprobacion al construir el plano. Se tendrá así el cuadrilátero ARTX, compuesto de las partes 1 y 2; midiendo las AZ y RV, y trazando la ZV se obtendrán aquellas separadamente; y de una manera análoga se procedería para fijar las parcelas 5, 6 y 7. Para determinar la 3, como ya se conoce la longitud de RD, se medirán las TP, DN, MN y DM para construir en el papel el triángulo DMN, y la línea MN prolongada deberá pasar por la proyeccion del punto P en el plano; pudiéndose medir para mayor comprobacion la MP. Por último, la parcela 4 se obtendrá midiendo la recta QP y las CG y CY para trazar la GY y medir las partes GH y LY que nos darán los puntos H y L, que unidos á los J y P terminarán la construccion.

Convendrá comprobar en el terreno si las medidas parciales tomadas en cada línea, tal como en la AB, componen la total de esta; y en el papel se procederá en la construccion del todo á las partes para que las diferencias queden distribuidas entre estas, á fin de evitar la acumulacion de los errores.

367. **Levantamiento del plano de una poblacion pequeña.**—Cuando se circunscribe un polígono á una pequeña poblacion para obtener su plano, se comprende fácilmente que deben considerarse los grupos de casas ó *manzanas* que la componen, como los objetos interiores que hay necesidad de situar en él, relacionándolas de manera que además de quedar bien determinados los contornos de todas ellas, constituyan entre sí la verdadera figura de las calles y plazas. Este caso no será, por lo tanto, más que un nuevo ejemplo, en el cual hay que considerar un número suficiente de transversales, el menor posible, y que el geómetra no debe establecer á capricho, sino de manera que á la par que reunan las condiciones más ventajosas á que dé lugar la naturaleza del caso, puedan ofrecer medios sencillos de comprobacion, que proporcionen la seguridad de no haber cometido sino errores parciales, y esta tendencia á que no se acumulen afectando la totalidad de la construccion, encerrándolos dentro de límites que no puedan traspasar, que es á cuanto debe aspirarse, no debe separarse nunca de la imaginacion del geómetra, siendo necesarias mucha práctica é instruccion para desempeñar con acierto esta parte esencial que es donde más puede hacer brillar estas dotes.

Advertimos que en las figuras que representen poblaciones y en las demás que sea necesario, no se cotejen sus dimensiones con arreglo á una escala dada, pues siendo nuestro objeto enseñar los procedimientos del levantamiento de los planos, tienen que disponerse aquellas de modo que se hallen con claridad para satisfacer á las explicaciones, y si las hubiéramos sujetado á escala, hubieran resultado acaso confusas muchas de sus partes, que han de ser objeto de nuestra atencion.

368. **Con la escuadra.**—Haremos aplicacion de las ideas expuestas, en el levantamiento del plano de la pequeña poblacion que representa la fig. 192, haciendo uso de la escuadra, acompañada como siempre de la cadena ó cinta, piquetes y jalones. Lo primero que se ha hecho ha sido trazar el trapecio ABCD que permite la disposicion del camino y del rio que rodean la poblacion, y que circunscribe á esta. Colocada la escuadra en el punto E, se levantará una perpendicular EM que termine en el lado BC atravesando toda la calle principal, con lo cual el trapecio ABCD que-

dará dividido en otros dos ABME y MCDE. En los puntos convenientes F y H, se trazarán bajo ángulos de 135° si lo permite la disposicion de las manzanas de casas, las rectas FG y HL que atraviesan dos calles afluentes á la principal, y que reunen la circunstancia de dividir, la FG al primer trapecio ABME en otros dos AGFE y GFMB, y la HL al segundo MCDE en los dos EHLD y HLCM. Los cuatro trapecios ABME, MCDE, AGFE y EHLD se podrán comprobar hallando el valor de las rectas BM, MC, GF y HL. Para comprobar el trapecio MHLC en que los lados MC y HL son oblícuos á las bases MH y CL, se trazará si es posible, como en el caso actual, la línea TS que une los puntos medios de dichos lados, y se verá si su medida es igual á la mitad de la suma de las bases MH y LC. Respecto al trapecio BGFM análogo al anterior, y en que no se puede establecer la línea que une los puntos medios de los lados FG y BM, se trazará la recta MM' perpendicular á AB, y se comprobará la GF en el trapecio GFMM'.

En el trapecio MHLC, la TS se puede tomar como auxiliar para la separacion de las dos manzanas que encierra, ó se puede establecer la ordenada YJ sobre la HL.

Réstanos dividir el trapecio HLDE que encierra las cuatro manzanas, núms. 2, 3, 5 y 6. En el punto P de la AD se levantará la perpendicular OP, que atravesando la calle que se vé en la figura va á terminar hácia el centro de la plaza O, y fijando los puntos convenientes Q y O, se dirigirá desde el primero la alineacion QR hasta que encuentre á la EM, y desde el segundo la OX formando ángulos de 135° con la OP, y con esta misma inclinacion la XZ hasta terminar en la DC. Por último, se prolongará la OX hasta N, como se ve en la figura, tanto para fijar la calle que atraviesa la alineacion *gh*, como para comprobar en el trapecio OPDN la $ON = Om + gh + nN$. En el trapecio EPQR se comprobará finalmente la RQ.

Resulta de la disposicion explicada:

1.° Que cada manzana queda inscrita en un polígono, que en este procedimiento suele ser en general un trapecio, reduciendo así la cuestion á uno de los casos más elementales, pues no habrá más que referir á los lados del polígono por medio de ordenadas los vértices de dicha manzana.

2.° Que bien construidos estos polígonos, cuyo conjunto constituye lo que entre los prácticos se llama *poligonacion*, y no es otra cosa que el *canevás*, cuyos lados están sujetos á las comprobaciones expuestas, los errores que se cometen serán parciales; pues el que se cometiese en la medida de una de las ordenadas que fijan la manzana inscrita en cualquiera de los trapecios, por ejemplo, la 2, que lo está en el EPQR, cambiaría algun tanto la posicion de dicha manzana; pero este error, no traspasando los límites del trapecio, no influiría en la colocacion de las demás manzanas que contiene el plano.

Acabando de examinar la figura, se observa que si las líneas RQ y OX no se pudiesen fijar por el ángulo de 135°, habría que valerse del *abrazadero* para tener triángulos *a* y *b*, y que para fijar el ángulo total *e* ha habido que construir los dos triángulos *c* y *d*. Por último, el camino y el rio se han referido á los lados CD y BC del trapecio ABCD, por medio del suficiente número de ordenadas.

369. **Con la cadena ó cinta, piquetes y jalones.**—Teniendo presente la manera de operar con estos medios, y siguiendo una marcha análoga á la explicada con la escuadra, se puede levantar tambien el plano de varios grupos de casas ó de un pequeño pueblo.

La sola inspeccion de la figura 193 da á conocer las operaciones practicadas. Las líneas de trazos manifiestan el polígono circunscrito, cuyos lados son otros tantos ejes, así como las rectas que atraviesan las varias calles, circunscribiendo y aislando las diferentes manzanas. Refiérense á los expresados ejes las líneas de fachada, como GH, que prolongada termina en el lado AB y en la recta ZL, debiéndose medir las MG, GH y HL, juntamente con las demás que son necesarias para completar la operacion. La RS prolongada termina en los lados DE y DC; las líneas que parten del punto V se han fijado por dos triángulos, y para más comprobacion se pueden fijar por tres como en Z. Todo lo demás se comprende fácilmente.

370. **Construccion del plano.**—Las construciones en el papel, en los casos expuestos en las figuras 192 y 193, valiéndose del cróquis ó registro no presentan dificultad, siguiendo una marcha análoga á la del terreno y en virtud de los conocimientos que ya se poseen.

Levantamiento de los planos de los terrenos de mediana extension.—Consideraciones generales.—Si se echa una ojeada sobre cuanto hemos dicho acerca del levantamiento de los planos de los terrenos de corta extension, se comprenderá fácilmente que habremos de seguir una marcha análoga al ocuparnos de los de mediana extension, en los cuales se facilitarán los procedimientos por hacer uso de instrumentos mas adecuados, como son todos los goniómetros, las brújulas y la plancheta, que nos proporcionarán las ventajas siguientes:

1.ª La mayor facilidad y expedicion en el establecimiento de los polígonos principales inscritos ó circunscritos, por el recurso de poder elegir ángulos y rumbos de todas magnitudes.

2.ª La mayor precision en la direccion de las visuales, y el mayor alcance que permiten los anteojos de que van acompañados la mayor parte de los referidos instrumentos, reduciendo así al menor número posible el de los lados de los polígonos principales; circunstancia apreciable en el caso actual de ser ya de alguna consideracion la extension de los terrenos cuyo plano ha de levantarse.

3.ª Las más prontas y sencillas comprobaciones de que puede hacerse uso, fundadas en el conocimiento de los valores de todos los ángulos de los polígonos.

Debemos hacer tambien las siguientes advertencias:

1.ª Que solo se hace uso de los instrumentos dichos para el establecimiento de los contornos de los polígonos principales y de las líneas quebradas que sirven de auxiliares en la determinacion de los detalles ú objetos interiores, debiendo entrar casi siempre en combinacion la escuadra con el instrumento de que se haga uso, para referir á los lados de los polígonos principales y de sus transversales por medio de ordenadas, todos los vértices del polígono dado y los que haya necesidad de fijar entre los que presentan los objetos interiores.

2.ª Que cuanto vamos á exponer puede igualmente aplicarse á los terrenos de corta extension, en el caso de poderse disponer de los expresados instrumentos, facilitando y asegurando así el resultado de las operaciones.

Prévias las ventajas y advertencias expuestas, pasaremos á la resolucion de las cuestiones, haciendo uso de los métodos de interseccion, rodeo, doble interseccion y radiacion, que son los propios y más exclusivos de los goniómetros, brújula y plancheta, aplicándolos segun las circunstancias de localidad.

371. **Determinacion del contorno.—Polígonos rectilíneos compuestos de un corto número de lados.—Por interseccion.—Con los goniómetros.**—Sea el polí-

gono ABCDEF (fig. 194): se medirá con todo cuidado el lado AB que se elige como base; se hará estacion en el extremo A tomando todos los ángulos que forman con la base las visuales dirigidas á los vértices F, E, D y C, así como el rumbo de la AB con la brújula que acompaña al goniómetro, trazando en el cróquis las direcciones de las visuales y los arcos correspondientes de los ángulos, y escribiendo en los extremos de estos últimos que terminan en aquellas y en sentido de las mismas, los valores de los ángulos, como se ve en la figura. Se pasará despues á hacer estacion al otro extremo B, para tomar los ángulos que forman con la base las visuales dirigidas á los mismos puntos F, E, D y C, anotando igualmente los valóres en el cróquis, con lo cual se tendrán los datos necesarios para la construccion del plano. Para comprobacion convendrá tomar en la base AB un punto intermedio O, y midiendo y tomando por base la AO, hacer estacion en O para medir los ángulos que con la AO forman las visuales dirigidas á los citados puntos F, E, D y C, anotándolos en el cróquis. En el extremo A se ha escrito el rumbo 295° de la base AB; en el punto O la longitud 170^{m} de la AO, y en el otro extremo B de la base la longitud total 315^{m},5 de la misma.

Si para consignar los datos se quisiese hacer uso de un registro, se formará este como se ve á continuacion:

Registro del polígono ABCDEF levantado con los goniómetros por el método de interseccion.

LONGITUD DE LA BASE AB = $315,^{m}50$.

RUMBO DE LA MISMA = 295°.

Ángulos en la estacion A. 1	Ángulos en la estacion B. 2	Vértices. 3	Ángulos en la estacion O, distante 170 metros de A. 4	Observaciones. 5
120°	30°	F	40°	
80°	66° 30′	E	81°	
44°	105°	D	122°	
20°	135°	C	153°	

En la primera columna se escriben los ángulos medidos en la primera estacion A y en la tercera los vértices á que corresponden; en la segunda los ángulos de la estacion B con relacion á los mismos vértices, y en la cuarta los ángulos en la estacion intermedia O, disponiendo la quinta columna para escribir las observaciones que puedan ocurrir.

372. *Construccion del plano.*—Para construir el polígono en el papel, se tomará con arreglo á la escala elegida la *ab* que represente á la AB, y se irán formando en sus extremos con los transportadores los ángulos que se hallen consignados en el cróquis ó en el registro, escribiendo en los extremos de las líneas que se tracen las letras minúsculas correspondientes. Observando despues el punto en que se cortan cada dos rectas de una misma letra, *e* por ejemplo, y marcándole con el lápiz se volverá á escribir á su lado dicha letra, y se unirán entre sí con rectas los diferentes puntos de interseccion y los extremos de la base, resultando de este modo construido el polígono *abcdef* semejante al ABCDEF.

Para comprobacion, se tomará la *ao* que represente á la AO, y formando en *o* los ángulos que señale el cróquis ó el registro, cada línea perteneciente á un punto *e* deberá pasar por la interseccion de las dos rectas tiradas por los extremos de la base; donde vemos que el método de interseccion se comprueba por él mismo, y esta razon, unida á la de que sirve tambien para comprobar todos los demás, ha sido la causa de darle la preferencia en el órden de exposicion de los distintos métodos.

La marcha que hemos adoptado para llevar el registro permite determinar con claridad en el papel la proyeccion de un punto E y la comprobacion del mismo, por la circunstancia de encontrarse en un solo renglon todos sus datos.

Por medio de la escala y el transportador de Troughton se pueden hallar los valores de los lados y ángulos del polígono en cuestion, y por el rumbo de la AB se le situará en el papel al ponerle en limpio en la posicion que deba hallarse.

373. *Replanteo.*—Recíprocamente, dado el polígono en el papel, para construirle en el terreno en la suposicion de ser conocidos los extremos de la base, se formarán con esta los ángulos correspondientes, estableciendo alineaciones con los jalones en sentido de las visuales, y hallando como se ha dicho (57) el punto de interseccion de las dos correspondientes á cada punto E, clavando despues un piquete en dicho punto que ha de representar

un vértice del polígono. Para comprobacion, se podrá formar el ángulo en O correspondiente al punto E, antes de clavar el piquete, para ver si la visual OE corta el jalon que señalaba la interseccion de las visuales AE y BE.

374. Supuesto que en el papel se tiene ya trazado el contorno del polígono *abcdef* y se pueden tomar sus ángulos con el transportador, se podrá proceder tambien en el replanteo de la manera siguiente: se hará estacion en B, dirigiendo la alidada fija al jalon del punto A, y tomando en el instrumento el ángulo *abc*, se plantará un jalon en sentido de la visual de la alidada movible, y establecida la alineacion se tomará la BC de la longitud que marque la *bc* en la escala; se pasará despues al punto C y se continuará de la misma manera hasta haber trasladado todo el polígono al terreno.

375. Cuando sólo se puede disponer de transportadores sencillos, es fácil cometer un error de 8 ó 10 minutos en la medida de un arco correspondiente á un ángulo dado en el papel, por lo cual se tomará un arco duplo, cuádruplo, óctuplo... del que se vá á medir, y al cometer en este caso el mismo error en el arco total, dividiendo el número de grados hallado por 2, 4, 8... se tendrá el valor del arco dado con un error mitad, cuarta, octava parte... del que hubiera resultado si se hubiera medido directamente.

376. *Diferentes disposiciones que presentan los polígonos.*— Se procederá igualmente en la aplicacion del método por interseccion, si el polígono fuese cóncavo, y con respecto á las circunstancias de localidad, visibilidad y posicion de los puntos pudiera elegirse una base fuera del polígono.

Puede emplearse en muchos casos, cuando el polígono del terreno tiene bastante extension, aunque compuesto de un corto número de rectas, una base interior que parta de uno de los vértices A á otro D (fig. 195), ó que partiendo ó no de un vértice corte á los lados del polígono.

En todos estos casos se tomarán en la estacion A (fig. 195) todos los ángulos á izquierda y derecha de la base AD, y suponiendo que el sentido de la marcha es de A á D se considerarán como positivos los ángulos tomados á la derecha de la AD en el expresado sentido, y como negativos los tomados á la izquierda, consignando entonces en el registro que se lleva de la misma manera el signo correspondiente á cada ángulo. Se procederá del mismo modo pasando á hacer estacion al otro extremo D de la base y al punto intermedio O de comprobacion.

La eleccion de la base depende, pues, de la condicion de visibilidad de los demás vértices desde sus extremos, y cuando aquella es interior se supone que el terreno es accesible tambien en este sentido, ó á lo menos en la parte en que se establece la base; teniendo que elegir esta fuera cuando el polígono es inaccesible.

Por último, la naturaleza del terreno no permite en muchas ocasiones que se descubran desde los extremos de la base AB todos los vértices del polígono principal, como sucede en la fig. 196, en la cual solo han podido determinarse los C, D, E, F y G; en cuyo caso, se tomarán las distancias EF y FG, entre puntos ya fijos como *bases auxiliares* para la determinacion de los restantes Y, H y L, y así se continuaría si quedasen más puntos que determinar; siendo fácil concebir que por este método se podrian ir fijando los varios objetos comprendidos en una cierta extension de terreno.

En el registro se consignarán las bases auxiliares en la columna donde se halle la base principal AB y á continuacion de la misma, inscribiendo en las de los ángulos los que la correspondan con sus signos respectivos segun el sentido de la marcha, que se puede indicar en la columna de observaciones.

377. *Observacion general.*—En todos los casos expuestos del método de interseccion se puede hacer uso tambien del problema de la carta para conocer en la construccion del plano si las proyecciones de los puntos se hallan bien determinadas. En efecto, haciendo estacion en uno de los vértices F (fig. 195) se tomarán los ángulos AFB y BFC con relacion á los tres puntos A, B y C, y construyéndolos en el papel transparente, se verá si despues de construido el polígono en el papel, y colocado sobre él el transparente de modo que los lados de los ángulos trazados en este pasen por los puntos correspondientes á las proyecciones de los A, B y C, el vértice comun de aquellos coincide con la proyeccion de F. Se podría repetir la comprobacion relativamente á los puntos B, C y E, y deberá siempre hacerse doble con el objeto de ver si las dos proyecciones se confunden, cuando se ha hecho estacion en el terreno en un punto cualquiera situado en el interior ó en el exterior del polígono.

378. **Con la brújula.**—Se procede exactamente de la misma manera, y todo cuanto hemos dicho respecto de los procedimien-

tos y comprobaciones con los goniómetros es aplicable á la brújula, sin más que hacer las dos observaciones siguientes:

1.ª Que en el modelo del registro correspondiente al cróquis de la fig. 194 se sustituya en los encabezamientos la palabra *ángulos* con la de *rumbos*.

2.ª Que en el caso de la fig. 195 no hay necesidad de la consideracion de rumbos positivos y negativos; pues siendo ahora la verdadera base la posicion de la aguja en cada una de las estaciones, el rumbo correspondiente en cada caso da la direccion de las visuales á los vértices; no sirviendo la base AD elegida en el terreno más que para fijar con la medida de su longitud la distancia de las dos estaciones A y D. Con los goniómetros, además de esta circunstancia reune la de servir de base ó línea de referencia para la medida de los ángulos.

La sola inspeccion de las figuras 197 y 198 sirve para aclarar cuanto acabamos de decir.

Se concibe fácilmente la manera de hacer la construccion en el papel y el replanteo en el terreno, empleando para esto último los rumbos en la determinacion de las direcciones correspondientes á los lados del polígono en el procedimiento explicado (374) y que habrán de tomarse en el papel con el transportador.

379. **Con la plancheta.** — Sea un polígono cualquiera ABCDE (fig. 199). Se hará estacion en el extremo A de uno de los lados AB, despues de haber medido este con toda precision y haber trazado en la plancheta una recta *ab* que le represente con arreglo á la escala elegida. Habiendo horizontado el tablero de la plancheta, colocado el punto *a* en la vertical del A del terreno y declinado *ab* sobre AB, se dirigirán con la alidada visuales desde el punto *a* á los jalones colocados en los E, D y C del terreno, señalando con las letras *e'*, *d'* y *c'* las líneas trazadas con el lápiz en la plancheta. Antes de mover esta para trasladarla á la estacion B, será conveniente repetir la operacion para cerciorarse de que no ha habido errores, así como igualmente no deberá olvidarse tomar con la declinatoria en el punto *a* el rumbo magnético de la recta AB con el objeto de valerse de él para la orientacion del instrumento en las estaciones sucesivas (196). Tambien deberá orientarse la línea *ab* para la colocacion del polígono en el papel cuando se dibuje en limpio.

Hechas todas estas operaciones, se trasladará la plancheta al punto B, orientándola (196) y colocando el punto *b* en la vertical del B; se dirigirán las visuales á los puntos E, D y C, y en las intersecciones de las nuevas líneas trazadas de lápiz con las correspondientes anteriores se escribirán las letras *e*, *d* y *c*, que serán las proyecciones de los puntos E, D y C del terreno. Deberá igualmente comprobarse la exactitud de las direcciones de las visuales antes de mover la plancheta.

Uniendo despues entre sí por medio de rectas las proyecciones obtenidas en el papel del tablero, se tendrá la proyeccion *abcde* del polígono ABCDE, y por medio de la escala adoptada para la base *ab* y de los transportadores se podrán obtener los valores de todos sus ángulos y lados.

Cuando se hace uso de la plancheta puede tambien elegirse la base en cada caso particular de la manera más conveniente segun las circunstancias.

380. *Comprobaciones.*—Conviene asimismo, antes de dejar el terreno, ejecutar las operaciones siguientes para que sirvan de comprobacion:

1.ª Se elegirá un punto intermedio O de la línea AB, se medirá la AO, y como si esta fuera una nueva base, se dirigirán visuales desde su extremo O á los puntos E, D y C, y si las líneas trazadas de lápiz por el canto de la alidada pasan exactamente por los puntos de interseccion que marcan las proyecciones *e*, *d* y *c* de aquellos, la operacion estará bien ejecutada.

2.ª Se colocará la plancheta en uno de los vértices D del terreno, despues de haber pegado en cualquiera parte de ella los extremos de un papel transparente, y se dirigirán visuales desde la proyeccion de dicho punto á otros tres E, A y B, trazando las líneas correspondientes para tener los ángulos EDA y ADB; despegando despues el papel y colocando los lados de los ángulos de modo que pasen á la vez por los puntos *e*, *a* y *b*, si su vértice comun coincide con el punto *d* que ya se tenia en la plancheta, será una prueba de haber operado anteriormente con exactitud.

381. *Replanteo.*—Se podrá emplear cualquiera de los métodos expuestos (373 y 374). Supongamos que queremos emplear el segundo, que es siguiendo el contorno: despues de colocar *b* en la vertical de B, se dispondrá el canto de la alidada de manera que coincida exactamente con la línea *ab* trazada en la plancheta, y se declinará *ba* sobre BA si el punto A está determinado en el terreno; procurando despues que la plancheta no se mueva, se colocará el canto de la alidada en contacto de *bc*, se establecerá la ali–

neacion BC con jalones, se medirá una parte de ella que sea la que marque en la escala la *bc*, y se clavará un piquete en el punto C, continuando del mismo modo. Si el punto A no está determinado, se trazará la alineacion BA con el rumbo que deba tener, y se determinará el punto A como se ha explicado para el C. Es conveniente clavar dos agujas bien verticales en los extremos de cada línea *bc* al poner en contacto con ella el borde de la alidada, para examinar durante la operacion si esta enrasa siempre con aquellas y no ha tenido por lo tanto movimiento alguno.

El replanteo por intersecciones se comprende fácilmente.

382. **Por rodeo.—Con los goniómetros.**—Sea un polígono cualquiera ABCDE (fig. 200); se buscará un punto interior O desde el cual se descubran todos los vértices del polígono, bien sea un árbol, una torre, etc., ó bien un punto elevado del terreno, en cuyo caso se establecerá en él un jalon ó banderola, así como en todos los vértices del polígono. Estos vértices deben satisfacer á la condicion de que sean visibles desde cada uno de ellos el anterior y posterior y el punto O, que cuando es interior como en el caso actual, se le suele llamar *punto central*. Se hará la primera estacion en el vértice A elegido para punto de partida, y se tomará el ángulo de direccion EAB anotando en el cróquis su valor 102° 30′ por la parte interior de la circunferencia trazada con un rádio arbitrario, como se ve en la figura. La operacion de tomar el ángulo interior de direccion del polígono, medido por el arco *abc*, puede llamarse *observacion directa*; se tomará igualmente el ángulo exterior de direccion que mide el arco *cda*, y cuyo valor 257° 30′ se anota tambien por la parte interior del círculo, á cuya operacion llamaremos *observacion inversa*, examinando si los dos ángulos *abc* y *cda* componen 360°, y repitiendo cuando es necesario las operaciones hasta lograr este resultado, como sucede en el caso que nos ocupa, pues se tiene $102° 30' + 257° 30' = 360°$; se tomarán igualmente los dos ángulos EAO y OAB para examinar si sus valores, que anotamos por la parte exterior al círculo, componen el valor del EAB; es decir, si sucede como en el caso actual, que es $58° + 44° 30' = 102° 30'$. Por último, se tomarán los valores de los dos ángulos que forman las rectas tiradas desde A á otros tres vértices E, D y C por ejemplo, que son los EAD de 38° y DAC de 35° 30′, cuyos valores no se indican en la figura por evitar complicacion. Todos estos datos son necesarios para proceder despues con acierto en la construccion del polígono en el papel, logrando

así que cierre completamente y sea una figura semejante á la del terreno, además de tener medios de hacer comprobaciones que corroboren el resultado; por lo que no se deberá abandonar la estacion A, hasta obtener con la debida precision todos los datos que hemos indicado.

Se procederá despues á medir con exactitud el primer lado AB que se toma como *base*, y que de antemano se deje elegir en la parte de terreno más igual, anotando en el cróquis su valor 785,^{m} 30 por la parte exterior del polígono en sentido de la línea AB y el rumbo 270° por la parte interior; se harán las mismas observaciones de ángulos en la segunda estacion B, se medirá el lado BC, y así se continuará hasta que se haya medido el último lado EA. La figura, que hace al mismo tiempo veces de cróquis, manifiesta las anotaciones hechas en el mismo.

Debemos advertir que para las ulteriores operaciones de construccion del plano es preciso contar, además de la exactitud de los ángulos, con la de uno de los lados á lo menos; por cuya razon se medirá el primer lado AB, que nos ha de servir, como veremos despues, de base de la construccion, con los reglones; ó bien con la cadena, pero repitiendo varias veces la medida para tomar un término medio. Los demás lados se podrán medir siempre con la cadena una sola vez, pero con todo el esmero que sea posible. En la primera estacion A se tomará tambien el rumbo de la AB.

No debe abandonarse el terreno sin haber hecho las comprobaciones siguientes:

1.ª Se sumarán todos los ángulos de direccion interiores, para ver si su suma vale tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos. En el caso actual siendo un pentágono deberán valer

$$180° \times 3 = 540°;$$

y en efecto se tiene

$$102°\ 30' + 109° + 101°\ 30' + 114°\ 30' + 112°\ 30' = 540°.$$

2.ª Si el punto O fuese tal que se pudiese estacionar en él, se podrían tomar tambien los ángulos formados á su alrededor, los cuales deben valer juntos 360°.

Cuando no se puede elegir un punto interior O, al cual se puedan dirigir visuales desde todos los vértices del polígono por ser el terreno un bosque cerrado, un lago, etc., se buscará un punto exterior O′ en algun paraje elevado, ó una veleta aunque algo lejana, que se descubra desde todos los vértices del polígono, para poder dirigirle las visuales desde todos ellos.

383. *Construccion del plano.*—Para construir la proyeccion del polígono en el papel valiéndose del cróquis, despues de elegida la escala de boj ó de marfil sencilla ó de transversales y el transportador, que será preferible uno de círculo entero de cuya exactitud estemos convencidos, se trazará una recta *ab* que represente á la AB; en el punto *a* se tomarán de la misma manera que se hizo en el terreno los ángulos que se observaron en el punto A, á fin de trazar con exactitud las direcciones de las rectas *ae″* y *ao′* que representan las de las AE y AO; en el punto *b* se formarán igualmente los mismos ángulos que se tomaron en B en el terreno, y la interseccion *o* de las rectas *ao′* y *bo″* será la proyeccion del punto O. En el lado *bc″* se tomará una parte *bc* que represente en la escala á BC, y si esta se hallase bien medida y transportada, al trazar en *c* el ángulo *bco*, la línea *co* pasará por el punto *o*; pero si dicha línea no se hallase bien medida ó transportada, resultando su proyeccion *bc″* ó *bc′* mayor ó menor que la verdadera *bc*, como al formar el ángulo *bco* en los puntos *c′* y *c″*, las rectas $c'\,o'''$ ó $c''o^{\text{IV}}$ no pasarian por el punto *o*, pero serían paralelas á la verdadera *oc*, no habrá más que tirar por el punto *o* la *oc* paralela á $c'o'''$ ó $c''o^{\text{IV}}$, y su interseccion *c* con la *bc* será la verdadera proyeccion del punto C, siendo *bc* igualmente la del lado BC. Se procederá del mismo modo en la construccion del resto del polígono, debiendo coincidir el lado *ea″* del ángulo *dèa* con el *ae″* del *eab* si no ha habido errores en dicha construccion, fuera de los permitidos en los límites asignados para los valores de los ángulos y medicion de las rectas segun los instrumentos de que se haya hecho uso; logrando siempre, si se ha procedido con esmero en todas las operaciones de campo y de gabinete, que el polígono cierre por completo, ó á lo más con una pequeña diferencia.

Para comprobarlo y poder hallar el vértice donde se ha cometido el error en el caso de no cerrar el polígono, haremos uso del problema de la carta, con cuyo objeto se tomaron en el terreno en cada vértice como en el B los ángulos ABE y EBD, que trazados en un papel transparente, se verá si colocado éste sobre la proyeccion *abcde* pasando sus tres lados *ba′*, *be′* y *bd′* por los puntos *a*, *e* y *d*, se halla el vértice comun de los *a′be′* y *e′bd′* confundido con el *b* del polígono *abcde*. Por consiguiente, en los casos de mucha precision será mejor construir sobre los *ae* y *ed* los arcos capaces de los ángulos ABE y EBD para estar más seguros en la comprobacion. Esta se puede limitar tambien á la construccion en cada uno de los vértices *b* de ángulos *a'be'* y *e'bd'* iguales á los ABE y EBD á partir de una línea fija *ab* para observar si los otros dos lados pasan por los puntos *e* y *d*, proyecciones de los E y D.

Debe tenerse presente que hay casos aunque raros en que no satisface esta comprobacion; como sería aquel en que estando mal medido ó construido el ángulo *dea*, resultase representado por el *dem*, siendo además el error del lado *em* tal que su extremo *m* estuviese en la prolongacion de la *ab*; lo mismo pasaria en los casos de estar representado el ángulo *aed* por los *aen* ó *nem*. El error podria quedar oculto si sólo se comprobase un vértice *b*; mas se descubriría si se comprobasen todos los vértices ó varios de ellos, que es lo que debe hacerse, pues sería muy difícil que se compensasen los errores.

384. *Registro.*—Cuando se lleva registro se le puede dar la forma que se ve á continuacion.

Registro del polígono ABCDE levantado con los goniómetros por el método de rodeo.

RUMBO DE LA BASE AB=270°.

Estaciones ó vértices. 1.	OBSERVACIONES DIRECTAS. Al punto O. 2.	OBSERVACIONES DIRECTAS. Ángulos del polígono. 3.	Observaciones inversas. 4.	Ángulos de comprobacion. 5.	Lados del polígono. 6.	Observaciones generales. 7.
A »	EAO=58° 0′ OAB=44° 30′	EAB=102° 30′ »	257° 30′ »	EAD=38° 0′ DAC=35° 30′	AB=785,^{m}3 »	
B »	ABO=49° 30′ OBC=59° 30′	ABC=109° 0′ »	251° 0′ »	ABE=30° 0′ EBD=38° 0′	BC=592,^{m}0 »	
C »	BCO=57° 0′ OCD=44° 30′	BCD=101° 30′ »	258° 30′ »	BCA=41° 30′ ACE=27° 30′	CD=655,^{m}2 »	
D »	CDO=58° 0′ ODE=56° 30′	CDE=114° 30′ »	245° 30′ »	CDB=37° 0′ BDA=48° 0′	DE=650,^{m}0 »	
E »	DEO=45° 30′ OEA=67° 0′	DEA=112° 30′ »	247° 30′ »	DEC=33° 0′ CEB=32° 0′	EA=531,^{m}2 »	
		540°				

En la primera columna se colocan las letras que señalan las estaciones; en la segunda las observaciones directas de los dos ángulos en que queda dividido cada uno de los del polígono por la recta tirada desde su vértice al punto auxiliar de comprobacion; en la tercera las observaciones directas de los ángulos del polígono, cuyos valores deben ser la suma de los dos en que se hallan divididos, y que están consignados en la columna anterior; en la cuarta las observaciones inversas hechas en cada vértice, cada una de las cuales debe componer 360° con la directa del ángulo del polígono, consignada en la columna anterior; en la quinta los dos ángulos de comprobacion que se toman en cada uno de los vértices para resolver despues en la construccion el problema de la carta; en la sexta los valores de los lados de los polígonos, y en la sétima, bajo el nombre de observaciones generales, aquellas noticias ó advertencias que puedan contribuir á la mayor claridad en las operaciones posteriores.

Se comprende lo sencillo que será valerse del registro en la construccion del polígono, pues dá lugar á una marcha análoga á la que se ha seguido en el terreno. En el *replanteo* se sigue el método expuesto (374).

385. Puede servir en general de comprobacion en las construcciones, repetir estas con diversas escalas como las de

$$\frac{1}{500},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{5000}.$$

Obsérvese tambien que el procedimiento que acabamos de exponer, constituye una verdadera *triangulacion gráfica*, y de esta clase de triangulaciones será de la que hagamos uso en este capítulo.

Por último, puede considerarse el polígono ABCDE como la base de una gran pirámide poligonal, cuya cúspide es el extremo de la veleta tomada en general para las observaciones, y las aristas las visuales dirigidas al mismo desde los vértices de la base, y proyectadas en el plano horizontal de esta segun las rectas OA, OB, OC... cuya observacion es de la mayor utilidad para comprender fácilmente en lo sucesivo la aplicacion de este procedimiento al levantamiento de toda clase de planos, proporcionando la claridad con que deben presentarse esta clase de operaciones.

386. **Con la brújula.**—Para determinar por rodeo con este

instrumento el contorno de un polígono principal, se puede seguir una marcha parecida á la que hemos adoptado para los goniómetros. Sea el polígono ABCDE (fig. 201): se hará estacion en el punto de partida A y se tomarán los rumbos de las rectas AB y AO que suponemos ser de 270° y 314° 30′ y que señalamos como se ve en la figura, que representa tambien el cróquis, escribiendo los números en sentido de la direccion de dichas rectas seguidos de una pequeña flecha para indicar que son los rumbos de las mismas y no puedan confundirse con los que indiquen sus longitudes. Antes de levantar el instrumento de la estacion A, se toman tambien para las comprobaciones que se hacen despues de la construccion los rumbos de las AE, AD y AC, que son 192° 30′, 154° 30′ y 119° 30′, advirtiendo que han de referirse al extremo blanco de la aguja. Se medirá despues el lado AB, y su valor 785^m 3 se colocará en sentido de la direccion de la recta y por la parte exterior del polígono. Se pasará á la segunda estacion B, se tomará en primer lugar el rumbo de la BA, que es como sabemos (167) la observacion inversa, cuyo valor 90° referido á la punta azul como el 270° del punto A, difiere de este en 180°; habiendo resultado ambos rumbos iguales á 270° si la observacion inversa se hubiera referido á la punta blanca; pero para evitar confusion supondremos que en el contorno del polígono se hacen siempre las observaciones inversas con la punta azul tambien. Se tomarán igualmente en el mismo punto B los rumbos de las BO y BC, se medirá BC, se pasará á hacer estacion en C, y así se continuará de la misma manera hasta llegar al punto de partida A, donde se volverá á estacionar para hacer la observacion inversa de la AE, que resultará ser de 12° 30′, á menos que no se hubiera tomado tambien este rumbo cuando se estacionó la primera vez en A; lo cual conviene hacer así, reservando este valor para comprobar con él al fin de la operacion el rumbo 192° 30′ de la observacion directa de la EA, y ver si su diferencia es de 180° como aquí resulta.

Cuando es posible estacionar la brújula en el punto O, se pueden tomar con la punta blanca los rumbos de las AO, BO, CO.... cuya operacion da el mismo resultado que si se tomaran con la punta azul en los vértices A, B, C....

387. *Construccion del plano.*—Para hacer la construccion en el papel valiéndose del cróquis, se trazará para representar la direccion de la aguja magnética, una recta *n* que generalmente se

dispone en forma de flecha, en el punto *a* que suponemos se elige como proyeccion del de partida A, y desde este con los rumbos de las AB, AO y AE, se trazarán otras rectas indefinidas *ab'*, *ao'* y *ae'*: en la *ab'* que representa la direccion del lado AB se tomará la parte *ab* que señale en la escala su longitud. En *b* se trazará una recta *n'* paralela á la *n* para referir á ella los rumbos de las BA, BO y BC, trazando con ellos las rectas *ba'*, *bo''* y *bc''*, debiendo verificarse que *ba'* coincida exactamente con la *ab'*, pues de no ser así no existiría el paralelismo entre las *n* y *n'* y habría que modificar su trazado; la interseccion de las rectas *ao'* y *bo''* nos dará el punto *o*, que como debe ser la verdadera proyeccion de O, para poder servirnos de él en el resto de la construccion es preciso determinarle, á imitacion de lo que se hizo en los goniómetros, midiendo por lo menos la primera recta AB con toda la precision que sea posible, y transportándola con el mayor cuidado, así como tambien es necesario determinar con toda exactitud los rumbos de las AO y BO, trasladándose si es posible al punto O para comprobarlos por medio de las observaciones inversas. Se tomará despues en la *bc''* la parte *bc* que represente á BC, y en *c* se trazará la *n''*, paralela á su anterior *n'* y mejor á la primitiva *n*, y se continuará de la misma manera hasta llegar al punto *e*, en el cual, al trazar la *e'a''* con el rumbo de la observacion directa en *e*, se ha de verificar que coincida exactamente con la recta *ae'* trazada con el rumbo de la observacion inversa en *a*. Si alguno de los rumbos dirigidos al punto *o* no pasase por él, habría error en el lado correspondiente, y se rectificaría como se hizo en la construccion de la figura 200.

Para hacer la comprobacion de la construccion hecha, se tomarán en los puntos *e*, *d* y *c* los rumbos que se tomaron con el extremo blanco de la aguja en el punto A; pero como pudiera suceder que hubiera un caso en que las proyecciones de los puntos *e* y *c* fuesen *m* y *r* estando mal construido el polígono, y no pudiéndose descubrir esta circunstancia por la comprobacion, convendrá hallar en grados los valores de los ángulos EAD y DAC por las diferencias de los rumbos (175) y trazar los arcos capaces de dichos ángulos sobre las rectas *ed* y *dc*, cuando sea necesario el convencimiento de la exactitud en la construccion.

388. *Registro.*—Cuando se lleva registro se le puede dar la forma que se ve en la página siguiente.

En la primera columna se escriben las letras que indican las estaciones ó vértices, siendo la primera A la que se toma por punto de partida, y á la cual nos referiremos para la explicacion del registro; en la segunda el lado AB del polígono, designando su longitud 785^{m},3; en la tercera la observacion directa 270° ó sea el rumbo del lado AB que está en la columna anterior tomado en el punto de estacion A que se halla en el mismo renglon; la cuarta columna se deja por ahora en claro; en la quinta se coloca el rumbo 314° 30′ de la visual AO tirada desde el punto de estacion al punto O de comprobacion, consignando en la sexta los rumbos de las AE, AD y AC tiradas desde dicho punto de estacion á otros tres E, D y C, como observaciones inversas, para la comprobacion por el problema de la carta del respectivo vértice A en la construccion del plano.

Al pasar á la segunda estacion se empezará por hallar la observacion inversa, es decir, se tomará el rumbo 90° de la AB consignándole en la columna cuarta, que se dejó en blanco; se llevará la misma marcha en la escritura de los datos tomados en la segunda estacion B, dejando en claro la cuarta columna para escribir la observacion inversa de la BC al colocarse en la tercera estacion C; continuando del mismo modo hasta consignar todos los datos en el registro, así como en la última columna las observaciones generales á que dé lugar la operacion.

Se concibe que la construccion del polígono en el papel valiéndose del registro será sumamente sencilla, pues da lugar á la misma marcha que se ha explicado anteriormente haciendo uso del cróquis, y se tienen del mismo modo los datos necesarios para hacer todas las comprobaciones.

Registro del polígono ABCDE levantado con la brújula por el método de rodeo.

Estaciones ó vértices. 1.	Lados del polígono. 2.	Observaciones directas. 3.	Observaciones inversas. 4.	OBSERVACIONES DE COMPROBACION. Al punto O. 5.	A los vértices. 6.	Observaciones generales. 7.
A	AB=785,^{m}3	270°	90°	AO; 314° 30′	AE; 192° 30′ AD; 154° 30′ AC; 119° 30′	
B	BC=592,^{m}0	341°	161°	BO; 40° 30′	BA; BE; BD;	
C	CD=655,^{m}2	59° 30′	239° 30′	CO; 104°	CB; CA; CE;	
D	DE=650,^{m}0	125°	305°	DO; 181° 30′	DC; DB; DA;	
E	EA=531,^{m}2	192° 30′	12° 30′	EO; 259° 30′	ED; EC; EB;	

22

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA TOPOGRAFICA - BIBLIOTECA -

389. *Replanteo.*—Se sigue el procedimiento que hemos dado á conocer (374) determinando por medio de los rumbos las direcciones de las rectas que han de trazarse en el terreno.

390. **Con la plancheta.**—Se colocará este instrumento en estacion en el punto de partida A (fig. 202) despues de haber trazado una línea indefinida *ab'* en el papel del tablero y situado uno de sus puntos *a* en la vertical del A del terreno; se declinará *ab'* sobre AB, y dirigiendo visuales con la alidada al vértice E y al punto O elegido anteriormente, se trazarán en la plancheta las líneas indefinidas *ae'* y *ao'*; hecho esto, se mide con toda precision el lado AB para que sirva de base de las operaciones y se toma en la *ab'* la parte *ab* que representa su longitud en la escala elegida, tomando tambien el rumbo de la AB. Se trasladará la plancheta al punto B, colocando *b* en la vertical de B, y se declinará *ba* sobre BA por medio de la alidada ó de la declinatoria, y dirigiendo visuales á los puntos O y C se trazarán en la plancheta las rectas *bo''* y *bc'*, de las cuales la primera nos dará en su interseccion con la *ao'* la proyeccion *o* de O, y la segunda la direccion del lado BC del polígono, por lo que tomando en ella la parte *bc* que represente la longitud que se obtenga midiendo la BC en el terreno, se tendrá la proyeccion *c* del punto C.

En estas dos estaciones de la base debe ponerse todo el cuidado posible en las observaciones, así como en la medida de AB, pues todo depende de la exacta construccion del triángulo *aob* que debe ser la verdadera proyeccion del AOB.

En efecto, trasladando la plancheta al punto C, y despues de declinar *cb* sobre CB, al dirigir la visual al punto O, la línea *co* trazada en la plancheta pasará por *o* si *cb* es la verdadera proyeccion de CB; pero si en la medida ó transportacion de esta hubiese habido error y estuviera representada por *bc''* ó *bc'''*, las rectas dirigidas al punto O y trazadas por los puntos *c''* ó *c'''* colocados en la vertical de C no pasarían por el punto *o* de la plancheta; pero no habrá más que tirar una paralela *oc* por el punto *o* á dichas rectas, y se tendrá la verdadera proyeccion *bc* de BC; habrá, pues, que mover la plancheta para colocar como está en la figura el punto *c* en la proyeccion de C, y declinando *co* sobre CO se observará si *cb* queda tambien declinada sobre CB. Se continuará del mismo modo, disponiendo la plancheta en los vértices restantes del polígono, y haciendo las mismas observaciones hasta llegar á la última estacion E, en la cual debe verificarse que al dirigir la visual al punto de partida A, la línea *ea'* trazada en la plancheta se confunda exactamente con la *ae'* trazada primitivamente al dirigir la visual desde dicho punto A al de la última estacion E. Debe verse tambien si tomada en la escala la *ae* indica la medida que se obtiene para AE en el terreno.

Como los ángulos se determinan gráficamente con la plancheta, no existen las observaciones inversas cuando se hace uso de ella.

Fijando un papel transparente en la plancheta se podrían trazar independientemente para cada vértice las direcciones de las visuales dirigidas á otros tres vértices consecutivos, á fin de comprobar cualquiera de los del polígono ó varios con el auxilio del problema de la carta.

Obtenida en la última estacion la proyeccion *abcde* del polígono ABCDE, valorados sus lados por medio de la escala, y gráficamente construidos sus ángulos, pueden tambien valorarse estos por medio de los transportadores y ver si la suma de todos equivale á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos.

391. **Por doble interseccion.**—*Con los goniómetros.*—Sea el polígono ABCDE (fig. 200). Se medirá con toda precision un lado AB que sirva de base y todos los ángulos de los vértices, como se ha explicado (382), anotando en el cróquis las medidas, ó en un registro que no difiera del expuesto (384) sino en que ahora no se necesita la columna de los lados puesto que ninguno se mide, excepto el primero, cuya longitud y rumbo se consignan á la cabeza del registro.

En la construccion en el papel, lo mismo valiéndose del cróquis que del registro ó de ambos á la vez, se sigue la misma marcha explicada (383) para el caso citado, sólo que despues de haber tomado *ab* que represente á AB y formado en sus extremos los ángulos *oab* y *oba* iguales á los OAB y OBA para tener el punto *o*, como no se conoce el valor del lado siguiente BC, no se puede tomar en la escala la parte que le corresponde para colocarla de *b* á *c*; por lo cual en un punto cualquiera de la línea indefinida *bc''* se formará el ángulo *o'''c'b* ó el *o''c''b* igual al OCB, tirando despues por el punto *o* una paralela *oc* á la *o''c''* ó á la *o'''c'*, determinando así la magnitud del lado *bc* homólogo del BC, y de la misma manera los vértices restantes. Pudieran tomarse tambien en el terreno los ángulos EAD y DAC para comprobar la posicion del vértice *a* por el problema de la carta, como se ha indicado (383).

392. *Con la brújula y plancheta.*—Se procede enteramente de una manera análoga á la que acabamos de indicar con los goniómetros, teniendo en cuenta las diferencias á que da lugar la naturaleza del instrumento empleado en la determinacion de los ángulos.

393. *Observaciones.*—El método de doble interseccion ofrece las ventajas siguientes:

1.ª Que es un auxiliar del de rodeo, cuando el polígono tiene lados cuya medida presenta dificultades.

2.ª Que no habiendo necesidad de medir más que la base y los valores de los ángulos, que se obtienen con una precision suficiente, se abrevia mucho la operacion y se tienen las condiciones de exactitud que pueden desearse.

3.ª Que el procedimiento empleado en la construccion no viene á ser otra cosa que el que se sigue en el levantamiento del plano por rodeo, cuando se trata de evitar la influencia de los errores en la medida de los lados (383).

De las observaciones precedentes puede deducirse la preferencia que debe darse en muchos casos al método que acabamos de exponer.

394. **Por radiacion.**—Se reduce á descomponer el polígono rectilíneo en triángulos, partiendo de un punto interior cualquiera por medio de rectas tiradas á sus vértices y midiendo los ángulos formados en dicho punto y los lados que los comprenden y se podrán construir en el papel los referidos triángulos. Difícilmente será posible aplicar este método á los terrenos de mediana extension, aparte de que las comprobaciones necesarias para asegurarse de la exactitud en la medida de las rectas tiradas á los vértices exigiría situarse en estos para la determinacion de los valores angulares que fuesen necesarios, haciendo inútiles las medidas de dichas rectas y complicando la operacion. En el caso de aplicar los goniómetros, brújula y plancheta á levantar por este medio los planos de terrenos de corta extension, presenta mas ventajas este procedimiento.

395. **Observaciones acerca de los métodos que anteceden.**—Como son tan distintas las circunstancias en que el geómetra puede encontrarse, ya por la naturaleza del terreno ó por los instrumentos de que dispone, no puede decirse de una manera

absoluta qué método es preferible entre los explicados para el levantamiento de un plano. Los conocimientos y la práctica del operador le guian en la eleccion de la marcha que debe seguir, en la manera de emplear mas convenientemente los instrumentos de que puede hacer uso, y en la buena eleccion ó combinacion de los diferentes problemas cuya resolucion puede conducir á un pronto y exacto resultado.

Antes de continuar, advertiremos que en las operaciones de que nos ocupemos en lo sucesivo, cuando no se haga mencion de los instrumentos con que se opera, se entenderá que hacemos uso de los goniómetros; pudiendo el lector generalizarlas á los demás, una vez que su uso está ya bien conocido y que se ha visto la uniformidad que puede guardarse en los trabajos de campo y de gabinete.

396. **Deduccion de los rumbos por el conocimiento de los ángulos de direccion, y de estos últimos conocidos los primeros.**—Tanto en el método de rodeo como en el de doble interseccion, puede suceder, que habiendo levantado el plano de un polígono con los goniómetros ó la plancheta, en cuyo caso son conocidos los ángulos y el rumbo de una recta, que como hemos visto, se toma siempre para orientar el plano, pues en la plancheta se determinan tambien los grados de los ángulos y el rumbo por medio de los transportadores, se quiera tambien determinar los rumbos de las demás rectas, cual si se hubiera operado con la brújula; y recíprocamente, habiendo levantado el plano de un polígono con la brújula, con lo que se tendrán conocidos los rumbos de sus lados, pueden pedirse los valores de los ángulos, como si la operacion se hubiera practicado con los goniómetros. Uno y otro problema son de la mayor importancia y se resuelven fácilmente con el auxilio de las fórmulas que pasamos á deducir:

1.° Supongamos conocidos los ángulos ABC, BCD.... (fig. 203) así como el rumbo r del lado AB, necesario pará la orientacion del plano y tratemos de hallar el r' del lado BC: tendremos desde luego

$$r' = 360^\circ - m'' = 360^\circ - (\mathrm{ABC} - m') = 360^\circ - (\mathrm{ABC} - m),$$

y como se tiene tambien $m = r - 180^\circ$, sustituyendo en la expresion anterior, y ejecutando las operaciones sucesivamente indicadas, se obtiene la fórmula general

$$r' = r + 180^\circ - ABC \qquad [27],$$

la cual nos servirá para hallar el valor de cualquier rumbo, conocido que sea el de la línea anterior y el valor del ángulo de direccion que las dos forman entre sí.

2.° Recíprocamente, conocidos todos los rumbos, se tendrá para el ángulo en B, suma de m' y m'', observando que $m' = r - 180^\circ$ y $m'' = 360^\circ - r'$, que bastará sumar estos valores y hacer las reducciones que se presenten, para obtener la fórmula general

$$ABC = r + 180^\circ - r' \qquad [28],$$

la cual da á conocer que para hallar el valor del ángulo de direccion B, se sumará con el rumbo r de la línea AB de la izquierda del observador colocado en el vértice del ángulo la cantidad 180°, y de esta suma se restará el valor del rumbo r' de la línea BC de la derecha. Cuando se obtenga un rumbo negativo, se hallará el positivo correspondiente añadiendo al primero 360°.

Las fórmulas [27] y [28] que acabamos de hallar, pueden comprobarse aplicándolas á los valores numéricos de los ángulos y rumbos del polígono ABC.... (fig. 204), numéricamente conocidos.

397. **Levantamiento de los planos de los polígonos rectilíneos compuestos de un gran número de rectas.** —Para determinar su contorno se procede como en las figuras 168 y 169, estableciendo polígonos de un corto número de rectas por los métodos acabados de exponer, que serán los polígonos principales, y refiriendo á sus lados los vértices de los polígonos dados por medio de ordenadas; todo exactamente análogo á cuanto se ha dicho (341), sin más diferencia que la supresion de las grandes ordenadas referidas al eje principal, resultando mayor comodidad en el establecimiento de los polígonos principales, valiéndose de los goniómetros, brújula y plancheta, por la facilidad de tomar toda clase de ángulos y la eleccion de los más convenientes. Cuando el terreno es de considerable extension en los límites que nos hemos prescrito, pueden necesitarse para la comprobacion del polígono principal dos ó más puntos interiores: entonces es preciso para pasar de uno á otro tirar á lo ménos

desde un vértice visuales á ambos puntos de comprobacion, á fin de no interrumpir el enlace de las operaciones.

398. **Contornos curvilíneos y mistilíneos.**—Se pasa igualmente con la misma facilidad de los polígonos de las figuras 168 y 169 á los de las figuras 170 y 171, como se ha explicado (343).

399. **Terrenos inaccesibles en su interior, rectilíneos ó curvilíneos.**—Se procede segun las circunstancias, levantando con los goniómetros, brújula ó plancheta el plano del polígono principal; y el método de rodeo sirve igualmente cuando sólo se puede operar en sentido del contorno, pues el interior puede ser inaccesible y hallarse en esta parte el punto á que se dirigen las visuales, que han de servir para la construccion y comprobacion del plano.

400. **Terrenos en parte accesibles y en parte inaccesibles.**—Se procede de un modo análogo, y cuando en este caso y en los acabados de exponer se hace uso de registros, se formarán: el del polígono principal como hemos indicado (384 y 388), y el del contorno como en (341).

401. **Levantamiento del plano de los objetos interiores de un polígono.**—**Extensas lagunas ó pantanos.** —Se circunscriben las figuras poligonales más convenientes, en virtud de la facilidad de tomar toda clase de ángulos, y se determinan sus contornos por ordenadas sobre los lados.

402. **Rios, caminos, costas, islas, arroyos, veredas.** —Sea primero la línea poligonal ABCDEF (fig. 205) que puede considerarse como el eje de una carretera construida ó que se trata de construir, y cuyo plano se quiere levantar. Para obtener el seguimiento de esta línea, al mismo tiempo que se miden los lados AB, BC, CD... y los ángulos de direccion ABC, BCD, CDE... se dirigirán visuales desde los vértices á un punto O que puede ser una torre, un árbol... visible desde el mayor número de aquellos, tomando los ángulos en las bases AB, BC... todo como ya se sabe, con el objeto de hacer despues bien la construccion. Cuando se llega á un punto en el cual la direccion de la CDEF ó los accidentes del terreno hacen sospechar que el punto O empezará á perderse de vista, se dirige desde el C otra visual á un nuevo punto P, que si no se encontrase á propósito se señalaría con un jalon, á fin de que dirigiendo desde D otra visual, se tenga fijo el punto P, y la CD se halle referida á él al mismo tiempo que al O. Se continuará

del mismo modo dirigiendo desde todos los demás vértices que sea posible visuales al punto P hasta que haya necesidad de elegir otro, y así sucesivamente. Ninguna dificultad presenta la manera de llevar el cróquis ó el registro y la construccion en el papel.

Este procedimiento es aplicable al levantamiento del contorno de una *costa*, y por consiguiente al de una *isla*, en cuya operacion se pueden seguir tambien cuantos métodos hemos explicado para los terrenos accesibles en su interior.

Pero si se tratase de un camino irregular ó de un rio de consideracion, será preciso, además de lo expuesto, ir plantando jalones en la orilla opuesta, bien fuera de las visuales dirigidas á los puntos de observacion O y P como los A′ y E′, bien en sentido de las visuales como los B′, C′, D′ y F′, á los cuales se dirigen tambien visuales desde los vértices A, B, C... como se ve en la figura, con el objeto de obtener en el papel las proyecciones de los puntos A′, B′, C′... que unidos por rectas determinarán otra línea poligonal formada en la orilla opuesta. Refiriendo ahora en el terreno por ordenadas sobre las AB, BC... A′B′, B′C′... los diversos puntos que constituyen las dos líneas sinuosas que limitan el camino ó rio, se tendrán los datos necesarios para su representacion en el papel.

Cuando los planos han de construirse en escala muy pequeña, no se determinan más que las dos líneas quebradas ABCD... A′B′ C′D′... que comprenden los rios ó caminos en su interior, pues la pequeñez de las ordenadas permite considerar confundidas sensiblemente dichas líneas con las sinuosas de los contornos de aquellos; cuando únicamente se trata de fijar la direccion del rio ó camino se determina tan sólo la línea poligonal ABCD...

En el caso de ser un arroyo ó vereda, se empleará un procedimiento análogo al de la fig. 206.

403. Para mayor celeridad y exactitud se pudiera tambien hacer uso del método de doble interseccion, para lo cual basta medir una sola recta tal como la AB. En la construccion, despues de obtenido el punto o, se formará en un punto c' de la recta indefinida bc' el ángulo $o'c'b$ = OCB, y tirando por o la oc paralela á $o'c'$, se tendrá la bc proyeccion de BC, y cuyo valor se conocerá por la escala. La figura manifiesta el resto de la construccion.

404. **Camino en un bosque.**—Cuando se trata de abrir un camino á través de un bosque y se dan determinados el punto de partida y el de arribo, con el objeto de no cortar más árboles que los precisos en sentido de la direccion del mismo, se procederá en

primer lugar á levantar el plano exacto del contorno del bosque, proyectando en él la direccion del camino y pasando despues á establecerle en el terreno.

Sea en efecto *abcefghij* (fig. 207) el polígono construido en el papel, que representa el contorno ABCEFGHYJ del bosque, en el cual se trata de abrir un camino que parta de la poblacion M y vaya á parar al caserío N. Si el punto de partida está determinado como el C y el camino ha de estar en línea recta, se trazará la recta *cr*, se tomará con el transportador el ángulo *bcr* y se formará con un goniómetro el BCR sobre la BC; se establecerán jalones en la direccion de la CR determinada por la alidada, plantando piquetes para dejar fija en el terreno la direccion del eje del camino y poder proceder despues á su construccion.

Si se hace uso de la brújula, como siempre se toma el rumbo de una recta AB ó BC del polígono, se obtendrá por la fórmula [27] (396) el rumbo de la *cr* y se podrá determinar la CR.

Con la plancheta se opera con mucha facilidad en estos casos, pues se colocará el punto *c* en la vertical de C, se declinará *cb* sobre CB, y colocando el canto de la alidada en contacto con la *cr* no habrá más que plantar jalones en sentido de la visual.

Si el punto de partida *d* no está determinado en el plano, se tomará en la escala el valor de *cd*, se medirá la parte CD que representa, y se trazará la DR como anteriormente. Si por evitar dificultades hubiera que trazar el camino formando una línea quebrada *dopqr*, se procederá de una manera análoga para obtener la DOPQR; pues despues de fijar la direccion de la DO y tomar en ella el valor que marque *do*, se determinará la direccion de OP, y así sucesivamente hasta llegar á R.

405. **Edificios y demás construcciones**.—Siempre se sigue el método expuesto en el capítulo anterior, párrafos 355 á 361. En las grandes posesiones ó heredades y en las huertas y jardines, ya se hallen ó no cercados, puede hacerse uso de los varios métodos é instrumentos que hemos dado á conocer para el levantamiento de los planos.

En el replanteo se puede seguir el método expuesto (360), ó bien hacer uso de los goniómetros, brújula y plancheta; y siendo esta última preferible en la operacion de que se trata, nos limitaremos á ella, tomando por ejemplo el trasladar al terreno el proyecto de un jardin, cuya figura trazada en el papel de la plancheta, señalada con letras minúsculas y semejantes á las de la figura 208 que representa el jardin despues de trazado en el terreno, se sobreentenderá para evitar la repeticion del dibujo.

Despues de trazado el eje MN perpendicular á la línea CD paralela á la fachada AB de un edificio que ha de dar frente al jardin, se marcará el punto O proyeccion de *o*, y colocando la plancheta de modo que *o* se halle en la vertical de O, se declinará *mn* sobre MN y se pondrá la alidada sobre *ef* para trazar en el terreno la perpendicular EF: tomando las partes iguales OE y OF del valor que indiquen las del plano, y uniendo los puntos E y F con los C y D se tendrán las CE y DF. Se trasladará la plancheta al punto E, se colocará *e* en la vertical de E, se declinará *ec* sobre EC, y colocando la alidada sobre *eg*, se trazará EG marcando el punto G, y lo mismo se hará para obtener el punto H desde F. Como el punto N se puede señalar tambien en el terreno plantando un jalon como en los vértices que hemos determinado del contorno, servirá de comprobacion el que los tres puntos G, N y H resulten en línea recta; lo que se averiguará colocando la plancheta en el punto G, declinando *ge* sobre GE, y colocando la alidada sobre *gh* para ver si la visual pasa por los puntos N y H; pudiendo tambien comprobar además para más exactitud el ángulo GHF.

Obtenida ya la cerca del jardin y trazado el grueso que deba tener, se fijará la distribucion que ha de hacerse en su interior para los plantíos de árboles y flores, marcando los puntos O′ y O″ para colocar en ellos la plancheta y determinar las líneas PR y P′R′, en las cuales se fijarán con piquetes los puntos P, Y, L, T, S, Q, X y R, así como los P′, Y′, L′, T′, S′, Q′, X′ y R′, y quedarán trazadas las PP′, YY′, LL′... Del mismo modo se procederá en la parte comprendida entre las rectas EF y GH. Por último, haciendo centro en O y con rádios tomados en la cadena ó cuerda, de las longitudes que indique el proyecto, se trazarán la circunferencia y los arcos que se ven en la figura, y que representan una fuente y cuatro trapecios circulares.

406. **Situacion de los objetos interiores ó detalles en el plano.**—Estableciendo el número conveniente de transversales, y disponiendo estas líneas poligonales de modo que comprendan entre sí todos los detalles para referirlos á ellas por ordenadas ó por intersecciones de visuales, se tendrán los elementos necesarios para la situacion de todos los objetos que deba comprender el plano del terreno.

La fig. 209 representa un terreno cuyo plano se trata de levantar, y manifiesta la posicion de las transversales que ha habido que establecer: las HYJL y HYJM tienen la parte comun HYJ, que debe repetirse para ambas, y las cuales parten del punto H del lado FE y van á terminar en los puntos L y M de los lados AG y AB; á no ser que se advierta que HYJL es una transversal, y otra la JM que parte de un punto J de aquella y termina en el M del contorno. La HYJL con la parte HFGL del contorno sirven para circunscribir y determinar la posesion cercada que se ve en la figura, y la HYJM con la QPON que parte del punto Q del lado FE y va á parar al N del AB, circunscriben y determinan el rio. La QPON con la DRSTB que desde el vértice D va á terminar en el B, circunscriben el terreno quebrado comprendido entre ellas, sirviendo la última para determinar y situar el arroyo. Las partes JL y JM de las transversales HYJL y HYJM con la LAM del contorno, circunscriben la laguna que se ve en la figura y sirven para determinarla.

Con el objeto de evitar confusion, solo se indican algunas de las ordenadas *ab*, *cd*, *tx*, que sería necesario establecer. El árbol Z se halla determinado por la interseccion de las visuales dirigidas desde los extremos de la CD.

Del mismo modo se podrá fijar el frente *ce* del cercado, determinando por intersecciones sus extremos como se ve en la figura.

Para fijar cada punto como el árbol Z, hubiera bastado medir la distancia CZ cuando esto es posible y el ángulo ZCD, pudiendo determinar tambien así los dos extremos del frente *mn*.

Cuando se hace uso de registros, la coleccion debe contener:

1.° El del polígono principal ABCDEFG (384 ó 388).

2.° El auxiliar del contorno (341).

3.° Los auxiliares correspondientes á las transversales, tanto para la determinacion y situacion de estas, como de los detalles interiores; los cuales no difieren en su formacion de los explicados (361 y 362), valiéndonos de los goniómetros ó de la brújula para el establecimiento de las transversales.

407. **Planos de las poblaciones**.—Cuando estas son pequeñas, aunque de alguna más consideracion que las de que nos hemos ocupado en el capítulo anterior, se procederá con los goniómetros de la manera siguiente.

La primera operacion es determinar el contorno que ha de circunscribir la poblacion por medio de una triangulacion gráfica, eligiendo para punto interior, vértice comun de todos los triángulos, la veleta de una torre, que se halle situada lo más céntrica posible, y los demás vértices á las entradas de las calles principales, teniendo presente cuanto se ha dicho (367), y procurando con preferencia á las demás condiciones, que los triángulos se aproximen á ser equiláteros. Los vértices de los ángulos y los demás puntos de referencia se fijan en las calles por medio de piquetes de madera ó de hierro, introducidos en el terreno, ó de señales practicadas en las aceras. Hecho esto, se procede al establecimiento de las transversales, que dividen al polígono en otros varios; y como pueden ser líneas muy quebradas y en bastante número, conviene adoptar una clasificacion que sirva de guia, tanto en los trabajos sobre el terreno, como en los de gabinete, y que al mismo tiempo facilite la inteligencia de los muchos y minuciosos datos que esta operacion exige. Estas operaciones traspasan los límites que nos hemos impuesto en este Tratado, y los lectores pueden consultarlas en nuestro *Tratado de Topografía* ó en el *Curso elemental* de la misma.

408. **Replanteo de los planos.**—La reproduccion de los puntos notables de un plano en el terreno, no puede ofrecer dificultad en cuanto á la manera de proceder á ejecutarle, conocidas las operaciones de su levantamiento y construccion: consiste en reproducir con la cadena y los goniómetros las operaciones ejecutadas sobre el papel con la escala y el transportador; y tan sólo debe tenerse presente la marcada y desfavorable influencia que los errores cometidos en la apreciacion gráfica de los elementos geométricos ejercen al ser transportados al terreno. Para atenuar en lo posible los errores, debemos preferir el hacer uso de los valores numéricos obtenidos en las operaciones del levantamiento, y empezar por determinar y comprobar por cuantos medios estén á nuestro alcance, las posiciones de varios puntos principales en toda la extension que han de comprender las operaciones del replanteo, á los cuales deben referirse las de todos los demás puntos; para lo cual será muy conveniente dividir en varios trozos el trabajo, á fin de poder determinar más fácilmente las posiciones relativas de los comprendidos en cada uno de ellos, y comprobarlos por las relaciones que los diferentes trozos guarden entre sí y con los puntos principales préviamente elegidos.

409. **Medida de las áreas.—Preliminares.**—Se llama área de una superficie limitada el número de veces que esta superficie contiene á la unidad.

La unidad superficial tiene siempre la forma de un cuadrado, cuyo lado es la unidad lineal adoptada para medir las longitudes.

Indiquemos la manera de obtener las áreas ó las medidas de las superficies de los planos cuya construccion ha sido el objeto de los estudios precedentes; operacion de la mayor importancia en muchas aplicaciones de la Topografía, y que es el verdadero objeto de este capítulo.

410. **Area del triángulo.—Triángulos oblicuángulos.**—*Un triángulo cualquiera tiene por superficie la mitad del producto de su base por su altura.*

Sea b la base y a la altura, tendremos (Geom. Teorema 94.)

$$\textit{Area del triángulo} = \frac{b \times a}{2} \qquad [29]$$

Ejemplo: Sea $b = 50^{m}$ y $a = 40^{m}$ (fig. 210), resultará

$$\textit{Area}\ \mathrm{ABC} = \frac{50 \times 40}{2} = \frac{2000}{2} = 1000^{m2} = 10 \text{ áreas.}$$

411. En el caso de ser conocidos los tres lados que señalaremos con las letras a, b y c, (fig. 211), imaginemos la altura CD que llamaremos h, y se tendrá desde luego en el triángulo ADC

$$h^2 = b^2 - \mathrm{AD}^2;$$

y despejando AD en la expresion $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times \mathrm{AD}$, (Geometría.—Teor. 72), sustituyendo en la anterior, reduciendo el segundo miembro á una sola fraccion, y descomponiendo en el numerador la diferencia de cuadrados que resulta en un producto de dos factores (Alg.—29), se tendrá

$$h^2 = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\,(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2},$$

ó

$$h^2 = \frac{(a + b + c)\,(b + c - a)\,(a + c - b)\,(a + b - c)}{4c^2}.$$

Llamando $2p$ al perímetro resultará la expresion

$$2p = a + b + c,$$

y restando sucesivamente de ambos miembros $2a$, $2b$ y $2c$, sustituyendo en el valor de h^2, simplificando y extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros,

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}.$$

Sustituyendo ahora este valor de h en la expresion del área del triángulo, que es como sabemos (410), siendo ahora c la base y h la altura

$$\textit{Area del triángulo} = \frac{c \times h}{2},$$

y simplificando despues, se tiene por último

$$\textit{Area del triángulo} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad [30].$$

Esta fórmula tiene aplicacion en el caso de que el triángulo que se tenga que medir fuese un bosque, una viña ó cualquier otro terreno en el cual no se pudiese levantar una perpendicular para tener su altura, sin perjudicar á la propiedad.

Ejemplo.—Sean los tres lados $a=40^m$; $b=50^m$; $c=60^m$; se hallará su suma $40^m+50^m+60^m=150^m$, de la cual se tomará la mitad, que son 75^m. Restando de 75 cada uno de los números 40, 50 y 60, se obtienen los restos 35, 25 y 15, que multiplicados entre sí y por el número 75, resulta el producto 984375, del cual estrayendo la raiz cuadrada, que es 992,15, esta será la superficie del triángulo expresada en metros cuadrados ó sean 992^{m2} y 15^{cm2}, ó bien $9^a,92^{m2}$ y 15^{cm2}.

412. **Triángulos rectángulos**.—Tratándose de un triángulo rectángulo, como los catetos b y c son en este caso la base y la altura, tendremos para el caso en que se conocen los dos catetos,

$$\textit{Area del triángulo rectángulo} = \frac{b \times c}{2} \quad [31].$$

413. **Area del cuadrilátero**.—*El área de un cuadrilátero cualquiera, se determina en general sumando las áreas de los dos triángulos en que resulta dividido por una de sus diagonales.*

Ejemplo.—Sea el cuadrilátero ABCD (fig. 212) tendremos

$$\textit{Area}\ \text{ABCD} = 130,^{m}20 \times \frac{65,^{m}60 + 20^{m}}{2} = \frac{130,^{m}20 \times 85,^{m}60}{2}$$

$$= 55,^{a}73.$$

414. **Area del trapecio**.—*El área de un trapecio es igual á la mitad de la suma de las dos bases paralelas, multiplicada por su altura.*

Llamando b á la base mayor, b' á la menor, y a á la altura, la fórmula será (Geom. Teor. 95.)

$$\textit{Area del trapecio} = \frac{b + b'}{2} \times a \quad [32].$$

Ejemplo.—Sea el trapecio ABCD (fig. 213) tendremos

$$\textit{Area}\ \text{ABCD} = \frac{120,^{m}40 + 85,^{m}20}{2} \times 62,^{m}40 = 64,^{a}15.$$

El área del trapecio es tambien igual al producto de su altura EF *por la recta* GH *que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

415. **Area del rectángulo**.—*El área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

La fórmula será (Geom. Teor. 92.)

$$\textit{Area del rectángulo} = b \times a \quad [33].$$

Ejemplo. Sea el rectángulo ABCD (fig. 214) tendremos

$$\textit{Area}\ \text{ABCD} = 90,^{m}50 \times 36,^{m}80 = 33,^{a}30.$$

416. **Area del cuadrado**.—*El área del cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.*

Llamando l al lado del cuadrado, la fórmula será (Geom. Teor. 92, Corol.)

$$\textit{Area del cuadrado} = l^2 \quad [34].$$

Ejemplo.—Sea el cuadrado ABCD (fig. 215) se tendrá

$$\textit{Area}\ \text{ABCD} = (85,^{m}60)^2 = 73,^{a}27.$$

417. **Area del paralelógramo**.—*El área del paralelógramo se obtiene como la del rectángulo, multiplicando la base por la altura.*

Ejemplo.—Sea el paralelógramo ABCD (fig. 216) se tendrá

$$Area\ \text{ABCD} = 88,^{m}70 \times 55,^{m}40 = 49,^{a}14.$$

418. **Area del polígono regular.**—*El área del polígono regular es igual á la mitad del producto del perímetro por la apotema.*

Si designamos por l el lado del polígono regular, por a la apotema ó altura de uno de los triángulos isósceles iguales en que queda dividido por las rectas tiradas desde el centro á los vértices, y por n el número de lados, la fórmula será (Geom. Teor. 96):

$$Area\ del\ polígono\ regular = \frac{1}{2}\,nl \times a \qquad [35].$$

Llamando P al perímetro nl, esta fórmula se convertirá en

$$Area\ del\ polígono\ regular = \frac{\text{P} \times a}{2} \qquad [36].$$

Ejemplo.—Sea el pentágono regular ABCDE (fig. 217); su lado AB $=40^{m}$ y por lo tanto su perímetro 200^{m}, y su apotema OH$=30^{m}$, la fórmula [36] nos dará

$$Area\ \text{ABCDE} = \frac{200^{m} \times 30^{m}}{2} = 3000^{m2} = 30^{a}.$$

419. Antes de determinar el área del círculo, recordaremos primero la relacion de la circunferencia al diámetro, es decir, las veces que el diámetro está contenido en la circunferencia y que es siempre constante. De esta relacion existen varias expresiones, á saber: la de Arquímedes que es $\frac{22}{7}$; la de Mecio que halló ser $\frac{315}{113}$, y la de los modernos que en decimales está representada por 3,14159.... y que se señala por la letra griega π, que se lee *Pi.*

420. Pasaremos ahora á *determinar la longitud de la circunferencia dado el radio y al contrario.*

Sea C la circunferencia y r el rádio; supuesto que $\frac{\text{C}}{2r} = \pi$, tendremos (Geom. Prob. 40):

$$\text{C} = 2\pi r \quad [37] \quad \text{y}\ r = \frac{\text{C}}{2\pi} \quad [38].$$

Ejemplo 1.° *Hallar el valor de la circunferencia cuyo rádio es* 5 *metros* (fig. 218).

La fórmula [37] nos dará

$$C = 2\pi r = 2 \times 3{,}14 \times 5^{m} = 31{,}^{m}4.$$

Ejemplo 2.° *Hallar el valor del rádio de la circunferencia que tiene de longitud* 31,^{m}4.

La fórmula [38] nos dará

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{31{,}^{m}4}{2 \times 3{,}14} = \frac{31{,}^{m}4}{6{,}28} = 5^{m}.$$

421. **Area del círculo.**—*El área de un círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el rádio.*

Tenemos (Geom. Teor. 97)

$$\textit{Area del circulo} = \frac{1}{2}\,Cr \qquad [39].$$

Poniendo en esta fórmula por C su expresion $2\pi r$, y llamando A el área del círculo, resulta esta otra

$$A = \pi r^2 \qquad [40].$$

Luego *el área de un círculo es tambien igual á la razon de la circunferencia al diámetro multiplicada por el cuadrado del radio.*

Despejando r en la fórmula [40] se tendrá

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \qquad [41].$$

Luego *el rádio es igual á la raiz cuadrada del cociente que se obtiene dividiendo el área del círculo por la razon de la circunferencia al diámetro.*

Ejemplo 1.° Sea $r = 5^{m}$, llamando A á el área del círculo, la fórmula [40] nos dará

$$A = \pi r^2 = 3{,}14 \times 5^2 = 78{,}50\ m^2.$$

Ejemplo 2.° Sea $A = 78,m^2\,50$, por la fórmula [41] se obtendrá:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{78,m^2 50}{3{,}14}} = \sqrt{25} = 5^{m}.$$

Si se tratase de un semicírculo, se hallará la superficie del círculo entero como acabamos de decir, y se tomará su mitad.

24

422. En la práctica se suele hacer uso para hallar la superficie del círculo de la siguiente regla.

Se multiplica el cuadrado del diámetro por 11 *y el producto se divide por* 14.

En efecto, llamando D al diámetro y poniendo en la espresion $A = \pi r^2$ [40] por r su valor $\frac{D}{2}$, y haciendo uso de la relacion de la circunferencia al diámetro, segun Arquímedes, que es $\frac{22}{7}$ y que es ahora el valor de π resulta

$$A = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{22}{7} \times \frac{D^2}{4} = \frac{11 \times D^2}{14},$$

que es el enunciado de la regla.

423. **Area del sector.**—*El área del sector es igual á la mitad del producto del arco de círculo que le sirve de base por el rádio.*

Tenemos (Geom. Teor. 98)

$$\textit{Area del sector} = \frac{1}{2} ar \qquad [42].$$

Ejemplo.—Sea el sector ABOC (fig. 218), cuyo ángulo BAC es de 64 grados y el rádio del círculo 5^m. Se hallará primero la longitud del arco BOC$=a$ que le sirve de base, determinando la longitud de toda la circunferencia (420) que es $31,^m4$ y estableciendo la proporcion

$$360^\circ : 31,^m4 : : 64^\circ : a = 5,^m58.$$

La fórmula [42] nos dará

$$\textit{Area}\ ABOC = \frac{1}{2} ar = \frac{1}{2} \times 5,^m58 \times 5^m = 13,^{m2}95.$$

424. **Area del segmento.**—El área del segmento BCO (figura 218) menor que el semicírculo, se hallará restando del área del sector correspondiente ABOC, la del triángulo ABC; y la del segmento BDC mayor que el semicírculo, añadiendo al área del sector BDCA la del triángulo ABC.

425. **Area de la corona.**—El área de la corona *abcd* (figura 219) es igual á la diferencia de las áreas de los dos círculos concéntricos.

426. **Area de la elipse.**—*El área de la elipse es igual a producto de sus dos ejes multiplicado por la relacion* π *de la circunferencia al diámetro, dividido todo por* 4.

Sea E el eje mayor, y e el menor, la fórmula será

$$Area\ de\ la\ elipse = \frac{E \times e \times \pi}{4} \qquad [43];$$

Ejemplo.—Sea la elipse ABCD (fig. 220); su eje mayor $AC = 120^m$ y el eje menor $BD = 80^m$, tendremos

$$Area\ ABCD = \frac{120 \times 80^m \times 3{,}14}{4} = \frac{30144}{4} = 75{,}^a36.$$

427. **Polígonos irregulares.**—Para determinar la superficie de esta clase de polígonos es necesario concebirlos descompuestos en otras figuras más sencillas.

Estas descomposiciones resultan algunas veces de las líneas establecidas en el terreno para el levantamiento del plano, y otras hay que hacer la descomposicion en este último.

Cuando el establecimiento de las líneas del canevás para el levantamiento del plano del polígono presenta á este descompuesto en figuras adecuadas al cálculo de su superficie con todos los datos necesarios, ó se puede concebir descompuesto sin necesidad de tómar nuevos datos, sino deduciéndolos de los que ya se conocen, deben seguirse siempre los métodos numéricos, y sólo en el caso contrario se hará uso de los métodos gráficos.

Una vez determinados los datos numérica ó gráficamente, se hará aplicacion de las fórmulas correspondientes para obtener la superficie de cada una de las figuras parciales, y por consiguiente la total del polígono en cuestion.

La primera operacion debe ser por lo tanto la exacta construccion del plano del polígono, cuya superficie se trata de determinar; si bien cuando sólo esta es necesaria y se emplean los métodos numéricos, puede obtenerse el resultado sirviendo únicamente de guia el cróquis ó el registro.

Nosotros supondremos siempre en cuanto vamos á exponer que ha precedido la construccion del polígono en el papel. Del mismo modo, siempre que hablemos de procedimientos gráficos, se ha de entender que no tenemos otro dato que el contorno del polígono construido en el papel, y la escala que ha servido para la construc cion. Expondremos los varios métodos de descomposicion generalmente empleados.

428. *Por descomposicion en triángulos y trapecios.*—Levantado un plano por abscisas y ordenadas (335) se obtiene desde luego (fig. 221) la descomposicion en triángulos y trapecios, y no habrá más que aplicar las fórmulas [29] y [32], (410 y 414), y sumar los resultados obtenidos. El estado que para estos cálculos debe formarse es el que se halla en la página siguiente.

429. Cuando se circunscribe un rectángulo al polígono (344), se restará del área de este rectángulo la suma de las áreas exteriores, cuando son ó pueden considerarse como figuras rectilíneas, rectángulos, triángulos ó trapecios en general, y la diferencia será el área del polígono en cuestion.

430. *Por descomposicion en triángulos.*—Cuando el procedimiento que se ha seguido en el levantamiento del plano presenta al polígono descompuesto en triángulos por diagonales á partir de un mismo vértice, bastará hallar el área de cada uno de los triángulos y sumarlas para obtener la del polígono. Tambien puede descomponerse gráficamente de este modo el plano del polígono, aunque se haya levantado por otro método cualquiera.

Las áreas de los triángulos pueden hallarse en el caso que nos ocupa empleando la fórmula [30] (411).

431. **Contornos curvilíneos.**—Una vez hallada por cualquiera de los procedimientos que anteceden el área del polígono principal del canevás ABCDEFGH (fig. 222), es necesario conocer las de las porciones GF56... comprendidas entre los lados de éste y las porciones curvas del contorno, para añadirlas al polígono ó restarlas de él segun sean exteriores ó interiores con respecto á su perímetro. Se hará para ello uso de las abscisas y ordenadas que descomponen á estas áreas en triángulos y trapecios; pero pueden hallarse más fácilmente cuando las ordenadas están equidistantes. Supongamos que así se verifique en las 5 y 6 de la figura, y llamémoslas b y b', representando por a la equidistancia de estas ordenadas: fácil es ver entonces que las áreas de las tres porciones en que dividen al contorno GF56, son respectivamente (410 y 414).

$$\frac{a\times b}{2}; \qquad \frac{b+b'}{2}\times a; \qquad \frac{a\times b'}{2};$$

Estado de la superficie del polígono ABCDEFG.

Número de órden. 1.	Clase de las figuras. 2.	Indicacion de los cálculos. 3.	Resultados parciales. 4.	Resultado total. 5.
1	Triáng. ABH	$\frac{19,5\times27,6}{2}$	269,10 m^2	
2	Trap. BHJC	$\frac{27,6+38}{2}\times 42,5$....	1394,00 »	
3	Trap. CJMD	$\frac{38+23,4}{2}\times 33,3$.....	1022,31 »	
4	Triáng. DME	$\frac{23,4\times11,7}{2}$..........	136,89 »	
5	Triáng. AYG	$\frac{41\times31,7}{2}$..........	649,85 »	
6	Trap. YGFL	$\frac{31,7+24}{2}\times 44,4$....	1236,54 »	
7	Triáng. LFE	$\frac{24\times21,6}{2}$..........	259,20 »	4967,89 m^2

cuya suma que llamaremos S, dará para el área que se busca,

$$S=\frac{a\times b+a(b+b')+a\times b'}{2}=a(b+b') \qquad [44];$$

bastando por lo tanto multiplicar la equidistancia por la suma de las ordenadas.

432. Cuando los extremos de la curva AE (fig. 223) no pasan por el eje ó directriz MN, se divide su proyeccion *ae* en un cierto número de partes iguales y por los puntos de division *b, c, d*, se levantan perpendiculares. Llamando l la longitud de una de estas divisiones y designando por y, y', y''... las de las perpendiculares A*a*, B*b*, C*c*... la suma de los trapecios rectángulos que así se obtienen, se calculará por la regla siguiente.

Multiplíquese la longitud de una de las divisiones de la proyeccion de la curva sobre el eje ó directriz, por la suma de las perpendiculares intermedias y la mitad de la suma de las perpendiculares extremas.

En efecto, tenemos,

$$\frac{1}{2}\,l\,(y'+y'')+\frac{1}{2}\,l\,(y''+y''')+\frac{1}{2}\,l\,(y'''+y^{\text{IV}})+$$
$$\frac{1}{2}\,l\,(y^{\text{IV}}+y^{\text{V}});$$

ó bien

$$\frac{1}{2}\,l\,(y'+2y''+2y'''+2y^{\text{IV}}+y^{\text{V}})=l\left[(y''+y'''+y^{\text{IV}})+\frac{y'+y^{\text{V}}}{2}\right] \qquad [45];$$

que es el enunciado de la regla.

433. **Medicion por cuadrícula.**—Los métodos acabados de explicar se aplican tambien de otra manera llamada de *medicion por cuadrícula*. Consiste en dividir el papel en que el plano se ha trazado por un sistema de rectas, paralelas á una de direccion arbitraria AB (fig. 224) y equidistantes entre sí en una magnitud dada, 100 metros por ejemplo de la escala del plano, y otro análogamente dispuesto en direccion perpendicular al primero; y sabiendo que el área de cada cuadrado es de 10000 m^2, los seis cuadrados enteramente ocupados por el plano darán 60000 m^2, á cuyo valor será necesario añadir los de las porciones, que como *ahcrb* no llenan un cuadrado, y pueden calcularse como hemos dicho (431 y 432).

Para no manchar el dibujo puede hacerse la cuadrícula en un papel trasparente que se dispone sobre el plano.

434. Al procedimiento de la cuadrícula se acude tambien cuando se construye un plano por abscisas y ordenadas, y éstas son de tanta longitud que exceden la abertura del compás y no pueden ser apreciadas con exactitud por la escala de boj (77). Así, si el punto *r* está referido al eje 2...2 paralelo á AB y se conoce el valor numérico 176,24 de su ordenada, bastará tomar de *o* á *n* el valor de la abscisa que debiera tomarse en el eje de referencia, restar 100 del valor de la ordenada, y llevar de *n* á *r* la diferencia 76,24 para obtener la situacion de este último punto en el plano.

435. **Determinacion gráfica de las áreas con auxilio de instrumentos.—Planímetros.**—Los valores de las áreas pueden obtenerse gráficamente con mucha brevedad y con bastante aproximacion, haciendo uso de ingeniosos instrumentos más ó ménos perfeccionados, entre los que solo citaremos la Ruleta de Dupuit, como la más generalmente usada, por estar más al alcance de la generalidad.

436. **Ruleta de Dupuit.**—Este instrumento está destinado á la medida de la longitud de una recta, y á la de la suma de varias rectas recorridas sucesivamente por los puntos de la circunferencia de una rueda *r* (fig. 225), que gira con un piñon concéntrico é invariablemente unido á ella alrededor de un eje proyectado en *m*. Los dientes del piñon engranan con los de la rueda R, móvil alrededor del eje *n*, y el sistema está dispuesto de manera que la rueda R da una revolucion completa en el tiempo en que la *r* da diez, por el engranaje de diez dientes de que consta el piñon con ciento que presenta la rueda R. Dos agujas indicadoras *s*, *t* están fijas con los ejes *m*, *n* en una armadura metálica *p*, sujeta al mango A. Un tornillo de presion *x* acerca ó separa de la rueda *r* un resorte de acero, con el fin de poderla hacer girar más ó ménos libremente. La circunferencia de la rueda *r* está rayada á fin de que no resbale sin girar, pues en este caso no se tendrian exactamente las magnitudes de las líneas que recorriese.

La circunferencia de la rueda *r* tiene un desarrollo de un decímetro exacto, que está dividido en diez partes, numeradas con las cifras 0, 1, 2... y cada una de estas partes corresponde á un centímetro, subdividido en otras veinte, cada una de las cuales vale medio milímetro. Las divisiones correspondientes á los milímetros exactos aparecen algo más largas que las otras, prolongándose más entre ellas las que corresponden á los cinco milímetros.

La rueda R presenta tambien las cifras 0, 1, 2... que indican con las unidades que representan el número de revoluciones completas ó de decímetros recorridos por la rueda *r*, á partir de una posicion en que los ceros de las graduaciones de R y de *r* coinciden con los extremos de las agujas *s* y *t*; posicion que se obtiene haciendo girar á la rueda *r* hasta que tenga lugar la coincidencia.

437. **Usos del instrumento.**—Para hallar con auxilio del Planímetro el área de un polígono ABCDE (fig. 226) se hace pasar por él un sistema de paralelas *b*, *b'*, *b''*.... equidistantes entre sí una magnitud *a*, y será fácil ver, análogamente á lo que hemos dado á conocer (431 y 432), que el área de este polígono será igual al producto de la equidistancia *a* por la suma de las partes de las paralelas *b*, *b'*.... comprendidas en el polígono. La ruleta sirve para determinar esta suma de paralelas; lo que se ejecuta haciendo en ella la coincidencia de los ceros con las agujas como acabamos de indicar, y colocando el instrumento verticalmente de modo que el extremo de la aguja *t* coincida con el de la recta *b* que se halle más próximo al operador; se le pone entonces en movimiento apoyando la mano ligeramente en el mango A (fig. 225) para que la rueda *r* no resbale sin girar, recorriendo de este modo todos los puntos de la recta dada, con los que irá coincidiendo sucesivamente el extremo de la aguja *t*, hasta que corresponda exactamente al último de ellos. Se levanta entonces para colocarle en un extremo de la paralela *b'*, que se recorre del mismo modo, así como las paralelas restantes. La observacion de las posiciones ocupadas entonces por las agujas indicadoras, dará la longitud buscada. Si tomamos por unidad el centímetro, y la aguja *s* resulta situada entre las divisiones 3 y 4 de la rueda R, la *r* habrá dado tres revoluciones ó recorrido 30^{cm}, y si la distancia del cero de la rueda *r* al extremo de la aguja *t* es de dos centímetros marcados por la cifra 2, y seis milímetros y medio observados en la graduacion, que componen $2,^{cm}65$, la longitud de la recta será de $32,^{cm}65$ en escala natural.

Cuando la suma de paralelas que se mide es de mucha longitud, puede suceder que la rueda R dé más de una revolucion: entonces es preciso cuidar de anotar las veces que pasa por *s* el cero de la graduacion de esta rueda, correspondiendo cada vuelta á 100^{cm}.

Puede hacerse la medida sin la coincidencia prévia de los ceros con las agujas, anotando la lectura que marca la ruleta en el momento de empezar á recorrer la primera recta, y hallando despues la diferencia entre ésta y la que señala al concluir de recorrer la última. Si por ejemplo se empezase con la graduacion $32,^{cm}65$ que marcaba al concluir la que ántes hemos propuesto como ejemplo, y despues marcase $79,^{cm}80$, la longitud que se busca sería de $47,^{cm}15$.

Una vez hallada en centímetros la suma de las paralelas, no habrá más que multiplicarla por la equidistancia entre ellas, expresada tambien en centímetros, y se tendrá el área del polígono expresada en metros en la escala de $\frac{1}{100}$. Si la equidistancia es un centímetro, la suma de las paralelas dará desde luego el área.

Suponiendo, por ejemplo, que en la figura 226, las paralelas distan seis milímetros, y que la suma de las paralelas b, b'.... es $6,^{cm}3$, se tendrá $a = 0,^{cm}6$; y el área que se busca llamándola S será

$$S = 6,^{cm}3 \times 0,6 = 3,cm^2\ 78,$$

ó $3,m^2\ 78$ en la escala de 1 por 100.

438. **Reduccion á la escala del plano.**—Obtenidas como hemos visto las lecturas en escala natural y en centímetros cuadrados, para hallar el área de una figura trazada con arreglo á una escala diferente de la de 1 por 100, no habrá más que multiplicar el resultado obtenido por el área que en la escala de la figura represente el centímetro cuadrado. Así, si el polígono ABCDE (figura 226) estuviere construido en la escala de 1 por 250, como un centímetro lineal representa $2,^{m}5$ en esta escala, el centímetro cuadrado representará $6,m^2\ 25$, por lo que el polígono tendrá un área

$$s = 6,m^2\ 25 \times 3,78 = 23,m^2\ 625.$$

439. La equidistancia de las paralelas puede hallarse en distinta escala que ellas, cuando su direccion es determinada: se sigue entonces la marcha establecida (437), expresando el valor de a en su escala correspondiente, y multiplicándole por la suma de las paralelas, reducida á su escala respectiva.

Si en la figura 226 se tiene por ejemplo $a = 6^{m}$, lo que indica que la escala á que la equidistancia corresponde es la de $\frac{1}{1000}$, se tendrá entonces para el área del polígono, teniendo presente (438) que la escala de paralelas es de 1 por 250,

$$b + b' + b'' + b''' = 15,^{m}75:$$

haciendo entonces aplicacion de la regla que acabamos de dar, resultará

$$s = 6^{m} \times 15,^{m}75 = 94,^{m^2}50.$$

440. **Observaciones acerca del grado de aproximacion de los resultados obtenidos con la ruleta.**—La experiencia ha dado á conocer que el error cometido en la apreciacion de las áreas con la ruleta, puede ser en las escalas ordinarias de 2 á 3 por 100 de la superficie que se considera; menor por lo tanto que el que tiene lugar cuando se aplica el cálculo determinando gráficamente los elementos geométricos. En la escala de $\frac{1}{100}$ para las paralelas que han de medirse, no hay diferencia apreciable entre los errores que produce el uso del instrumento de que nos ocupamos y los que resultarían de la aplicacion del cálculo, en razon á la mayor apreciacion que se obtiene para los valores de las paralelas.

441. **Correccion á que están sujetos los procedimientos empleados en la determinacion de las áreas.**—Ocurre muchas veces tener que hacer uso en la medicion de las líneas, de una cadena cuya longitud es mas ó menos de 10^{m}, por no tener medio de corregirla comparándola con otra que sea exacta ó no permitirlo el tiempo de que se dispone. En estos casos conviene emplearla cual se halla, tomándola como unidad de medida y hacer los cálculos considerándola como exacta, salvo á rectificar despues el resultado cuando se averigüe el error de la cadena. Para verificar esta correccion, supongamos que sea n el área que se ha determinado, referida al cuadrado construido sobre el valor real de la cadena que ha servido para la medida de las distancias: si representamos por l este valor real, l^2 será el verdadero valor de la unidad superficial; y como el área le contiene n veces, su verdadera expresion será

$$S = n \times l^2 \qquad [46].$$

Luego *para hallar la superficie no habrá más que multiplicar el resultado obtenido como si la cadena fuese exacta, por el cuadrado de la longitud real de la cadena inexacta.*

Supongamos que con una cadena inexacta se ha obtenido para valor de una superficie $n=32$ áreas. Midiendo exactamente la cadena, supongamos que su longitud es $l=10^{m},02$ se tendrá

$$S=32^{a}\times 100,m^{2}\,4004=32\times 1,^{a}004004=32^{a},128128.$$

442. **Reduccion de las áreas al horizonte.**—Cuando se trata de una área plana, y se conoce su pendiente (31), puede hallarse fácilmente su proyeccion horizontal.

Sea el triángulo ABC (fig. 227) inclinado al horizonte, *abc* su proyeccion horizontal, y p la pendiente ó el ángulo que forman los planos en que se hallan situados dicho triángulo y su proyeccion, prolongados hasta que se encuentren. Si en la arista Aa del prisma troncado ABCabc, se toman las partes iguales AA′ y aa', y por los puntos A′ y a' se tiran los planos A′B′C′ y $a'b'c'$ respectivamente paralelos á los ABC y *abc*, resultarán los prismas equivalentes ABCA′B′C′ y $abca'b'c'$ (Geom. Teor. 211). Llamando S á la superficie del triángulo ABC y tirando desde A′ la perpendicular A′d á esta base, el volúmen del prisma ABCA′B′C′ será $S\times A'd$, y como el volúmen del $abca'b'c'$ es igual á $abc\times aa'$ tendremos, llamando s á la proyeccion horizontal *abc*, que

$$S\times A'd=s\times aa'.$$

En el triángulo rectángulo AA′d tenemos

$$A'd=AA'\times \cos.AA'd;$$

y como el ángulo $aA'd$ no sólo es suplemento del AA′d sino tambien del ángulo p que forman los planos (Geom. Teor. 147) resulta $AA'd=p$, y por consiguiente

$$A'd=AA'\cos.p;$$

cuyo valor sustituido en la ecuacion de los volúmenes, recordando que se tiene $AA'=aa'$, nos da por último

$$s=S\times \cos.p \qquad [47]$$

Si se tiene $p=90^{\circ}$ ó $p=60^{\circ}$, será $\cos.p=0$ ó $\cos.p=0,5$ y por lo tanto $s=0$ ó $s=\frac{S}{2}$.

Cuando los planos son paralelos es $p=0$, y por consiguiente se tiene $\cos.p=1$ y $s=S$.

CAPITULO VI.

Nivelacion.

443. **Definiciones.**—Se da el nombre de *Nivelacion* á la parte de la Topografía que tiene por objeto (41) hallar la diferencia de alturas de dos ó más puntos del terreno respecto á una superficie dada, que se designa con el de *superficie de nivel* ó *de comparacion*. Estas diferencias, que se llaman *desniveles*, son las que existen entre las *cotas* ó alturas de los distintos puntos considerados respecto á la superficie de comparacion elegida.

En la hipótesis adoptada para considerar la forma del globo terrestre (3) las superficies esféricas concéntricas con la de la tierra son *superficies de nivel*, que la naturaleza nos presenta en los lagos tranquilos, en los mares, si prescindimos de los movimientos causados por los vientos y las mareas, y en general en la superficie de un líquido cualquiera libremente solicitado por la accion de la gravedad. Estas superficies, consideradas en una extension poco considerable, se confunden sensiblemente con el plano tangente á la superficie esférica, el cual puede adoptarse entonces como plano de comparacion (41) al que se refieren las cotas de los diferentes puntos cuya representacion geométrica nos ocupa.

Entre las distintas superficies de nivel, se ha convenido por los geógrafos en elegir como superficie general de comparacion para que los resultados de distintas nivelaciones sean comparables, la del Océano, considerada en su altura media entre las que corresponden á la mayor y la menor de las mareas vivas, suponiéndola prolongada por debajo de los continentes. El rádio de esta esfera es de 6366200 metros (3).

En este supuesto, la cota del punto A (fig. 228) es su altura A*m* respecto á la superficie occéanica *nsm*. La cota negativa de un punto B sería la distancia B*n*. Las cotas á que acabamos de referirnos se pueden materializar concibiendo bajada desde A una plomada de longitud A*m*, ó elevando desde B un flotador acompañado de un cordon B*n*. En Topografía se ha adoptado tambien la misma superficie de comparacion; si bien puede ser ésta arbitraria en operaciones aisladas ó de poca importancia.

El desnivel entre dos puntos A y D es la diferencia A*m'* de sus distancias A*m*, D*s*, á la superficie *nsm* ó á otra cualquiera concéntrica con ella.

444. **Diferencia del nivel aparente al verdadero.**— En virtud de las definiciones que acabamos de establecer, el desnivel de los puntos A y B (fig. 229) de la superficie terrestre es la diferencia BN' — AN de sus distancias á una superficie cualquiera de nivel NN'; pero no siéndonos posible en la práctica la determinacion de esta superfieie, nos valemos del plano tangente NH, en uno de sus puntos N; plano que tenemos medios de obtener (29), pues es el plano horizontal del mismo punto (19). Todos los de la superficie NN' están *de nivel verdadero* con N; y *de nivel aparente* con el mismo punto los del plano horizontal NH. La vertical de B encuentra á las superficies de nivel verdadero y de nivel aparente en los N' y H, cuya distancia N'H es lo que se llama *diferencia de nivel aparente al verdadero.* Designándola por x, puede hallarse su valor en funcion de la distancia horizontal NH$=l$ y del rádio terrestre R, pues se establece fácilmente (Geometría Teor. 76) la proporcion

$$2R + x : l :: l : x,$$

de la cual, suponiendo el primer término igual á 2R, en lo que no hay error de consideracion por la excesiva pequeñez de x respecto á 2R, despejando x, y sustituyendo en vez de R su valor numérico, resulta

$$x = \frac{l^2}{2R} = \frac{l^2}{12732400} = 0{,}0000000785 \times l^2 \qquad [48].$$

445. **Error debido á la refraccion atmosférica.**—La elevacion causada por la refraccion atmosférica, hace que el punto H observado desde N como de nivel aparente con él, sea la imágen de otro cierto punto M inferior al plano de nivel, y producida por la trayectoria MN, de la cual es NH la tangente al último elemento. El valor de la elevacion MH, á que llamaremos r, varía con la temperatura y el estado higrométrico del aire, y con otras circunstancias, lo que hace que no pueda conocerse exactamente al tiempo de ejecutar las operaciones; pero en nuestros climas y en circunstancias atmosféricas ordinarias se ha deducido de repetidas experiencias que es por término medio la fraccion 0,16 de la diferencia N'H de nivel aparente al verdadero. Se tendrá por lo tanto (444)

$$r = 0{,}16 \times x = 0{,}00000001256 \times l^2 \qquad [49].$$

446. **Correcciones del desnivel entre dos puntos dados.**—Para calcular el desnivel exacto BN' — AN (444) entre los puntos A y B (fig. 229), será necesario medir directamente la altura AN y deducir por el cálculo la BN', para la cual se tiene

$$BN' = BM + MH - HN' = BM - (HN' - MH);$$

y hallando la diferencia entre los valores [48] y [49] de HN' y de MH, será por último

$$BN' = BM - 0{,}000000066 \times l^2,$$

y restando AN de ambos miembros

$$BN' - AN = BM - AN - 0{,}000000066 \times l^2 \qquad [50].$$

Esta fórmula presenta reunidas en una sola las correcciones de los errores cuya existencia hemos dado á conocer (444 y 445), bastando medir en cada caso la distancia horizontal que separa las verticales de los puntos dados, para multiplicar su cuadrado por el número constante 0,000000066, y restar este producto de la diferencia de alturas realmente obtenidas AN y BM.

447. **Casos particulares.—Correccion nula y correccion parcial.**—Cuando el plano de nivel aparente HN (fig. 230) es tangente en un punto N equidistante de las verticales de A y B, resulta N'H' = N''H por ser diferencias entre oblícuas iguales y rádios de un mismo círculo, así como tambien

$H'M' = HM$, fracciones iguales (445) de $N'H'$ y $N''H$; luego el desnivel exacto entre A y B será (446)

$$BN'' - AN' = BM - AM',$$

diferencia de las alturas observadas desde N.

448. Si el plano tangente se halla entre los puntos A y B, pero no equidista de ellos, hay necesidad de aplicar la fórmula [50]; observando tan sólo que en vez de la distancia total entre ambos se debe sustituir por l la diferencia de las que median entre el punto de tangencia y los A y B.

449. **Tabla de correccion.**—Por medio de la fórmula [50] se ha calculado una tabla, que insertamos en la página siguiente, la cual da la cantidad en que ha de disminuirse para un valor dado de l el hallado para la diferencia de alturas de los extremos de esta distancia.

Para hacer aplicacion de la tabla, supongamos que hemos hallado los valores $AN = 0^m,758$; $BM = 5^m,346$ y $l = 1800^m$; buscando en la segunda columna de las tablas el valor correspondiente al número 1800 de la primera, se tendrá para el desnivel z entre A y B (fig. 229),

$$z = 5,346 - 0,758 - 0,214 = 4^m,374.$$

Observando la tabla, se ve que cuando la distancia no llega á 120^m, el error es inferior á un milímetro, límite de las alturas apreciables por los medios que ordinariamente se emplean en las operaciones de *nivelacion*.

TABLA

para la correccion de los errores debidos á la diferencia de nivel aparente al verdadero, y á la refraccion atmosférica.

Distancias. 1.	Altura del punto observado sobre el nivel verdadero. 2.	Distancias. 1.	Altura del punto observado sobre el nivel verdadero. 2.
m.	m.	m.	m.
0	0,0000	780	0,0401
20	0,0000	800	0,0422
40	0,0001	820	0,0444
60	0,0002	840	0,0465
80	0,0004	860	0,0488
100	0,0007	880	0,0511
120	0,0009	900	0,0534
140	0,0013	920	0,0558
160	0,0017	940	0,0583
180	0,0021	960	0,0608
200	0,0026	980	0,0634
220	0,0032	1000	0,0660
240	0,0038	1100	0,0798
260	0,0045	1200	0,0950
280	0,0052	1300	0,1115
300	0,0059	1400	0,1273
320	0,0067	1500	0,1484
340	0,0076	1600	0,1689
360	0,0085	1700	0,1907
380	0,0095	1800	0,2137
400	0,0106	1900	0,2382
420	0,0116	2000	0,2639
440	0,0128	2500	0,4123
460	0,0140	3000	0,5938
480	0,0152	3500	0,8082
500	0,0165	4000	1,0556
520	0,0178	4500	1,3360
540	0,0192	5000	1,6493
560	0,0207	5500	1,9957
580	0,0222	6000	2,3750
600	0,0237	6500	2,7874
620	0,0254	7000	3,2327
640	0,0270	7500	3,7110
660	0,0287	8000	4,2223
680	0,0305	8500	4,7666
700	0,0323	9000	5,3438
720	0,0342	9500	5,9541
740	0,0361	10000	6,5973
760	0,0381		

450. **Instrumentos de nivelacion.**—Para la nivelacion se emplean los *niveles* y las *miras*.—*Nivel* es todo instrumento destinado á proporcionar una recta NH (fig. 229), que girando alrededor de una vertical á la cual es perpendicular, determina con sus distintas posiciones un plano horizontal (19), al cual se refieren en direccion vertical las distancias AN ó BH de los distintos puntos A, B.... que en el terreno se consideran.

Mira es una regla dividida, que puesta á plomo sobre un punto B del terreno da el valor de la distancia BH de dicho punto al plano de nivel NH. En realidad, la distancia obtenida, que se llama *altura de mira*, es la BM determinada por el *punto de mira* M, que aparece como situado en H á causa de la refraccion atmosférica (446).

451. **Mira de corredera ó de tablilla.**—Está formado este instrumento de dos reglas de madera *a* y *b* (fig. 231), la primera de las cuales puede deslizarse á todo lo largo de la otra, en virtud de los cortes por que están enlazadas, que permiten este movimiento y están representados por las porciones *a'* y *b'* en la seccion trasversal *s* de la regla total. Se sujetan ambas reglas por medio del tornillo de presion *t'*, que tiene su tuerca en la pieza metálica *c'* unida invariablemente á la regla *a*. Cuando esta regla se halla en el punto más bajo de su carrera y oprimida contra la otra por medio del tornillo *t'*, ambas constituyen una sola regla, que puede ser recorrida en toda su extension por una armadura metálica *c*, y detenerse en un punto cualquiera, fijándola por el tornillo *t*, análogamente dispuesto que el *t'*. Formando cuerpo con la armadura está la *tablilla* de hierro (*m*, *m'*), cuyo frente se presenta dividido en cuatro rectángulos, dos de los cuales, opuestos en sentido de una de las diagonales del rectángulo que constituye la tablilla, están pintados de negro ó de rojo y los otros dos de blanco para distinguirlos bien á larga distancia, destacar la mira de los objetos que la rodean, y señalar bien las rectas de separacion de los rectángulos y su punto de interseccion, que es el *punto de mira* (450).

452. **Graduacion.**—La cara posterior de la regla *b* está dividida á partir del pié en metros, decímetros y centímetros, continuando la graduacion en una de sus caras laterales y tambien de abajo arriba. A estas graduaciones corresponden *escalas* de un centímetro dividido en milímetros con el cero en la parte superior, dispuestas convenientemente en las armaduras *c* y *c'*.

E.U.I.T. TOPOGRAFIA BIBLIOTECA

453. **Uso de la mira.**—Unidas las reglas formando un solo cuerpo como hemos indicado (451), se corre la tablilla hasta que el punto de mira se halle en el plano horizontal determinado por un nivel (450): la altura marcada por el cero de la escala en la armadura *c* será la altura de mira que se trataba de obtener. La tablilla puede subir así hasta alcanzar una cierta altura, 1,^{m}770 en la que representa la figura, á la cual la detiene un tope, dispuesto en un resorte metálico sujeto á la extremidad superior de la regla *a*. Cuando esto se verifica, es indispensable que el cero de la armadura inferior *c'* coincida exactamente con la línea inferior que marca la misma altura en la division lateral de la regla; debiéndose de lo contrario tener en cuenta el error para corregir las alturas de mira cuando se haga uso en lo sucesivo de la escala inferior. Si aun no ha llegado el punto de mira al plano de nivel, se afloja el tornillo *t'* y se hace subir á la regla *a*, cuidando el portamira de oprimir con el pié un estribo metálico que la otra regla tiene en su parte inferior. Llegado el punto de mira á la altura conveniente, se hace la lectura en la escala de la armadura *c'* siendo de 1,^{m}961 en la disposicion que presenta la figura. Si el cero de la escala no coincidiese exactamente con una division de la regla, se obtendría el número de milímetros que sería necesario añadir, contando de arriba abajo los que median entre el cero de la escala y la division inmediatamente inferior á él en la regla. En el ejemplo propuesto suponemos que es la primera de la escala á partir del cero (452).

454. **Mira parlante.**—Se compone esta mira de tres cuerpos de caoba *a*, *b*, *c* (fig. 232): el primero, de una altura exacta de 1,^{m}500, recibe en su interior otro segundo cuerpo *b*, que puede correr á lo largo de él hasta tanto que se verifica el ajuste de un boton, que lleva dispuesto el *b* por su parte inferior en un resorte metálico, con el taladro circular *z* que la cantonera superior del cuerpo *a* presenta en su parte posterior. La porcion de regla que entonces sobresale del cuerpo inferior tiene una longitud exacta de 1,^{m}400: análogamente dispuesto se halla el tercer cuerpo constituido por una regla *c*, de igual altura que el segundo, alcanzando así una altura total de 4,^{m}300.

455. **Divisiones de la mira.**—La escala métrica de este instrumento se halla grabada en papel convenientemente preparado y dispuesto en uno de los frentes de las reglas. Las líneas de division que comprenden todo el ancho de la regla señalan una altura

exacta de decímetros, cuya lectura se obtiene por el número rojo que se encuentra debajo de la línea y marca los metros, y el negro que está por encima y señala los decímetros. Esta disposicion varía en otras miras; y es conveniente antes de usarlas, penetrarse del sistema de representacion y de la manera de hacer la lectura. Algunas miras presentan invertidas las cifras para usarse con los instrumentos de anteojo astronómico.

Los centímetros que cada decímetro comprende están marcados por rectángulos alternativamente blancos y negros, de manera que leyendo de abajo arriba, los negros ocupan los lugares pares. A la mitad exacta de cada decímetro hay un círculo negro, cuyo centro está á la altura de la línea de separacion de los centímetros quinto y sexto. Respecto á los milímetros se aprecian á ojo, para lo que se necesita alguna práctica. Algunas miras están divididas hasta dobles milímetros por trazos gruesos alternando tambien de blanco y negro, y dispuestos al lado de las divisiones que marcan los centímetros.

456. **Uso y lectura de la mira parlante.**—Puesta verticalmente la mira en el punto cuya distancia al plano de nivel se quiere determinar, procederá el portamira á sacar el segundo cuerpo, si el primero no basta para alcanzar al plano citado; dándole toda su altura, para lo que se tendrá cuidado con el ajuste del boton correspondiente, que tendrá lugar al llegar á la altura conveniente, en virtud de la fuerza elástica del resorte. En caso necesario se hará uso del tercer cuerpo, para lo que será conveniente introducir el segundo á fin de no separar á la mira de su aplomo, y sacar sucesivamente el tercero y segundo, cuidando siempre del ajuste sucesivo de ambos botones.

La division de la mira en que se proyecte el plano de nivel dará la altura pedida, obteniéndose su valor por la lectura de los metros y decímetros que comprenda, y la apreciacion de los centímetros y milímetros. Como ejemplos de lectura, se representan en la figura las alturas siguientes, que corresponden á otras tantas posiciones en que se supone situado el plano de nivel: $m = 0,^{m}300$; $n = 0,470$; $p = 0,730$; $q = 1,084$; $r = 1,150$.

457. **Niveles.—Nivel de perpendículo y límite de su empleo.**—Este sencillo instrumento, descrito ya (23) y representado en la figura 6, se emplea para la nivelacion horizontando por él una regla ó un plano (24 y 29) á los que se refieren las alturas de mira (450); pero sólo se emplea en operaciones de poca impor-

tancia ó cuando se puede operar á muy cortas tiradas. En efecto, representando por $S = 0,^{m}001$ la separacion *dd'* (fig. 7), que la plomada puede experimentar respecto de la verdadera bisectriz $ad = l$, por x la distancia horizontal á que puede corresponder un desnivel $D = 0,^{m}01$, que se considera como el error límite de los que pueden tolerarse para la inclinacion de la regla, se tendrá la proporcion

$$S : l :: D : x = \frac{l \times D}{S} = \frac{0^{m}3, \times 0,01}{0,001} = 3^{m},$$

límite de las distancias á que puede operarse sin cometer errores que lleguen á valer un centímetro, suponiendo que la altura *ad* es la que ordinariamente tiene de tres decímetros.

458. Este nivel N (fig. 233) se usa tambien dispuesto de modo que se desliza libremente por la cuerda *ab* en la cual se apoya por las anillas *c*, *d*, *e*. Cuando el cordon coincide con la línea de fé, los puntos *a* y *b* están de nivel entre sí, y las distancias A*a*, B*b*, marcan las alturas de la horizontal *ab* sobre los puntos A y B del terreno.

459. **Nivel de agua.**—Se compone de un tubo de hoja de lata ó de laton, encorvado en sus extremos y terminado en ellos por dos frascos de cristal, del mismo diámetro, unidos al tubo por un mastic completamente impermeable, constituyendo así lo que en Física se llama un *tubo de brazos comunicantes*. En su parte media tiene un mango cónico hueco, que se introduce en la espiga de un trípode ordinario; todo como representa la figura 234. Lleno el tubo de agua hasta unos dos tercios de la altura de los frascos, y libre de aire interpuesto el líquido, para lo cual se inclina el tubo hasta que el agua llene uno de los frascos, que se tapa con el dedo, y se continúa elevando por el otro extremo hasta observar que ha cesado el desprendimiento de las burbujas de aire, las superficies del líquido estarán en un mismo plano horizontal, en virtud de un principio que se demuestra en Hidrostática.

El agua que llena el tubo conviene que esté mezclada con vino para destacar más las superficies de nivel, y en invierno debe contener mayor cantidad de alcohol para evitar la congelacion del líquido.

460. **Uso del nivel de agua.**—Se emplea este instrumento para hallar el desnivel entre dos puntos A y B (fig. 184), poniéndole en estacion en un punto C próximamente equidistante de los puntos dados, sin que sea necesario que este punto corresponda á

la alineacion AB, y de la manera que hemos dicho (459), cuidando de que el tubo de comunicacion esté lo más horizontal que sea posible juzgar á la vista, y se le hace girar alrededor de su espiga hasta que los frascos se hallen en un plano vertical con una mira de tablilla colocada en uno de los puntos A. Dirigiendo entonces la visual tangentemente á los anillos formados por las superficies del líquido, se lleva el punto de mira á la altura de la visual, como hemos indicado (453) y se lee el valor de la altura A*a*: trasladando la mira á B se obtiene del mismo modo la B*b*, y la diferencia B*b*—A*a* es el desnivel verdadero entre A y B (447). Cuando C diste muy desigualmente de A y B conviene aplicar la correccion á que nos hemos referido para este caso (448).

461. **Límite del empleo del nivel de agua.**—La indeterminacion de la visual en virtud de la *accion capitular*, puede producir un error límite e, á una cierta distancia x, que se calcula, sabiendo que crece con ella, y que á la semilongitud l del tubo de comunicacion es $0,^{m}001$, por la proporcion

$$0,^{m}001 : \frac{l}{2} : : e : x = 500 \times e \times l \qquad [51],$$

Suponiendo que el error no ha de pasar de $0,^{m}1$ y que la longitud del tubo es $1,^{m}2$, resulta $e = 60^{m}$, distancia que se considera en la práctica como el límite máximo.

462. **Nivel de aire con anteojo.**—El nivel de aire que construyen en la actualidad los instrumentistas franceses, es el inventado por Mr. Chézy y modificado ventajosamente por monsieur Egault.

Se compone de un anteojo astronómico AB (fig. 235), el cual descansa entre los collares b en que terminan unos soportes fijos á la regla metálica CD, uno de los cuales es susceptible sin embargo de subir ó bajar convenientemente en una cierta cantidad, por medio del tornillo s movido por una llave, haciendo así variable la inclinacion del eje del anteojo con respecto al plano de la regla. El anteojo puede sacarse de los collares y colocarse de nuevo en ellos invertido; para lo cual se aflojan los tornillos b, que permiten girar á unas aldabillas para dar paso al nivel, las que se vuelven á cerrar cuando el anteojo está colocado de nuevo, oprimiendo los tornillos, los cuales no le permiten entonces otro movimiento que el giro alrededor de su eje de figura dentro de los collares. Puede determinarse una de las infinitas posiciones que en virtud de este giro puede ocupar el tubo del anteojo, moviendo el tornillo *a*, que atraviesa un cilindro ó tambor metálico *c* fijo al soporte, hasta el tope de su extremo con un prisma saliente invariablemente unido al tubo del anteojo: de esta manera, puede hacérsele volver cuando sea necesario en lo sucesivo á la posicion así determinada, moviéndole hasta que tenga lugar el contacto del prisma y el tornillo.

Sobre la regla CD se halla el nivel *n*, provisto de su tornillo *r* de correccion particular é invariablemente unido á ella, y en su parte inferior el eje de rotacion del instrumento, relacionado con una plataforma de tres tornillos *t* (129), con otro de presion para impedir el giro del instrumento cuando se le aprieta con alguna fuerza. El trípode es el segundo de los descritos (131).

Algunos niveles tienen en vez del tornillo de presion, un sistema de tornillos de presion y de coincidencia (107); pero esta disposicion no es absolutamente necesaria, por no ser preciso fijar con exactitud la posicion de la cerda vertical del retículo en el anteojo.

463. **Uso del nivel de aire con anteojo.**—Se emplea de una manera enteramente análoga al nivel de agua (460), horizontando el nivel como en la brújula (180), y haciendo uso por lo general de la mira parlante.

464. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Centracion de la cerda horizontal.*—Se hace coincidir esta cerda con la imágen de una recta cualquiera, que puede ser la horizontal de la tablilla de una mira, y se continúa como hemos dicho para la centracion del retículo (94). Cuando se hace uso de la mira, se toman las alturas correspondientes á ambas posiciones, se marca la altura media; y se lleva á ella la cerda por el movimiento de los tornillos del retículo.

Puede corregirse tambien la otra cerda del mismo modo, con lo que resultará centrado el anteojo; lo que no es preciso en los niveles, aunque puede ser conveniente para emplear la cerda vertical despues de haberla hecho describir un cuarto de revolucion, en el caso de haberse inutilizado la cerda horizontal.

465. 2.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Es la misma que hemos explicado (181), corrigiendo por los tornillos *t* y por el *r* de correccion particular del nivel.

466. 3.ª *Horizontalidad del eje óptico del anteojo.*—Se ejecuta lo mismo que la verificacion y correccion análogas (219), diri-

giendo la visual á una mira colocada á 200 ó 300^m del punto de estacion, y marcando la altura correspondiente á la graduacion que cubre la cerda horizontal del anteojo; sacándole despues de los collares para colocarle de nuevo en ellos invertido, y dando una semirevolucion al instrumento para dirigir la visual á la mira y ver si marca la misma altura. Si no, se corrige por la altura media de la mira y el tornillo s que mueve el soporte b del anteojo.

467. 4.ª *Determinacion de la posicion perfectamente horizontal de una de las cerdas del retículo.*—Se hace girar al anteojo alrededor de su eje de figura dentro de los collares, hasta que la cerda sea horizontal á la vista, y se mueve el instrumento alrededor de su eje de rotacion hasta que el cruzamiento de las cerdas cubra un punto bien determinado: continuando el mismo movimiento, se observa si los demás puntos de la cerda horizontal van cubriendo sucesivamente al punto observado, durante todo el tiempo que permanece en el campo del anteojo, en cuyo caso la cerda será perfectamente horizontal. Cuando esta circunstancia no se verifique, se moverá el anteojo dentro de los collares en el sentido conveniente, hasta hallar una posicion en la cual la cerda cubra constantemente al mismo punto, fijando esta posicion por el movimiento del tornillo a (fig. 235) hasta el contacto indicado (462). Conviene asegurarse de este contacto en las observaciones, para tener seguridad en la horizontalidad perfecta de la cerda correspondiente del retículo.

468. **Límite del empleo del nivel de aire.**—Sea AC (fig. 10) la regla sobre que está colocado un nivel de aire y mn' la separacion de la burbuja, que suponemos de $0,^m001$ como límite máximo; la tangente del ángulo c será sensiblemente la razon $mn':r$, siendo r el rádio b de curvatura del tubo, y la del ángulo $s=c$ tendrá por expresion $e:x$, siendo e el error máximo que puede tolerarse en el desnivel y corresponde á una distancia x, cuyo valor se trata de determinar. La igualdad de las razones $mn':r$ y $e:x$ dará, suponiendo que el rádio r es de 20 metros,

$$x = \frac{r \times e}{0,001} = 1000 \times r \times e = 20000 \times e \quad [52].$$

Dando á e valores sucesivos $0^m,1$, $0^m,01$... resultarán para x... 2000^m, 200^m... y teniendo en cuenta que el error de desviacion de la burbuja que hemos supuesto es bastante exagerado, en razon á que la simple vista puede apreciar una desviacion mucho menor, y que el rádio de curvatura es mayor que 20^m en los niveles que generalmente se emplean, pueden considerarse como exactas las alturas de mira observadas á una distancia de 200^m en las aplicaciones ordinarias de la nivelacion. Este límite da á conocer la indisputable ventaja de este nivel sobre los anteriormente explicados.

Cuando no se conoce el valor del rádio r de curvatura del tubo para aplicar la fórmula [52], se le puede hallar midiendo una distancia l de dicho nivel á un punto cualquiera en el que se coloca una mira, y viendo el camino e recorrido por la visual en ella para dos posiciones sucesivas de la ampolla en las que ha dado una separacion $s = mn'$, por la proporcion

$$e : l :: s : r = \frac{l \times s}{e} \quad [53].$$

469. El procedimiento que se emplea para la nivelacion haciendo uso de los *niveles*, se le llama *nivelacion por alturas*, para distinguirla de la llamada *nivelacion por pendientes* ó *nivelacion trigonométrica*, la cual tiene por objeto hallar el desnivel entre dos puntos dados, resolviendo el triángulo rectángulo ABC (figura 78), que constituye la recta AB que los une, con la vertical BC del punto más elevado y la horizontal AC del otro, conociendo la pendiente ó inclinacion de AB (Acot. 25) y la longitud de la misma recta ó de su proyeccion horizontal AC. La pendiente puede obtenerse en grados (180): para lo cual se hará uso de cualquiera de los instrumentos de planimetría provistos de limbo zenital, como el teodolito (214) y la brújula descrita (178), que tambien se llama por esta razon *brújula eclímetro* ó *brújula nivelante*; ó bien que tienen un limbo susceptible de disponerse verticalmente, como el grafómetro (207).

Otros instrumentos, llamados *eclímetros*, están destinados exclusivamente á la determinacion de las pendientes por la relacion entre el desnivel BC y la proyeccion horizontal AC (Acot. 25). Esta relacion es la tangente trigonométrica del ángulo de elevacion ó depresion correspondiente.

470. **Eclímetros.—Eclímetro de perpendículo**.—Es el nivel de perpendículo que hemos citado (457), y cuyo travesaño está dividido en partes iguales, cada una de las cuales es la centésima parte de la distancia bn (fig. 236) comprendida entre el punto b y el medio n del travesaño. Este instrumento se corrige como

el nivel de perpendículo (50), llevando en cuenta el error de que puede llegar á estar afectado por el uso.

Para hallar la pendiente de una recta AB, se le dispone sobre ella como el nivel de perpendículo, y se observa el número de divisiones que señala la parte *nr* del travesaño comprendida entre el cero *n* de la graduacion y la division *r* que coincide con el cordon del perpendículo.

La semejanza de los triángulos rectángulos ABC, *brn*, que tienen el ángulo *b* igual al B (24), da la relacion

$$\frac{AC}{CB}=\frac{nr}{bn}=\frac{nr}{100} \quad [54].$$

Así, cuando *nr* comprende 1....2....3.... divisiones, la pendiente de AB será de 1....2....3.... por 100.

471. **Eclímetro de pínulas.**—Este instrumento está formado de una regla metálica (fig. 237), que termina por dos pínulas P, P′ perpendiculares á ella, y lleva un nivel provisto de su tornillo *t* de correccion particular. Está unida la regla á un trípode ordinario por medio de una plataforma de resortes (128), sirviendo los tornillos proyectados en *h* para establecer la union entre esta plataforma y la regla. Cada una de las pínulas está provista de una abertura cuadrada con dos cerdas que se cruzan á ángulo recto, y de un taladro cónico ó esférico, que da paso á la luz por un agujero de muy pequeño diámetro. Este agujero y el cruzamiento de las cerdas, deben estar á la misma altura en ambas pínulas con respecto á la cara superior de la regla del instrumento, para lo cual se dispone en una de ellas P, un tablero móvil á lo largo de la pínula, por el juego de un tornillo *s* y de un resorte en espiral: la otra pínula P′ es mucho más elevada, y está formada por un bastidor fijo *a* (fig. 238), dentro del cual puede subir y bajar con movimiento rápido el tablero T cuando se afloja el tornillo de presion *z*, y se pone en movimiento el tablero cogiéndole por el boton *d*. Apretando el tornillo *z* forma cuerpo el tablero con el cilindro *b*, y haciendo girar á la cabeza del tornillo *x*, el cilindro sube ó baja con movimiento lento por la rosca *c* llevándose consigo al tablero.

472. *Graduaciones del instrumento.*—El larguero de la derecha del bastidor *a* está dividido con arreglo al metro, y el de la izquierda se refiere á toesas. La unidad en la division métrica tiene una altura de 3,^{mm}25, que es la centésima parte de la longi-

tud $0,^{m}325$ de la regla CD (fig. 237) contada entre los planos exteriores de las pínulas, y está dividida en dos partes, siendo por lo tanto de $\frac{1}{2}$ por 100 la menor division de la escala. Para evitar confusion sólo se numeran generalmente las divisiones correspondientes á los números pares de unidades, como indica la figura 238.

El nonius *m* que lleva el tablero T se ha formado de cuatro de las menores divisiones de la escala y se ha dividido en 5 partes iguales, apreciando por lo tanto $\frac{1}{2}:5=\frac{1}{10}$, ó décimas partes de la unidad (119—1.°). Las pendientes podrán apreciarse por la relacion entre un número de unidades y décimas de unidad y el número constante 100. La apreciacion de la pendiente en la posicion *m'* del nonius será de $17,^{m}2$ por 100, siendo la division 2 del nonius la que coincide con una de las de la escala. En la posicion *m''* la pendiente será de 24,7 por 100, apreciando las décimas por la media division comprendida entre la division 24 de la escala y el cero del nonius, aumentada con las 2 décimas que da la coincidencia de su cero con una de las divisiones de la escala.

473. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Es la que hemos indicado (465), corrigiendo por el tornillo *t* (fig. 237) y los de la plataforma.

474. 2.ª *Horizontalidad de la visual cuando coincide el cero del nonius con el cero de la escala.*—Se establece la coincidencia exacta de los ceros, y se emplea en la verificacion y correccion el método expuesto (466), corrigiendo por el solo movimiento del tornillo *s* de la pínula pequeña.

475. **Uso del eclímetro de pínulas.**—Se coloca el instrumento en estacion (180) en el punto A (fig. 239), despues de haberle corregido perfectamente, y de modo que el ocular de la pínula menor se halle próximamente en la vertical del mismo punto, y se lleva la mira al punto B con la altura B*m*=A*a*, moviendo el tablero de la pínula mayor como hemos indicado (471), hasta que la visual vaya á parar exactamente al punto de mira *m*, observando despues la altura *cb* marcada como hemos dicho (472) por el cero del nonius en la pínula grande. Los triángulos rectángulos semejantes *acb*, ACB (180) darán la proporcion

$$ac : cb :: AC : CB,$$

en la que *ac* es el número constante 100; *cb* la lectura observada en la graduacion de la pínula grande; AC la proyeccion horizontal de AB, y CB el desnivel que se busca.

Cuando se trata de una pendiente bajando, la operacion se hace del mismo modo, sirviendo de ocular la pínula grande.

476. **Nivelacion por alturas.—Generalidades.**—Hemos visto en el uso de los distintos niveles, que el desnivel entre dos puntos se obtiene por una sola estacion del instrumento, cuya manera de operar toma el nombre de *nivelacion simple*; pero cuando el mucho desnivel ó la gran distancia que media entre los puntos que se consideran, obligan á obtenerle por una série de estaciones simples, recibe la operacion el de *nivelacion compuesta.*

Las estaciones diferentes que constituyen una nivelacion compuesta, se distinguen entre sí por un número de órden, que se refiere á aquel en que han tenido lugar. A cada estacion se refieren asimismo todas las operaciones que en ella hayan sido ejecutadas.

477. **Marcha que se sigue en las operaciones de la nivelacion compuesta.**—Para hallar por medio del nivel de perpendículo (457) ó por el nivel sencillo de aire (25) el desnivel entre dos puntos A y D (fig. 23), bastará horizontar por su medio un reglon A*b* en el punto de partida, y en las posiciones sucesivas B*c*, C*d*, y medir con auxilio de otro reglon vertical ó de la cinta las alturas B*b*, C*c*, D*d*, cuya suma dará el desnivel AA′ que se trataba de conocer.

478. Haciendo uso para la resolucion de este problema del nivel de agua ó de los de anteojo, se hará estacion en un punto M (fig. 240), colocando una mira en el A de partida y otra en un nuevo punto B, cuyo desnivel con A pueda hallarse por medio de una nivelacion simple. La diferencia de alturas *a* y *a′* dará el desnivel entre A y B. Trasladando el instrumento á otro punto de estacion N, se observarán del mismo modo las alturas *b* y *b′* correspondientes al punto B y á otro C elegido con relacion á B, con las mismas condiciones que éste con respecto á A en la primera estacion. Así se continuará, tomando desde cada punto de estacion del instrumento la altura correspondiente á la última mira colocada en la estacion anterior y la de otro nuevamente elegido, hasta llegar á una estacion Q, en la que el punto que en ella ha de elegirse pueda ser el E, cuyo desnivel con el de partida se pretende hallar.

Observando la marcha que acabamos de indicar, notaremos

UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA ... ESCUELA - BIBLIOTECA

que á cada estacion corresponden dos alturas de mira, una de las cuales está tomada dirigiendo la visual á la mira que el observador ha dejado á su espalda para buscar el punto en que ha hecho estacion, y otra que corresponde á un nuevo punto, que elige para colocar la mira segunda en la direccion de aquel en que la operacion ha de terminar. La primera se denomina en la práctica *mira de espalda* ó *nivelada atrás*; la segunda *mira de frente* ó *nivelada adelante*. Se ve por lo tanto que las alturas a, b, c, d, que ocupan los lugares impares en el sentido AE en que suponemos ejecutada la operacion son niveladas atrás; y niveladas adelante las a', b', c', d', de lugar par. Tambien pudieran llamarse *niveladas primeras* ó *primeros términos* á las alturas de mira de lugar impar, y *niveladas segundas* ó *segundos términos* á las de lugar par.

La diferencia de nivel que resulta de cada estacion ó de cada nivelacion simple de las que constituyen una nivelacion compuesta, se halla siempre por la diferencia aritmética entre las alturas de mira correspondientes.

479. Para relacionar entre sí estas diferencias de manera que podamos obtener fácilmente y siguiendo una regla general el desnivel entre los puntos dados, supondremos que el punto de partida es el más bajo, y llamaremos tambien *diferencias subiendo* á aquellas en que la mira de espalda sea mayor que la de frente, como sucede á las que corresponden á las estaciones M y Q, en las que el terreno sube yendo de A á E, que es el sentido en que suponemos ejecutada la operacion; y *diferencias bajando* á aquellas en que se verifique lo contrario, como en las estaciones N y P.

Hechas estas hipótesis, si todas las diferencias fuesen subiendo, es evidente que sumándolas encontraríamos la diferencia total; y que en el caso de hallar una diferencia bajando, habrá que restarla de la suma ya obtenida.

Así, el punto B estará más elevado que A en una cantidad igual á la diferencia $a - a'$ de las alturas observadas en la primera estacion; el punto C más bajo que B en la diferencia $b' - b$, y más elevado que A en la cantidad

$$(a - a') - (b' - b).$$

Desde la estacion P se observará que el punto D está más bajo que C en la diferencia $c' - c$, y como C estaba más alto que A en una cantidad igual á $(a - a') - (b' - b)$, D respecto de A estará más alto en la cantidad

$$(a-a')-(b'-b)-(c'-c).$$

En la estacion Q en que podremos observar la mira d' en el punto E en que ha de concluir la operacion, tendremos que estando E más alto que D la cantidad $d-d'$, y habiendo visto que D está más alto que A en la

$$(a-a')-(b'-b)-(c'-c),$$

E estará más alto que A en la

$$(a-a')-(b'-b)-(c'-c)+(d-d'),$$

que será el desnivel que buscamos.

Verificando las operaciones algébricas indicadas en esta expresion, se tendrá sucesivamente:

$$a-a'-b'+b-c'+c+d-d';$$
$$(a+b+c+d)-(a'+b'+c'+d');$$

pero $a+b+c+d$ es la suma de las miras de espalda, y $a'+b'+c'+d'$ la de las miras de frente; luego *la diferencia de nivel que existe entre los puntos extremos de una nivelacion compuesta se obtiene hallando la suma de las miras de espalda, así como la de las miras de frente, y restando la segunda de la primera.*

Si la primera suma es mayor que la segunda, la diferencia será positiva, é indicará que el punto E está más alto que el de partida A, conforme á la hipótesis hecha para establecer la relacion que resuelve el problema.

Si las sumas son iguales, A y E serán puntos de nivel.

Si es mayor la segunda, la diferencia es negativa, é indica que el punto de término está más bajo que el de partida.

480. **Acotacion de los puntos del terreno.**—Para referir las alturas de los puntos del terreno á un *plano de comparacion* (Acot.—4), se sigue la marcha que acabamos de indicar para la nivelacion compuesta, teniendo en cuenta que es preciso colocar la mira en todos aquellos puntos cuya cota se quiere conocer, aun cuando así no lo exigiera la marcha establecida para la resolucion del problema general; y anotar cuidadosamente cada uno de estos puntos, para no confundir las cotas que han de corresponderles.

Halladas las alturas de mira a, a', b, b'... (fig. 240), siendo A, B, C... los puntos cuyas cotas tratamos de determinar, la cota que corresponde al punto de partida A es en general arbitraria, y conviene elegirla de manera que el plano de comparacion pase por debajo ó por encima de todos los puntos del terreno que tratamos de acotar, con objeto de que todas las cotas resulten de un mismo signo (Acot.—7). Bastará para conseguirlo asignar al punto A una cota mayor que la diferencia calculada, ó que se juzgue debe haber entre este punto y el más bajo, en caso de que el plano de comparacion haya de ser inferior á los puntos dados. Cuando hubiese de ser superior á ellos, se tendría en cuenta el desnivel de A con el más elevado. Si en el curso de las operaciones resultase una cota negativa, se obviaría este inconveniente añadiendo á todas las cotas ya calculadas una misma cantidad, que para mayor facilidad debe ser un múltiplo de 10.

Otras veces el plano de comparacion está dado por las condiciones del problema, como cuando las cotas han de referirse al nivel del mar (443).

Sea AA′ la cota arbitraria del punto de partida. Para hallar la que corresponde al punto B, tendremos la expresion

$$BB' = AA' + BF;$$

y para los siguientes:

$$CC' = BB' - BG; \qquad DD' = CC' - CH; \qquad EE' = DD' + EL.$$

Observando estas expresiones, deduciremos que *para hallar la cota de un punto cualquiera no hay más que añadir á la cota del punto anterior ó restar de ella el desnivel que existe entre ambos puntos, segun que este desnivel resulte subiendo ó bajando en el sentido de la marcha de la operacion.*

481. **Cróquis y registro de la nivelacion.**—El *cróquis* de la nivelacion consiste en dibujar á mano para cada estacion una línea de derecha á izquierda, que representa la horizontal del nivel, y tirar por sus extremos perpendiculares que representarán las alturas de mira; estas perpendiculares se cortan por una recta inclinada en el mismo sentido que la que representa del terreno. Las alturas de mira observadas se anotan al lado de las líneas que las representan y en el órden con que se han obtenido; resultando para cada mira dos alturas, de las cuales la de la izquierda es la altura de frente de una estacion, y la de la derecha es la de espalda en la estacion que sigue. Las distancias que median entre los puntos nivelados se escriben sobre la horizontal del nivel cuando se han medido horizontalmente, y al lado de las rectas inclinadas correspondientes si se han medido con la pendiente que tienen en el terreno.

El registro se dispone como el modelo que insertamos en la página 216. Se principia por anotar en la casilla núm. 1 la letra A con que hemos designado el punto de partida, en la número 10 y en el mismo renglon la cota arbitraria $85^m,000$ que le hemos atribuido, y en la número 11 la indicacion del sitio que ocupa.

El segundo renglon se destina á las anotaciones que se refieren al punto B, el cual se anota en la primera casilla; en la segunda se inscribe la letra M que designa la estacion desde la cual se han tomado las alturas $a = 3^m,528$ y $a' = 0^m,837$, que han de dar el desnivel entre A y B, y las cuales se anotan respectivamente en las casillas 6 y 7. La distancia AB que media entre ambos puntos se anota tambien en el mismo renglon, ocupando la casilla núm. 3 ó la núm. 4, segun se haya medido con la pendiente que tiene en el terreno, ó bien horizontalmente.

La estacion N se anota en el renglon siguiente, así como el punto C y los valores de b y b' en las casillas correspondientes; continuando del mismo modo hasta llegar al punto E en que termina la nivelacion. La casilla núm. 3 se deja en blanco, como en todos los casos en que la cota del punto C no es importante, y es uniforme la pendiente en el sentido de la alineacion BD.

482. **Cálculo de las cotas, y reduccion de las distancias al horizonte.**—Anotados en el terreno los datos que acabamos de indicar, se procede á calcular las diferencias de las alturas de mira de cada estacion, inscribiéndolas en la casilla número 8 del registro cuando resultan subiendo, que será siempre que la mayor altura ocupe la casilla núm. 6; y se anotará en la núm. 9 cuando resulte bajando, lo que se conocerá en que la mayor altura de mira está en la sétima casilla.

Añadiendo despues á la cota de A la diferencia 2,691 que corresponde á B, se obtendrá la cota 87,691 de este punto: restando de esta la diferencia 1,188 se hallará la cota 86,503 del punto C, y así sucesivamente.

El desnivel entre dos puntos cualesquiera de los A, B, C... que hemos considerado, se calculará por la diferencia de sus cotas (Acot.—6). Así la que resulta para los A y E es el desnivel $1^m,650$, obtenido por la nivelacion general.

Cuanto hemos dicho supone que el plano de comparacion es inferior; si fuese superior, se referirían las cotas de los puntos á este plano, restando de la cota anterior la diferencia que hubiese resultado subiendo, ó sumándola si fuese bajando.

REGISTRO DE NIVELACION.

Puntos nivelados.	Estaciones.	DISTANCIAS.			MIRAS.		DIFERENCIAS.			OBSERVACIONES.
		Parciales.	Reducidas	Al orígen.	De espalda.	De frente.	Subiendo.	Bajando.	Cotas.	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
A	»	»	»	0,00	»	»	»	»	85,000	Esquina N de la Ermita de *
B	M	177,57	177,55	177,55	3,528	0,837	2,691	»	87,691	
C	N	»	»	»	1,216	2,404	»	1,188	86,503	
D	P	283,86	283,85	461,40	0,842	2,528	»	1,686	84,817	
E	Q	170,03	170,02	631,42	3,057	1,224	1,833	»	86,650	Punto en el andén del punte de *, marcado con esta señal (×).
			631,42		8,643	6,993	4,524	2,874		
					6,993		2,874			
					1,650		1,650		1^m,650	

483. Por medio del desnivel hallado 2,691 entre los puntos A y B y la longitud 177,^{m}57 de la recta AB que los une, se puede hallar su proyeccion horizontal AF (fig. 240), haciendo uso de la fórmula [3] (72). Para la reduccion de BD se sumarán los desniveles BG y CH, que darán 2,874 en razon á que la pendiente de sus segmentos BC y CD es la misma.

Las distancias al orígen se calculan sumando con cada una de ellas la distancia reducida siguiente.

484. **Comprobacion de los cálculos.**—Para cerciorarnos de que no hemos cometido equivocaciones en el cálculo de las diferencias y las cotas, se ejecuta una operacion que sirve para comprobarle, y consiste en sumar las cantidades escritas en cada una de las columnas 6, 7, 8 y 9, y ver si la diferencia de las dos primeras sumas es igual á la que existe entre las dos segundas, en cuyo caso las diferencias están bien calculadas. Para comprobar las cotas se halla la diferencia entre las cotas extremas, y se ve si es igual á las diferencias anteriores. En caso de que todas no fuesen iguales, sería necesario proceder á calcular nuevamente los números insertos en las casillas 8, 9 y 10.

Cuando se ha escrito por equivocacion una diferencia subiendo en la columna núm. 9 ó al contrario, se comete un error en el desnivel total que es igual al doble de la expresada diferencia, y que las comprobaciones indicadas dan necesariamente á conocer. De aquí la imprescindible necesidad de ejecutarlas siempre que se quiera tener confianza en el resultado de las operaciones.

Las distancias al orígen se comprueban viendo si la última de ellas es igual á la suma de las reducidas en la columna 4.

485. **Observacion general acerca de los puntos que deben acotarse.**—Puede ocurrir que tratándose de hallar las cotas de los puntos A, B, D, E (fig. 240) las operaciones de nivelacion nos conduzcan como en el ejemplo resuelto (281) á la determinacion de la que corresponde á un punto C.

Esta cota puede suprimirse en un estado general de las que corresponden á los puntos dados. Tambien se acostumbra suprimir la designacion de los puntos que se hallan en las mismas condiciones que C, llamados *puntos intermedios*, indicando con lápiz los resultados del cálculo de todas las cotas hasta que se han comprobado, y pasando despues con tinta únicamente las que corresponden á los puntos dados. La distancia se mide tambien de B á D (481).

486. **Comprobacion de las operaciones de nivelacion.**—Se comprueba una nivelacion repitiéndola á fin de comparar su resultado con el obtenido primeramente, ejecutando las operaciones del terreno con el mismo cuidado, así como los cálculos necesarios para la determinacion del desnivel. Si éste difiere del primeramente hallado en una cantidad insignificante, podrá adoptarse el término medio. De lo contrario habría que proceder á una tercera nivelacion, que bastará en general para averiguar el verdadero desnivel. Algunos prácticos ejecutan una doble nivelacion, cambiando de sitio el instrumento en cada estacion y tomando nuevamente las alturas de las miras extremas, con lo cual se evita recorrer de nuevo la linea nivelada.

Cuando se han acotado algunos puntos en la primera operacion, se conocerán los desniveles que existen entre ellos, y de esta manera se subdivide la nivelacion en otras nivelaciones parciales. La comprobacion puede entonces referirse á estos puntos, que estando bien determinados, darán á conocer en la mayor parte de los casos dónde se han cometido las equivocaciones, y sólo habrá que repetir la nivelacion entre aquellos puntos cuyos desniveles parciales no hubiesen dado el mismo resultado en ambas operaciones.

Si la nivelacion debe terminar en el punto de partida, los puntos acotados ó de referencia determinan un polígono, y la comprobacion se reduce entonces á observar si el desnivel total es cero ó difiere muy poco de él; ó bien si la cota final hallada es la misma que la asignada al punto de partida. Haciendo extensiva la circunstancia análoga en la transportacion del plano de un polígono, se dice que éste *cierra por nivelacion*.

487. **Observaciones generales acerca de la práctica de la nivelacion y obstáculos que pueden presentarse.**—Es preciso que las miras estén dispuestas en posicion perfectamente vertical; su inclinacion produce un error que crece con la altura de mira para una inclinacion constante v; pues en la fórmula

$$x = l \times cos.v \quad [55],$$

que representa en funcion de la altura l correspondiente á la inclinacion v el valor x de la verdadera altura de mira, crece este valor con l cuando v permanece constante. La altura x es la menor de las que pueden observarse cuando el viento agita la mira. Cuando se nivela por terrenos fuertemente accidentados y se hace uso de la mira parlante (454), conviene disminuir el número de estaciones ganando lo posible en desnivel; para lo cual se *empalmarán* las miras colocando una de ellas sobre la cantonera metálica en que termina el primer cuerpo de la otra, y se tendrá la altura correspondiente añadiendo á la lectura hecha, la altura $1^m,500$ de dicho primer cuerpo. Conviene que la última mira de una estacion permanezca inmóvil en el punto en que se halla colocada, para servir de mira de espalda en la estacion siguiente y no alterar el resultado final de la operacion.

488. Respecto al uso de los niveles, observaremos que al hacer estacion debe procurarse que la altura á que se coloca el plano de nivel alcance al pié de la mira si está más elevada que el instrumento, ó no pase por encima de toda su altura si está más baja: de lo contrario, habría que cambiar de estacion el nivel perdiéndose un tiempo á veces considerable.

Al trasladar el nivel de agua de una á otra estacion, se evita que el líquido se derrame, tapando uno de los frascos, que se tiene cuidado de destapar al hacer la nueva estacion.

En los terrenos pantanosos conviene disponer las miras y los piés del trípode sobre piedras de grano, que se adhieren y quedan sujetas en el fango por la compresion que sobre él ejercen al ser introducidas. Para las miras se hace uso tambien de clavos de hierro con cabeza esférica armados de tres ó cuatro puntas, que en virtud de su forma se fijan bastante bien al terreno.

489. Uno de los obstáculos que con más frecuencia se presentan en la práctica de la nivelacion es un escarpado de mayor desnivel que el que puede obtenerse con las miras: se dispone entonces una de ellas invertida, cuyo pié se coloca á la altura del punto más elevado y otra directa en el más bajo, siendo el desnivel entonces la suma de las distancias respectivas del cero al plano de nivel; y cuidando de anotar esta circunstancia en el registro y de dibujarla en el cróquis. Al mismo medio se recurre cuando una cerca B (fig. 241) impide por su elevacion colocar el plano de nivel más elevado que ella á fin de observar la mira siguiente al otro lado de la cerca. El desnivel entre A y B será entonces $a + a'$. Cuando las dos miras deben colocarse invertidas como sucede de B á C, entonces el desnivel será $b—b'$ como si estuviesen naturalmente colocadas. Las alturas de la cerca en B y C sobre el terreno serán sus desniveles BP y CQ sobre P y Q.

490. **Problemas de nivelacion.—Generalidades.**—Se

reducen estos problemas á la aplicacion de los procedimientos generales de la nivelacion á la determinacion de puntos de un mismo plano horizontal ó de un desnivel dado, de rectas de pendiente determinada, y de alturas verticales cuyos valores se necesita conocer aisladamente ó bien relacionados con las operaciones de una nivelacion.

491. **Hallar un punto cuyo desnivel con otro dado sea igual á una cantidad determinada.**—Se hace uso de un nivel que se estaciona convenientemente, y se halla la altura de mira que corresponde al punto dado: marcando entonces en la mira una altura igual á la obtenida más ó ménos el desnivel conocido, segun se quiera que el nuevo punto resulte más bajo ó más elevado que el primero, no habrá más que colocar sucesivamente la mira en varios puntos del terreno, sin variar la altura marcada en ella, hasta que la visual dirigida segun el plano horizontal del nivel señale esta altura: el punto del terreno en que la mira esté situada entonces es el punto pedido. En estos tanteos cuidará el portamira de elegir puntos más altos ó más bajos que el que ocupa segun el sentido en que le indique el observador por medio de señas convenidas.

Cuando el desnivel fuese mayor que la altura total de la mira, se resolveria este problema por una nivelacion compuesta, anotando los desniveles parciales hasta que faltase para el total pedido una cantidad menor que la altura de la mira. En este caso se marca el punto siguiente de manera que satisfaga á la condicion del problema. Si por ejemplo el segundo punto hubiese de estar $14,^{m}8$ más elevado que el primero, y despues de tres estaciones se ha obtenido un desnivel de $12,^{m}5$, se determinará el punto pedido haciendo que resulte $2,^{m}3$ más alto que el pié de la mira anterior.

492. Con los eclímetros se resuelve este problema marcando en ellos la pendiente *cero*, y usándolos como niveles de la manera que acabamos de dar á conocer.

493. **Dado un punto de la superficie del terreno, hallar otro que esté de nivel con el primero.**—Este problema es el caso particular del anterior en que el desnivel dado es *cero*. Colocada una mira en el punto dado A (fig. 242) y puesto el nivel en estacion en M, se toma la altura de mira en A, y con ella se busca por tanteos un punto del terreno en el cual colocada la mira sin variar la altura marcada en ella, la visual termine exactamente en el punto que la señala. El punto B ocupado por el pié

de la mira, estará de nivel con A, ó mejor dicho, se hallará en el mismo plano horizontal que este último.

494. **Trazar en el terreno una línea cuyos puntos se hallen en un mismo plano horizontal.**—Determinados como en el problema anterior los puntos A y B (fig. 242), se pasa á estacionar el nivel en otro punto N, y se marca la altura B*s* de la nueva visual en la mira que ha debido permanecer en el punto B. Con esta altura se determina como en el problema anterior el punto C, que estará en el plano horizontal de B; y por consiguiente los tres puntos A, B, C, serán de nivel ó estarán en un mismo plano horizontal. Dejando colocada la última mira C y pasando á hacer una nueva estacion con el nivel, se podrá determinar otro punto del mismo plano, y así sucesivamente.

La altura *rs* es la diferencia de las que corresponden á los planos de nivel aparente determinados por la visual en las estaciones sucesivas del instrumento; diferencia que no influye en el resultado de la operacion, en razon á que se hace variar en la misma cantidad la altura de mira al mudar de estacion el nivel. Cuando desde una misma estacion se pueden determinar tres ó más puntos, no hay necesidad de variar la altura de mira al pasarla de uno á otro.

Los puntos A, B, C... determinados, están en la superficie del terreno y pertenecen por lo tanto á la interseccion de éste con un plano horizontal. La curva *abc*... que une las proyecciones *a*, *b*, *c*... de dichos puntos será una de las secciones horizontales que pueden considerarse en la superficie del terreno para su representacion geométrica (Acot.—106). Los puntos *m*, *n*... son las proyecciones de los de estacion M, N, y las rectas *ma*, *mb*, *nb*, *nc*... las de las visuales dirigidas á las miras A, B, C...

495. **Hallar la pendiente de la recta que une dos puntos dados del terreno.**—Empleando los goniómetros de limbo zenital y los eclímetros, puede obtenerse esta pendiente como ya sabemos (180 y 475). Con un nivel bastará dividir el desnivel entre los puntos dados por la proyeccion horizontal de la recta que los une (Acot.—25).

496. **Dado un punto del terreno, hallar otro tal, que la recta que los une tenga una pendiente dada.**—Haciendo estacion en el punto dado, se hace que el nonius del limbo zenital marque la pendiente asignada (116), ó el eclímetro la relacion del tanto por ciento ó por unidad (472), y en el sentido que

haya de tener la pendiente; se toma en una mira la altura del centro del limbo zenital sobre el punto de estacion, y se busca por tanteos un punto del terreno, en el cual colocada la mira con la altura marcada en ella, la visual tirada por el anteojo vaya á parar exactamente al punto de mira, de la misma manera que hemos indicado (491).

497. Para trazar una recta de pendiente dada con un nivel, se halla (491) un punto cuyo desnivel con el dado sea igual al numerador del quebrado que expresa la pendiente dada, haciendo al mismo tiempo que la distancia horizontal entre ambos puntos sea de 100 metros. Para la pendiente de 3 por 100, se hará que el desnivel sea de 3 metros.

498. **Trazar en el terreno una línea de pendiente dada.**—Se resuelve éste problema determinando cada uno de sus elementos sucesivos por el problema anterior, como se dijo para la línea poligonal de elementos horizontales (494), con respecto al que le precede (493).

499. **Medida de alturas ó altimetría.**—En este problema pueden considerarse en general dos casos distintos, segun sea ó no visible y accesible el pié de la altura. Consideraremos sucesivamente estos dos casos.

500. **Medida de alturas, cuyo pié es accesible, y están situadas en terreno horizontal.**—Sea AE (fig. 243) la altura de una torre cuyo valor se trata de conocer: mídase una base AB, y poniendo el instrumento en estacion de modo que su centro C esté en la vertical del extremo B de la base, dirijase la visual horizontal CD y tómese el ángulo de elevacion DCE; con lo cual se podrá resolver el triángulo rectángulo DCE, en el que se conocen dos ángulos y el cateto CD = AB, y se tendrá el valor de DE. Añadiendo á este valor la altura AD, igual á la BC del instrumento, se tendrá el de la altura AE que se trataba de conocer.

Ejemplo.—Sea AB = CD = $85,^{m}24$; BC = $1,^{m}15$ y DCE = $44^{\circ}\ 26'$: resultará AE = $84^{m},72$.

501. Haciendo uso de la plancheta, se trazará en el papel del tablero una línea de lápiz *mn* (fig. 244) paralela al canto *rs*, y se colocará el tablero en la posicion vertical por medio de una plomada y de modo que *rs* quede horizontal, lo que se conseguirá valiéndose del nivel sencillo de aire. Se marcará en la línea *mn* el punto C que se halle en la vertical del extremo B de la base AB, medida de antemano, y clavando una aguja en dicho punto, se

hará girar á la alidada alrededor de ella para tomar el ángulo DCE, y se trazará la C*r* en la plancheta. Hecho esto, y teniendo cuidado de examinar si el instrumento no ha variado de su posicion primitiva, se tomará la C*d* que represente en la escala elegida el valor de la base AB, se levantará en el punto *d* la perpendicular *de*, y ésta representará en la escala el valor de DE; al cual se añadirá el valor de la altura CB = AD para obtener la AE.

502. Con la cinta ó cadena y los piquete ó jalones, se medirá la altura AH (fig. 245) disponiendo un jalon BD y otro CE en el plano vertical de la altura, y el BD de manera que la distancia BC sea poco más ó menos igual á la diferencia EF de dichos jalones, y que la visual DE dirigida por las cabezas de éstos vaya á parar al punto H. Se medirá la base AB = DG, que se diferenciará tambien poco de HG, y los triángulos semejantes HGD y EFD nos darán la proporcion

$$\mathrm{DF} : \mathrm{EF} :: \mathrm{DG} : \mathrm{HG} = \frac{\mathrm{EF} \times \mathrm{DG}}{\mathrm{DF}};$$

y añadiendo al valor HG el de GA igual á la altura del jalon menor BD, se tendrá la AH. Si FE = FD, resultará GH = AB.

503. Por medio de las sombras puede determinarse una altura vertical, cuyo valor representaremos por x, hallando la longitud S de la sombra que la altura proyecta en un terreno horizontal, así como la s de un jalon h vertical, cuya altura se mide tambien: entonces se deducirá x de la proporcion

$$s : h :: \mathrm{S} : x = \frac{\mathrm{S} \times h}{s}.$$

Esta proporcion se funda en el paralelismo de los rayos de luz que limitan las sombras.

504. La proporcion anterior puede establecerse tambien valiéndose de un espejo plano situado horizontalmente en el terreno y de un jalon vertical, determinando el punto del espejo por el cual pasa la recta tirada desde el extremo del jalon al espejo y en prolongacion de la imágen del extremo superior del objeto. Midiendo la altura del jalon y las distancias del punto determinado en el espejo al pié de la altura y al del jalon, se tendrán los tres términos conocidos de la proporcion.

505. **Medida de una altura cuyo pié es accesible y está situada en terreno pendiente ó muy accidentado.**

—Se hace estacion en un punto A (fig. 246) y se miden los ángulos verticales FCD, DCB, con los cuales y la distancia CD, proyeccion horizontal de AB, que se obtiene directamente ó se deduce de la pendiente de la misma recta (69), se podrán hallar los valores de los catetos FD y DB, cuya suma es la altura pedida.

Cuando la pendiente es subiendo, y los extremos de la altura están ambos por encima de la horizontal del limbo zenital, se aplicará el mismo procedimiento, restando de la mayor la menor de las alturas obtenidas.

506. Haciendo uso de la cadena ó cinta y los jalones, se fijan en el terreno dos de estos últimos AC y EH (fig. 246) de modo que la visual que pase por sus cabezas pase tambien por el extremo superior F de la altura BF, y se miden las distancias horizontales CD y CY de los puntos A y B, A y H; y para señalar en el jalon EH el punto G donde le corta la visual CB, se plantará un piquete HG en contacto con el jalon HE de modo que la visual CB pase por su extremo superior G: con lo cual se podrá medir la parte GE del jalon EH. Tendremos entonces que los triángulos semejantes CEG y CBF nos darán (Geom. Teor. 67.)

$$CY : EG :: CD : BF = \frac{CD \times EG}{CY}.$$

Si la pendiente de AB (fig. 247) es subiendo, se dispondrá un jalon AC y otro HE en el plano vertical de AC y BF, de modo que los puntos C, E y F correspondan á la misma visual; y como GE es la diferencia de altura á que se hallan las cabezas de los jalones, que ya se conoce de antemano ó que se puede medir, se medirán las rectas AB y AH iguales á CD y CG, y se tendrá la proporcion

$$CG : GE :: CD : DF;$$

que dará el valor de DF, y se hallará despues

$$BF = DF + BD = DF + AC.$$

507. **Medicion de las alturas en los casos de ser invisibles ó inaccesibles sus extremos inferiores.**—Cuando la disposicion de la altura ó algun obstáculo que el terreno presenta impiden llegar con la medida al pié de la altura, se elige una base CD (fig. 248) en un terreno horizontal y situada en un plano vertical que contenga á la altura AB, ó lo que es lo mismo, que

pase por su extremo visible A. Se miden despues los ángulos de elevacion AEG y AFG que forman las AE y AF con la horizontal GF, y se conocerá tambien el ángulo AEF suplemento del AEG. Mídase tambien la distancia CD=EF; y como en el triángulo AEF se conoce un lado y los dos ángulos adyacentes, se podrá resolver y se tendrá la magnitud de la recta AE. Ahora, el triángulo rectángulo AGE, en el que se conoce la hipotenusa y un ángulo agudo, se podrá resolver tambien y se tendrá el valor AG, al cual se añadirá GB igual á la altura del instrumento EC ó FD; con lo que resultará la AB que tratábamos de hallar.

Ejemplo.—Sean CD = EF = 8,^{m}47; AEG = 49° 20′ 40″; AFG =39° 17′ 20″; y la altura EC del instrumento 1,^{m}15. Se hallará AE =30,^{m}72 y AB = 24,^{m}46.

Como se puede medir del mismo modo la altura vertical A′B′ de otro punto A′ de la montaña con relacion al mismo plano horizontal que pasa por B, resulta que AB—A′B′=AG′, diferencia de estas alturas, es la medida de la distancia entre los dos planos horizontales correspondientes á los puntos A y A′; que como ya sabemos es lo que se llama la *diferencia de nivel* entre dichos dos puntos.

508. Valiéndose de la cadena y los jalones se resuelve este problema, situando dos de ellos HC, YD (fig. 249) de modo que la visual HY dirigida por sus cabezas pase por el punto A, y otros dos EL y MG, iguales á los primeros, en la misma alineacion y de modo tambien que la visual ML pase por el punto A. Hecho esto, se tomará una parte EF igual á CD y se concebirán trazadas la horizontal MS, la perpendicular FN á la CG y la LN que será paralela é igual á la HY. Midiendo la distancia DG = MY, y hallando el valor de MN, así como la diferencia HR=LP de los jalones, los triángulos semejantes MNL y MAY en los que MN y MY son las bases y LP y AS las alturas, nos darán (Geom. Teor. 67) la proporcion

$$MN : MY :: LP : AS = \frac{MY \times LP}{MN};$$

y añadiendo á AS la altura DY = BS del jalon menor, se tendrá el valor de AB.

509. Cuando no es posible ó no conviene tomar la base en el plano vertical de la altura, se establece en una direccion cualquiera CD (fig. 250), midiéndola, así como los ángulos AFE y AEF,

con lo que podrá resolverse el triángulo AEF y hallar el valor de AE, que con el ángulo de elevacion AEL determina el triángulo rectángulo ALE. Resolviéndole, se hallará el valor de AL, al cual habrá que añadir la altura EC. Este procedimiento supone el empleo de un grafómetro ú otro instrumento que dé los ángulos en el plano de los objetos. En caso de que no sea así, se hará que la base CD sea horizontal, para lo cual bastará determinar D en el plano horizontal de C (493), y midiendo entonces esta base, así como los ángulos azimutales LFE y LEF, se podrá resolver el triángulo LEF y hallar el valor de EL cateto del triángulo rectángulo ALE, que con el ángulo de elevacion, que tambien se mide, determina el triángulo, y se podrá hallar el cateto AL.

510. Con los jalones se resuelve este último problema eligiendo por tanteo una base CD (fig. 250), de modo que plantando dos jalones EC y FD en sus extremos, los dos ángulos AEF y AFE sean cada uno de 60°, lo que se conseguirá fácilmente valiéndose de un triángulo formado con tres reglas de madera de igual longitud, y entonces midiendo la base CD = EF se tendrá el valor de AE. Plántese un nuevo jalon YG en el plano vertical del punto A y del jalon EC de modo que su cabeza G enrase con la visual AE, y concíbase trazada la horizontal EL. Hecho esto, como la GH es igual á la diferencia GY — EC de los jalones, midiendo además la distancia YC = HE, se obtendrá la GE por la ecuacion

$$GE = \sqrt{GH^2 + HE^2}\ ;$$

luego en la proporcion

$$GE : GH :: AE : AL,$$

que se obtiene por los triángulos semejantes GHE y EAL, se conocen los tres primeros términos y se podrá hallar el valor del cuarto AL, al que se añadirá BL, igual á la altura del jalon EC, para obtener el de la altura AB.

Si al mismo tiempo se pudiese hacer uso de un triángulo rectángulo isósceles formado con reglas de madera para tomar el ángulo AEL de 45°, se evitaría la proporcion; porque se tendría

$$\overline{AE}^2 = 2\overline{AL}^2\ ;$$

de donde resultaría

$$AL = \frac{AE}{\sqrt{2}},\ y\ AB = AL + EC.$$

511. En los casos en que la base se halle muy elevada ó muy por debajo del pié de la altura, se hallan las distancias de sus extremos al plano de la base, ó del instrumento, obteniendo entonces el valor de la altura por la suma ó la diferencia de estas distancias, de un modo análogo al que hemos indicado (505) para el caso de ser accesible el pié de la altura.

512. **Aplicacion de la medicion de las alturas á la determinacion de las cotas de puntos inaccesibles.**— Conocidas por cualquiera de los métodos de nivelacion las cotas de los vértices *a*, *b*, *c*.... (fig. 205) de una base poligonal, pueden determinarse fácilmente las que corresponden á los puntos exteriores *o*, *p*... generalmente inaccesibles, con solo medir las pendientes de las visuales dirigidas á los mismos puntos. En efecto, conocida, por ejemplo, la pendiente de la visual que se proyecta segun *ao*, y obteniendo la proyeccion de esta visual en la construccion del plano, no habrá más que hallar su valor en la escala de este último, y determinar el desnivel entre *a* y *o* por la fórmula $d = l \times \text{tang.}\ m$, siendo d el desnivel, ó sea la vertical del punto *o*, sobre el plano horizontal que pasa por *a*; l la proyeccion *ao* de la visual dirigida al punto *o* y m el ángulo que forma esta visual con dicha proyeccion ó su pendiente. Este desnivel se añadirá á la cota de *a*, ó se restará de ella, segun el sentido de la pendiente, para hallar la que al punto *o* corresponde. Será conveniente para mayor exactitud, hacer la correccion de la altura del instrumento. La cota de *o* puede comprobarse calculándola además por la pendiente y la proyeccion de la visual *co*. Del mismo modo puede hallarse la de *p* refiriéndola á los vértices *c* y *f*, así como tambien las de los demás puntos exteriores á la base de las operaciones.

513. **Perfiles y sondeos.—Ideas generales.**—Se llama *perfil* de un terreno (Acot.—124 y siguientes) en la direccion marcada por varios de sus puntos, á la interseccion de su superficie con la que engendraría una recta vertical, que recorriese la línea determinada por los mencionados puntos. La superficie así engendrada sería un plano vertical si los puntos que determinan la directriz de la superficie correspondiesen á una misma alineacion: una superficie quebrada, de elementos planos, cuando los puntos de la directriz son los vértices de una línea poligonal: una superficie cilíndrica si la directriz es una curva continua; y mista de elementos planos y curvos, cuando es mista tambien la directriz.

Los puntos de esta línea se señalan generalmente en el terreno con estacas numeradas.

514. **Operaciones que deben ejecutarse á fin de obtener los datos necesarios para la determinacion de un perfil.**—Para la formacion del perfil se ejecuta una nivelacion cuidadosa, teniendo en cuenta que es necesario acotar (480) todos los puntos estacados, y además todos aquellos que, estando comprendidos entre dos estacas y en la línea que los une, influyen en la configuracion del terreno en sentido vertical. Tambien se miden las distancias llevando el cróquis y el registro de que hemos hecho mencion (481), ejecutando despues los cálculos y reducciones (482), así como las comprobaciones (484) necesarias para obtener las *distancias al orígen* y las *cotas* que figuran en las casillas números 5 y 10 del registro (pág. 216), y son los datos necesarios para construir el perfil.

515. **Construccion del perfil.**—Se traza una línea recta en la que se marca un punto A′ (fig. 240) como proyeccion del de partida en el terreno, y es el orígen desde el cual se toman como *abscisas* y en la escala de horizontales (Acots.—19) las distancias A′B′, A′D′... cuyos valores $117,^{m}55$... $461^{m}40$... se hallan inscritos en la casilla núm. 5 del registro. Se levantan despues perpendiculares en los puntos A′, B′, D′... y se toman en ellas como *ordenadas* y en la escala adoptada para las verticales los valores $85,^{m}000$... 87,691... 84,817... contenidos en la casilla núm. 10: uniendo despues por rectas ó por medio de una curva contínua los extremos A, B, D de estas ordenadas se tendrá la representacion del perfil.

Para el trazado de las perpendiculares puede levantarse una por un procedimiento geométrico (Geom.—Probls. 1 y 2) y tirar paralelas á ella con las plantillas por los puntos de division del eje de abscisas; y como es posible que este paralelismo sufra alguna alteracion, conviene repetir de trecho en trecho la construccion geométrica indicada, á fin de comparar con ella la direccion de las ordenadas inmediatas.

516. **Perfiles considerados en varias direcciones.—Perfil longitudinal y perfiles transversales.**—Las aplicaciones de la nivelacion exigen muchas veces además de la determinacion de un perfil en el sentido de una línea, ya recta, curva ó mista, como la hemos considerado (513), la de otros perfiles dirigidos segun nuevas líneas, cada una de las cuales tiene un

punto comun con la primera. El primero de ellos, que sigue *la base* de las operaciones, se llama *perfil longitudinal*, y los segundos reciben el nombre de *perfiles transversales*. Por lo general estos son normales al perfil longitudinal, y en todo caso las trazas de todos los perfiles se relacionan entre si por los procedimientos explicados en la Planimetría.

517. **Determinacion de los perfiles transversales y su referencia al plano general de comparacion.**—Los perfiles transversales se consideran divididos, á partir del punto de interseccion de su traza con la del perfil longitudinal, en dos partes llamadas *de la derecha* y *de la izquierda*. El *punto del eje*, que con este nombre se conoce en la práctica el de interseccion á que acabamos de referirnos, es el origen de que parten las operaciones para cada una de las dos secciones en que hemos considerado dividido el perfil; y por lo tanto las distancias se considerarán referidas al mismo punto para cada una de ellas, de la manera que hemos dicho (483). Calculando igualmente las cotas (482), á partir tambien de la que corresponde al eje con respecto al plano de comparacion elegido para el perfil longitudinal, resultarán *referidas al mismo plano* las correspondientes á los puntos que determinan el perfil transversal.

518. El registro de los perfiles transversales se dispone con el mismo encasillado que el del longitudinal, con sólo la variacion de que la casilla núm. 1 se destina á la numeracion de los perfiles, señalando en ella cada uno de éstos con el número ó la letra del eje. El resto del registro se repite á uno y otro lado de una columna central, que encierra la cota del eje de cada perfil en el mismo renglon que el número ó letra que le designa. La repeticion que acabamos de indicar tiene por objeto anotar á distinto lado de las cotas del eje la porcion de perfil de la izquierda y la de la derecha en cada uno de ellos. Se construyen tambien como el perfil longitudinal (515), y á partir del eje, origen comun de ambas secciones del perfil transversal.

519. **Problemas que pueden resolverse con los perfiles construidos.**—Construido un perfil y anotadas en él las cotas y las distancias al origen, la distancia horizontal entre dos puntos dados del perfil es la diferencia entre las distancias al origen que les corresponden, y el desnivel la que existe entre las cotas. Con los perfiles puede hallarse además (Acots.—23) la cota de un punto situado entre dos de los que determinan el perfil; la

proyeccion de un punto situado entre otros dos, y cuya cota es dada (Acots.—24); la distancia entre dos puntos dados del perfil (Acots.—22), y la pendiente de la recta que los une (Acots.—25).

520. **Determinacion de las proyecciones horizontales de los puntos del perfil, que tienen cota entera.**—Se resuelve este problema tirando paralelas á la recta que representa el plano de comparacion equidistantes un metro en la escala de las verticales, y proyectando sobre la misma línea los puntos en que encuentra á la del perfil (Acot.—127).

521. **Sondeos.**—La línea de un perfil puede atravesar corrientes de agua, y es necesario muchas veces determinar la seccion de la corriente. El perímetro de esta seccion se determina por lo general en la época de aguas bajas, sin descuidar la apreciacion de los puntos que corresponden á las altas aguas ordinarias y á las de grandes avenidas. Para obtener el perímetro de bajas aguas, se halla el desnivel de los puntos extremos de la porcion de línea del perfil comprendida por la superficie del agua, refiriendo á esta línea la *sonda* ó distancia vertical de cada uno de varios puntos determinados del fondo. Los perímetros de altas aguas ordinarias y extraordinarias, se obtienen marcando los puntos á que en una y otra orilla han llegado las aguas en las épocas mencionadas. Para fijar estos puntos sirven de guia en muchas ocasiones señales más ó ménos duraderas que quedan en las orillas, ó bien las marcas hechas por los propietarios de las inmediaciones en las cercas y paredes de sus heredades. Si no existen estas señales, y en todo caso como medio de comprobacion, se recurre á las noticias que pueden suministrar los habitantes de la ribera.

Las *sondas* pueden observarse con el nivel cuando la corriente es pequeña y el arroyo poco profundo, hallando las alturas de mira correspondientes, que dan los reglones, y restando de cada una de ellas la altura de mira observada en la orilla; pero ordinariamente se observan por un peon inteligente las alturas marcadas en los reglones por la superficie del agua, anotando tambien las distancias de reglon á reglon, para lo que puede hacerse uso de una cuerda dividida por medio de cintas de colores vivos para distinguirlas con facilidad, las cuales se anudan á distancias de 2 á 2, de 3 á 3 metros ó á equidistancias mayores, segun las circunstancias de los perfiles y el grado de exactitud que se desea obtener.

Cuando la profundidad y la corriente son mayores que en el caso que hemos considerado, puede hacerse uso de balsas ó barcas, á las que se hace recorrer la alineacion, colocando una persona desde ellas los reglones en los puntos convenientes y observando otra las alturas; ó bien se emplea la *sonda marina*, que no viene á ser otra cosa que una plomada cuyo cordon está dividido, y que termina en su parte inferior por un peso algo mayor que en las ordinarias.

522. **Operaciones de sondeo en los rios, lagos y puertos.**—Estos sondeos pueden tener por objeto no tan sólo conocer las formas y accidentes que presenta el terreno cubierto constante ó alternativamente por las aguas, sino tambien los cambios que puede experimentar por el efecto de los movimientos de las aguas y los arrastres de arena y piedras que ocasiona el oleaje, ó bien la corriente ordinaria ó las extraordinarias de avenidas.

Cuando se trata del sondeo de un rio, ó de una ria que en las horas de la marea baja presenta un cauce no muy ancho y poco profundo ó se divide en varios ramales, se empieza por trazar en el terreno libre de avenidas una *base de operaciones* cuyos vértices se señalan generalmente con las letras del alfabeto. Las situaciones relativas de estas estacas entre sí se determinan por los procedimientos generales de la Planimetría, orientando el plano de esta base para lograr la posicion absoluta de los puntos que la constituyen; y para obtener las cotas de estos mismos puntos se ejecuta una nivelacion detallada y cuidadosa, que sirve además para la formacion del perfil longitudinal.

En cada vértice se determina la traza de un perfil transversal, constituido por una sola alineacion determinada por la condicion de ser normal á uno de los elementos de la base, ó bisectriz del ángulo formado por los elementos contiguos en el vértice de que se trata; ó bien en una direccion propia para cortar á la corriente en el sentido que parezca convenir más al objeto de la operacion, y que se determina por el rumbo que la corresponde ó por el ángulo que forma con uno de los elementos de la base. Otras veces el perfil transversal sigue tambien una línea quebrada, cuyo plano se levanta como hemos indicado para el longitudinal, con el cual debe relacionarse.

523. Los perfiles transversales se señalan tambien por medio de estacas colocadas en los puntos cuyas cotas han de influir al parecer en la forma del perfil, y se miden y anotan cuidadosa-

mente las distancias que median entre ellas, á fin de volver á encontrar los puntos en caso de que las estacas desaparezcan. Estas se señalan con la letra que tiene la del eje de cada perfil transversal, y con un número de órden, que las determina en él completamente.

Los perfiles transversales se obtienen como hemos indicado (517), aplicando los procedimientos expuestos (521) para la parte cubierta por las aguas. Además de los determinados por las estacas en los perfiles transversales, es necesario acotar los puntos de mayor profundidad en cada uno de ellos, así como otros que no hayan podido ser estacados. Estos últimos no pueden determinarse en general por los métodos explicados, y es necesario en muchos casos enfilar la barca desde tierra, por las señales que hace un observador situado con un instrumento en la alineacion que se sondea.

524. *Lagos, lagunas y pantanos.*—Se determina un punto de sonda *m* (fig. 251), disponiendo jalones *a*, *b*, alineados con él y los puntos fijos respectivos A y B. Para determinar el punto de sonda *n* se colocarán los *a'* y *b'*.

En los registros deben anotarse los números de órden de las sondas, á fin de evitar la indeterminacion de los diferentes puntos de sonda y los errores consiguientes. La sonda *m* se anotará con el número 1, así como los jalones *a* y *b*, los que llevarán además la indicacion del punto á que se han enfilado. Los puntos *n*, *a'*, *b'* se marcarán con el número 2, y así sucesivamente. Los *a*, *a'*... *b*, *b'*... se dejarán marcados con estacas préviamente numeradas y señaladas, de que deben ir provistos los observadores. Este método se aplica solamente á lagunas ó pantanos de corta extension.

525. Tambien pueden determinarse las proyecciones de los puntos de sonda eligiendo una base ABC (fig. 252) rectilínea, ó formando un ángulo obtuso, alineando con A, B y C y con el punto *m* los jalones *a*, *b*, *c*, estacando estos puntos y poniéndoles la marca del número 1 correspondiente á la primera sonda; procediendo del mismo modo para las sondas sucesivas, que se designarán por su número de órden respectivo.

526. *Puertos.—Costas.*—Las operaciones del sondeo se ejecutan desde un bote, que debe estar dispuesto para anclar en los puntos en que conviene observar la profundidad de las aguas, y á veces tambien la naturaleza del fondo; para lo que se puede cubrir de una capa de grasa ó de otra sustancia conveniente el peso en que termina la plomada de sondear, al cual se adhieren entonces las

arenas, el cascajo... si existen en el fondo. Cuando se quiere conocer mejor su naturaleza, se emplea la *barrena* ó *tienta-aguja*, cuyo ástil está compuesto de piezas de hierro, que se atornillan las unas á las otras, con objeto de darle la longitud necesaria para alcanzar al fondo, en el cual se introduce la barrena haciéndola girar por su extremo superior por medio de una palanca: elevándola despues, las materias que se han introducido en la rosca de la barrena dan á conocer la naturaleza de las distintas capas que ha atravesado.

Las proyecciones de los puntos de sonda se pueden determinar desde el bote como hemos dicho (525), ó desde la costa midiendo desde los vértices de una base poligonal los ángulos formados con sus elementos por las visuales tiradas al bote en el momento de izar en él una bandera al arrojar la sonda.

527. **Trazado de las curvas horizontales.—Generalidades.**—Las *curvas horizontales*, llamadas impropiamente por algunos *curvas de nivel*, determinan la forma del terreno por las secciones que resultarian (Acots.—106) de cortarle por un cierto número de planos horizontales, equidistantes en sentido vertical; método debido á Felipe Buache, geógrafo francés. Pasemos á ocuparnos de la aplicacion que se hace de los niveles al trazado directo de estas curvas en el terreno, y á la determinacion de sus proyecciones sobre un solo plano.

528. **Trazado directo de las curvas horizontales.**—Partiendo de un punto dado A (fig. 242) en el terreno que se trata de representar, se traza (494) la curva horizontal proyectada en *abc*.....; y determinando á continuancion otro punto (491) cuyo desnivel con uno cualquiera de los de la curva trazada sea igual á la equidistancia adoptada para los planos secantes, se podrá trazar la curva horizontal que le corresponde, continuando del mismo modo hasta haber trazado todas las curvas que encierra la porcion de terreno considerada. Cuando dentro de este límite las curvas cierran, sirve de comprobacion el volver con el trazado al punto de partida de cada una de ellas; pero si hay una diferencia de algunos centímetros ó más, conviene rectificar la posicion de los últimamente hallados hasta llegar á uno en que coincidan ambos trazados. Tratándose de una ladera continuada en la que las curvas no cierran, pueden determinarse varios perfiles, partiendo de distintos puntos de una curva horizontal determinada cuidadosamente en toda la extension de la ladera. Estos perfiles se trazan á distancias algo grandes, haciendo uso del problema (491) y tomando

por tipo del desnivel la equidistancia de los planos secantes. De esta manera las curvas trazadas despues, encuentran muchos puntos de comprobacion.

529. Los puntos hallados para las distintas curvas, se señalan con estacas marcadas por una letra comun á todas las de una misma curva, y además por el número de órden que en ella les corresponde; con lo que quedan perfectamente determinadas.

530. **Dificultades que puede presentar el trazado de una curva horizontal.**—Cuando al trazar una curva horizontal se encuentra un obstáculo, como una casa, un escarpado de rocas, un corte vertical, ú otro cualquiera que impida la aplicacion del método general que hemos dado á conocer en los párrafos precedentes, se continúa trazando la curva hasta llegar á un punto lo más inmediato que sea posible al obstáculo que se trata de salvar, y desde él se sigue nivelando por un camino cualquiera hasta salvarle: hallando entonces por el procedimiento que hemos dado á conocer (491) un nuevo punto, cuyo desnivel con el determinado por la operacion auxiliar sea igual al de este último con el de la curva, pero en sentido contrario, se tendrá el punto desde el cual puede continuar el trazado.

Cuando el obstáculo ha de interrumpir el trazado de varias de las curvas, pueden irse determinando al mismo tiempo dos puntos de cada una de ellas; uno en la nivelacion auxiliar de subida, y otro en la de bajada.

531. **Observaciones generales acerca del trazado directo de las curvas.**—En la resolucion de este problema pueden emplearse los niveles explicados en este Capítulo, inclusos los instrumentos de Planimetría usados como niveles, así como las miras de las dos clases explicadas tambien. La mira parlante se usa anotando la altura de mira correspondiente á la primera de cada estacion, y buscando en las posiciones sucesivas de la mira durante la estacion del nivel en un mismo punto, las que dan la misma lectura. En la mira de tabla se fija esta á la altura del primer punto en cada estacion, y se conserva invariable hasta tanto que haya necesidad de variar el punto de estacion del nivel.

532. **Levantamiento del plano de las curvas trazadas.**—El levantamiento del plano tiene por objeto determinar las posiciones relativas de las proyecciones correspondientes á los puntos estacados, y se ejecuta con los instrumentos descritos en la

Planimetría, y siguiendo los métodos que en ella hemos dado tambien á conocer. Cuando se levanta el plano de cada curva por el método de rodeo (382), es necesario además levantar el de varias transversales, cada una de las cuales debe pasar por una estaca de cada curva, á fin de relacionarlas entre sí. La direccion de cada una de las transversales en los casos de que cierren las curvas en la extension de terreno que comprenden las operaciones, debe ser la que tiende á un punto de concurso para todas ellas. A veces conviene fijar una ó varias bases, relacionadas entre sí, á las que se refieren por abscisas y ordenadas (334) ó por intersecciones (371) los diferentes puntos estacados.

533. **Trazado y levantamiento simultáneo de las curvas de nivel.**—Empleando la *brújula nivelante* ó de limbo zenital (178), puede levantarse el plano al mismo tiempo que se trazan las curvas. Dispuesto el instrumento de modo que la visual sea horizontal (186), á fin de emplearle como nivel, se le coloca en estacion en un punto *m* (fig. 242), y se sigue el procedimiento explicado (528) para determinar los puntos de nivel *a* y *b*, cuidando de observar los rumbos de las alineaciones *ma*, *mb*, en el momento en que se fijan estos puntos, observando el primero con el extremo blanco de la aguja como observacion inversa (167), y el segundo con el azul como directa; trasladándose despues á *n* para hallar un tercer punto *c* de la curva y observar del mismo modo que antes los rumbos de *nb* y *nc*. Midiendo además las longitudes de las líneas arrumbadas, se podrá levantar su plano por el método de rodeo; procedimiento expedito que puede aplicarse con la brújula al levantamiento de un plano en general, cuando no hay inconveniente en prescindir de la comprobacion que da la doble observacion de los rumbos en los extremos de cada una de las rectas arrumbadas.

534. **Trazado directo de las curvas en un terreno determinado por puntos acotados.** — Sean A, B, C.... (fig. 253) los vértices de un polígono del terreno, y M un punto interior de comprobacion, y supongamos conocidas (480) las cotas de todos estos puntos por las operaciones de nivelacion que se han practicado con este objeto. Partiendo del punto más bajo B, por ejemplo, cuya cota es 16, se determina en cada una de las alineaciones BA, BM, BC, si es posible, el punto que se halla 4 metros más elevado que B (491), obteniendo así tres puntos que corresponderán al plano horizontal de cota 20. Entre C y D se determi-

nará del mismo modo el punto de cota 30, suponiendo que la equidistancia de los planos secantes ha de ser de 10^m, continuando del mismo modo hasta llegar al vértice F que es el más elevado. Desde este punto se determina el que en la alineacion FG está 8^m más bajo que F y se obtendrá un punto de cota 80; bajando 10^m se tendrá en la misma alineacion el de cota 70, y así se continuará hasta llegar al punto A. Fijos así muchos de los que pertenecen á las curvas horizontales, se trazan estas directamente por cualquiera de los distintos métodos que hemos dado á conocer, y se procede despues al levantamiento del plano de las curvas como tambien hemos dicho.

535. **Construccion de las curvas en los planos acotados.**—Levantado y construido un plano, pueden trazarse en él las curvas de nivel que completan la representacion del terreno comprendido, siempre que se hayan determinado por las operaciones de la nivelacion las cotas que corresponden á los distintos vértices del polígono, así como las de los demás puntos notables que figuran en el plano. Sea ABCD.... (fig. 253) el de un polígono en el que se ha determinado el punto interior M, que ha servido para la comprobacion de las operaciones de la Planimetría, y supongamos conocidas las cotas de todos estos puntos. El problema está reducido (Acot.—129) á determinar las *escalas de pendiente* (Acot.—30) de las rectas que constituyen el plano, y unir por medio de curvas contínuas las proyecciones de los puntos de cota 20.... 30.... 40.... múltiplas de la equidistancia 10^m adoptada. Para hacer aplicacion á la recta BC por ejemplo, se tomarán sobre la BR, arbitraria de direccion y de longitud indefinida, las partes iguales á una magnitud tambien arbitraria y en número igual á la diferencia de las cotas de B y de C; uniendo el último punto de division con el vértice C por medio de una recta, y tirando á esta una paralela desde el punto 20 de BR, se determinará en el lado BC el punto de cota 20 correspondiente á una de las curvas. Una construccion análoga se empleará en la determinacion de los demás que han de resultar con cotas múltiplas de la equidistancia de los planos secantes.

536. **Representacion de las curvas en el plano de una poblacion.**—Las curvas horizontales en los planos de las poblaciones sólo tienen por objeto dar á conocer la forma y los accidentes del suelo sobre que está edificada, prescindiendo de las alteraciones, que en virtud de las construcciones ejecutadas ha tenido que experimentar necesariamente. Se trazan del mismo modo

que en los demás casos (534 y 535), sirviéndose de los vértices acotados en el plano.

Sería muy conveniente dejar señalados en las aceras de la poblacion, ó referidos á puntos fijos los vértices del plano, así como los puntos obtenidos para las curvas; sobre todo cuando las construcciones deban someterse á una alineacion y á una rasante determinadas; y tambien para facilitar los estudios de distribucion de aguas en la poblacion, ú otros en que tenga influencia la forma del terreno y las variaciones que ha introducido en ella la construccion de los edificios.

537. **Determinacion de las curvas por medio de los perfiles construidos segun las rectas de un plano.—Perfiles auxiliares.**—Las curvas horizontales pueden trazarse en un plano, deduciéndolas de los perfiles construidos (520) siguiendo las distintas rectas que constituyen su levantamiento. Las proyecciones así obtenidas se trasladan á la línea correspondiente del canevás, reduciéndolas préviamente á la escala del plano si es distinta de la que corresponde á las horizontales del perfil, y uniendo despues por curvas contínuas los puntos de igual cota.

Los perfiles no siempre siguen las líneas del plano: algunas veces se trazan y se obtienen perfiles auxiliares por perpendiculares á una de dichas líneas; otras se determinan siguiendo una base de operaciones (Acot.—129), que no es otra cosa que una transversal del plano, cuya proyeccion se relaciona con él, y levantando perfiles transversales (516) en los vértices de esta base, cuyos planos se refieren tambien al del polígono.

538. **Deduccion de perfiles segun direcciones dadas en el plano.**—Determinada la representacion de un terreno por medio de las curvas horizontales, puede deducirse de ella el perfil de la superficie representada, dada la traza ó directriz del perfil. Cuando esta directriz es una recta trazada en el plano (Acot.—125), está reducido el problema á determinar (Acot.—123) la interseccion de la superficie con el plano vertical cuya traza es la recta dada, levantando perpendiculares á esta traza desde las proyecciones acotadas, hasta que encuentren á las trazas de los planos horizontales de igual cota. La línea que une los puntos de interseccion así obtenidos, es el perfil que se pretende hallar.

Tambien puede construirse el perfil (Acot.—126) cuando la directriz es una línea curva ó mixta.

Este problema, recíproco del que hemos dado á conocer (537), sirve para dar una idea completa del relieve del terreno en todas direcciones, y tiene una aplicacion muy importante en las variaciones que sin recurrir á nuevas operaciones en el campo puede hacerse experimentar á un proyecto de canal, de un camino, ó de otra obra análoga cualquiera; deduciendo del plano mismo todos los datos que sin su auxilio hubiera sido necesario tomar de nuevo en el terreno.

539. **Relieve del terreno.—Curvas horizontales que detallan las formas del terreno y completan su representacion geométrica.**—Una vez fijas de posicion las proyecciones acotadas de todos los puntos considerados en las operaciones anteriores, falta dar á conocer *el relieve* del terreno, reproduciendo el plano de las curvas horizontales (532), y fijando su posicion con respecto á las que se hayan trazado directamente en el terreno, fijando por medio de su orientacion la posicion que les corresponde en el plano acotado, y construyendo las demás por medio de las escalas de pendiente de las rectas que constituyen el canevás de la Planimetría (535), las que tambien pueden deducirse de perfiles construidos segun las mismas líneas (537).

540. **Eleccion de la equidistancia de las curvas.**—La equidistancia de las curvas debe hallarse en relacion con la escala del plano, siendo inversamente proporcional á ella: en efecto, si el plano se ha trazado en escala grande, y lo fuese tambien la equidistancia, la mucha separacion de las curvas haria desaparecer muchos detalles, desfigurando la verdadera forma del terreno, y no dando una idea muy aproximada de sus pendientes; si por el contrario la escala fuese muy pequeña, seria necesario una equidistancia bastante grande para que la union de las curvas no hiciese confuso el dibujo. Estas circunstancias deben guiar en lo general para la adopcion de la equidistancia: en la mayor parte de los casos pueden emplearse, segun Goulard-Henrionnet, las indicadas en la tabla siguiente:

Para la escala de	1 por 5000....................	$2,^{m}5$
	1 por 10000....................	5
	1 por 20000....................	10
	1 por 40000....................	15
	1 por 80000....................	20.

541. **Problemas que pueden resolverse en el plano de un terreno determinado por curvas horizonta-**

les.—Obtenida la representacion de un terreno por las curvas horizontales, pueden resolverse en el plano muchos problemas interesantes por sus numerosas é importantes aplicaciones. Entre ellos puede determinarse la cota de un punto cualquiera cuya proyeccion sea dada en el plano (Acot.—113); porque estará comprendido en general entre dos curvas acotadas. En el caso particular de hallarse en una de ellas, es evidente que tendrá la cota que á la curva corresponda. Recíprocamente, puede determinarse (Acot. 114) la proyeccion de un punto cuando se conoce su cota, y la proyeccion dada ha de hallarse en una recta que tiene dos puntos comunes con las curvas de la superficie representada. Pueden trazarse tambien (Acot.—115) curvas horizontales intermedias relativamente á las que determinan la superficie, completando así en algunos casos su representacion. Se puede determinar (Acot.—116) la longitud é inclinacion de la recta que une dos puntos cuyas proyecciones son dadas en el plano.

542. **Consideraciones generales acerca de la representacion del terreno.**—Trazadas las curvas, y situados en el plano todos los objetos que cubren el terreno con las indicaciones de los nombres con que se conocen en el país las distintas localidades y los diferentes objetos, ha terminado la ejecucion del plano geométrico encomendado al trabajo del topógrafo. En este plano se encuentran los edificios aislados, los rios, los arroyos, los talwegs, las divisorias, los caminos y los lindes y cerramiento de las heredades y la expresion gráfica de las distintas formas que el terreno afecta: en él se hallan marcadas por curvas que representan una parte entrante redondeada, las vertientes separadas por arroyos de un curso uniforme; y por una série de puntos de retroceso cuando lo están por los torrentes y los arroyos de pendientes fuertes, que cruzan los terrenos muy accidentados. Las divisorias aparecen determinadas por una mayor separacion de las curvas en la parte más saliente de la estribacion á que pertenecen; siendo pequeña en esta parte la curvatura cuando la forma del terreno es redondeada, y aumentando cuando corresponden las curvas á una estribacion muy pronunciada. Tambien se encuentran en el plano las indicaciones de los bosques y de las masas de rocas que cubren una porcion del terreno, así como las de los crestones de roca que en algunas localidades se descubren.

La representacion así obtenida se presta á la resolucion de muchos problemas en las aplicaciones de la Topografía, y es muy suficiente cuando se trata de presentar la solucion de un problema, como tiene lugar por ejemplo en los planos particulares del proyecto de un camino ó de un canal, á fin de justificar la eleccion del trazado hecho en una extension determinada del terreno que cruza la línea; pero cuando se trata de presentar á un golpe de vista, y prescindiendo de los detalles, la forma general del terreno considerado, como en el plano general de un proyecto, se emplean otros medios de representacion, que dan á conocer de una manera más gráfica y dan al plano un aspecto mas agradable, y que son del dominio exclusivo del dibujante. En esta parte artística del dibujo topográfico, se emplean los colores que imitan los que los accidentes representados tienen en la naturaleza, y los convencionales adoptados para las obras de arte: tambien se emplea el dibujo á pluma en el que las formas del terreno se representan por líneas movidas rectas ó curvas, normales á dos curvas horizontales consecutivas.

El grueso de estas normales se ha arreglado por algunos autores á un diapason, en el que resulta proporcional á la pendiente del terreno comprendido entre las curvas horizontales consecutivas; pero este método puramente geométrico, no presenta ventaja alguna sobre la representacion por curvas horizontales, ni expresa con tanta verdad el relieve del terreno con los efectos de luz y sombra, como el adoptado en España por distinguidos dibujantes. Consiste este método en aumentar la separacion y disminuir el grueso de las normales en las partes más iluminadas, suponiendo la luz de arriba abajo, por la izquierda, y con una inclinacion tal, que las proyecciones de un rayo de luz formen con la línea de tierra ángulos de 45°. Los gruesos y la union de las normales aumentan de una manera gradual en razon de la pendiente y de la mayor sombra. La acertada combinacion de la separacion y de los gruesos, la indicacion de las sombras propias y de las arrojadas por las montañas más elevadas sobre las que las rodean, teniendo en cuenta sus posiciones relativas, los toques oportunamente dispuestos para representar las quebradas y escalonados de los terrenos, la propiedad en la indicacion de las rocas descubiertas, las aguas corrientes, los bosques y demás accidentes naturales, sirven á los dibujantes para sacar mucho partido en la representacion del terreno, tal como se presenta en la naturaleza.

CAPITULO VII.

Copia y reduccion de planos y perfiles.

543. **Generalidades.**—En la reproduccion de un plano ó de un perfil en la misma escala, se da el nombre de *copia* al dibujo obtenido, conservando el primitivo el de *original*. Cuando la escala del plano ó perfil que se trata de construir ha de resultar en menor escala que el original, se dice que éste se *reduce*, y que se *amplifica* cuando ha de estar en escala mayor.

Los dos últimos casos en que se reproduce el dibujo en menor ó mayor escala, se comprenden igualmente bajo el nombre de *reduccion*, y se llamará siempre *copia* para abreviar, al nuevo dibujo que se obtenga del original, bien se conserve la escala de éste, ó se aumente ó disminuya.

El primer caso está reducido á la construccion de figuras iguales, y los otros dos á la de figuras semejantes. En la de éstas se puede asignar la relacion que han de guardar los lados entre sí, ó la que han de tener las superficies; y una vez conocida una de estas relaciones, es fácil deducir de ella la otra. Nos ocuparemos por lo tanto de los problemas á que da lugar la construccion de las figuras semejantes, tratando al mismo tiempo de la igualdad, que es un caso particular de la semejanza.

544. **Relacion entre los lados homólogos del plano y de la copia, y sus escalas.**—Llamando l y L á dos lados

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA TOPOGRAFICA - BIBLIOTECA -

homólogos cualesquiera *ab*, AB (fig. 167) de dos figuras semejantes, que representan respectivamente la copia y el original, y observando que siempre son proporcionales á las escalas correspondientes, se tendrá, siendo $\frac{1}{M}$ la escala de la copia y $\frac{1}{N}$ la del original,

$$\frac{l}{L} = \frac{\frac{1}{M}}{\frac{1}{N}} = \frac{N}{M} \qquad [56];$$

lo que nos dice que *las longitudes de dos lados homologos de la copia y del original están en razon directa de las escalas, é inversa de los denominadores de las mismas escalas*.

Si, por ejemplo, se quiere saber la relacion de las líneas de la copia y del original, siendo $\frac{1}{5000}$ la escala de éste, y $\frac{1}{30000}$ la de aquella, se tendrá

$$\frac{l}{L} = \frac{N}{M} = \frac{5000}{30000} = \frac{1}{6}$$

es decir, que las líneas de la copia serán la sexta parte de las del original.

545. Otras veces se conoce la escala $\frac{1}{N}$ del p.ano y la relacion $\frac{m}{n}$ entre los lados l y L, y se trata de halla la escala $\frac{1}{M}$ de la copia: se tendrá entónces, poniendo $\frac{m}{n}$ en vez de $\frac{l}{L}$ en la ecuacion [56] y despejando $\frac{1}{M}$, la fórmula

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} \times \frac{m}{n} = \frac{m}{nN} = \frac{1}{nN} \times m \qquad [57].$$

Teniendo, por ejemplo, que reducir un plano construido en la escala de 1 por 500, de manera que la relacion de los lados homólogos ó de las escalas respectivas sea de $\frac{1}{4}$, se hará $N = 500$; $m = 1$; $n = 4$; y sustituyendo en la fórmula [57] se deducirá que la copia ha de construirse en la escala de 1 por 2000.

Si la escala del original fuese de 1 por 1000 y la relacion $\frac{3}{5}$, se hallaría

$$\frac{1}{M}=\frac{1}{1000}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5000}=\frac{1}{5000}\times 3,$$

y será necesario construir la escala de 1 por 5000 (78) y triplicar su valor; y como en esta escala la magnitud real de 2^{cm} representa 100 metros del terreno, no habrá más que tomar 6^{cm} para representar los mismos 100^{m} en la escala que se ha de construir para la copia.

546. **Relacion entre las áreas y los lados homólogos ó las escalas de la copia y del original.**—Teniendo presentes las relaciones establecidas (544) y la que existe (Geometría. Teor. 100) entre las áreas s y S de la copia y del original y sus lados homólogos, se tendrá la expresion

$$\frac{s}{S}=\frac{l^2}{L^2}=\frac{N^2}{M^2} \qquad [58];$$

la cual manifiesta que *las áreas se hallan tambien en razon inversa de los cuadrados de los denominadores de las escalas.*

547. **Problema 1.º—Dada una figura cualquiera, reproducirla en diferente escala, de modo que sus líneas homólogas guarden una relacion dada.**—Conocida la escala en que ha de hacerse la copia (545), pueden emplearse los valores numéricos de los distintos elementos del plano, tomándolos en ella, con lo que se tendrá un nuevo plano del mismo terreno; pero no siempre se conocen numéricamente todos ó la mayor parte de estos elementos, y es necesario resolver gráficamente el problema. Entónces se prefiere valerse de las líneas cuyos valores pueden conocerse por la escala, ó tomarse gráficamente en la relacion pedida. Así, por ejemplo, empleando el método de copia por *abscisas* y *ordenadas* (335), y suponiendo que ABCDEFG (fig. 167) sea el dibujo original cuya escala sea conocida, despues de trazar el eje AE y las ordenadas BH, GY.... se medirá la abscisa AH en la escala de esta figura, y se tomará su valor en la que se haya adoptado para hacer la copia *abcdefg* que suponemos sea menor en este caso, el cual nos dará *ah*, despues el de la ordenada BH del mismo modo para tener *bh*, y así sucesivamente. Este método puede aplicarse á un plano levantado por otro método cual-

quiera, trazando préviamente un eje y las perpendiculares á él desde los puntos notables del plano.

Puede tambien hacerse la reduccion descomponiendo el polígono en triángulos, y construyendo otro semejante á él, tomando los valores de sus lados en la escala de la copia.

548. **Ángulo de reduccion.**—La reduccion de una figura construida en la escala de $\frac{1}{N}$ á otra en la de $\frac{1}{M}$, puede hacerse gráficamente formando un ángulo cualquiera BAC (fig. 254) y describiendo un arco de círculo BC con un rádio AB igual á la dimension mayor del original y otro *rs* que corte al primero, haciendo centro en B con un rádio $BC = AB \times \frac{N}{M}$, ó bien á la línea arbitraria que se quiera que represente á AB: y toda distancia AD del original tomada sobre las AB y AC suministrará la homóloga DE de la copia; pues se tiene

$$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB} = \frac{N}{M}.$$

Tambien puede resolverse por triángulos rectángulos semejantes, levantando en el extremo de AB una perpendicular y tomando en ella la magnitud de BC.

549. **Cuadrícula.**—Para la reduccion ó amplificacion de los planos en la copia, se usa tambien, sobre todo cuando los contornos son curvilíneos ó mistilíneos, el método llamado *por cuadrícula*, que consiste en trazar con lápiz en el original un cuadrado ABCD (fig. 224) que le comprenda enteramente, trazando despues el suficiente número de paralelas á los lados de esta figura, y á las que distinguiremos llamándolas horizontales y verticales, para que se forme una red de cuadrados pequeños é iguales, de $0,^{m}05$ por ejemplo de lado, numerándolas para mayor comodidad en su uso, como se ve en la figura. Se construye despues en el papel donde ha de hacerse la copia otra cuadrícula A'B'C'D' cuyos lados guarden con los de la construida sobre el original la relacion en que se han de hallar los dibujos, es decir, que el lado de los cuadrados de la copia se obtendrá por medio de la expresion $l = L \times \frac{N}{M}$.

Se toman ahora á partir del punto de interseccion *o* de las líneas señaladas con el número 1 la abscisa *oa* y la ordenada *ob*, y despues de reducidas valiéndose del ángulo de reduccion, ó de tomadas en la escala de la copia, se tendrán las $o'a'$ y $o'b'$, y fijos por lo tanto los puntos homólogos a' y b' de la copia. El punto c se determina por la ordenada ch tomada en la vertical 2 á partir del punto de interseccion h con la horizontal 1, y se obtendrá el c' en la copia por medio de la reducida $h'c'$. Un punto r situado en el interior de un cuadrado, se situará en la copia por medio de la abscisa $on = mr$ y la ordenada $om = nr$, y de este modo se irán fijando todos los puntos del contorno del original. Tambien pueden fijarse por intersecciones de arcos de círculo como el punto s, haciendo centro en los puntos p y 3, y trazando dos arcos, para hacer la misma operacion en la copia valiéndose de los rádios reducidos, que nos darán el punto homólogo s'. Por último, se hallarán por los mismos procedimientos los puntos homólogos de los interiores del plano, como el z' del z que pertenece al contorno del rio, y la casa E' que ha de representar la E del original.

Cuando uno de los cuadrados elementales del original contenga muchos detalles, se le dividirá, así como su homólogo de la copia, en otros nuevos cuadrados como sucede con el P, ó en triángulos por medio de sus diagonales como el R; y de este modo se podrá facilitar el trabajo.

Cuando el contorno es curvilíneo, fijos los puntos principales de las curvas, se trazarán ó copiarán éstas á mano, imitando las del original, y hasta que no se hayan dibujado todos los detalles que comprenda un cuadrado no se pasará al siguiente.

550. Cuando no se quiere estropear el original trazando en él tantas líneas como exige la cuadrícula, se tiene un marco de madera, carton ú hoja de lata, el cual está dividido en pequeños cuadrados por medio de hebras de seda finas y tirantes. Se coloca sobre el original y sólo se trazan de lápiz las dos rectas AB y BD que han de servir de guia para la continuacion del trabajo.

551. Cuando las figuras han de copiarse en mayor escala, lo que no sucede con frecuencia, debe tenerse presente que en la copia se aumentan los errores del original; mientras que en la reduccion á menor escala se hacen ménos perceptibles.

Los mismos métodos de la cuadrícula se extienden á la copia en igual tamaño ó en la misma escala que el original; si bien la operacion es más sencilla, por cuanto siendo todas las dimensiones iguales, no hay que hacer uso más que del compás.

552. **Procedimientos especiales que se siguen en las copias de los planos en la misma escala.—1.° Pi-**

cado.—Para copiar un plano picando los puntos, se coloca el original sobre la hoja de papel blanco donde se ha de copiar, disponiendo á ambos sobre un tablero bien plano, y asegurándolos con cola de boca: y con una aguja muy fina que va sujeta á los mangos de los tiralíneas, los cuales se destornillan de las lengüetas, se van picando verticalmente los puntos mas notables del original, como los extremos de las líneas rectas, y los que mas influyen en la forma de las curvas del plano, así como todos aquellos que puedan facilitar el trazado del contorno y de los detalles interiores. Se levanta despues el original, y consultándole se van uniendo los puntos picados que determinan líneas rectas con la regla y el lápiz, las cuales se pueden rectificar con el compás, y á mano los que determinen las curvas, imitándolas todo lo posible, y procediendo despues á concluir el dibujo con tinta de china.

Este método tiene el inconveniente de que siempre se estropea el original; por lo que sólo debe usarse en determinadas circunstancias, como cuando se trata de pasar de un borrador al plano en limpio, ó si el original está muy deteriorado y su conservacion no es importante. De todos modos no debe usarse en planos que encierren muchos detalles. En este caso y en el de ser interesante el original y tener que conservarle íntegro, se hará uso del procedimiento siguiente.

553. **2.° Calcado.**—*Por el cristal.*—Consiste en disponer el original sobre un cristal y encima el papel blanco donde se ha de hacer la copia, pegándolos con cola de boca. Hecho esto, se coloca el cristal inclinado de modo que dé paso á la luz para que el original se vea á través del papel blanco, y no habrá más que ir pasando con lápiz el dibujo de las curvas: en cuanto á las rectas bastará marcar sus extremos para trazarlas despues con la regla, ó se pueden calcar tambien á pulso; pero despues hay que rectificarlas con la regla, si no se puede hacer uso de esta sobre el mismo cristal. Para la perfeccion del trabajo existen aparatos dispuestos á propósito, que consisten en un cristal de gran tamaño colocado en un marco de madera, el cual puede girar alrededor de un eje horizontal sostenido por uno ó dos piés, y dispuesto todo de manera que el cristal se coloque á la altura y con la inclinacion que se desea, pudiéndole fijar de un modo invariable en la posicion adoptada. Al presentar el aparato á la luz, se cuidará de que ésta penetre solamente por debajo del cristal, lo que se conseguirá cubriendo con

una tela negra la parte superior de la ventana ó balcon delante de los cuales se presente el aparato; y se aumenta la transparencia colocando tambien debajo del cristal una lámina de hoja de lata ó de metal blanco bien bruñida, de modo que la batan los rayos de luz, que por reflexion irán á iluminar el cristal.

554. *Por el papel vegetal.*—Esta clase de papel tiene tal transparencia, que colocado sobre el original se perciben con la mayor claridad hasta sus más ligeros detalles.

Se va pasando todo el dibujo ó las partes principales que se elijan como suficientes, con un lápiz, y mejor aun es hacer el calco con tinta de china, haciendo uso del tiralíneas y de las plumas topográficas. Concluido el calco, se levanta el papel vegetal y se impregna por el revés de lápiz hecho polvo fino, extendiéndolo bien con una muñeca de lienzo. Se coloca despues el papel vegetal sobre la hoja de papel blanco donde se ha de hacer la copia, de modo que la parte ennegrecida se halle en contacto con él, quedando el dibujo del calco en la parte superior; y despues de asegurados ambos papeles se va pasando por las líneas del calco un lápiz duro ó un puntero de acero llamado *calcador*.

Para economizar tiempo se hace uso de un papel preparado, que se llama *papel manchado* ó *polígrafo*, y que tiene una de sus caras ó las dos impregnadas de negro, azul ú otro color. Este papel se coloca entre el papel vegetal y el blanco de la copia.

Puede prepararse el papel transparente tomando una hoja de papel comun y extendiendo sobre ella con un pincel un aceite volátil, como el de espliego ú otro, el cual al poco tiempo se volatiliza, y el papel queda transparente y con su color natural. Tambien se puede preparar un frasquito de *vencina* que se extiende con un pincel.

555. *Por el papel-tela.*—Con preferencia al papel vegetal se hace uso en la actualidad del *papel-tela*, llamando así á una tela fina engomada, de mucha transparencia, sobre la cual se dibuja directamente y queda permanente la copia.

556. **Problema 2.º—Dada una figura cualquiera, reproducirla en diferente escala, de modo que las superficies guarden una relacion dada.**—Para conseguir este objeto, se tendrá presente que las raices cuadradas de las superficies están en razon directa de los lados homólogos, é inversa de los denominadores de las escalas, pues en la série [58] de las razones iguales escrita anteriormente se tiene

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{l}{L} = \frac{N}{M} \qquad [59].$$

Una vez conocida la relacion de los lados, estamos en el caso anterior; si bien es conveniente para la mayor exactitud en la formacion de la nueva escala, que las raices de las superficies sean exactas. En efecto, si se toma siempre por unidad la superficie del original y se quiere construir un polígono cuádruplo de otro, tendremos

$$S = 1 \text{ y } s = 4;$$

de donde

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} = 2;$$

luego los lados de la copia han de ser dobles de los del original.

Si es $S = 1$ y $s = \frac{1}{4}$, se hallará del mismo modo que las líneas de la copia han de ser la mitad de las del original.

557. Cuando las áreas han de ser proporcionales á números dados ó á rectas cuyas magnitudes son conocidas gráficamente, puede hacerse uso del siguiente procedimiento:

Sea ABC... (fig. 167) un polígono dado, y tratemos de construir un polígono semejante *abc*... cuya superficie esté con la del primero en la misma relacion que la recta m con la recta n.

Tómese una parte $AC = n$ (fig. 255) y otra $BC = m$; colóquense una á continuacion de otra, y sobre la AB como diámetro se describirá una semicircunferencia. En el punto C se levantará la perpendicular CD y se tirarán las cuerdas AD y BD, prolongándolas lo que sea necesario. Tómese una parte DF igual al lado AB del polígono dado, y tirando la paralela FE á la AB se tendrá la DE, la cual será en la copia el lado homólogo del AB del original, de manera que construyendo sobre $ab = DE$ (fig. 167) un polígono *abc*... semejante al ABC... (Geom. Probl. 30), se tendrá resuelto el problema.

En efecto, llamando P al polígono ABC... y X al *abc*... que se trata de construir, tendremos

$$X : P :: \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{DE}^2 : \overline{FD}^2 \qquad [60];$$

pero los triángulos semejantes DEF y DAB dan la proporcion

$$DE : DF :: DB : DA,$$

y por lo tanto (Arit. 170.—Cor.)

$$\overline{DE}^2 : \overline{DF}^2 :: \overline{DB}^2 : \overline{DA}^2 \qquad [61].$$

Las proporciones [60] y [61] tienen una razon comun: luego resultará

$$X : P :: \overline{DB}^2 : \overline{DA}^2 \qquad [62];$$

y como se tiene (Geom.—Teor. 70.—2.°)

$$\overline{DB}^2 : \overline{DA}^2 :: BC : AC :: m : n,$$

resultará por último

$$X : P :: m : n;$$

que es lo que se quería demostrar.

Si en la construccion sucediese que la cuerda AD fuese igual al lado AB del polígono, la cuerda BD lo sería á ab.

Si el polígono dado fuese un cuadrado, se operaría de la misma manera para obtener el valor del lado sobre el que se ha de construir el nuevo cuadrado.

558. Cuando no se quiere seguir el procedimiento indicado para la construccion del polígono semejante, y conviene evitar la formacion de ángulos que en ella se requiere, se podrá hacer uso del método por intersecciones, tomando en la cuerda AD otra parte Da = BC y la Dc igual á la diagonal AC (figs. 167 y 255), y tirando las paralelas ab y cd se tendrán las Db y Dd homólogas de las BC y AC.

559. Comparando dos lados homólogos de la copia y el original, puede construirse fácilmente la escala de la primera. Tomando por ejemplo DF = 100^{m} en la del original, DE representará la misma magnitud en la que se trata de construir. En algunos casos particulares, que á continuacion damos á conocer, se puede hallar más sencillamente el valor del lado homólogo, fundándose en la relacion numérica que se conoce ó que se deduce (Geom.—Problemas 22 y 23) de los valores gráficos DF y DE.

560. *Casos particulares.*—1.° Si la superficie de la copia ha de ser doble de la del original, se tendrá $\frac{m}{n} = 2$; de donde se deduce $l^2 = 2L^2$, y $l = L\sqrt{2}$; es decir, que el nuevo lado l es la

diagonal de un cuadrado cuyo lado es L, ó lo que es lo mismo, l es el lado del cuadrado inscrito en un círculo cuyo rádio es L. Si el polígono dado es un cuadrado, l es su diagonal.

2.° Cuando la superficie de la copia haya de ser la mitad de la del original, se tendrá $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, y $l^2 = \frac{1}{2} L^2$; de donde $l = \frac{1}{2} L \sqrt{2}$; es decir, que el nuevo lado es la mitad de la diagonal de un cuadrado cuyo lado es L. Si el polígono dado es un cuadrado, l es la mitad de su diagonal.

3.° Si la superficie del nuevo polígono ha de ser el triplo de la del propuesto, se tendria despues de hechas las operaciones $l = L \sqrt{3}$; es decir, que l es el lado del triángulo equilátero inscrito en un círculo cuyo rádio es L.

4.° Si ha de ser el cuádruplo de la del propuesto, se tendrá $l = 2L$; es decir, que el lado del nuevo polígono ha de tener doble longitud que el del propuesto; lo que debe ser así (Geom. Teor. 100).

561. **Instrumentos de reduccion**.—*Compás*.—El *compás de reduccion* se compone de dos brazos de metal AE, BD (fig. 256) terminados por ambos extremos en puntas de acero. Una ranura longitudinal que ambos presentan, permite á una pieza c correr á lo largo de ella, y fijarse en un punto dado con auxilio de un tornillo de presion. A los lados de esta ranura están grabadas unas divisiones acompañadas de números que representan las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.... escritas á su lado, las cuales indican la relacion en que está la parte cB de uno de los brazos con la otra cD, y que es la misma que existe entre las aberturas AB y DE de las puntas de acero. Así, cuando la línea de fé que acompaña á la pieza c coincide con la division $\frac{1}{2}$, AB es mitad de DE, y puede reducirse un plano en esta relacion tomando las distancias del original con las puntas D y E, con lo que se obtendrán sus homólogas correspondientes en las A y B; ó bien amplificarse tomando con estas últimas las distancias del original.

562. **Pantógrafo**.—Se funda la teoría de este instrumento de reduccion, en que si se suponen dos reglas A'C', CK (fig. 257) unidas por medio de articulaciones á otra PC en los puntos A' y C, constituyendo un sistema que puede girar alrededor del punto P, conservándose siempre paralelas las dos primeras reglas, cuyas

longitudes son proporcionales á las distancias de P á las articulaciones respectivas, sus extremos K y C′ estarán siempre en línea recta con el punto fijo P; principio que está fundado á su vez en la teoría de las líneas proporcionales. Además, al pasar el sistema de una posicion á otra recorriendo el punto C un arco Cc, los extremos K y C′ de las reglas paralelas estarán tambien en línea recta en sus nuevas posiciones k' y c' en virtud del principio indicado, y se tendrá la proporcion

$$Pc : Pa' :: Pk : Pc' ;$$

y como por hipótesis se tiene

$$PC : PA' :: PK : PC' ,$$

y las primeras razones son evidentemente una misma, se tendrá

$$PK : PC' :: Pk : Pc' \qquad [63] ;$$

y por consiguiente la recta $C'c'$ es paralela á Kk y está con ella en la relacion constante de PA′ á PC. En virtud de todo lo expuesto, si suponemos un lápiz situado en el punto C′ y un punzon en K, cuando éste recorra una recta Kk, el lápiz trazará la $C'c'$ paralela á ella y en la relacion de PA′ á PC; por lo tanto, cuando el punzon recorra los diferentes lados de un polígono cualquiera, el lápiz trazará otro semejante á él por tener sus lados paralelos y en la misma relacion, que puede ser dada de antemano disponiendo convenientemente las articulaciones A′ y C. Las curvas recorridas al mismo tiempo por K y C′ resultan tambien semejantes, porque pueden considerarse como límites de polígonos rectilíneos.

563. **Descripcion del pantógrafo de Gavard.** — Las condiciones á que debe satisfacer el sistema de reglas á que acabamos de referirnos para aplicarse á la copia y reduccion de planos, se obtienen cumplidamente en el pantógrafo de Gavard, que se compone de dos reglas de metal AC y BD (fig. 258) unidas á otra CK por medio de juegos de charnela c, c', los cuales son ejes cilíndricos verticales de acero, que en su parte inferior llevan un taladro horizontal donde se introduce una palanca en que termina la pieza del destornillador, para armar y desarmar el instrumento y apretar más ó ménos las reglas; terminando por su parte superior en una rosca, á la que se atornilla una tuerca en forma de cabeza de tornillo: una cuarta regla A′B′ igual en longitud á la parte CD de la CK, va unida por sus extremos y tambien por medio de juegos

de charnela c'' y c''' como los anteriores, á dos cajas de metal A′ y B′, las cuales pueden correr á lo largo de las reglas AC y BD cuando se aflojan los tornillos t y t', ó formar cuerpo con dichas reglas apretándolos; logrando de este modo colocar la regla A′B′ paralelamente á la CD y á la distancia que convenga, constituyendo el paralelógramo A′B′DC de ángulos variables. A lo largo de la parte PA corre otra caja P, con su correspondiente tornillo t'' por la parte exterior del instrumento para fijarla á la regla, y con un taladro cilíndrico por la interior donde se introduce un eje de acero, el cual tiene en su extremo inferior una rosca que se atornilla en la tuerca correspondiente dispuesta en una masa de hierro H, la que tiene por objeto hacer que permanezca fijo dicho eje, alrededor del cual se ha de verificar el movimiento de rotacion de todo el instrumento.

Otra caja C′ corre á lo largo de la regla A′B′, y puede fijarse á ella por el tornillo de presion t''', llevando consigo un lapicero z, y una tercera caja K está igualmente dispuesta con relacion á la regla CD, y se halla provista de un *calcador* de acero a. El extremo afilado del lapicero z de la caja C′, puede estar en contacto con un papel fijo al tablero sobre el cual se dispone el instrumento, para cuyo fin se le carga de un peso conveniente con auxilio de unas piezas de plomo que pueden colocarse fácilmente en la parte superior del lapicero; ó bien puede impedirse el contacto, elevando el lapicero por medio de un cordon, que atraviesa las poleas verticales p, p' y la horizontal p'', así como una anilla b, y se sujeta por uno de sus extremos á la pieza d, dotada de un movimiento de báscula.

Las reglas que constituyen el instrumento se apoyan en cuatro ó más cajas s, que llevan en su parte inferior unas armaduras de hierro, las cuales terminan en unas ruedas de marfil r susceptibles de girar alrededor de su eje horizontal, y la armadura en que este eje se apoya gira tambien alrededor de un eje vertical; resultando que todas las ruedas pueden moverse como se necesita en todos sentidos, en virtud de los dos movimientos combinados de que es susceptible el aparato.

La longitud de la regla BD es igual á la parte de la CA que hay desde su extremo C hasta el *cero*. A partir de este punto en la CA, del extremo B en la BD, y del A′ en la A′B′, se ven marcadas en las tres reglas las mismas divisiones $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{12}\cdots$

Las letras mayúsculas de la figura son las que van grabadas en el mismo instrumento.

564. **Disposicion del pantógrafo en estacion.**—Colocado como se representa en la figura sobre un tablero bien nivelado, dispuestos convenientemente el calcador, el lapicero y las cajas *s*, y seguros de que todos los movimientos del aparato se ejecutan con facilidad, se fijará la relacion que ha de guardar la copia con el original, y supongamos que sea la de $\frac{1}{2}$. Se moverá la regla A'B' paralelamente á sí misma hasta que los bordes de las cajas A' y B' coincidan exactamente con las divisiones $\frac{1}{2}$ de las reglas AC y BD. Se correrá despues la caja C' á lo largo de la regla A'B' hasta que coincida con la division $\frac{1}{2}$, así como las cajas P y K se harán coincidir exactamente con los *ceros* de las reglas AC y CD, apretando despues fuertemente los tornillos de las cinco cajas: hecho todo lo cual, el instrumento se hallará armado y en disposicion de usarse; pero ántes debe verificarse y corregirse, determinando tambien la posicion que han de tener en la mesa donde se halla el pantógrafo, el dibujo original y el papel blanco que ha de recibir la copia.

Para la colocacion del original y el papel de la copia, supongamos primero que el instrumento es exacto y que se ha montado de manera que llene exactamente las condiciones que se requieren para la fiel reproduccion del original. Se fija al tablero el papel de la copia, en el cual se ha trazado una línea homóloga de otra del original y en la relacion asignada; moviendo el pantógrafo hasta que la punta del lápiz se halle en uno de los extremos de dicha recta de la copia, y colocando su homólogo en el original debajo del calcador. Fijando este punto, y llevando el lápiz por el movimiento del pantógrafo al otro extremo de la citada línea, se hace girar á la recta homóloga en el original alrededor de su extremo fijo hasta que el otro coincida con la punta del calcador; con lo cual se hallará convenientemente dispuesto el original. La coincidencia no podrá menos de verificarse, en atencion á la hipótesis que hemos hecho de la exactitud del instrumento.

565. **Verificaciones y correcciones.**—Las causas de imperfeccion á que este instrumento está sujeto, y las verificaciones y correcciones á que da lugar son las siguientes:

1.ª Que estando bien establecidas las divisiones de las tres reglas, y exactamente colocadas las cajas A', C' y B', (fig. 258) en la relacion elegida de $\frac{1}{2}$ por ejemplo, los tres puntos P, C, K no se hallen en línea recta: lo que se conocerá en que adaptando á ellos el canto de una regla ó un hilo tirante no coincide exactamente. Entónces el error no puede provenir de que la punta del lápiz no sea la proyeccion del eje del lapicero por estar mal afilado, lo que se conocerá si haciéndole girar sobre sí mismo alrededor de su eje traza la punta una pequeña circunferencia en lugar de señalar un solo punto, en cuyo caso se procederá á afilarle de nuevo. Si á pesar de estar bien afilado el lápiz, su punta no se halla en línea recta con los *ceros*, es prueba de que el error está en las divisiones de la regla A'B', por lo que habrá que recorrer á lo largo de ésta la caja C' en el sentido conveniente verificando la correccion por tanteos.

2.ª Que estando el lápiz en línea recta con los *ceros* P y K no resulte la coincidencia de que hemos hecho mérito en el párrafo anterior, resultando en el original una recta más corta ó más larga que la homóloga de la recorrida por el lápiz en la copia. En este caso se aflojarán los tornillos *t* y *t'*, y se aproximará la regla A'B' á la CK ó se alejará de ella paralelamente á sí misma, buscando por tanteos la nueva posicion que debe ocupar, hasta que se logre la coincidencia exacta.

566. Cuidando de que se verifiquen las mencionadas condiciones, es fácil concebir que se podrá adoptar otra relacion cualquiera distinta de las que marcan las divisiones de la regla, disponiendo convenientemente las cajas en el pantógrafo por tanteos.

567. **Usos del pantógrafo.**—Dispuesto el instrumento como hemos indicado en lo que llevamos expuesto, la copia resulta reducida: pero si queremos amplificar un dibujo ó copiarle en la misma escala, se coloca la pieza H (fig. 258) en C' y el lapicero en P, y la línea de fé de C' en la division $\frac{1}{2}$ de la regla A'B' para este último caso; y en el de la amplificacion es necesario además colocar las cajas A' y B' de modo que dividan á las reglas AC, BD en partes proporcionales á los números que marcan la relacion de las escalas. Así, para copiar en escala doble de la del original, se hará que PA' sea doble de A'C.

Dispuesto y corregido el instrumento, se reduce la operacion á pasar el calcador por todas las líneas del original, las que irá reproduciendo fielmente y con exactitud el lápiz en el papel dispuesto para la copia. El pantógrafo sustituye con la mayor ventaja á cuantos procedimientos hemos explicado anteriormente, determinando con toda la facilidad y prontitud que puedan desearse los contornos del dibujo, así como sus detalles, por complicados que sean.

568. Cuando se trate de la reproduccion de líneas rectas, convendrá guiar el calcador por el borde de una regla ó escuadra delgada colocada en contacto con aquellas; y se cuidará de separar el lápiz del papel de la copia, levantándole por medio del hilo que atraviesa las poleas, cuando no se quiera que alguna línea del original resulte en la copia, ó cuando al pasar el calcador de un punto á otro se quiera evitar el trazado de líneas inútiles. Aflojando despues el cordon, vuelve á caer por su propio peso y el de las pesas adicionales (563). Los arcos de círculo deberán hacerse ó rectificarse con el compás.

569. **Fórmulas en que se funda la division de las reglas del pantógrafo de Gavard.**—Las fórmulas que emplean los constructores para marcar las divisiones de las reglas, pueden servir para establecer una relacion cualquiera $\frac{m}{n}$ de la copia al original, cuando no aparezca señalada en el instrumento: se miden las cantidades constantes PC y CK (fig. 258), las que designaremos respectivamente por a y b: llamando entónces x é y á las PA′ y A′C′ se tendrán las razones iguales

$$x : a :: y : b :: m : n,$$

de las que resultan las fórmulas

$$x = a \times \frac{m}{n} \qquad [64];$$

$$y = b \times \frac{m}{n} \qquad [65].$$

570. Cuando el eje de rotacion está en C′ (567), se tiene la proporcion PA′ : A′C : : PC′ : C′K, ó (Arit. 171),

$$PA' : PC :: PC' : PC' + C'K,$$

de la cual resulta, despues de sustituir valores,

$$x : a :: m . m + n;$$

de donde

$$x = a \times \frac{m}{m+n} \quad [66];$$

y de un modo análogo se obtiene

$$y = b \times \frac{m}{m+n} \quad [67].$$

571. **Pantógrafo decimal**.—Este pantógrafo difiere solamente del de Gavard en que los extremos de las reglas PC y BK (fig. 259) están unidos por una regla PB, por medio tambien de juegos de charnela, en los puntos P y B. Las cinco reglas que forman el instrumento son iguales y tienen exactamente la longitud de 1 metro, constituyendo por lo tanto las cuatro CK, BK, PB y PC un rombo en todas las posiciones del instrumento, conservándose siempre la A'B' paralela á las PB y CK en su movimiento á lo largo de las reglas PC y BK. El calcador va siempre en K, y el centro de rotacion y el lapicero pueden cambiar de posicion en los puntos P y C', resultando las dos disposiciones que pueden dársele en su uso. La division de las dos reglas PC y BK á partir de los puntos P y B donde se colocan los *ceros*, y la de la A'B' á partir de A donde se coloca tambien en esta regla, puede ser cualquiera; pero siendo más conveniente en todos los pantógrafos dividir las reglas en muchas partes iguales, para obtener más fácilmente las relaciones, y más cómodo emplear la division decimal, en el instrumento que nos ocupa se han dividido las tres reglas PC, BK y A'B', que hemos dicho tienen de largo un metro, en decímetros, centímetros y milímetros, llevando cada una de las cajas que corresponden á los puntos A', C' y B' el correspondiente *nonius* que comprende la longitud de 9 milímetros dividida en 10 partes iguales, recibiendo por esta circunstancia este instrumento el nombre de *pantógrafo decimal*, que no es otra cosa que el de Gavard perfeccionado.

572. Las fórmulas para establecer las divisiones son las mismas que las del de Gavard, con la diferencia de que en el pantógrafo decimal son iguales las constantes a y b.

573. **Aplicacion de la fotografía á la copia y reduccion de los planos**.—La *fotografía* está llamada á prestar un importante servicio en su aplicacion á la copia de los planos en igual, mayor é menor escala que el original, cuando este problema haya acabado de resolverse por completo. Hoy se reproducen ya

los dibujos con mucha exactitud; pero este sistema tiene el inconveniente, cuando el original presenta muchos detalles y la relacion elegida para la copia es muy pequeña, que ésta resulta bastante confusa, puesto que se reproducen todos aquellos; y en un plano topográfico no hay necesidad sino de cierto número de ellos, debiéndose descartar, para la claridad del dibujo, los que son insignificantes. En los planos en grande escala es de la mayor importancia la aplicacion de la fotografía por lo mismo que reproduce todos los detalles. Atendida la índole de este sistema y la prontitud de las operaciones, la fotografía será con el tiempo un inmenso adelanto en la reproduccion de los planos y producirá economías de consideracion.

574. Hemos concluido con la *Topografía* ó sea con la parte necesaria al *Agrimensor* para medir los terrenos y levantar el plano de los mismos, representando además su forma y teniendo todos los datos necesarios, que á su vez puede utilizar para emprender otras varias operaciones que se le pueden encomendar y que son del dominio exclusivo de la *Agrimensura*, como son la transformacion y division de los polígonos, y los deslindes y apeos de los terrenos.

CAPITULO VIII.

Transformacion de los polígonos y division de terrenos y heredades.

575. **Transformacion de los polígonos.—Ideas generales.**—Se dice que se *transforma* un polígono en otro, cuando por medio de una *operacion gráfica* se sustituye al primero otro que le es *equivalente*, es decir, que tiene la misma superficie que el polígono dado, pero cuya forma es distinta de la de éste, pudiendo ser el mismo ó diferente el número de sus lados y ángulos; pero siempre distintas las relaciones de magnitud de unos y de otros.

Se concibe que esta operacion gráfica debe ejecutarse en el papel, despues de haber construido el polígono del terreno en la mayor escala posible, para verificar despues las referencias al terreno; puesto que aunque pudiera ejecutarse desde luego sobre este último, las dificultades que se ofrecen en general producen resultados menos exactos. En lo que vamos á decir se entenderá sin embargo que operamos lo mismo sobre el terreno que sobre el papel.

La transformacion de los polígonos es una operacion de la mayor importancia, por las razones siguientes:

1.ª Porque es indispensable como auxiliar en la resolucion de muchas cuestiones, especialmente en las que tienen por objeto la division de los terrenos y heredades.

2.ª Por la aplicacion que puede hacerse de ella como auxiliar tambien para la medicion de las superficies, transformando los polígonos dados en otros, cuyas formas sean más adecuadas para el cálculo de aquellas.

3.ª Por la conveniencia que puede resultar en casos dados á los propietarios colindantes, de la transformacion convencional de sus heredades, en otras que tengan el mismo ó menor número de lados, para regularizar las figuras de los terrenos y rectificar los linderos, ó para satisfacer á otra circunstancia cualquiera.

Pasaremos por lo tanto á la resolucion de varios problemas.

576. **Problema 1.º—Transformar un triángulo equilátero ó isósceles en otro triángulo rectángulo equivalente.**—Si el vértice B (fig. 260) ha de ser el mismo, bájese la perpendicular BD, prolónguese DA de modo que DE sea igual á AC, tírese la BE, y el triángulo rectángulo EBD será equivalente al ABC, por tener ambos igual base y altura (Geom. Teor. 94.—Cor. 1.º). Si la base AC ha de ser la misma, levántese en C la perpendicular CB′ hasta encontrar en B′ á la paralela tirada por B á la AC, y trazando la AB′, el triángulo AB′C será el que se pide.

577. **Problema 2.º—Transformar un triángulo escaleno en otro rectángulo equivalente.**—Si la base AC (fig. 261) ha de ser la misma, levántese la perpendicular CB′ á la AC y por el punto B tírese la paralela BB′ á dicha AC, y el triángulo AB′C resolverá la cuestion. En el caso de que haya de ser el mismo el vértice, bájese la perpendicular BC′ á la AC prolongada, tómese C′A′ = AC, y trazando la BA′, el triángulo A′BC′ será el que se pide.

578. **Problema 3.º—Transformar un triángulo cualquiera en otro equivalente que tenga la misma base.**—Trácese por el punto B (fig. 262), la paralela B′B″ á la base AC, y todos los triángulos AB′C, AB″C, que tengan la base AC y sus vértices se hallen en dicha paralela serán equivalentes al propuesto. Este problema sirve para transformar un triángulo acutángulo ABC en otro obtusángulo equivalente AB″C y recíprocamente; siendo determinado el problema cuando se da el valor que ha de tener uno de los ángulos de la base, y pudiéndose enunciar entonces de este modo.

Transformar un triángulo ABC *en otro equivalente* AB′C *que tenga la misma base y altura, y el ángulo* ACB′ *ó* CAB′ *dé la base igual á un ángulo dado.*

Si el triángulo dado ABC se ha de transformar en otro isósceles AFC, se levantará la DF perpendicular en el punto medio D de AC; y si en otro rectángulo AEC, la AE perpendicular á AC en uno de sus extremos A.

579. **Problema 4.°—Transformar un triángulo** ABC (fig. 263) **en otro equivalente** AB'C' **que tenga una altura dada.**—El vértice B' del nuevo triángulo puede darse situado en el lado AB ó en su prolongacion: en ambos casos tírese la B'C y por el punto B la paralela BC' á la B'C; únase el punto B' con el C' por medio de la B'C', y el triángulo AB'C' resolverá la cuestion; pues resultan equivalentes (578) los triángulos BB'C, C'B'C para el primer caso, y los B'BC', CBC' para el segundo.

Si el vértice B' estuviese fuera del triángulo ABC, como en las dos posiciones de la figura 264, se tirará la recta AB' y por el punto B la BD paralela á AC hasta que encuentre á la AB' ó á su prolongacion en el punto D; trácese la CD y por el caso anterior constrúyase el triángulo AB'C', el cual siendo equivalente al ADC, como éste lo es al CBC', quedará resuelta la cuestion.

Se comprende que si el punto B' no se da de posicion, podrá resolverse por este medio el problema de

Transformar un triángulo ABC *en otro equivalente* AB'C *cuya altura sea dada, así como un ángulo* B'AC' *de la base.*

580. **Problema 5.°—Transformar un triángulo** ABC (fig. 265) **en otro equivalente que tenga una base dada.** —Si la base ha de ser FC, que resulta de prolongar la AC en uno de sus sentidos, se tirará la BF y por A la paralela AD á la BF, y uniendo el punto F con el D se tendrá el triángulo FDC equivalente al ABC.

Si la base ha de ser la FE que resulta de prolongar la AC en sus dos sentidos, despues de hacer la construccion anterior, se trazará la DE, y por C la CO paralela á DE, y uniendo el punto O con el E, el triángulo FOE será equivalente al FDC, y por consiguiente al ABC.

581. **Problema 6.°—Transformar un cuadrilátero cualquiera** ABCD (fig. 266), **convexo ó cóncavo, en un triángulo equivalente cuyo vértice sea el** B **del cuadrilátero.**—Tírese la diagonal BD, y por el punto C la paralela CE á la BD hasta que encuentre á la AD ó á su prolongacion en el punto E; trácese la BE, y el triángulo ABE será el que se busca.

582. **Problema 7.°—Transformar un cuadrilátero cualquiera** ABCD (fig. 267) **en un triángulo equivalente cuyo vértice** E **se halle situado en el lado** BC.—Tírense las rectas EA y ED, y por los puntos B y C las BF y CG respectivamente paralelas á las primeras, hasta que encuentren á la AD prolongada en los puntos F y G; y trazando las EF y EG, el triángulo FEG resolverá la cuestion.

En el caso de ser el cuadrilátero un paralelógramo, bastará prolongar la base AD (fig. 268) de modo que resulte DF = AD, y uniendo el punto E con los A y F, se tendrá el triángulo AEF equivalente al paralelógramo ABCD, por tener la misma altura y doble base que éste.

583. A veces se quiere transformar un polígono en otro que tenga el mismo número de lados, pero que su forma sea distinta, caso que suele tener aplicacion en muchas ocasiones.

Sea, por ejemplo, el cuadrilátero ABCD (fig. 269): en vez de prolongar uno de sus lados AB hasta B' en sentido de su direccion, se trazará por el punto B una recta BE' en la direccion que convenga, y tirando la diagonal BD y por C la paralela CE á la BD, se unirá el punto de interseccion E con el D, y el cuadrilátero ABED será equivalente al propuesto ABCD.

584. **Problema 8.°—Transformar cualquier polígono** ABCDE (fig. 270) **en otro equivalente que tenga un lado ménos.**—Tírese la diagonal AC, y por el punto B la BF paralela á AC, hasta que encuentre en el punto F á la AE prolongada; únase el punto C con el F, y el pentágono propuesto será equivalente al cuadrilátero FCDE.

585. Como por el caso anterior se puede transformar el cuadrilátero en un triángulo, resulta que cualquier polígono se puede transformar en un triángulo, reduciéndole primero á otro que tenga un lado ménos, el que resulte á otro que tenga un lado ménos que el anterior, y así sucesivamente, hasta convertirle en triángulo, como se ve en el pentágono ABCDE de la figura 271, que se halla transformado en el triángulo equivalente FCG, habiendo servido de bases para las operaciones las diagonales CA y CE que parten de un mismo vértice C.

586. Ahora bien, como hemos dicho (579) el modo de transformar un triángulo en otro que le sea equivalente y que tenga una altura dada y uno de los ángulos de la base, resulta que se podrá reducir un polígono cualquiera á un triángulo que tenga el vér-

tice en cualquier punto dado, dentro ó fuera del mismo polígono, y de modo que un ángulo de la base sea igual tambien á un ángulo dado.

587. **Problema 9.º—Transformar un triángulo en un cuadrado equivalente.**—Hállese una media proporcional (Geom. Probl. 28) entre la base y la mitad de la altura ó entre la altura y la mitad de la base del triángulo, y se tendrá el lado del cuadrado.

En efecto, sea x el lado del cuadrado, a la altura y b la base del triángulo: tendremos

$$x^2 = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a \times b = a \times \frac{1}{2}b;$$

de donde se deducen las proporciones

$$\frac{1}{2}a : x :: x : b \quad \text{ó} \quad a : x :: x : \frac{1}{2}b;$$

588. **Problema 10.—Transformar cualquier polígono en un cuadrado equivalente.**—Se reduce primero á triángulo, y luego este triángulo á cuadrado.

Si el polígono es un *rectángulo*, un *paralelógramo* ó cualquier figura cuya área pueda obtenerse por el producto de dos rectas, la cuestion está reducida á *hallar una media proporcional entre dichas dos rectas*, para tener el lado del cuadrado equivalente que se pide.

Si el polígono es *regular*, se desarrollará el perímetro sobre una recta indefinida, y se hallará la media proporcional entre la mitad del perímetro y la apotema, ó sea el rádio del círculo inscrito.

Por último, para hallar el lado de un cuadrado equivalente á un círculo, se construirá la media proporcional entre la mitad de la circunferencia rectificada y el rádio; pero este resultado no es más que aproximado, pues dependiendo de la rectificacion de la circunferencia, sería necesario para obtenerle con exactitud poder construir una recta con la regla y el compás, que tuviese la longitud exacta de la circunferencia; lo que hasta hoy no se ha podido conseguir.

589. **Division de los polígonos.—Preliminares.**—Una de las operaciones que con frecuencia tiene necesidad de practicar el geómetra, es la division de los terrenos ó propiedades, sujetán-

dose á las condiciones impuestas por los propietarios. Esta parte de la Topografía se llamaba antiguamente *geodesia*; pero hoy se da este nombre á la aplicacion que se hace de la Astronomía y de la Trigonometría rectilínea y esférica al levantamiento de la Carta de una gran extension de terreno, como por ejemplo, la superficie de un estado ó país, designándose la que ahora nos ocupa con el nombre de *division de los polígonos*.

590. En la resolucion de las cuestiones emplearemos dos procedimientos: el uno que llamaremos de *soluciones numéricas*, y el otro de *soluciones gráficas*. Entenderemos por soluciones numéricas, aquellas en que se haga uso del cálculo, bien se opere sobre el terreno ó sobre el papel, valiéndose de los instrumentos de campo ó de gabinete para la determinacion de las líneas y ángulos que han de servir de datos, y el trazado tambien de las líneas y ángulos que han de representar los resultados; y llamaremos *soluciones gráficas*, aquellas en que sólo se haga uso de construcciones geométricas, tanto en el campo como en el gabinete, con los instrumentos adecuados á cada caso para la resolucion de los problemas, sin entrar el cálculo para nada en la resolucion.

Para las soluciones tanto numéricas como gráficas, cuando se opera en el terreno mismo basta la formacion del cróquis si no se tiene plano y no hay necesidad de levantarle; pero será preciso construir el plano con precision y en escala conveniente cuando las soluciones tanto numéricas como gráficas deban efectuarse en el gabinete. Es de todo punto indispensable determinar bien el contorno del terreno, como base de todas las operaciones que se han de practicar despues.

591. Cuando se opera en el terreno, las soluciones numéricas son más exactas que las gráficas, y podrá servir de comprobacion el observar si al trasladar al papel las líneas establecidas en el terreno, y que representan los resultados, guardan en el plano las mismas relaciones de posicion.

Cuando se opera en el papel, las soluciones gráficas son al contrario más exactas que las numéricas, y se obtienen aquellas con más aproximacion, construyendo de nuevo el plano si estaba en escala pequeña en otra más conveniente. En este caso las líneas obtenidas por ambos métodos en el plano se trasladan despues al terreno, lo que constituye el *replanteo*.

En adelante, al resolver una cuestion númerica ó gráficamente, el procedimiento que expongamos deberá entenderse que debe seguirse tanto en el terreno como en el papel.

592. *Las soluciones numéricas* se fundan en los diversos problemas de Geometría que establecen ciertas relaciones entre los datos y las incógnitas; y las *gráficas* en las diversas proposiciones de la Geometría referentes á los polígonos equivalentes, y en la transformacion de las figuras que hemos explicado anteriormente, y la cual entra como auxiliar en la mayor parte de las soluciones.

Pasemos ya á la resolucion de los problemas más elementales.

593. **Contornos rectilíneos de un corto número de lados.—Triángulos.—Problema 1.º—Dado un triángulo, tirar desde uno de sus vértices una recta al lado opuesto, de manera que forme un triángulo parcial de una área dada, ó lo que es lo mismo, tomar una superficie en otra dada.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 272) en el cual se quiere tirar por el vértice B la recta BD que forme el triángulo parcial ABD que tenga una área dada. Sean S y s las áreas numéricamente conocidas ABC y ABD. Como estos dos triángulos de una misma altura BE, son entre sí como sus bases AC y AD, que llamaremos B y b, se tendrá

$$S : s :: B : b,$$

de donde

$$b = \frac{s \times B}{S} \qquad [68].$$

Hallado el valor numérico de AD, se tomará esta distancia desde el punto A en la AC, bien en el terreno en su tamaño natural si se ha operado en él, ó bien en el papel con arreglo á escala si se opera en el gabinete, para referirla despues al terreno; y trazando por último la recta BD se tendrá separada la porcion ABD que se deseaba. De este procedimiento se puede hacer uso cuando no se tiene á mano más que la cadena ó cinta, piquetes y jalones.

Si la línea de division debiese partir del vértice C, entonces se podria hacer que los dos triángulos, el dado ABC y el que se busca AFC, tuviesen la misma base AC, en cuyo caso serían entre sí como sus alturas h y h', y se tendría

$$S : s :: h : h',$$

de donde

$$h' = \frac{s \times h}{S} \qquad [69].$$

Levantando en el punto A una perpendicular AH $= h'$ á la AC y tirando por el punto H la recta HF paralela á AC, se unirá el punto de interseccion F con el C y se tendrá el triángulo AFC.

594. Puesto que s es conocida y se tiene (410)

$$s = \frac{b \times h}{2},$$

se puede trazar y medir la altura h del triángulo ABC, y despejando b se tiene para valor de la base que se busca

$$b = s : \frac{h}{2} = \frac{2s}{h} \qquad [70].$$

Tomando en la AC una cantidad AD $= b$, se tendrá resuelto el problema. En este caso no se necesita saber la superficie S del triángulo ABC.

Tambien puede medirse la base AC $=$ B, y como para el triángulo AFC se tendría

$$s = \frac{B \times h'}{2},$$

despejando h' se tendrá

$$h' = s : \frac{B}{2} = \frac{2s}{B} \qquad [71].$$

y despues se hará la construccion indicada anteriormente para hallar el punto F.

De los procedimientos explicados se hará uso cuando se pueda disponer de las escuadras.

595. Sucede á veces que en un triángulo ABC (fig. 272) se quiere tomar el ABD que tenga la misma superficie que otro dado *abc*: en este caso se mide la superficie del *abc* y dividiendo el resultado por la mitad de la altura BE $= h$, se obtendrá el valor de la base AD $= b$. Si el triángulo hubiera de ser el AFC, se dividirá la misma superficie por la mitad de la base AC y se tendrá la altura FG $= h'$, construyéndose el triángulo AFC como hemos dicho anteriormente.

596. *Solucion gráfica.*—En este caso debe conocerse la figura del triángulo *abc* (fig. 273) cuya área ha de ser la misma que la que ha de tomarse en el triángulo ABC, por una recta tirada desde el ángulo B. Para esto se transforma el triángulo *abc* en otro equivalente *adc*, de modo que el ángulo *dac* sea igual al BAC (579), y tomando AF = *ad* y AE = *ac*, y trazando la FE, el triángulo AFE será igual al *adc* y equivalente al *abc*; pero como la línea de division ha de partir del punto B, se trazará la BE y por F la FD paralela á BE; y tirando por último la BD, tendremos el triángulo ABD equivalente al AFE, y por lo tanto al *acb* y trazado con las condiciones que exige el problema.

597. *Ejemplo numérico.—Un padre dá á su hija en dote una porcion de terreno de 8 áreas de cabida, que se ha de tomar de otro terreno de forma triangular que tiene 25 áreas.*

Sea el triángulo ABC (fig. 272) de 25 áreas y supongamos que se indica al Agrimensor que las 8 áreas que ha de tomar han de ser hácia el ángulo A y que la línea divisoria ha de partir del vértice B. Se medirá el lado AC opuesto á este vértice y si resulta tener 125 metros, se formará la proporcion

$$25^a : 8^a :: 125^m : x^m = \frac{8 \times 125^m}{25} = 40 \text{ metros.}$$

Tomando AD = 40^m y trazando la BD, el triángulo ABD contendrá las 8 áreas y resolverá el problema.

598. **Problema 2.°—Dado un triángulo, tirar desde uno de sus vértices una recta á la prolongacion del lado opuesto, de manera que forme un triángulo parcial de una área dada, ó lo que es lo mismo, añadir una superficie á otra dada.**

Solucion numérica. Sea el triángulo ABC (fig. 274), y supongamos que del terreno que linda con AB se ha de tomar la parte que se le ha de añadir, y que el lindero BD es prolongacion del CB. Se tendrá la proporcion

$$ABC : ADC :: BC : CD;$$

conocida CD, se tendrá

$$BD = CD - BC,$$

y uniendo el punto A con el D, se tendrá el triángulo ADC que resuelve el problema.

Tambien se puede hallar desde luego la BD por la proporcion

ABC : ABD :: BC : BD.

Si el otro lindero del terreno colindante con AB tuviese la direccion BE, se dividirá la superficie que hay que añadir al triángulo ABC por la mitad de la base, ó el doble de dicha superficie por la base AB (594) [71], y se tendrá la altura, que tomándola en la perpendicular levantada á AB en un punto F que sea el que más convenga, y tirando por el extremo G de dicha altura una paralela GE á la AB, se unirá el punto de interseccion E con la BE, con el punto A, y el triángulo ABE será el que hay que añadir al ABC.

En este caso y en todos en general se puede prescindir del valor de la superficie del triángulo dado, para añadirle ó quitarle una cantidad tambien dada.

599. *Ejemplo numérico.—Un propietario posee un terreno triangular* ABC (fig. 274) *que contiene* 32 *áreas, debiendo contener* 40 *áreas, y reclama á su vecino colindante le restituya las* 8 *áreas que le faltan.*

Si han de tomarse sobre la AB las 8 áreas y la recta se ha de tirar desde el vértice A á la prolongacion del lado opuesto ó base BC, que tiene de longitud 75 metros, se establecerá la proporcion siguiente:

$$32^a : 40^a : : 75^m : x = \frac{40 \times 75}{32} = 93^m,75.$$

Siendo $93^m,75$ la longitud de la base del triángulo que contiene 40^a, y 75^m la base del triángulo que contiene 32^a, se restará de $93^m,75$ la cantidad 75^m y la diferencia $18^m,75$ será la base del triángulo que hay que añadir al ABC. Tomando en la prolongacion de la BC los $18^m,75$ y uniendo el punto A con el D, el triángulo ACD resolverá el problema.

600. **Problema 3.°—Dividir un triángulo en un cierto número de partes equivalentes por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.**

Solucion numérica.— Sea el triángulo ABC (fig. 275) que se quiere dividir en tres partes equivalentes. Divídase su superficie por 3, y haciendo aplicacion del problema 1.°, tómese el triángulo ABD igual en superficie al tercio del ABC. Tómese á continuacion el BDE ó bien el BEC, y quedará resuelto el problema. Tambien se puede tomar primero el ABD igual al tercio del ABC y despues el ABE igual á los dos tercios del ABC; y en ambos casos mídase la superficie del triángulo EBC para que sirva de verificacion, pues deberá resultar igual al tercio de ABC.

Solucion gráfica.—Divídase la base AC en tres partes iguales, y trazando las BD y BE, los triángulos ABD, DBE y BEC, que tienen igual base é igual altura, son equivalentes.

601. **Problema 4.°—Dividir un triángulo en un cierto número de partes proporcionales á números dados, por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 275), el cual se quiere dividir en tres partes proporcionales á los números m, n y p: se tendrá la proporcion

$$\text{ABD} : m : : \text{BDE} : n : : \text{BEC} : p;$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l}\text{ABC} : m + n + p : : \text{ABD} : m \\ \text{ABC} : m + n + p : : \text{BDE} : n \\ \text{ABC} : m + n + p : : \text{BEC} : p\end{array}\right\} \quad [72];$$

y despejando en estas proporciones los terceros términos, tendremos:

$$\text{ABD} = \text{ABC} \times \frac{m}{m + n + p};$$

$$\text{BDE} = \text{ABC} \times \frac{n}{m + n + p};$$

$$\text{BEC} = \text{ABC} \times \frac{p}{m + n + p};$$

conocidas las tres porciones, se hará la division del triángulo ABC haciendo aplicacion del problema 1.°

2.ª Divídase el valor numérico de la base AC en tres partes que sean proporcionales á los números dados, y se tendrá

$$\text{AD} : m : : \text{DE} : n : : \text{EC} : p;$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l}\text{AC} : m + n + p : : \text{AD} : m \\ \text{AC} : m + n + p : : \text{DE} : n \\ \text{AC} : m + n + p : : \text{EC} : p\end{array}\right\} \quad [73.]$$

Conocidas las distancias AD, DE y EC, se tomarán en la AC, y trazando las BD y BE, los tres triángulos que resultan, de la misma altura, serán proporcionales á sus bases (Geom. Teor. 94. —3.°).

La *solucion gráfica* en este caso es impracticable, á no darse la relacion en líneas, para emplear la resolucion del problema 25 de la Geometría; lo que no sucede nunca en las aplicaciones prácticas de este problema á las particiones de terrenos entre varios herederos.

602. **Problema 5.°—Dividir un triángulo en un cierto número de partes desiguales cualesquiera, por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.**

Soluciones numéricas.—1.ª Esta solucion consiste en dividir la superficie dada de cada una de las tres porciones por la mitad de la altura comun, para obtener las respectivas bases AD, DE y EC (fig. 275) en que ha de quedar dividida la total AC.

2.ª En este caso de asignarse desde luego la parte que ha de recibir cada uno de los herederos, y no se conoce ó no se quiere determinar la altura del triángulo, se establecerán las proporciones, fundándose en la propiedad de que los triángulos de una misma altura son proporcionales á sus bases, como en el siguiente

Ejemplo numérico.—Un padre deja una tierra á sus tres hijos que contiene 25ª,75 *con la condicion de que se den al mayor* 10ª,25; *al mediano* 8ª,25, *y al menor* 7ª,25. *La tierra tiene la forma triangular* ABC (fig. 275) *y todas las partes han de concurrir al punto* B *en que se halla un pozo ó casa.*

Mídase la base AC, y suponiendo resulten $125^{m},40$, tendremos las proporciones

$$25,75 : 125,40 : : 10,25 : x = \frac{125,40 \times 10,25}{25,75} = 49,91$$

$$25,75 : 125,40 : : 8,25 : x = \frac{125,40 \times 8,25}{25,75} = 40,18$$

$$25,75 : 125,40 : : 7,25 : x = \frac{125,40 \times 7,25}{25,75} = 35,31$$

Total igual á la longitud de la base AC......... 125,40

Se tomarán sobre CA las medidas $49,^{m}91$, $40,^{m}18$ y $35,^{m}31$ y

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA TOPOGRAFICA - BIBLIOTECA -

se trazarán desde el punto B las rectas BE y BD á los puntos de division, y se tendrán los tres triángulos que resuelven la cuestion propuesta.

603. Para obtener la *solucion gráfica*, sería preciso que se nos diese de antemano la línea AC dividida en las tres partes AD, DE y EC.

604. No nos ocuparemos en lo sucesivo de la division en partes desiguales que no tengan entre sí una relacion sencilla; pues en todos casos se deduce del procedimiento de la division en partes iguales, con la diferencia que en ésta basta conocer el valor de la superficie total y el número de las partes, con lo cual se puede obtener el de una, dividiendo dicho valor total por el número de las partes, miéntras que en la division en partes desiguales es preciso conocer de antemano el valor de cada una de ellas.

605. **Problema 6.° — Dividir un triángulo en tres partes equivalentes por rectas que partan de dos de sus vértices.**

Solucion gráfica.—Divídase la AC (fig. 276) en tres partes iguales, tírese la BD, y por su punto medio E la AE, y quedará resuelto el problema. Si se hubiera de dividir el triángulo en cinco partes se dividirá la base AC (fig. 277) en este número de partes y la figura indica el resto de la construccion; lo mismo se ejecutará cuando el número de partes sea mayor.

606. **Problema 7.° — Dividir un triángulo en tres porciones equivalentes, por rectas que partan de sus tres vértices y se unan en un mismo punto interior.**

Solucion numérica.—Hállese la superficie del triángulo ABC (fig. 278), y tómese el tercio. Divídase el resultado por la mitad de la base AC, y se tendrá la altura h de una de las porciones. Levantando la perpendicular $Aa=h$ y trazando la aO paralela á AC, el vértice del triángulo que tiene por base á AC, estará en dicha paralela. Divídase despues otra vez el tercio de la superficie del triángulo ABC por la mitad del lado BC y se tendrá la altura h': levantando la perpendicular $Bb = h'$ á la BC y trazando la paralela bO á esta línea, el punto O de su interseccion con la aO será el que unido con los vértices A, B y C resolverá el problema, como es fácil comprender.

Solucion gráfica.—Divídase uno de los lados AC (fig. 279) en tres partes iguales, y trácense BD y BE: se tendrán los tres triángulos equivalentes ABD, DBE y EBC, y por consiguiente iguales cada uno al tercio del ABC. Trácense las paralelas DF y EG á las AB y BC, y desde el punto O donde se cortan trácense las tres rectas AO, BO y CO, y el triángulo ABO equivalente al ABD será un tercio del ABC (600), el triángulo BOC equivalente al BEC será otro tercio de ABC, por lo que el triángulo restante AOC deberá ser tambien el tercio de ABC.

607. **Observaciones acerca de la division en partes proporcionales ó desiguales.**—Si en la solucion numérica las partes hubieran de ser entre sí como los números m, n y p, se empezaría por hallar los valores de dichas tres partes y despues se haría la construccion del mismo modo.

En general, en las soluciones numéricas, la division de una superficie S en n partes de igual área ó equivalentes, exige primero la determinacion del valor $\frac{S}{n}$ de cada una de las partes, y despues los cálculos consiguientes para obtener los de las líneas necesarias para verificar la construccion.

La division en partes desiguales supone el conocimiento prévio de los valores de estas partes, verificándose despues la construccion del mismo modo.

Por último, la division en partes que sean entre sí como números dados $m, n, p....$ no difiere de esta última sino en que es necesario determinar cada una de estas partes, y de la anterior en la manera de verificar esta determinacion; siendo igual el resto de las operaciones que en la division en partes equivalentes y desiguales.

Ahora bien, teniendo presente que una superficie S queda dividida en partes $a, b, c....$ que sean entre sí como los números dados $m, n, p....$ estableciendo la série de razones

$$a : m :: b : n :: c : p :: ....$$

en las cuales tenemos

$$a + b + c + ... = S : m + n + p + ... :: a : m :: b : n :: c : p :: ....$$

de donde resulta

$$\left.\begin{aligned} a &= S \times \frac{m}{m+n+p+....} \\ b &= S \times \frac{n}{m+n+p+....} \\ c &= S \times \frac{p}{m+n+p+....} \end{aligned}\right\} \quad [74],$$

no volveremos á ocuparnos en adelante de las divisiones en partes proporcionales.

Por razones análogas será inútil hablar de la division en partes desiguales, por lo que en lo sucesivo sólo nos referiremos á la division en partes iguales en superficie ó equivalentes.

La misma marcha seguiremos en las soluciones gráficas, pues las construcciones son las mismas, salvo á dividir gráficamente en partes iguales, desiguales ó proporcionales, aquellas líneas cuyos valores hayan de dividirse de estos distintos modos en las soluciones numéricas para obtener las partes equivalentes, desiguales ó proporcionales.

608. **Problema 8.º—Dividir un triángulo en dos partes equivalentes por líneas tiradas desde un punto interior dado.**

Solucion numérica.—Sea el triángulo ABC (fig. 280) y O el punto dado: trácense OB y OC, y mídanse los triángulos ABC y BOC, y si éste no es la mitad del anterior, y suponemos que sea menor que dicha mitad, se hallará la diferencia, la que dividida por la mitad de la perpendicular OD, que se trazará y medirá, se tendrá el valor de la base EC de un triángulo EOC que representará dicha diferencia; con lo que tendremos que el cuadrilátero EOBC, compuesto de los dos triángulos BOC y EOC, será la mitad del triángulo ABC; y por consiguiente la otra mitad estará representada por el otro cuadrilátero ABOE, que podrá medirse para comprobar la resolucion del problema.

Solucion gráfica.—Sea O el punto dado (fig. 281): trácese la BO, y únase el punto medio D del lado AC con los B y O: los triángulos ABD y BDC son cada uno la mitad del ABC; y si por el punto B se traza la BE paralela á OD y se tira por último la OE, el cuadrilátero ABOE, compuesto de los triángulos ABE y BOE será equivalente al triángulo ABD compuesto de los ABE y BED; y por lo tanto valdrá la mitad del ABC, siendo la otra mitad el cuadrilátero BOEC.

609. **Problema 9.º — Dividir un triángulo en tres porciones equivalentes, por líneas que partan de un punto interior dado.**

Solucion numérica.—Supongamos que una de las líneas de division vaya á parar á un vértice, tal como OA (fig. 282). Mídase la superficie del triángulo ABC y tómese el tercio; mídase la perpendicular Oa y hállese la base AD, y tirando la OD se tendrá una de las partes AOD. Imagínese la perpendicular Ob y mídase el triángulo AOC, y si no es igual al tercio de ABC, habrá que añadirle ó quitarle una cierta cantidad tal como m. Sea AOC $< \frac{1}{3}$ ACB; mídase la perpendicular Oc y hállese la base CE del triángulo OEC $= m$, y el cuadrilátero AOEC representará la segunda parte. Hállese la superficie del cuadrilátero EODB para ver si equivale tambien al tercio de ABC, lo que servirá al mismo tiempo para comprobar la operacion.

Si una de las líneas de division ha de ser perpendicular á uno de los lados, tal como la OD (fig. 283), se imaginará la AO, y midiendo el triángulo AOD, si suponemos que le falta una cierta cantidad m para ser igual al tercio de ABC, se medirá la altura Oa y se hallará la base AE del triángulo AEO $= m$, y el cuadrilátero ADOE será una de las partes. Hágase lo mismo para hallar la segunda parte DOFC, y compruébese la operacion midiendo el cuadrilátero EOFB.

Si una de las líneas de division ha de ser oblícua á uno de los lados, tal como la OD (fig. 284), el procedimiento no difiere del bue acabamos de indicar.

Soluciones numérica y gráfica combinadas. — Supuesto que son análogas las soluciones numéricas en los tres casos que acabamos de considerar en este problema, y que tambien lo serían combinadas con las gráficas, vamos á resolver por este método el caso correspondiente á la figura 284.

Para esto, trácese y mídase la perpendicular Oc (fig. 285) y hállese la longitud de la base que ha de tener un triángulo igual al tercio del ABC; tómese esta longitud de D á E, y trazando la OE se tendrá dicho triángulo, que será el DOE. Tomando DG = DE y trazando la OG, se tendrá el triángulo DOG equivalente al DOE é igual por lo tanto al tercio del ABC. Como estos triángulos tienen cada uno una parte fuera del ABC, se trazarán las OC y OA y las paralelas á éstas EF y GH, y uniendo los puntos F y H con el O, tendremos los cuadriláteros DOFC y DOHA equivalentes á los triángulos DOE y DOG, como es fácil comprender, y por consiguiente iguales cada uno al tercio de ABC. Para comprobacion se medirá el otro cuadrilátero BFOH para ver si equivale tambien al tercio del ABC.

610. **Problema 10. — Dividir un triángulo en tres partes equivalentes por líneas tiradas desde un punto dado en uno de sus lados.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 286) y D el punto dado. Se medirá la superficie de dicho triángulo y se tomará el tercio, cuya cantidad dividida por la mitad de la perpendicular D*a*, dará la base AE del triángulo ADE igual á una de las partes. Procédase del mismo modo para hallar la CF, y se tendrá la segunda parte DCF, y para comprobacion se podrá examinar si el cuadrilátero EDFB que ha de representar la tercera parte equivale al tercio del triángulo ABC.

2.ª Despues de calcular la superficie del triángulo ABC y de tomar su tercio, tírese la BD y hállese la del triángulo ABD y se tendrá la proporcion

$$ABD : \frac{1}{3} ABC : : AB : AE.$$

Conocida por ella la longitud de la AE, se tendrá el punto E que unido con el D nos dará el triángulo $ADE = \frac{1}{3} ABC$, y que será por lo tanto una de las partes. Del mismo modo se hallaría la parte DFC y la restante será el cuadrilátero EDFB.

Solucion gráfica.—Divídase la base AC (fig. 287) en tres partes iguales, y tírense las BG y BH. Trácese la BD y paralelamente á ésta las GE y HF y se tendrán los puntos E y F, que unidos con el D nos darán los triángulos AED y FDC equivalentes á los ABG y BHC, cada uno de los cuales representará la tercera parte del triángulo ABC, y el cuadrilátero EDFB la tercera parte restante.

611. **Problema 11.—Dividir un triángulo en cinco partes equivalentes, por rectas tiradas desde un punto dado en uno de sus lados.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 288) y D el punto dado: despues de haber hallado la superficie del triángulo ABC, tomado su quinta parte y medido la perpendicular D*a* para determinar la base EC de dicha quinta parte, que será la DEC, llévese esta base las veces que se pueda sobre la EA y sean dos hasta G, siendo AG<EC; los triángulos DFE y DGF serán tambien quintas partes de ABC. Trácese ahora la DA y véase cuál es la superficie del triángulo ADG, y restándola de la quinta parte de ABC se obtendrá un resto que será la cantidad que habrá que añadir al triángulo ADG. Para hallar esta cantidad, bájese la perpendicular D*b* á la AB y divídase dicho resto por la mitad del va-

lor de la perpendicular, y se tendrá la base AH del triángulo AHD que habrá que añadir al ADG, para que el cuadrilátero AHDG represente otro quinto del ABC. Para comprobacion puede medirse el triángulo BDH que queda y que deberá ser otro quinto del ABC.

Tambien se puede determinar el BDH despues de haber hallado los triángulos DEC, DFE y DGF, y la parte restante se hallará representada por el cuadrilátero AHDG.

2.ª Cuando no se puede operar en el interior, hállese la superficie del triángulo ABC, valiéndose de los tres lados, y tomada su quinta parte, tendremos la siguiente proporcion (Geom. Teor. 99.)

$$ABC : \frac{1}{5} ABC :: BC \times AC : DC \times x;$$

de donde

$$x = \frac{BC \times AC}{5 \times DC} \quad [75].$$

Una vez hallada la longitud de x=CE, se tendrá el punto E, y el triángulo DCE será igual á $\frac{1}{5}$ ABC. Tómense FE y FG iguales á EC y tendremos ya en el contorno los puntos de division E, F y G. Procédase despues para hallar la BH como hemos hecho para CE y tendremos el último punto de division H, por el cual y uniendo los G, F y E con el punto D, tendremos dividido el triángulo ABC en los DEC, DFE, DGF y BDH, y en el cuadrilátero AHDG como en la solucion anterior. Esta última es tambien aplicable al caso en que el punto dado se halla en uno de los vértices.

Soluciones gráficas.—1.ª Tírese la DA (fig. 289) y por B la BY paralela á ella, y trazando la DY tendremos convertido el triángulo ABC en otro equivalente DYC que tendrá su vértice en el punto dado D (579). Divídase la base CY en cinco partes iguales, y uniendo el punto D con los de division se tendrán los tres triángulos DEC, DFE y DGF dentro del triángulo ABC é iguales á un quinto de éste. El cuarto triángulo DGH tiene fuera del ABC la parte HA*a*; por lo que tirando la H*b* paralela á DA y trazando la D*b*, el cuadrilátero AGD*b* será tambien el quinto de ABC, por lo que el triángulo BD*b* representará tambien un quinto del ABC.

Esta solucion es aplicable tambien al caso en que el punto D se hallé en el interior, transformando el triángulo dado en otro que tenga su vértice en este punto (579).

2.ª Si se quieren evitar las transformaciones del triángulo total dado en otros equivalentes, se procederá del modo siguiente: divídase la base AC (fig. 290) en cinco partes iguales, de las que sólo señalaremos la primera CD, y trazada la BD, el triángulo BDC será el quinto del ABC; trácese la OD y por B la BE paralela á OD, y uniendo el punto O con el E, el triángulo OEC es el quinto del ABC, pues hemos transformado el triángulo BDC en otro equivalente que tiene el vértice en O (579). Tómese la base EC y llévese tres veces de E á H, y trazando las OF y OG, los triángulos OFE y OFG serán quintas partes del ABC. El otro triángulo OGH se reemplazará por el cuadrilátero OGA*a*, y la última quinta parte se hallará representada por BO*a*.

612.—**Polígonos en general, convexos y cóncavos.—Contornos rectilíneos de un corto número de lados.—Problema 12.—Dividir un cuadrilátero convexo en tres partes equivalentes por líneas que partan de uno de sus vértices.**

Solucion numérica.—Sea el cuadrilátero ABCD (fig. 291) y C el vértice dado. Mídase la superficie del cuadrilátero y tómese el tercio, cuya cantidad dividida por la mitad de la perpendicular CE, nos dará la base FD, y trazando la CF, el triángulo FCD será el tercio de ABCD. Hágase una operacion análoga para trazar la CG, y el triángulo BCG será otro tercio de ABCD; el último tercio estará representado por el cuadrilátero AFCG, que midiéndole podrá servir para verificar el problema.

Soluciones gráficas.—1.ª Trácense las diagonales BD y AC (fig. 292): divídase la opuesta al ángulo C en tres partes iguales BE, EF y FD y trácense las rectas CE y CF, AE y AF, y tendremos

$$\text{BCE} = \text{ECF} = \text{CFD, y ABE} = \text{EAF} = \text{AFD};$$

de donde se deduce

$$\text{BCE} + \text{ABE} = \text{ECF} + \text{EAF} = \text{CFD} + \text{AFD};$$

ó lo que es lo mismo

$$\text{ABCE} = \text{AECF} = \text{AFCD}.$$

Tirando ahora por los puntos E y F las EG y FH paralelas á la AC y trazando las CG y CH, el cuadrilátero AGCH reemplazará al AECF, y los triángulos BGC y CHD á los cuadriláteros respectivos ABCE y AFCD, como es fácil ver en la figura, con lo que el problema quedará resuelto.

2.ª Transfórmese el cuadrilátero ABCD (fig. 293) en el triángulo equivalente ECD (581) y divídase la base ED en tres partes iguales en los puntos G y F, y trazando las CF y CG, el triángulo CFD será la primera parte, el cuadrilátero AHCF que reemplaza al triángulo CGF será segunda, la y el triángulo BHC representará la otra tercera parte.

613. **Problema 13.—Dividir un cuadrilátero cóncavo en cuatro partes equivalentes, por rectas que partan de uno de sus vértices.**

Solucion numérica.—Sea el cuadrilátero cóncavo ABCD (figura 294): la sola inspeccion de la figura manifiesta que la série de operaciones para la resolucion del problema, es la misma que en el caso de ser convexo el polígono.

Solucion gráfica.—Despues de transformado el cuadrilátero en el triángulo equivalente ECD (fig. 295) y dividida la base ED en cuatro partes iguales, se concluirá el problema como el anterior.

614. Los procedimientos númerico y gráfico que acabamos de exponer para el cuadrilátero, se hacen extensivos de un modo análogo á los polígonos que pasan de cuatro lados, y basta para ello observar la figura 296, que es un pentágono convexo dividido en tres partes equivalentes por rectas tiradas desde uno de sus vértices. La solucion numérica da á entender que despues de haber tirado las diagonales AC y CE y hallado las superficies de los triángulos ABC y CDE, ha sido preciso valerse de la altura C*a* para hallar las bases AF y EG de los triángulos ACF y CEG que hay que añadir á los AHC y CIE para que los cuadriláteros ABCH y CIED sean las terceras partes del polígono ABCDE, siendo el triángulo HCI la otra tercera parte. El procedimiento gráfico consiste en reducir el polígono á triángulo equivalente CFG (585) y dividirle en tres partes equivalentes (600).

615. **Problema 14.—Dividir un polígono cualquiera cóncavo ó convexo, en un cierto número de partes equivalentes, por rectas que partan de un punto situado en el interior ó en uno de sus lados.**

Soluciones numérica y gráfica combinadas.—Supongamos ahora que el punto O (fig. 297) que ha de ser comun á todas las partes equivalentes se halle situado en el interior del pentágono cóncavo que se ha de dividir, por ejemplo, en cuatro partes equivalentes.

Hállese la superficie del pentágono ABCDE y tómese el cuarto, con el fin de que bajando la perpendicular Oa, que podrá considerarse como el lindero comun á dos de las partes en que ha de dividirse el polígono, pueda hallarse el valor de la base aF, que suponemos sea mayor que Aa, para obtener un triángulo aOF, que represente el cuarto de la superficie del pentágono; tirando la OA y por F la FH paralela á ella, se trazará la OH y el cuadrilátero aAHO será una de las partes que se buscan; tómese aG = Fa, y repitiendo á la derecha de Oa la misma construccion que se ha hecho á la izquierda, el cuadrilátero aEIO será la otra de las dos partes que han de tener el lindero comun Oa, lo que se comprende fácilmente; y la cuestion se resolvería del mismo modo, si se hubiese puesto por condicion que el linde comun hubiera sido una oblícua al lado AE ó bien una recta OE que fuese á terminar á un vértice E.

Para hallar la tercera porcion se considerará el punto O como el vértice de un triángulo, del cual OH es uno de sus lados, y hallando la base HL y transformando el triángulo OHL en el cuadrilátero OHBM, éste representará la tercera de las partes que buscamos, siendo la cuarta y última el pentágono OMCDI, el cual puede en este caso medirse ó no, puesto que usamos de las dos soluciones combinadas.

Si el punto comun O (fig. 298) debiera hallarse situado en uno de los lados del pentágono convexo ABCDE, y se quisiese dividir éste en tres partes equivalentes, se comprende con facilidad que siguiendo una marcha idéntica á la acabada de exponer, haciendo uso de las dos soluciones simultáneamente, se hallára primero el cuadrilátero AHOE que representará la primera de las tres partes en que se trata de dividir ahora el pentágono. Tomando despues FG = GE, trazando la FO, y tirando FL paralela tambien á la OA que ha servido para la primera parte, prolongando el lado AB cuando es preciso como en el caso actual, se tendrá

$$\mathrm{FAO} - \mathrm{GAO} = \mathrm{LAO} - \mathrm{AOH} \text{ ó } \mathrm{FGO} = \mathrm{HLO},$$

y el triángulo OHL será la segunda de las tres partes que se buscan, y por lo tanto se transformará en el cuadrilátero OHBM, que representará dicha segunda parte; estándolo la tercera y última por el cuadrilátero ODCM, el que podrá ó no medirse segun convenga, para la verificacion del problema.

616. **Division en zonas paralelas.**—En la division de los

polígonos hemos considerado hasta ahora la circunstancia de la eleccion de un punto, ya situado en un vértice, en el interior de la figura ó en uno de los lados del contorno, haciendo que dicho punto sea comun á las diversas partes de terreno que resultan de la division entre varios partícipes, por la razon de que este punto pueda ser un objeto notable, como un pozo, aljibe, fuente, molino, torre.... pero otras veces no mediando esta circunstancia, la mejor figura del terreno para el cultivo, la construccion de edificios ú otra razon cualquiera de las muchas que pueden ocurrir, puede dar lugar á la division en zonas paralelas con arreglo á una direccion dada ó arbitraria, y vamos á ocuparnos de la resolucion de esta clase de problemas.

617. **Problema 15.—Dado un triángulo, tirar una recta paralela á uno de sus lados, de manera que forme con los otros dos un triángulo parcial que tenga una área dada.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 299): se trata de hallar un punto D situado en uno de los lados, por el cual tirando una recta DE paralela al lado AC, cumpla con la condicion que exige el problema. Para esto, como el nuevo triángulo que ha de resultar, y que supongamos sea el BDE, ha de ser semejante al ABC (Geom. Teor. 58), tendremos (Geom. Teor. 100)

$$ABC : BDE :: AB^2 : BD^2,$$

ó en general, haciendo $ABC = S$; $BDE = s$; $AB = L$ y $BD = l$,

$$S : s :: L^2 : l^2;$$

de donde

$$l = \sqrt{\frac{s \times L^2}{S}} = L\sqrt{\frac{s}{S}} \qquad [76].$$

Tomando á partir de B una distancia $BD = l$, y tirando la paralela DE á la AC quedará resuelto al problema.

Si se quiere evitar el trazado de la paralela, se operaría del mismo modo sobre BC para tener el punto E, que unido con el D nos determinará la recta DE; ó bien, puesto que BD es ya conocida, se tendrá BE por la proporcion

$$BA : BD :: BC : BE.$$

La longitud de la paralela DE se obtiene por la proporcion

$$BA : BD :: AC : DE.$$

2.ª Cuando no se pueda operar en el contorno y sí en el interior, se trazará la perpendicular BP, y se tratará de hallar en ella un punto G, por el cual tirando la paralela DE á la AC, esta paralela cumpla con la condicion que exige el problema. Para esto tenemos (Geom. Teor. 100)

$$ABC : BDE :: BP^2 : BG^2,$$

ó haciendo $BP = A$ y $BG = a$,

$$S : s :: A^2 : a^2;$$

de donde

$$a = \sqrt{\frac{s \times A^2}{S}} = A\sqrt{\frac{s}{S}} \qquad [77].$$

Se tomará $BG = a$, y se tendrá el punto G para trazar la paralela DE. La longitud de esta paralela se obtiene por la proporcion

$$BP : AC :: BG : DE.$$

3.ª Si s fuese una parte alícuota de S, es decir en general, si s fuese $\frac{1}{n}$ de S, tendríamos entonces estas dos proporciones:

$$S : s :: n : 1;$$
$$S : s :: L^2 : l^2;$$

de donde (Arit. 169)

$$n : 1 :: L^2 : l^2;$$

y como

$$l^2 = \frac{L^2}{n} = \frac{L}{n} \times L,$$

se tendrá tambien

$$L : l :: l : \frac{L}{n} \qquad [78].$$

Lo que nos dice que se obtendrá la longitud $BG = l$, hallando una media proporcional geométrica entre L y $\frac{L}{n}$. Por lo tanto si s debiera ser $\frac{1}{3}$ de S, se hallaría la media proporcional geométrica entre la longitud de L y su tercera parte $\frac{L}{3}$. Este último procedimiento es, como se observa, independiente del conocimiento de las superficies, bastando saber la relacion que se quiere que exista entre ellas.

Solucion gráfica.—La solucion geométrica exige la condicion de que s sea una parte alícuota de S; y el procedimiento está reducido á hallar gráficamente la media proporcional entre L y $\frac{L}{n}$ (Geom. Probl. 28). La demostracion sería la misma que en la tercera solucion numérica, sólo que en las proporciones entrarían las líneas, en vez de los valores numéricos. Cuando se puede operar en el exterior, se hace la construccion sobre la misma figura. Sea el triángulo ABC = S (fig. 300), y supongamos que la parte s que se quiere separar sea el tercio de S. Divídase AB en tres partes iguales en los puntos D y E; y para hallar la media proporcional entre AB y BE $= \frac{AB}{3}$, se describe sobre AB como diámetro una semicircunferencia, se levanta en el punto E la perpendicular Ea y se traza la Ba, y ésta será la media proporcional, la cual se llevará sobre la BA, haciendo centro en B y describiendo un arco de círculo con el rádio Ba, hasta encontrar á AB en el punto F, por el cual se trazará la paralela FG á la AC y el problema quedará resuelto, siendo el triángulo FBG el tercio del ABC. En esta solucion gráfica, como en la tercera numérica, sólo será preciso conocer la relacion de las superficies ABC y BFG.

Cuando la parte que se ha de tomar en el triángulo ABC (figura 299) está representada por otro triángulo abc, se hallarán dos medias proporcionales, una x entre la base AC y la altura BP del triángulo ABC y otra z entre la base ac y la altura bp del abc; y como la parte que ha de tomarse en el triángulo ABC y que ha de resultar semejante al triángulo abc, ha de ser un triángulo tal como el BDE semejante al ABC, resulta que x y z serán dos de sus líneas homólogas; por lo que hallando una cuarta proporcional á x, z y AB se obtendrá el valor de BD, y la paralela DE resolverá la cuestion.

Segun se hallen aritmética ó geométricamente las medias y cuartas proporcionales, así la solucion será numérica ó gráfica.

618. **Problema 16.—Dividir un triángulo en partes equivalentes.**—El problema que acabamos de resolver, suministra el medio de dividir un triángulo cualquiera en varias partes equivalentes, desiguales ó proporcionales, advirtiendo que las soluciones serán numéricas ó gráficas segun se proceda aritmética ó geométricamente en la determinacion de los valores.

Para dividir un triángulo ABC (fig. 300) en n partes equivalentes, se dividirá BA = L en n partes iguales BE, ED..... y llamando l, l', l''..... á las medias proporcionales Ba, Bb.... se tendrán las proporciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} L : l :: l : \dfrac{1}{n} L; \\ L : l' :: l' : \dfrac{2}{n} L; \\ L : l'' :: l'' : \dfrac{3}{n} L; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} [79];$$

tomando los valores de l, l', l''..... á partir de B en el lado BA, que supongamos sean BF, BL... y trazando las paralelas FG, LM... se tendrá resuelto el problema.

Para dividir el mismo triángulo ABC en partes desiguales, como estas han de ser conocidas, llamándolas s, s', s''.... y S al triángulo ABC, tendremos las proporciones

$$S : s :: L^2 : l^2$$
$$S : s' :: L^2 : l'^2$$

Hallando los valores de l, l'.... y tomando las partes BF, BL.... que los representen, y trazando las paralelas FG, LM.... quedará resuelto el problema.

Por último, para dividir el mismo triángulo en partes proporcionales, despues de hallado el valor de cada una, segun sabemos, valiéndonos de la série de razones iguales

$$s : m :: s' : n :: s'' : p :: \ldots.$$

se continuará como en el caso anterior de partes desiguales.

En el caso de dividir el triángulo en dos partes proporcionales á los números m y n, tendremos

$$s : m :: s' : n;$$

de donde

$$s + s' = S : m + n :: s : m,$$

y

$$s = S \times \frac{m}{m+n},$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{s}{S} = \frac{m}{m+n}.$$

Sustituyendo el valor de $\frac{s}{S}$ en la fórmula [76] resultará

$$l = L\sqrt{\frac{m}{m+n}} \quad [80],$$

y un caso particular de esta cuestion será el expuesto anteriormente de dividir un triángulo en partes equivalentes. En efecto, supongamos que el triángulo ABC se quiere dividir en tres partes equivalentes; se tendria para la primera:

$$\frac{s}{S} = \frac{m}{m+n} = \frac{1}{3}, \text{ y } l = BF = L\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{L}{3}\sqrt{3}.$$

Para la segunda, se tendria $\frac{s}{S} = \frac{m}{m+n} = \frac{2}{3}$, y

$$l' = BL = L\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{L}{3}\sqrt{2}\ \sqrt{3}.$$

Para comprobacion debe ser tambien ACML el tercio de ABC.

Para el caso de dividirle en cuatro partes equivalentes se tendrian los siguientes valores:

$$l = \frac{L}{2}; \qquad l' = \frac{L}{2}\sqrt{2}; \qquad l'' = \frac{L}{2}\sqrt{3}.$$

Esta solucion numérica es por lo tanto la misma que se obtiene por la fórmula [76], haciendo sucesivamente $\frac{s}{S} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ y por las proporciones [79] haciendo $n = 4$.

619. **Problema 17.—Dado un trapecio, tirar una recta paralela á las bases tal, que el trapecio parcial que forme con la base menor ó mayor y los lados del trapecio, tenga una área dada.**

Solucion numérica.—Sea AECD (fig. 301) el trapecio á cuya superficie llamaremos S; EC su base mayor$=$B; AD su base menor $= b$, y AF su altura $= a$; sea GP $= x$ la recta que buscamos, la cual ha de separar una superficie s adyacente á la base menor b ó una superficie s' adyacente á la base mayor B.

Para hallar la expresion de x cuando se quiere separar del trapecio AECD una parte AGPD $= s$ adyacente á la base menor b, tendremos primero

$$s = \frac{x + b}{2} \times \mathrm{AH} \qquad [81];$$

Como la altura AH es una incógnita, se determinará su valor trazando la AL paralela á DC, y los triángulos semejantes AGR y AEL nos darán la proporcion

$$\mathrm{EL} : \mathrm{GR} :: \mathrm{AF} : \mathrm{AH};$$

ó lo que es lo mismo

$$\mathrm{B} - b : x - b :: a : \mathrm{AH} = \frac{a\,(x - b)}{\mathrm{B} - b}.$$

Sustituyendo el valor de AH en la ecuacion [81] y efectuando operaciones, tendremos

$$s = \frac{a\,(x^2 - b^2)}{2\,(\mathrm{B} - b)} \qquad [82].$$

Despejando x en esta ecuacion, resulta

$$x = \sqrt{b^2 + \frac{\mathrm{B} - b}{a} \times 2s} \qquad [83];$$

con lo que se tiene el valor de la línea divisoria GP, que hemos llamado x, en funcion de las bases y altura del trapecio total dado y de la parte conocida s que se quiere separar adyacente á la base menor b.

Para hallar ahora la expresion de esta misma línea $x =$ GP, cuando se quiere separar del trapecio AECD una parte EGPC$=s'$ adyacente á la base mayor B, tendremos primero

$$s' = \frac{\mathrm{B} + x}{2} \times \mathrm{FH} \qquad [84].$$

Como la FH es una incógnita, se determinará su valor observando que se tiene

$$\mathrm{FH} = \mathrm{AF} - \mathrm{AH} = a - \frac{a\,(x-b)}{\mathrm{B}-b} = \frac{a\,(\mathrm{B}-x)}{\mathrm{B}-b}\ .$$

Sustituyendo este valor de FH en la ecuacion [84] y efectuando operaciones, tendremos

$$s' = \frac{a\,(\mathrm{B}^2 - x^2)}{2\,(\mathrm{B}-b)} \qquad [85];$$

y despejando x en esta ecuacion, se obtiene

$$x = \sqrt{\mathrm{B}^2 - \frac{\mathrm{B}-b}{a} \times 2s'} \qquad [86];$$

con lo que se tiene tambien el valor de la línea divisoria GP $= x$ en funcion de las bases y la altura del trapecio total dado y de la parte conocida s' que se quiere separar, adyacente á la base mayor B.

620. Una vez conocido el valor de x, se tomará en la base mayor CE (fig. 301) una parte CM $= x$; por el punto M se trazará la MG paralela á la CD, y tirando por último por el punto G la GP paralela á EC, se tendrá la línea divisoria que se buscaba.

Si se quiere evitar el trazado de la paralela GM, se puede determinar la AG á que llamaremos y, observando que los triángulos semejantes AGR y AEL dan la proporcion

$$\mathrm{EL} : \mathrm{GR} :: \mathrm{AE} : \mathrm{AG};$$

ó lo que es lo mismo, llamando ahora l al lado AE,

$$\mathrm{B} - b : x - b :: l : y;$$

de donde

$$y\,(\mathrm{B}-b) = (x-b)\,l :$$

eliminando x entre esta ecuacion y la [83], y despejando y resulta

$$y = l \times \frac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{\mathrm{B}-b}{a} \times 2s}}{\mathrm{B}-b} \qquad [87].$$

Tomando en el lado AE una longitud AG $= y$, se trazará la paralela GP á la EC.

Puesto que se tiene trazada y conocida la altura AF para la determinacion de la superficie del trapecio AECD, se podrá buscar en ella el punto H para tirar por él la paralela GP á la EC.

Para esto, como ya se conoce el valor de dicha paralela GP, las superficies de los trapecios AGPD y GECP serán

$$AGPD = \frac{AD + GP}{2} \times AH;$$

$$GECP = \frac{GP + EC}{2} \times HF;$$

de donde despejando las alturas AH y HF, tendremos

$$AH = \frac{2AGPD}{AD + GP} \quad [88], \quad \text{y} \quad HF = \frac{2GECP}{GP + EC} \quad [89];$$

y tomando en la AF las magnitudes AH ó HF, segun que el trapecio parcial que se tome sea adyacente á la base menor ó á la mayor, se tendrá conocido el punto H.

Como se hallaría tambien fácilmente AF $= \dfrac{2AECD}{AD + EC}$, tendremos como comprobacion iguales los valores numéricos de AF y AH + HF, así como los de

$$\frac{2AECD}{AD + EC} \text{ y } \frac{2AGPD}{AD + GP} + \frac{2GECP}{GP + EC}.$$

Ejemplo numérico.—Supongamos que el trapecio AECD tiene de superficie 11160 metros cuadrados, que su altura AF es de 72 metros, su base mayor es EC =230 metros, y la menor AD = 80 metros, y que se quiere separar una superficie de 2520 metros cuadrados, adyacente á la base menor AD, representada por el trapecio AGPD. La fórmula [83] nos da

$$GP = \sqrt{80^2 + \frac{230 - 80}{72} \times 2 \times 2520} = 130 \text{ metros.}$$

Restando de 11160 metros cuadrados los 2520 metros cuadrados, se tendrán 8640 metros cuadrados para el valor de la parte adyacente á la base mayor EC, representada por el trapecio GECP.

Si se hubiera querido separar desde luego esta parte, hubiéramos hallado para GP el mismo valor de 130 metros, valiéndonos de la fórmula [86], pues sustituyendo en ella por las letras sus valores, resulta

$$GP = \sqrt{230^2 - \frac{230 - 80}{72} \times 2 \times 8640} = 130^m.$$

Para hallar las alturas AH y HF, las fórmulas [88] y [89] dan

$$AH = \frac{2 \times 2520}{80 + 130} = 24^m; \qquad HF = \frac{2 \times 8640}{130 + 230} = 48^m.$$

Como comprobacion tenemos

$$AF = AH + HF = 24 + 48 = 72 \text{ metros.}$$

621. **Division del trapecio en partes proporcionales.**—Si se quiere dividir el trapecio AECD en dos partes que se hallen en la razon de m á n, por medio de una paralela á las bases, tendremos

$$\frac{s}{s'} = \frac{m}{n} \quad \text{ó} \quad \frac{s}{S} = \frac{m}{m+n};$$

ó sustituyendo en vez de S su valor en funcion de a, B y b, y despejando $2s$, resulta

$$2s = \frac{am\,(B+b)}{m+n};$$

y poniendo por $2s$ su valor en la ecuacion [83], tendremos, despues de verificadas todas las transformaciones,

$$x = \sqrt{\frac{mB^2 + nb^2}{m+n}} \qquad [90].$$

Despues de haber enseñado á tomar en un trapecio una superficie dada y á dividirle en dos partes proporcionales á dos números dados por medio de una paralela á las bases, se comprenderá fácilmente, en atencion á la marcha seguida para el triángulo en este caso del paralelismo, la manera de dividir el trapecio en varias partes iguales, desiguales ó proporcionales á números dados, por lo que no nos detendremos en la resolucion de estos problemas. Pasaremos por lo tanto á la division de un polígono cualquiera en partes equivalentes por medio de rectas paralelas entre sí, no deteniéndonos más que en este caso, por las mismas consideraciones que acabamos de exponer.

622. **Problema 18.—Dividir en general un polígono cualquiera en un cierto número de partes equivalentes, por medio de rectas paralelas entre sí.**

Solucion numérica.—Sea el polígono ABCDE (fig. 302) que se quiere dividir, por ejemplo, en tres partes equivalentes. Hállese su superficie, y dividiéndola por 3 se tendrá el valor de una de las partes. Para determinar estas partes en la figura, trácese por el vértice A una recta cualquiera AH y por los demás vértices C y E las CF y EG paralelas á la AH, con lo que el polígono quedará dividido en triángulos y trapecios. Para hallar la primera parte, mídase el triángulo ABH, y si su área es mayor que el tercio del polígono, se trazará una recta *mn* paralela á AH que separe en el triángulo ABH una parte B*mn* igual á dicho tercio (617): si el triángulo ABH fuese menor que este tercio, añádasele el trapecio AH*rp*, que se obtendrá trazando una paralela *pr* á la AH que separe en el trapecio AHCF una parte AH*pr* adyacente á la base menor AH (619) [83], igual á lo que faltaba al triángulo ABH para ser el tercio del polígono, y se tendrá representada por el cuadrilátero AB*rp* la primera parte de las tres en que se quiere dividir el pentágono ABCDE.

Para hallar la segunda, se medirá el trapecio *pr*CF, y si no fuese igual al tercio del polígono, menor por ejemplo, se trazará una paralela *st* que separe en el trapecio FEGC una parte FC*ts* adyacente á la base mayor FC (619) [86], igual á lo que le faltaba al trapecio *pr*CF para valer el tercio del polígono, y el pentágono *pr*C*ts* representará la segunda de las tres partes que buscamos.

Para comprobacion se medirá el cuadrilátero *st*DE compuesto del trapecio *st*GE y del triángulo EGD, que es la figura que queda para representar la última tercera parte del polígono propuesto y que deberá ser igual á dicho tercio.

Si se pusiese por condicion que las paralelas que han de dividir el polígono en zonas tuviesen una direccion determinada, es decir, fuesen paralelas á una recta dada, en vez de tirar de un modo arbitrario la primera recta AH, se trazará paralela á la recta dada.

623. **Contornos rectilíneos de un gran número de lados.**—Cuando los polígonos tienen muchos lados, pero éstos son de bastante longitud, pueden abreviarse las operaciones de

la division, procediendo de la manera que vamos á exponer: para lo cual consideraremos el caso más sencillo de la division en dos partes, reasumiendo todos los casos análogos á los expuestos hasta aquí, en el problema general siguiente, en el cual hacemos uso solamente de las soluciones numérias.

624. **Problema 19.—Dividir un polígono en dos partes equivalentes, desiguales ó proporcionales á dos números dados** m **y** n, **por medio de una recta tirada desde uno de sus vértices, ó por un punto situado en uno de sus lados, ó bien por medio de una recta paralela á uno de sus lados.**

Sea primero dividir el polígono ABC...H (fig. 303) en dos partes equivalentes por una recta tirada desde el vértice H. Divídase en triángulos a, b, c.... desde este vértice, hállese la superficie de cada uno y súmense para tener la del polígono. Entónces si $a + b + c$, por ejemplo, es la suma inmediatamente inferior á la mitad que se trata de separar se hallará la diferencia, y se tomará en el triángulo siguiente HCD una parte r igual á esta diferencia por medio de una recta HM á patir del vértice H (593), y esta línea HM resolverá el problema. Para comprobacion se verá si es tambien $e + d + s$ igual á la mitad del polígono.

Cuando la línea divisoria ha de partir de un punto Z situado en un lado AH, el procedimiento no varía esencialmente.

625. Si el polígono se ha de dividir en dos partes iguales en superficie por medio de una recta paralela al lado AI (fig. 304), se trazará por el punto B, por ejemplo, una paralela BM á la AI, y se hallará la superficie de la parte del polígono ABMHI, descomponiéndola, por ejemplo, en triángulos, y la de la parte BCDEFGM descomponiéndola tambien en triángulos, ó en triángulos y trapecios como se vé en la figura, para sumar sus áreas y tener la total del polígono, la que se dividirá por 2. Hecho esto, si la parte ABMHI no equivale á la mitad del polígono y es, por ejemplo, menor, se trazará por G la GR paralela á la BM, y se tomará en el trapecio BMGR la parte BmnM, adyacente á la base mayor BM (619) [86], y la recta mn paralela á la BM será la que dividirá al polígono en dos partes equivalentes.

De un modo análogo se procederá en la division en dos partes desiguales, cuyos valores numéricos deben darse de antemano, así como en la division en dos partes que se hallen en la relacion de m á n, las que tambien hay que determinar primero segun hemos ya visto en los demás casos de esta especie.

626. **Contornos curvilíneos y mistilíneos.** —Cuando los contornos están formados de muchos lados y es pequeña además la magnitud de éstos, ó bien cuando son curvilíneos ó mistilíneos, en cuyos casos pueden considerarse como polígonos irregulares de infinito número de lados, podemos hacer uso de la circunscripcion ó inscripcion de un polígono de menor número de lados para determinar la superficie total de la figura en cuestion. Una vez hallada ésta, así como el valor de las partes iguales, desiguales ó proporcionales en que haya de dividirse, y señalado el punto por donde haya de trazarse la línea divisoria, bien que sea un vértice ó se halle situado en el contorno ó en el interior, ó bien que dicha recta se haya de trazar paralelamente á una direccion dada ó á arbitrio, en todos los casos no habrá más que seguir exactamente la marcha trazada hasta aquí en la série de operaciones expuestas, cuidando de aprovechar siempre las circunstancias favorables que puedan conducir, en los diferentes casos que se presentan en la práctica, á soluciones más prontas y más sencillas.

627. De igual manera se procede para resolver el problema importante siempre de añadir ó quitar á una tierra una parte, para tomarla de otra colindante ó cederla á esta, valiéndonos de los problemas anteriores, en particular de los 1.º (593) y 17 (619), pues en el caso de la figura 305, en que el contorno *abcd* es bastante irregular, despues de haberle circunscrito un polígono ABCDE y de haber trazado una recta *mn* que á ojo parezca que dará la parte *obcp* que se quiera separar de la tierra M, se hallará la verdadera superficie de esta parte, hallando la del polígono *mn*DCB y restando de ella la superficie comprendida entre el contorno rectilíneo del polígono y el curvilíneo de la tierra M. Si el resultado no es igual á la parte que se ha de quitar de dicha tierra, se hallará la diferencia, la que se añadirá ó quitará de la *obcp*, por medio de triángulos como el *ors*, ó por paralelas como *et* considerando á la figura *opte* como paralelógramo ó rectángulo segun la forma y direccion de las líneas *oe* y *pt* en cuyo caso, tomando la *op* como base, se hallará la altura *xz*, ó bien, prévio el trazado de una paralela auxiliar *fg*, hallar la superficie del trapecio *opgf*, y por el problema 17 (619) determinar la recta *et* que forme con la base *op* el trapecio parcial *opte* que exprese la diferencia que se ha de quitar ó añadir segun los casos,

haciendo las construciones por la parte de la recta op que sea conveniente para satisfacer á las condiciones que han de llenarse.

628. En el caso de ser las líneas del contorno de la tierra, aunque sinuosas, que puedan considerarse como rectas sin error de consideracion como en la figura 306, se podrá añadir á la tierra ABCDEF el triángulo BsC tomando la BC por base y hallando la altura rs ó quitarle una parte AmnF tomándola por un rectángulo, siendo AF la base y determinando la altura ab. Si se hubiera de quitar dicha parte por el lado de la ED, pudiera esta considerarse como la base de un paralelógramo EDdc cuya altura ef se hallaría.

629. **Division de los solares.**—Cuando en el terreno que se trata de dividir hay que establecer construcciones, es necesario que los solares que resultan sean figuras que presenten ángulos rectos, especialmente en las líneas de fachada, tanto para la mayor solidez de los edificios como para su mejor distribucion.

Supongamos, por ejemplo, que el cuadrilátero ABCD (fig. 307) es un terreno que se quiere dividir en cuatro solares, siendo AB la linea de fachada. Se trazará una línea PQ á arbitrio en sentido de la longitud de la figura y paralela á la línea AB, la que se marca en el terreno plantando piquetes en los puntos P y Q; se mide esta línea y se divide en cuatro partes iguales, trazando por los puntos de division las perpendiculares EH, YF y GK á la PQ, para fijar aproximadamente las dimensiones de cada uno de los cuatro solares, que suponemos han de ser iguales en superficie. Hecho esto, se hallará la superficie total del cuadrilátero ABCD y dividiéndola por 4 se tendrá la cabida que ha tener cada uno de los solares. Se medirá la primera parte ADHE, y si se supone que tiene menos superficie que el cuarto de ABCD, se tomará del trapecio siguiente HEFY la parte HmnE que le falte adyacente á su base menor HE valiéndose de la fórmula [83] (619), y el primer solar estará representado por el cuadrilátero ADmn. Mídase ahora la superficie mYFn y si tambien es menor que el cuarto de ABCD, se seguirá el mismo procedimiento para añadirle la parte YpqF y así sucesivamente, y se tendrán los cuatro solares de igual superficie ADmn, $mpqn$, $prsq$ y rCBs (622). De un modo análogo se resolvería el problema si los solares hubieran de ser desiguales, ó proporcionales á números dados, ateniéndonos á las observaciones expuestas (607).

630. Mr. J. Regnault resuelve este problema en su curso prác-

tico de Agrimensura, siguiendo el procedimiento que se vé en el siguiente

Ejemplo númerico.—Sea el cuadrilátero anterior ABCD (figura 307), en el que se suponen practicadas las construcciones anteriores de trazar la PQ y las perpendiculares dichas por los puntos de division. Sea la medida de PQ=76,^{m} 48 y por consiguiente su cuarto 19,^{m} 12.

La primera parte DAEH, siendo un cuadrilátero cualquiera, se le divide en dos triángulos para conocer su superficie, para lo cual se miden las líneas DA, AE, EH, HD y DE, y lo mismo se hace para hallar la cuarta parte representada por el cuadrilátero KGBC, midiendo las líneas GB, CB, CK, KG y CG. En cuanto á las partes HEFY y FYKG que son dos trapecios, se miden sus bases paralelas y se multiplica su semisuma por su distancia.

Una vez tomadas todas la medidas sobre el terreno, se procede á las operaciones del cálculo de la manera siguiente.

La primera parte se compone de los dos triángulos DAE y DEH:

La superficie del triángulo DAE es igual (411) á

$$\sqrt{36,45 \times 10,55 \times 23,45 \times 2,45}$$
$$= \sqrt{22093,365} = 148,7 \text{ m}^2 = 1,49 \text{ áreas}.$$

La superficie del triángulo DEH es igual á

$$\sqrt{41,40 \times 18,40 \times 7,40 \times 15,60}$$
$$= \sqrt{87937,512} = 296,54 \text{ m}^2 = 2,97 \text{ áreas}.$$

Superficie de la primera parte = 4,46 áreas.

La segunda parte está representada por el trapecio HEFY; se suman las dos líneas HE y FY y se multiplica la mitad de la suma por 19,^{m} 12, lo que da

$$\frac{25,80 + 27,90}{2} \times 19,^{m}\ 12 = 513,^{m}\ 37 = 5,13 \text{ áreas}.$$

La tercera parte está representada por el trapecio FYKG; se suman las dos líneas YF y KG y se multiplica la mitad de la suma por 19,^{m} 12, lo que nos da

$$\frac{27{,}90 + 29{,}50}{2} \times 19{,}^{\mathrm{m}}12 = 548{,}^{\mathrm{m}}74 = 5{,}49 \text{ áreas.}$$

Por último, la cuarta parte se compone de los dos triángulos KGC y GBC;

La superficie del triángulo KGC es igual á

$$\sqrt{46{,}80 \times 17{,}30 \times 22{,}10 \times 7{,}40}$$

$$= \sqrt{19682{,}3456} = 363{,}87 \text{ m}^2 = 3{,}6387 \text{ áreas.}$$

La superficie del triángulo GBC es igual á

$$\sqrt{43{,}60 \times 29{,}20 \times 4{,}20 \times 10{,}20}$$

$$= \sqrt{54540{,}42} = 233{,}53\text{m}^2 = 2{,}3353 \text{ áreas.}$$

$$5{,}9740 \text{ áreas.}$$

y despreciando las dos últimas decimales, la superficie de la cuarta parte será 5,97 áreas.

Sumando las cuatro partes, se tendrá la superficie total de la figura ABCD, que será

$$4{,}^{\mathrm{a}}46 + 5{,}^{\mathrm{a}}13 + 5{,}^{\mathrm{a}}49 + 5{,}^{\mathrm{a}}97 = 21{,}^{\mathrm{a}}05\,;$$

y como cada solar ó lote debe ser el cuarto de esta superficie, equivaldrá á $5^{\mathrm{a}},26$.

La primera parte siendo $4.^{\mathrm{a}}46$ le faltan $0,^{\mathrm{a}}80$ para ser $5^{\mathrm{a}},26$.

La segunda parte siendo $5,^{\mathrm{a}}13$ le faltan $0,^{\mathrm{a}}13$ para ser $5^{\mathrm{a}},26$.

La tercera parte siendo $5,^{\mathrm{a}}49$ le sobran $0,^{\mathrm{a}}23$ para ser $5^{\mathrm{a}},26$.

La cuarta parte siendo $5,^{\mathrm{a}}97$ le sobran $0,^{\mathrm{a}}71$ para ser $5^{\mathrm{a}},26$.

Para igualar cada una de estas partes al valor $5,^{\mathrm{a}}26$ que ha de tener cada lote, se procederá de este modo.

Para la 1.ª parte que tiene de menos $0,^{\mathrm{a}}80$, se tomará esta cantidad de la 2.ª parte, por medio de una paralela *mn* á la línea HE. Mas para hallar la anchura E*n* de la zona que hay que añadir, es preciso no contentarse con dividir esta superficie por la línea HE, en atencion á que la línea *mn* que se quiere determinar tendrá una longitud tanto mayor cuanto mas se aleje de la línea HE.

Para hallar la cantidad constante en que va aumentando la HE á medida que se separa de su posicion primitiva ó que se aproxima á YF para convertirse en la *mn*, se formará la proporcion siguiente:

Entre YF y HE hay una diferencia de 2,^{m} 10 para una superficie de 5,^{a}13, ¿cuál será la diferencia entre HE y *mn* para una superficie de 0,^{a}80? es decir,

$$5,^{a}13 : 2,^{m}10 : : 0,^{a}80 : x = 0,^{m}32.$$

Para tener la longitud de *mn*, se añadirá 0,^{m} 32 á la longitud de HE, lo que dá 26,^{m} 12. Se sumarán las dos líneas HE y *mn* y se obtendrá 51,^{m} 92, cuya mitad es 25,^{m} 96 y dividiendo la superficie 0,^{a}80, que es un trapecio por 25,^{m} 96, que es una de las dimensiones, el cociente 3,^{m} 08 expresará la anchura de la zona que hay que tomar de la segunda parte HYFE para añadirla á la primera ADHE y tener así el primer cuarto ó lote AD*mn* de 5,^{a}26. Así, en lugar de la medida 19,^{m} 12 tomada sobre la PQ, se tomará 19,^{m} 12 + 3,^{m} 08 = 22,^{m} 20 y por el nuevo punto de division se trazará una perpendicular á la AB ó á su paralela PQ, la cual será la *mn* que es la primera línea de separacion.

Para hallar el 2.° cuarto ó lote, se observará que siendo la 2.ª parte HEFY de 5,^{a}13 y habiéndola quitado 0,^{a}80 para formar el primer cuarto ó lote, queda reducida á 4,^{a}33 y como debe contener 5,^{a}26 le falta 0,^{a}93 que es preciso tomar de la 3.ª parte FYKG para componer dicho segundo lote. Para hallar la anchura de la zona que hay que tomar de la 3.ª parte expresada, se seguirá el mismo método, hallando la cantidad en que debe aumentarse YF al aproximarse á KG, para convertirse en la *pq*, que ha de ser la segunda línea de separacion, para lo cual tendremos la siguiente proporcion:

Entre YF y KG hay una diferencia de 1,^{m} 60 para una superficie de 5,^{a}49, ¿cuál será la diferencia entre YF y *pq* para una superficie de 0,^{a}93?, ó lo que es lo mismo

$$5,^{a}49 : 1,^{m}60 : : 0,^{a}93 : x = 0,^{m}27.$$

Para tener la longitud de *pq* se añadirá 0,^{m} 27 á la de YF, lo que dará 28,^{m} 17. Sumando las dos rectas YF y *pq*, y tomando la mitad de la suma se encuentra 28,^{m} 03 y dividiendo por esta cantidad la superficie 0,^{a}93, se obtiene la anchura de la zona que hay que tomar de la tercera parte YFGK para añadirla á la figura *mn*FY y tener así el segundo cuarto ó lote *mpqn* de 5,^{a}26 tambien. Hecha esta division, se halla por cociente 3,^{m} 31 y siendo la distancia entre las líneas HE y FY tomada sobre la línea PQ de 19,^{m} 12, es preciso restar de ella 3,^{m} 08 y añadir al resultado

3,^{m} 31, lo que dará la distancia 19,^{m} 35 entre las dos líneas *mn* y *pq*. Trazando por el nuevo punto de division una perpendicular á la AB ó á su paralela PQ se tendrá la *pq* que es la segunda línea de separacion.

Para hallar el tercer cuarto ó lote, se observará que siendo la tercera parte FYKG de 5,^{a}49 y habiéndola quitado 0,^{a}93 para formar el segundo cuarto ó lote, queda reducida á 4,^{a}56 y como debe contener 5,^{a}26, le falta 0,^{a}70 que es preciso tomar de la 4.^{a} parte HGBC para componer dicho tercer lote. Operando como lo hemos hecho en los dos lotes anteriores, buscaremos la cantidad que hay que aumentar á la KG para que se convierta en la *rs* por medio de la proporcion

$$5,^a97 : 3,^m 90 : : 0,^a70 : x = 0,^m 45.$$

Añadiendo, pues, 0,^{m} 45 al valor de KG, se tendrá *rs*=29,^{m} 95 y sumando los valores de KG y *rs*, y tomando la mitad se obtiene 29,^{m} 72. Se dividirá 0,^{a}70 por 29,^{m}72, y se obtendrá por cociente 2,^{m} 32 que es la anchura de la zona que hay que tomar de la 4.^{a} parte KGBC para componer el tercer lote, y tomando sobre la PQ y á partir de la GK la cantidad 2,^{m} 32 y trazando por el nuevo punto de division una perpendicular á la PQ, se tendrá la *rs* que es la tercera línea de separacion. La distancia entre las líneas *pq* y *rs* será por lo tanto igual á

$$19,^m 12 - 3,^m 31 + 2,^m 32 = 18,^m 13.$$

Obtenidos ya los tres lotes AD*mn*, *mpqn* y *prsq*, el cuadrilátero restante *r*CB*s* representará el cuarto lote, y para comprobacion se restará de la 4.^{a} parte KGBC que es de 5,^{a}97, la cantidad 0,^{a}70 que se tomó para el tercer lote, y resulta en efecto 5,^{a}27 que debe contener tambien el cuarto lote, con la diferencia de una centiárea por exceso, pues siempre es inevitable alguna pequeña diferencia. La distancia entre las líneas *rs* y CB será igual á

$$19,^m 12 - 2,^m 32 = 16^m 80.$$

Por los mismos métodos acabados de emplear, se procederá á la division de cualquier solar, cualquiera que sea su figura.

631. **Division de las dehesas.**—Como este problema no difiere del anterior de division de los solares, sino en ser las dimensiones de aquellas mayores que las de estos, se seguirán los mismos

métodos en su resolucion, para dividirlas en *suertes* ó *lotes*, *cuarteles* ó *tranzones*.

Los hacendados que dan sus dehesas ó tierras en arrendamiento, tienen la costumbre de dividir sus terrenos en zonas ó fajas de igual anchura, las que á su vez dividen en porciones ó trozos del mismo ó distinto número de áreas ó de hectáreas, á las que dan el nombre de *lotes*, *suertes*, *tranzones* ó *cuarteles*. Estos lotes, numerados, anotada su cabida, y amojonándolos bien para que se distingan unos de otros, pueden arrendarlos, evitándose la repeticion de frecuentes medidas, y sirviéndoles para siempre la division primitiva.

Sea, por ejemplo, la dehesa ABCD (fig. 308). Se trazará en la direccion que sea más conveniente una recta EF que la atraviese, y que medida con exactitud supongamos que tiene 800 metros y tratemos de dividir la posesion en 5 fajas ó zonas. Se divide 800 por 5, y resultan 160 metros. Tomando esta medida cinco veces en la línea EF, quedará dividida la posesion en cinco fajas, y además sobrarán las porciones *opq* y *rst*. Para dividir las fajas en lotes ó suertes de 5 hectáreas cada una, se reducirán las 5 hectáreas á metros cuadrados, que son 50000, y partiendo este número por 160, se tendrán 312,^{m}5. Tomando en las perpendiculares *cc'*, *ee'*... y á partir de la EF, distancias como *ox*, *oh*... iguales á 312 metros y medio, y trazando paralelas á la EF, se tendrán las zonas divididas en lotes de á 5 hectáreas, escepto las porciones próximas á los contornos muy irregulares, las que habrá que medir por separado, tales como las A*abc*, *cbde*... *opq* y *rst*. Sin embargo, si se quisiesen formar todas las suertes posibles de 5 hectáreas, una vez medida la suerte irregular *Aabc*, si suponemos que vale menos, se le añadirá lo que la falte, tomando la diferencia de la parte *cbde* por medio de la paralela *mn* á la *cb*, y por los métodos que ya se conocen. Numeradas todas las suertes que contienen 5 hectáreas completas, así como las que resulten con menos por ser las últimas porciones á las que nada puede añadirse, quedará concluido el trabajo.

632. En cuanto hemos dicho se ha sobreentendido que todo el terreno objeto de la division era de la misma calidad, pudiéndose aplicar además todos los procedimientos explicados para la division de polígonos en partes iguales, desiguales ó proporcionales á números dados, y reuniendo además la condicion de que todas las suertes participen de algun objeto que sea notable, como una

fuente, un pozo, una vereda, un molino, etc., ya esté situado en el interior de la tierra ó en uno de sus linderos, ó bien estando el terreno ó heredad compuesto de trozos de distinta calidad, será preciso que el Agrimensor procure que todos participen del buen terreno y del malo, ó bien que al que se le dé mejor terreno se le dé menos cantidad que al que le toque malo, de modo que haya compensacion á fin de que todos reciban igual valor, de donde se deduce que en los terrenos de diferentes calidades, para dividir su valor en partes iguales, las porciones habrán de ser desiguales, y tambien podrá suceder que habiendo de dividir un terreno compuesto de partes de distinta calidad, por ser la division en partes desiguales ó proporcionales, vengan á resultar iguales los pedazos de tierra, pues si en efecto, una tierra estuviese compuesta de dos porciones iguales que la una fuese de calidad doble mejor que la otra, y hubiera que partirla entre dos herederos con la condicion de que el uno recibiera doble valor que el otro, bastaría dar al primero la mitad que tenia doble valor y al segundo la otra mitad. Todo esto hace ver cuánta instruccion, paciencia y recursos en la ciencia y en la práctica han de acompañar á un buen Agrimensor para llenar con exactitud y conciencia su cometido. Nos ocuparemos, por lo tanto, á pesar de cuantas cuestiones hemos resuelto sobre este particular, de la resolucion de los siguientes problemas númericos que abrazan varios de los casos que acabamos de enumerar y para que se comparen los métodos numéricos y gráficos qúe ahora seguiremos, con los empleados en otros casos de igual naturaleza.

633. **Problema 1.°—Se quiere dividir una dehesa en cuatro partes iguales, tales que todas participen del punto O (Fig. 309), que puede ser un pozo, casa, fuente ú otro objeto cualquiera de utilidad para todos los propietarios.**

Medida toda la heredad, y suponiendo que tiene 126 hectáreas, se dividirá este número por 4, y corresponderá á cada parte 31,5 hectáreas que reducidas á metros cuadrados resultan 315000 m^2. Trácense desde el punto O dos rectas OC y OD que comprendan el espacio que parezca podrá contener poco más ó menos las 31,5 hectáreas, y mídase la superficie de esta porcion OCD, que supondremos resulta ser de 30 hectáreas, es decir, que tiene 1,5 hectáreas de menos, cuya cantidad habrá que añadir á la porcion OCD. Se reducirá 1,5 hectáreas á metros cuadrados, que da 15000 m^2, y se medirá la OD que supongamos tiene 500 metros, y ha de servir de base del triángulo que se ha de añadir á la porcion OCD. Se dividirá, pues, 15000 por 500, y resultará 30 metros, que será la mitad de la altura de dicho triángulo, por lo que doblando esta cantidad y levantando en el extremo D de la OD una perpendicular DN de 60 metros de longitud, y trazando la paralela NE á la OD, no habrá más que tirar por el punto E donde encuentra á la linde y el punto O la OE, y se tendrá la parte OED próximamente igual á un triángulo de 1,5 hectáreas, cuya altura es la EM=ND, que añadido á la porcion OCD de 30 hectáreas, resulta la primera parte OCDE de 31,5 hectáreas.

Para hallar la segunda parte, trácese otra recta OA que nos dé la porcion AOE, y que á la simple vista venga á contener las 31,5 hectáreas, y si resultase ahora salir mayor, quítesele la parte AOF por el mismo procedimiento, y la segunda parte será la porcion EOF. Del mismo modo se continuará para obtener la tercera parte OFH, despues de añadir ó quitar la cantidad que se haya errado en el tanteo, y la cuarta parte OCH no habrá necesidad de hallarse, pues es el resíduo de las otras tres, pero convendrá, sin embargo, como comprobacion medir su superficie, que deberá ser tambien 31,5 hectáreas con corta diferencia si la particion está bien hecha.

634. **Problema 2.º—Repartir una dehesa** ABCDEF **(fig. 310) de 200 hectáreas entre 5 labradores, á partes iguales, con la condicion de que todos disfruten de la parte** ABCD **que es la mejor y de la** AFED **que es de peor calidad y pantanosa.**

Bien reconocida y clasificada la posesion para repartirla con la igualdad posible, se trazará una recta AD ó una linea quebrada que separe la parte buena de la mala que está sujeta á quiebras y daños, á fin de que todas las suertes participen de una y otra. Hecho esto, se dividirá la recta AD en cinco partes iguales A*a*, *ab*,... y por los puntos *a*, *b*, *c* y *d* se trazarán en la parte de mejor calidad las cuatro rectas que se ven en la figura en las direcciones que deban tener (633) para que los cinco trozos sean de la misma cabida, y haciendo igual operacion en la parte AFED de peor calidad, se tendrá la tierra dividida en cinco suertes de 40 hectáreas cada una y participando todas del terreno superior y del inferior. Si el terreno quebrado y malo estuviese situado en el interior de la heredad como sucede con el A*mn*D*rs* señalado en la figura, se trazaría la recta AD de manera que le dividiese en dos partes próximamente iguales y se procedería despues de la misma manera.

635. Fácilmente se concibe, que á pesar del esmero con que se procure hacer esta clase de operaciones, no es posible repartir con perfecta igualdad ninguna dehesa ó posesion grande, pues las diferentes calidades de los terrenos y las distintas clases de los mismos, así como los muchos obstáculos que se presentan en la práctica, y las diversas condiciones impuestas por los propietarios, dificultan el empleo de cuantos métodos hemos expuesto, y ponen al Agrimensor en el caso de discurrir y de inventar nuevos recursos á cada paso para aproximarse siquiera á la verdad. Aquí es el caso de manifestar, cuán errado es el creer que la profesion de Geómetra-Agrimensor es de escasa importancia y que con ligeros y superficiales conocimientos puede desempeñarla cualquiera, y bastará para dar una idea del atraso de nuestro país, el ver que una parte de los Agrimensores sigue esta profesion y obtiene un título sin tener apenas ningun conocimiento, y que la otra parte se halla desempeñada por hombres rústicos, ignorantes é incapaces de aprender, no sabiendo apenas ni aun escribir sus nombres. En manos de estos hombres, faltos de los rudimentos más sencillos y y con la anarquía que aún continúa y continuará siempre, en la cuestion de los infinitos y absurdos sistemas de pesas y medidas, puede juzgarse cuál habrá sido siempre la suerte de la propiedad y con cuánta injusticia y desigualdad se habrá procedido en la mayoría de los casos, en las compras y ventas y reparticion en las testamentarías de toda clase de bienes y heredades. No hay que dudarlo; mientras la Topografía y la Agrimensura no se las considere con mayor importancia y se procure su desarrollo y se ponga un empeño decidido en que solo se use el sistema métrico, nuestro país será siempre el más atrasado de todos.

Para desempeñar las funciones del Agrimensor, se necesitan profundos conocimientos en la práctica de la geometría, los que se aumentan y multiplican á medida que se poseen más conocimientos teóricos.

Además de todo lo dicho en el delicado asunto de la reparticion de los terrenos y de las dificultades que ofrece, los intereses particulares, la envidia, el orgullo, la ambicion y otras muchas causas dan orígen á mil pleitos y disensiones, queriendo todos que la heredad se reparta á medida de su deseo ó con la misma igualdad que si se tratase de un número de reales, queriendo todos además las suertes más regulares, las que se hallan mejor situadas y las que participan de mayores beneficios. El camino que debe seguirse en tan variadas y encontradas opiniones es apelar al recurso del *sorteo*.

Para sortear las suertes se escribe en unas papeletas los nombres ó números que de antemano se asignan á cada una, y metidas en una bolsa, sombrero, cántaro ó vasija cualquiera, irá sacando una de las cédulas cada uno de los que tienen opcion al sorteo y guardando el turno correspondiente, quedando dueño cada uno de la suerte que indique el lote que haya sacado.

636. Para corroborar cuanto hemos dicho acerca de los particulares expresados, no puedo menos de consignar aquí lo que pone mi adorado catedrático el *Sr. D. Antonio de Varas y Portilla*, en la tercera edicion de su *Tratado de Aritmética y Geometría práctica de la Real Academia de San Fernando*, impresa en 1835, párrafos 503 al 508 inclusives, y lo que dice hablando de su discípulo tambien el distinguido geómetra Ilmo. *Sr. D. José Mariano Vallejo*, cuando se ocupa del procedimiento análogo al que nosotros hemos expuesto (346) y en el que hemos dado además los medios de comprobacion. Concluye, pues, la exposicion de este procedimiento de la manera siguiente:

(503). «Por lo dicho se vé, que con tirar y medir la línea de tra»vesía que vaya desde el un extremo al otro de la posesion, y le»vantarle á las distancias que parezcan más convenientes dos ó »tres perpendiculares que pasen en el terreno por puntos marca»dos, ó que ofrezcan alguna particularidad hasta terminar en otros »del perímetro que se anotarán cuidadosamente, hay lo bastante »para que, combinando el conocimiento de estas cosas con los da»tos que se tomaron en la medicion del contorno, se puedan fijar »en el papel todos los puntos más notables, que se llaman *cotos*, »*hitos* ó *mojones*, en sus lugares respectivos: unos con una abso»luta exactitud y otros tan próximos á ella que no se separarán »mucho de la verdad. Dibujando despues con mano diestra todas »las curvaturas y sinuosidades que hay desde un punto al otro »ó desde un hito al otro, sin desmentir á la naturaleza, se obten»drá una figura cerrada y semejante al terreno ó posesion valua»da, en que estarán bien determinados todos sus límites y exten»sion, que es lo que se llama haber levantado el plano del ter»reno.»

«El método acabado de exponer, dice, además de las luces y con-

»vencimiento que de sí mismo arroja, tiene á su favor la aproba-
»cion de un sugeto tan benemérito en la carrera de las ciencias, »como es D. José Mariano Vallejo. Siempre laborioso é infatiga- »ble en sus investigaciones, y siempre dispuesto á prestar sus ser- »vicios, no solo al Estado, sino á cualquiera clase de personas, se »le han ofrecido varias ocasiones en que ha sido invitado para que »presenciase y dirigiese las operaciones que se iban á practicar »sobre terrenos que tenian leguas y leguas de extension. Con este »motivo ha tenido mucho trato y roce con los Agrimensores más »prácticos y acreditados de algunas de nuestras provincias, los »cuales se han asombrado de la abundancia de recursos que les »presentaba para salir de los apuros en que á cada paso se encon- »traban por las grandes dificultades que ofrecian las tierras en que »maniobraban; se han admirado igualmente de la sencillez de los »medios que adoptaba para cerrar toda clase de figuras, y han te- »nido mucho que aprender en la delicadeza y exactitud con que »manejaba sus instrumentos, de tal manera que al separarse de su »lado, no han podido menos de rendirle aquel tributo de gracias y »de reconocimiento, que le era debido por las reglas y máximas »con que los habia instruido, para conducirse con acierto en lo su- »cesivo.

(504). »Mas el comun de nuestros prácticos se desdeñan de »consultar á los hombres de ciencia y de conocimientos, persuadi- »dos de que ellos están colocados en una esfera superior por las »muchas reglas y secretos que poseen, heredados de sus mayores, »siendo lo peor del caso que los tales secretos suelen ser un con- »junto de absurdos y necedades con los cuales agravian á los ven- »dedores ó compradores de tierras. Y para dar una prueba de esto, »basta contraerse á las figuras cuadriláteras.

(505). »Hay sujetos dedicados á la medicion de terrenos, que »tienen establecido por regla general que para medir una tierra »de cuatro costados, no hay más que sumar los lados opuestos, to- »mar las mitades de estas sumas, multiplicarlas entre sí, y el pro- »ducto que resulte dicen que es la superficie buscada.

»Sea ABCD (fig. 311) una tierra con estas circunstancias, cu- »yos lados tengan la longitud que expresan los números que en »ellos están señalados, y aplicándole dicha regla se obtendrá que

»Sup. ABCD $= \frac{34+32}{2} \times \frac{24+26}{2} = 33 \times 25 = 825$ unidades »cuadradas.

E.T.S.I.T. TOPOGRAFICA BIBLIOTECA

»Pero valiéndose de la verdadera regla que enseña la Geome-
»tría, se medirá la diagonal que con arreglo á la misma escala LR
»en que se han tomado los lados, vale 43 unidades lineales, se le
»bajarán las perpendiculares correspondientes, que medidas valen
»$DH = 18$ y $BF = 19$, y sumando las superficies de los dos trián-
»gulos en que está dividido el cuadrilátero, tendremos

$$\frac{43\times 18}{2}+\frac{43\times 19}{2}=\frac{43(18+19)}{2}=\frac{43\times 37}{2}=\frac{1591}{2}=$$

$795\frac{1}{2}$; que son las unidades superficiales que verdaderamente
»tiene el dicho cuadrilátero. Si estas se restan de las anteriormen-
»te halladas tendremos $825 - 795\frac{1}{2} = 29\frac{1}{2}$, que es lo que ex-
»cede aquel resultado al verdadero, entendiendo que son unidades
»cuadradas. Si fuesen, por ejemplo, estadales de 10 pies de lado,
»resultarian 2950 pies superficiales en que quedaba agraviado el
»comprador.

(506). »Si al expresado cuadrilátero se le diese la forma EFGH
»(fig. 312), quedando sus lados de la misma magnitud, como lo
»dan á conocer los números que sobre ellos se colocan, su super-
»ficie saldría la misma aplicándole esa regla de los prácticos, pues
»siendo los mismos los datos, el resultado no puede variar: se ob-
»tendrian pues las mismas 825 unidades superficiales que antes se
»sacaron. Sin embargo, el que considere con alguna atencion am-
»bas figuras, conocerá á simple vista que la primera encierra ma-
»yor superficie que la segunda, y así debe ser porque siempre que
»en un cuadrilátero cualquiera se hagan variar los ángulos, con-
»servando la misma magnitud sus lados, su superficie padecerá
»alteraciones de consideracion, bien sean por exceso ó bien por de-
»fecto. Esto es lo que cabalmente se observa entre dichas dos figu-
»ras, de las cuales la segunda resulta de la primera con solo ha-
»berle dado á esta un estiron, por decirlo así, hácia la derecha, y
»al mismo tiempo bastante inclinado á la parte inferior; con eso
»todos sus ángulos han variado y los datos de que ha de provenir
»su superficie se han de haber indefectiblemente alterado.

(507). »En efecto, sujetándola á la misma escala á que lo está la
»primera, se notará que los valores de la diagonal, base de los dos
»triángulos en que queda dividida la figura total, y de las perpen-
»diculares que sobre ella caen, alturas de dichos triángulos, son

»EG = 57, HL = $5\frac{1}{2}$ y FN = 8. La superficie pues del cuadriláte-»ro EFGH equivale á la suma de las de los triángulos EHG y EFG »y es la que resulta del siguiente cálculo:

$$\frac{57\times5\frac{1}{2}}{2}+\frac{57\times8}{2}=\frac{57\left(\frac{11}{2}+8\right)}{2}=\frac{57\times\frac{27}{2}}{2}=\frac{1539}{4}=$$
$$384\frac{3}{4}.$$

»Estas son las unidades superficiales que en realidad tiene el »cuadrilátero; que restándolas de las 825 que se sacan por la expre-»sada regla, salen de diferencia $440\frac{1}{2}$, esto es, que son más las »unidades superficiales que el error añade, que las que en sí misma »tiene la tierra. Aun hay más, y es que por ese mismo método re-»sultan iguales dos superficies que en realidad se diferencian en »$410\frac{3}{4}$ unidades cuadradas. Tales son estas dos figuras, á cada »una de las cuales se dan 825 unidades superficiales, siendo así »que la una tiene $795\frac{1}{2}$ y la otra $384\frac{3}{4}$. Como estos resultados »tan poco conformes entre sí en un asunto en que se interesa la »razon y la justicia, podrían acaso hacérseles increibles á algunas »personas, se han sujetado con el rigor posible á la escala quo »acompaña á las expresadas figuras, para que todos puedan con-»vencerse por sí mismos de la falsedad de una regla que está en »contradiccion con los principios más sencillos de la geometría.

(508). »De todo lo cual debe deducir el Agrimensor bien ins-»truido: 1.° Que las figuras no tienen igual superficie porque ten-»gan iguales perímetros. 2.° Que las figuras á cuyos ángulos se »les haga variar, tambien variarán en superficie. 3.° Que toda su-»perficie proviene siempre de dos dimensiones perpendiculares en-»tre sí, ó lo que es lo mismo, de una base por una altura. 4.° Que »para formar una idea justa de los terrenos, no solo debe atender á »la magnitud de los lados, sino á la cantidad de los ángulos. 5.° »y último. Que debe proceder con mucha circunspeccion para ad-»mitir por cierta una regla por buena que le parezca, mientras no »esté seguro que ha sido deducida por una rigurosa y exacta de-»mostracion que la ha colocado entre las verdades evidentes.»

637. Ahora bien, siendo la medida exacta de la superficie de los terrenos, la base para hacer las reparticiones, segun hemos visto, puede comprenderse los errores que cometería en ellas un Agrimensor que para hallar la superficie se valiese de la absurda regla que ha acabado de citarse.

638. Pero el punto más interesante del método citado y expuesto (346), es que por este medio se consigue, sin aumentar demasiado el trabajo, el que cierren ó terminen los perímetros de las posesiones ó terrenos con una exactitud racional, que es uno de los objetos más indispensables, segun indicamos (347). Para comprender las dificultades que en sí encierra esta operacion, basta que expongamos á continuacion, lo que dice en el libro citado el mismo *D. Antonio de Varas y Portilla* en los párrafos 483 al 490 inclusives.

«(483). El terminar las figuras ó cerrar sobre el papel el con- »torno de las posesiones que se han medido, es un punto que pue- »de dar mucho ejercicio al Agrimensor, por las dificultades que »en sí mismo encierra, y por los errores y equivocaciones que se »pueden padecer.

»(484) La figura más sencilla que puede tener un terreno es »la de un triángulo; midiendo, pues, sus tres lados y hecha la »correccion prudencial, caso que se necesite, no puede haber difi- »cultad ninguna en trasladarlo al papel, siempre que la suma de »dos lados cualesquiera sea mayor que el tercero, y la superficie »que contendrá será más ó ménos exacta, segun sea la exactitud »con que se hayan determinado los tres lados medidos. Si el ter- »reno que se trata de trasladar al papel, tuviese la forma ABCD »(Fig. 313) que es un cuadrilátero, podría tal vez ésta dar mucho »más que discurrir al Práctico; pero si fuese tal que se pudiesen »medir sus cuatro lados y una de las diagonales, por ejemplo, la »AC, no se encontraría tampoco dificultad en cerrar el espacio en »el papel y áun medir la superficie, pues estaba reducido á la »construccion de los triángulos ABC y ACD, y se tendría la figura »*abcd*, y la construccion quedará ejecutada más ó ménos puntual- »mente, segun la exactitud con que se hayan medido los lados.

»(485). Mas si el terreno ofrece dificultades, por las cuales no »pueda verse desde A el punto C, ó desde B el punto D, porque »no lo permitan las casas, matorrales, inflexiones ó quebradas »del país, entonces deben fijarse los ángulos del modo siguiente. »Tómese en la AB una distancia de 10 á 20 piés, que esto es indi-

»ferente, bien que siempre es mejor tomar más que menos, y sea »la A*m*: tómense otros tantos en la AD, que son los que repre- »senta la A*n*, y mídase la distancia *mn*: esta distancia propia- »mente puede llamarse la *abrazadera*, porque de tal manera fija »la direccion de las líneas AB y AD, que el ángulo que forman »en A no puede aumentar ni disminuir. Hágase lo mismo con los »demás ángulos B, C, D; y con estos datos se podrá trasladar al »papel la figura con la exactitud que se puede apetecer; para lo »cual se procederá de esta manera: tómese en la escala una línea »que tenga tantas partes iguales como piés, varas ó estadales »tiene en el terreno la AB y sea *a'b'*; desde *a'* á la derecha, tóme- »se una distancia *a'm'* de las 10 ó 20 partes que se midieron en »el terreno para A*m* y haciendo centro en *m'* con una distancia »tomada en la escala de las mismas partes que se ha medido en »el terreno la *mn*, trácese un arco *rs*; haciendo despues centro »en *a'* con un rádio igual á la distancia medida sobre A*n* se »trazará otro arco *pq*; por el punto *a'* y el de interseccion se tira »la *a'n'*; esta línea se prolongará lo necesario para que tenga »tantas partes de la misma escala, cuantos piés ó estadales se »midieron en el terreno sobre la AD, y con eso quedará fijo en el »papel el punto *d'* que corresponde al D del terreno.

»(486). Si en el punto *d'* se forma un ángulo *a'd'c'* igual al ADC »del terreno con arreglo á los datos que se deben haber tomado »en D análogamente á lo hecho en A, y se tira la *d'c'* de la lon- »gitud que se ha medido en el terreno la DC se tendrá el punto »*c'*. Formando en *c'* un ángulo igual al medido en C en el terre- »no conforme se hizo en A, y tomando *c'b'* de la magnitud medi- »da CB, debe verificarse, que estando todo esto bien ejecutado, »el extremo *b'* de la *c'b'* caiga exactamente en *b'* extremo de la »*a'b'*, y que la figura quede cerrada, cosa que raras veces consi- »guen los Prácticos.

»Esto puede hacerse tambien con el auxilio del cartabon, para »lo cual deben elegirse aquellos parajes que menos inconvenien- »tes ofrezcan. Hecho esto, colóquese el cartabon en B y tírese »una de las visuales en la direccion BA que siempre debe medir- »se; diríjase en seguida la visual perpendicular BF, mídase inme- »diatamente, y con eso se tiene el punto F de la línea CD: conti- »núese midiendo la BF hasta G, punto desde el cual la visual que »se tire perpendicular á BFG vaya á pasar por C; y medida la »distancia GC, se tendrá lo necesario para colocar el punto C en

»el papel: fijos ya los puntos B y C, y uniendo sus dos extremos, »resulta la línea que representa á la BC.

»(487). Teniendo ya fijos el punto C y el F, no falta más que »medir en este término la FD en la direccion CFD y prolongar la »línea que representa la CF, una magnitud igual con la medida »que se haya obtenido para FD y quedará fijo el punto D, y unien- »do, por último, el punto que represente á D con el A se tiene ter- »minada la figura.

»Cuando se estaba midiendo la BF, pudiera haberse tomado el »medio de tirar desde un punto que estuviese enfrente de D tal »como E la visual ED, que despues de medida nos ofrecería una »nueva prueba de la exactitud con que se habia procedido para »fijar el punto D.

»(488). El cuadrilátero de que se acaba de hablar, y que queda »bien determinado por los métodos que se han puesto en práctica, »es uno de los casos más sencillos que pueden ocurrir; sin em- »bargo, son tantos y tan grandes los errores que se pueden co- »meter, ya por la precipitacion con que suelen hacerse este géne- »ro de operaciones, ya por la falta de inteligencia de los que las »ejecutan, y ya tambien por la limitacion y pequeñez del hombre, »que es indispensable detenerse muy de propósito en darlos á co- »nocer con toda la extension y claridad necesaria, y presentar, »por último, un método general y constante, qüe en los casos du- »dosos y complicados conduzca como por la mano al Agrimensor »á cerrar la figura, y á determinar su superficie con la aproxima- »cion que se puede desear, cuando no sea con toda la exactitud »que acaso conseguirá en muchas ocasiones.

»(489). Volviendo, pues, al cuadrilátero que está en cuestion, »supóngase que en la medida de AB se haya cometido un vigé- »simo de error por exceso, es decir, que en vez de dar á la AB, »por ejemplo, 300 piés que suponemos tiene, se hubiera reputado »en 315; entónces, suponiendo que se principiaba desde *b*, hubie- »ra caido el punto *a* en *a''*; si por otra parte al tomar el ángulo »en A, ya sea con el cartabon, ya de cualquier otro modo, se hu- »biese cometido una equivocacion de un grado, entónces la di- »reccion del lado *ad* estaría representada por *a''d''*: y continuando »de esta manera, bajo el supuesto de que en la medida de todos »los lados se hubiese cometido por exceso el error de una vigési- »ma parte, y en cada ángulo un grado de equivocacion, tam- »bien por exceso para hacer más notable el error, se verificará

»que d'' representará á D; la direccion de CD será la que ahora »dice $d''c''$: el punto C estará expresado por c'', la direccion CB lo »estará por $c''b''$ y el punto b'' denotará el B del terreno; pero este »punto está representado por b, donde principia y termina, luego »es imposible que b'' pueda representar lo mismo que b, á saber, »el punto B del terreno; y por lo mismo es imposible que $c''b''$ pue- »da cerrar la figura, pues ni por su magnitud ni por su direccion »puede terminar en b, por impedirlo el espacio que hay entre b y »b'' que da á conocer el error cometido. Así que el resultado ha- »llado sobre el papel dista mucho de formar una figura cerrada, »como es la ABCD del terreno.

»En lo que se acaba de decir, se ha supuesto que todos los »errores se han cometido por exceso, á fin de que se percibiese »bien en lo que venía á parar la equivocacion; pero igualmente »se haría sensible si todos hubiesen sido por defecto, ó unos por »exceso y otros por defecto. Todo esto manifiesta la necesidad que »hay de buscar medios para sujetar todos los puntos del terreno, »de manera que el punto b'' venga precisamente á caer sobre el »punto b; lo cual se consigue, segun se ha visto, midiendo siem- »pre que se pueda, la diagonal, ó por mejor decir, las dos diago- »nales, que es lo más exacto; y si se procede por el cartabon fi- »jando el punto D, y midiendo las líneas AD y BC, quedará cerra- »da la figura tirando por sus extremos D y C la línea DC.

»(490). Si en el cuadrilátero, que es la figura más sencilla des- »pues del triángulo, se pueden hallar tantas dificultades para ha- »berlo de cerrar, dicho se está que en las más complicadas serán »tantas y de tanta consideracion, que bien se puede asegurar que »el comun de los Agrimensores difícilmente las podrá superar; y »mucho más si se considera que la mayor parte de ellos no se de- »tienen á sujetar los ángulos: se contentan únicamente con me- »dir las líneas del contorno, y decir si las unas se separan un po- »co ó un mucho de la anterior hácia la izquierda ó hácia la de- »recha, expresando algunas veces que mira á tal ó tal punto »marcado en el terreno, como se vé en la mayor parte de las escri- »turas de venta. Todo esto es tan vago é indeterminado, que no »es posible que el más diestro y mejor instruido sea capaz de tra- »zar una figura y medir su superficie por los datos que dejan »consignados en las mencionadas escrituras.»

639. Siendo tantas las dificultades que se ofrecen para cerrar un polígono de un gran número de lados, segun resulta de todo

lo expuesto, y complicándose más todavía cuando el contorno del terreno es muy ondulado y sinuoso, es necesario adoptar un procedimiento que nos conduzca á cerrar la figura y esté además sujeto á comprobaciones y el cual es el que hemos explicado en el párrafo 346 ya citado anteriormente (638).

640. **Division de las dehesas con respecto á los pastos.**—En los casos de esta especie, se trata de dividir una dehesa en partes que suministren el pasto necesario al número de cabezas de ganado que tenga cada uno de los ganaderos que han de utilizarse de ella. Para esto se seguirá el método que se emplea á continuacion para la resolucion del siguiente

Problema.—Se quiere repartir una dehesa en la que pueden pastar 4.000 ovejas, entre tres ganaderos de manera que el 1.° tenga pasto para 800; el 2.° para 1.200 y el 3.° para 2.000, y se trata de averiguar el terreno que corresponde á cada uno.

Se mide la superficie de la dehesa y supongamos que tiene 1.000 hectáreas, que reducidas á metros cuadrados son 10.000.000 m². Habrá pues que dividir este número en partes proporcionales á los números de ovejas que tiene cada ganadero y tendremos que partir los 10.000.000 de metros cuadrados por las 4.000 ovejas que puede apacentar la dehesa, y multiplicar el cociente 2.500 por el número de ovejas que tiene cada ganadero y resultará:

Para el 1.°:	2.500×800	$= 2.000.000$ m²	$=$	200 Ha.
Para el 2.°:	2.500×1.200	$= 3.000.000$ m²	$=$	300 Ha.
Para el 3.°:	2.500×2.000	$= 5.000.000$ m²	$=$	500 Ha.
		10.000.000 m²	$=$	1.000 Ha.

Se procederá despues á dividir la dehesa en tres partes desiguales de 200, 300 y 500 hectáreas, por líneas paralelas ó á partir de un vértice, de un punto de un lado, ó de un punto interior por los métodos explicados, segun haya ó no un objeto notable del que deban participar todos los ganaderos.

641. **Division de los terrenos con respecto á los plantíos de viñas ú olivares.**—La division de las tierras de labor se practica algunas veces por los propietarios, con el objeto de establecer los plantíos de viñas ú olivares. Las viñas se plantan en líneas paralelas á fin de que los espacios que median entre línea y línea se puedan arar con facilidad. El plantío puede ser *á*

marco real ó *á tres bolillo*. Se llama plantío *á marco real*, aquel en que las líneas paralelas están dispuestas de modo que cada cuatro plantas forman un cuadrado (fig. 314) y se llama *á tres bolillo*, cuando dichas líneas se hallan trazadas de modo que cada tres plantas forman un triángulo equilátero (fig. 315). El plantío *á marco real* es el usado más comunmente.

642. **Plantío á marco real.**—Para trazar este plantío, se fijará primero la distancia que ha de haber entre cada dos plantas, bien sea de un metro ó de doce decímetros.... y tomando una cuerda de bastante longitud se irán haciendo nudos ó cosiendo unos trapos de color que disten unos de otros lo que hayan de distar las plantas entre sí. Si se hace uso de la cadena ó mejor de la cinta métrica, se tienen desde luego en ella las divisiones que nos hacen falta. Se recorre despues el terreno en que se va á hacer el plantío y se elige la línea del contorno ó *lindero* que más convenga, que suponemos sea la AD (fig. 314) del rectángulo ABCD y tendiendo la cuerda ó cinta como si fuera á medirse, se irán poniendo estacas, cañas, cantos ó montoncillos de tierra en los puntos A, *a*, *b*, *c*,..... que correspondan á los nudos ó trapos de la cuerda ó á las divisiones correspondientes de la cinta. En el punto A se levantará una perpendicular AB á la AD sobre la cual se hará la misma operacion para determinar los puntos *m*, *n*, *r*...; levantando ahora perpendiculares á la AD por los puntos *a*, *b*, *c*,... y á la AB por los *m*, *n*,... y hallando los puntos *s*, *t*,... de interseccion de estas perpendiculares, ó lo que es mejor, trazando solamente las perpendiculares á la AD y determinando en ellas los puntos *s*, *t*, con la cuerda ó cinta como se ha dicho para las AB y AD, se tendrá trazado el plantío á marco real.

Si el terreno fuese irregular como sucede en la figura 316, se trazará una línea AC en sentido de su mayor longitud y sobre ella se determinarán con la cuerda, cadena ó cinta los puntos *a*, *b*, *c*,... por los cuales se trazarán perpendiculares á la AC, fijando sobre ellas del mismo modo los puntos *n*, *b*, *r*,...

643. **Plantío á tres bolillo.**—Para marcar este plantío, se tenderá la cuerda ó cinta en sentido de una linde AB (fig. 315), y se señalarán los puntos de los nudos ó divisiones como en el caso anterior. Se toma despues una parte de la cuerda que contenga tres nudos y fijando los dos nudos extremos en dos de los puntos de division como en A y *a*, se estirará la cuerda cogiéndola por el nudo del medio, y se marcará en el terreno el punto *m* donde aquel venga

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA TOPOGRAFICA - BIBLIOTECA -

á parar. Se determinarán del mismo modo los puntos *n, r, s*,... y prolongando sobre el terreno las líneas A*m*, *an*, *br*,... todo cuanto permita la heredad, sobre las cuales se tiende la cuerda para marcar en el terreno los puntos *t, o, x, z*,... á que corresponden los nudos, se tendrá trazado el plantío *á tres bolillo*. Lo mismo se haría en un terreno irregular á partir de una línea AC, DB ó EF (figura 316) establecida de antemano en la direccion más conveniente. En este plantio se suelen dejar entre planta y planta de 3 á 4 metros.

644. Una vez trazado cualquiera de los dos plantíos que acabamos de exponer, se procede á abrir los hoyos en los puntos señalados con las estacas, cañas ó cantos, y para que no desordenen el plantío, se tendrá cuidado al abrirlos, de hacer la escavacion de manera que el piquete clavado quede en uno de los ángulos del hoyo y se tiende en este el sarmiento de modo que el extremo superior quede en el punto en que se hallaba la estaca ó señal. El tamaño de estos hoyos suele ser de unos 5 á 6 decímetros en cuadro y otro tanto de profundidad, si bien puede ser esta mucho mayor, lo cual depende del mayor gasto que se quiera hacer y demás circunstancias.

Pasemos á resolver los siguientes problemas:

645. **Problema 1.º**—*Hallar el número de plantas que hay en un terreno rectangular, siendo el plantío á marco real.*

Sea el terreno ABCD (fig. 314); como en la línea AB cabe cuatro veces la unidad de distancia A*m* que hay entre cada dos plantas y hay una planta más, es decir, cinco plantas; y por estar dicha unidad de distancia contenida seis veces en la AD, hay siete perpendiculares á esta línea, que cada una tiene cinco plantas, tendremos $7\times5=35$ plantas. Los cuadrados trazados en el terreno son $4\times6=24$ y la diferencia 11 es precisamente el número de plantas que contienen las dos lineas AB y AD disminuido en una unidad, por ser la planta A comun á ambas líneas; luego el número de plantas es igual al número de cuadrados aumentado en las contenidas en la base y la altura del rectángulo y disminuido en una unidad.

646. **Problema 2.º**—*Hallar el número de plantas que hay en un terreno rectangular, siendo el plantío á tres bolillo.*

Sea el terreno ABCD (fig. 315); como en la 1.ª línea AB hay cuatro veces la unidad de distancia A*a* y por lo tanto cinco puntos de division ó cinco plantas, y lo mismo sucede en las líneas

3.ª, 5.ª...; y en las líneas 2.ª, 4.ª, 6.ª... hay cuatro plantas ó sea una menos, multiplicaremos por 5 el número 6 de líneas que ocupan lugar impar, y por 4 el número 5 de líneas que ocupan lugar par y sumando estos valores, se tendrá el número total de plantas. En efecto, se tiene $5 \times 6 + 4 \times 5 = 50$, que son las plantas que hay en la figura.

647. **Problema 3.º**—*Hallar el número de plantas que hay en un terreno irregular.*

Sea el terreno ABCD (fig. 316); si el plantío es á marco real se contarán las plantas que contiene cada una de las perpendiculares tiradas á una de las rectas que suele ser la mayor, tal como la AC y la suma de todos los números que resulten será el número total de plantas. Si el plantío es á tres bolillo se procederá de un modo análogo.

648. **Problema 4.º**—*Dado un terreno, hallar el número de plantas que podrá contener.*

Se levantará el plano con exactitud, tanto para tener su verdadera figura, como su cabida. Se hará en el plano la construccion correspondiente, segun sea el plantío *á marco real* ó *á tres bolillo* y con arreglo á la escala del plano. Se determina el número de plantas por los problemas anteriores, y se sabrá las plantas que pueden ponerse en las hectáreas que contenga el terreno en cuestion, una vez sabida la clase del plantío y la unidad de distancia ó de separacion entre cada dos plantas. Se traslada por último al terreno la construccion hecha en el plano y se marcan los puntos correspondientes á dichas plantas.

649. **Problema 5.º**—*Averiguar el coste de cada planta en un terreno dado, de un plantío de viñas ú olivares.*

Despues de determinar el número de plantas que puede contener por el problema anterior y los gastos que produce el plantío, como son los jornales y demás que puedan ocurrir, se dividirá el importe de dichos gastos por el número de plantas ó cepas y se tendrá el coste de cada una.

No hacemos aquí mencion de las tablas que ponen algunos autores para hallar el número de plantas que contiene un terreno dado, siendo dada tambien la distancia entre las plantas, porque tanto dichas tablas como los problemas que resuelven por su medio, carecen de exactitud.

650. **Division de los montes.**—Bajo la denominacion de *Montes*, para el objeto que nos proponemos, y para los efectos de

las Ordenanzas generales de los mismos, se comprenden todos los terrenos cubiertos de árboles á propósito para la construccion naval ó civil, carboneo, combustible y demás necesidades comunes, ya sean montes altos, bajos, bosques, sotos, plantíos ó matorrales de toda especie distinta de los olivares, frutales ó semejantes plantaciones de especial fruto ó cultivo agrario.

651. La division de los montes se practica, ya con el fin de repartirlos entre varios herederos, ya con el fin de dividirlos en cuarteles para su explotacion cuando tienen arbolados, ó sea para las cortas periódicas, bien deban hacerse por *cuarteles*, ó por *entresaca* ó *clareo*. Todo cuanto digamos respecto á estos fines, se hallará conforme con las Ordenanzas de Montes, con el objeto de que los particulares se aprovechen para sus usos particulares de sus luminosas disposiciones.

En todo caso, la primera operacion que debe practicarse es el levantamiento del plano del monte y la medida de su superficie. El procedimiento para levantar el plano debe ser, en la suposicion más frecuente de estar muy poblado de árboles, el de la circunscripcion de un polígono. Sea (fig. 317) el monte terminado por la línea ondulada que representa la figura, y tratemos de levantar su plano. Se hará un reconocimiento minucioso de todo su contorno, y se establecerá un polígono cualquiera circunscrito ABCDEFG, que pudiera ser tambien un rectángulo ó cuadrado, plantando jalones en los vértices de todos los ángulos, y numerándolos por órden y valiéndose del teodolito, del grafómetro, ó de la brújula y sujetándole al mayor número de comprobaciones de que sea susceptible, para convencernos de su exactitud. Eligiendo despues por bases los lados GF, FE... del polígono circunscrito, se levantarán sobre ellos y valiéndose de la escuadra, el mayor número posible de perpendiculares G*a*, *bc*, *de*... *mn*, *us*.... á fin de poder obtener con toda escrupulosidad el contorno *ace*...., *ns*... del monte. Se hará despues la trasportacion al papel con arreglo á escala, y se conocerá la figura del monte.

Para hallar la superficie del mismo, sabemos tambien que se ha de hallar la del polígono circunscrito y restar de ella la suma de las áreas de los trapecios G*acb*, *bced*... F*nsu*... y de los triángulos que como el F*mn*, se originan por medio de las perpendiculares y de las líneas que como la F*n* se crea conveniente establecer para obtener con facilidad los resultados.

Una vez obtenida la figura del monte y sabida su cabida, se procederá sobre el plano á practicar las divisiones en las partes iguales, desiguales ó proporcionales que sea necesario, segun las condiciones impuestas por los propietarios, y despues se hace el *replanteo*, es decir, se refieren al terreno los puntos y líneas de division, estableciendo estas por medio de la brújula ó cualquier otro instrumento si es posible. En efecto, si por la division practicada en el papel, hubiese de ser una de las líneas de division la zz' que separase del monte la parte zhz' de superficie conocida, para lo cual hemos explicado ya todos los medios de conseguirlo, se prolongaría en el plano la zz' hasta su encuentro en x y x' con los lados AB y DE del polígono circunscrito; se mediría el ángulo Bxz, valiéndose de un buen trasportador, así como las rectas Bx y xz con la escala elegida, y tomando en el terreno la distancia Bx y trazando el ángulo Bxz con el instrumento elegido, se tendrá la direccion de la xz. Se colocará un jalon ó piquete en la interseccion z de esta línea con el contorno del monte y se medirá para comprobacion en el terreno la xz, para ver si resulta igual á la medida que se obtuvo en el plano por la escala.

Para la prolongacion de la xz por el interior del monte á través del arbolado y establecimiento de la línea divisoria zz', se necesitàn tres peones, que alineándose á continuacion de tres jalones plantados ya en la direccion de la línea, vayan desembarazando el terreno con el hacha ó podadera, quitando cuantos obstáculos puedan impedir el tendido y circulacion de la cadena ó cinta. El paso que vayan abriendo debe tener por lo menos de 0,^{m}70 á 1 metro de ancho, continuando el trazado de la línea y su medicion hasta el punto x' de encuentro con el lado DE del polígono, fijando con un piquete el punto z' de interseccion de la línea con el contorno del monte, y viendo si la medida correspondiente á la parte $z'x'$ resulta igual á la que se obtiene en el plano por la escala, así como la medida de la zz' y de la total xx'. Cuando el arbolado no es muy espeso, y se pueden descubrir con facilidad unos jalones desde otros, así como atravesar el monte y medir la línea, entonces no hay necesidad de abrirse paso con el hacha. En uno y otro caso los dos últimos jalones de los tres colocados al principio, deben irse colocando uno á continuacion de otro en sentido de la línea, valiéndonos de mas jalones si las dificultades del terreno nos impiden mover alguno de los jalones plantados, que de hacerlo resultaría perdida la direccion de la línea.

652. Cuando se presenta un árbol muy grueso que impide la prosecucion del trazado, entonces se salva este obstáculo por medio de una ó de dos paralelas á la alineacion interceptada. Sea AB la alineacion propuesta (fig. 318) y P el árbol que la intercepta; en los puntos *c* y *m* se levantan dos perpendiculares que se prolongan á derecha é izquierda una distancia suficiente para salvar el obstáculo, por ejemplo, un metro. Se unen los extremos *b*,*d* y *a*,*e* de estas perpendiculares y se prolongan lo suficiente las líneas *bd* y *ae* para salvar el árbol P, y trazando por dos puntos *t* y *s* dos perpendiculares á la *bs*, que se prolongan hasta su encuentro con *ax*, no habrá más que tomar en ellas distancias de un metro y se tendrán los puntos *n* y *o* que pertenecerán á la alineacion AB y que sirven para su prolongacion.

Es preciso llevar mucho cuidado en la medicion de una línea que atraviesa un monte, procurando que la cadena esté siempre bien tendida y que el peon que vá detrás dirigiendo la operacion, no pierda de vista las agujas que vá plantando el que vá delante, para que no se extravien entre las malezas, retamas y yerbas muy altas.

653. **Cortas de árboles**.—La operacion de las cortas en un monte, se reduce á dividir este en cuarteles que tengan una superficie dada, trazando bien sus límites para distinguirlos unos de otros, cuyas superficies se determinan generalmente con respecto á la extension del monte y al número de años que se fija para su explotacion. Si se trata, por ejemplo, de explotar un monte en 20 años, para conseguirlo por completo en este tiempo, es preciso tomar cada año $\frac{1}{20}$ de la superficie total, y determinar esta cantidad sobre el terreno con toda exactitud, pues de otro modo, las diferencias anuales acumulándose sucesivamente, sucederá que el último año, la superficie que haya quedado para la corta será mucho mayor ó menor que lo que le corresponde. En este caso, si las diferencias son de consideracion, ó producirá mayores gastos la explotacion, ó no quedará acaso terreno que explotar. Por consiguiente, es preciso, no solo determinar bien la superficie total del monte, sino la de cada una de las partes que han de explotarse anualmente, estableciéndolas con precision sobre el terreno.

654. A pesar de todas estas advertencias y de las previsiones que se ocurran al geómetra, los resultados no son tan exactos como exige esta clase de operaciones, pues la medicion de las lí-

neas en un monte es mucho más difícil y menos exacta que en un terreno llano, y por otra parte el trazado de las líneas que fijan los límites de las cortas, no pudiendo hacerse en ocasiones con toda la exactitud conveniente, á menos que no se corte una cantidad considerable de árboles que pueda impedir el trazado, sucede con frecuencia que hay que modificar la cabida ó extension que se habia propuesto dar á cada corta.

655. Para ver la manera de proceder en este caso, para que los errores no se acumulen y pueda explotarse el monte en el número de años dado, se determinará la extension del terreno para cada corta anual de la manera siguiente. Supongamos que un monte contiene 320 hectáreas y que se trata de explotar en 20 años. Las cortas anuales deberían practicarse sobre partes del monte que tuviese cada una $\frac{320}{20} = 16$ hectáreas. Si la corta del primer año no ha podido hacerse sino de 15,50 hectáreas, para determinar la superficie que debe explotarse el segundo año, se tendrá

$$\frac{320 - 15{,}50}{19} = 16{,}03 \text{ hectáreas.}$$

Ahora bien, si al establecer esta extension sobre el terreno no puede conseguirse que sea de 16,03 sino de 16,20 hectáreas, se tendrá para el tercer año

$$\frac{320 - (15{,}50 + 16{,}20)}{18} = 16{,}02 \text{ hectáreas.}$$

Del mismo modo, si la corta resultase haberse hecho de 15,60 hectáreas solamente, se tendría para la corta del 4.° año

$$\frac{320 - (15{,}50 + 16{,}20 + 15{,}60)}{17} = 16{,}04 \text{ hectáreas,}$$

y así sucesivamente para las cortas de los demás años.

656. Sea ahora, (fig. 317) el monte en que se quiere hacer una corta en un cierto número de años. Determínese la superficie que se ha de explotar el primer año por el procedimiento anterior, y trácese en general en el plano obtenido en el papel á partir de un vértice A ó de otro punto conveniente, una diagonal AE ó línea cualquiera que deje interceptada en la parte AEFG del polígono circunscrito, una parte *p*R*na* del monte, que tenga próximamente la superficie en cuestion y que suponemos resulta menor. Mídase aho-

ra en el plano con exactitud esta parte del monte y hállese su diferencia á la que deba ser y partiendo esta diferencia por la longitud de la línea AE, tomada en la escala y considerada como base de un triángulo, se tendrá la mitad de la altura que se doblará, y levantando una perpendicular EH de esta longitud en el punto E de la AE y trazando una paralela HY á la AE, se tendrá el punto Y, que unido con el A nos dará el triángulo AEY de base AE y altura YL=HE, que será la parte que habrá que añadir á la *p*R*na*. Se hallarán las superficies de las porciones excedentes A*tp* y ROYE, y restando su suma del triángulo AEY, se tendrá la cantidad que aun habrá que añadir á la parte del monte *t*O*na* para tener la que se desea. Para esto, se dividirá esta cantidad por la longitud de la O*t* tomada en la escala y considerada como base de otro triángulo, y se tendrá la mitad de la altura que doblándola y levantando una perpendicular de esta longitud á la *t*O en el punto O del contorno del monte y haciendo la misma construccion que anteriormente, se tendrá el triángulo *t*MO que habrá que añadir á la parte *t*O*na*, para tener la *t* M R *n a* que será igual ó próximamente igual á la que se trataba de separar para la primera corta. Rectifíquese de nuevo su cabida midiendo esta parte sobre el plano, por los medios geométricos conocidos ó por medio de la *ruleta* (437) y si se encontrase aun alguna diferencia, no se insistirá más y se hará uso del cálculo explicado anteriormente (655) para la determinacion de la superficie que se ha de tomar para hacer la corta el segundo año, y de este modo se continuará para todos los demás.

Prolongando ahora en el plano la línea *t*M hasta su interseccion T con el lado DE, y tomando en el terreno con la cadena la distancia TE que dé la escala en el plano, y poniendo un instrumento angular en el punto T con el ángulo ETM que marque en el plano el transportador, se establecerá en el interior del monte la línea TM*t* segun hemos ya manifestado.

Tambien se puede tomar la parte que falte á la *p*R*na* para la primera corta, por medio de una paralela ó varias á la *p*R, valiéndose de las fórmulas [83 y 86] (619).

Como los ángulos B*xz* y ETM necesarios para el trazado de las rectas *xx'* y T*t* se han medido sobre el papel con el transportador, para trasladarlos despues al terreno, es lo más probable que al verificar estas operaciones, no vayan las líneas trazadas á terminar en los puntos opuestos *x'* y *t*, y habrá que rectificar su posicion por el procedimiento (272).

657. La brújula es un instrumento preciso para esta clase de trabajos y solo pueden decir lo contrario los que no la entienden ó no la han manejado lo bastante para descubrir todas las ventajas y todos los recursos que presenta en toda clase de operaciones, en una palabra, los que no saben su verdadero valor y no pueden apreciar esta joya de la Topografía, y yo he tenido ocasion de ver el asombro de algunos que eran inteligentes y que sin embargo la desdeñaban, al tocar de cerca sus maravillosos resultados. Sería imposible que yo enumerase aquí, las muchas ventajas de la brújula y me bastará decir que además de poder hacer con ella la mayor parte de las operaciones que con los demás instrumentos angulares, la brújula en medio de un extenso y espeso bosque poblado de corpulentos y elevados árboles, donde apenas se descubre parte del cielo, que el navegante divisa todo hasta el horizonte, sirve como á aquel de segura guia para dirigirse con un rumbo conocido. Tal vemos en la figura 317, al partir de un punto a' y tener que ir trazando una línea quebrada $a'b'c'$C buscando la salida más fácil, dirigiéndonos siempre con la direccion de la punta azul de la aguja á la parte Norte BCD que nos proponemos, ó con la punta blanca á la parte Sur ó bien al Este ú Oeste, valiéndonos de perpendiculares como $m'n'$ que se imaginan tiradas á la aguja en su punto céntrico en cada uno de los puntos de estacion.

658. Para trazar las líneas de separacion de las respectivas cortas, podemos seguir tambien el siguiente método. Sea AB (figura 319) la línea de separacion; como la direccion de esta línea no puede conocerse rigorosamente, el ángulo medido sobre el plano conduce á establecer una línea tal como A'B en lugar de la AB que deberia obtenerse. En este caso, desde el punto A que es el de partida para la operacion, bájese la Ab perpendicular sobre la A'B y tómese $ab = \frac{1}{2}$ Ab, á fin de llevar la magnitud ab de distancia en distancia y perpendicularmente sobre la A'B y se obtendrán nuevos puntos c, m, n, que nos servirán para trazar definitivamente la línea de separacion pq, para lo cual se irán plantando jalones y abriéndose paso de p á a, de a á c, de c á m... y así sucesivamente.

Este método si no completamente exacto, se emplea en muchos casos y no producirá diferencias muy sensibles en la superficie que se quiere obtener, sino en el caso en que AA' fuese muy considerable y que uno de los lados A'C del polígono tuviese una direccion muy distinta de la de su opuesto BR. Es indispensable que el trazado provisional A'B se haga de la manera más ligera posible, no cortando sino los árboles más precisos para poder descubrir los jalones ó sus cabezas.

659. Cuando la diferencia AA' entre las dos posiciones de las AB y A'B no excede de 2 metros, puede servir el primer trazado A'B, cuidando de añadir al lado del polígono en el plano ó restar de él, la distancia entre los puntos A y A' segun que este último se halle encima ó debajo del punto A.

Cuando la posicion de la línea de separacion AB se halla definitivamente fijada, se mide esta línea en el terreno y se aplica su longitud sobre el plano con arreglo á la escala, lo que servirá para conocer si se ha operado bien, pues en el caso contrario es preciso investigar las causas que producen el error y solo cuando se está cierto de la exactitud de la operacion, es cuando se procede á abrir definitivamente la línea cortando todos los árboles necesarios.

660. Suele á veces ser más cómodo establecer la línea de separacion AC (fig. 320), por medio de una línea auxiliar C*r* que se determina sobre el terreno, cuando la localidad presenta un espacio libre en que pueda operarse. Para esto, se traza en el plano la C*s* perpendicular al lado BC del polígono y se prolonga la línea AC; se toma en la escala una longitud C*n* que represente los metros que pueda calcularse caben en el terreno despejado, 60 metros por ejemplo, y trazando la perpendicular *nr* á la C*n* se hallará su valor en la escala que supondremos tiene 20 metros. Trácese ahora en el terreno la perpendicular C*s* á la CB, tómense los 60 metros de C á *n*, levántese en el punto *n* una perpendicular á la C*n*, y tomando en ella la *nr* de 20 metros, se plantará un jalon en el punto *r*, que con el colocado en C se podrá trazar la C*r* y su prolongacion en el interior del monte, que será la línea de separacion AC, sin hacer uso de los instrumentos angulares, si bien estos son muy convenientes para el trazado y prolongacion de las líneas.

661. Se concibe que ningun método particular puede indicarse para proceder á la determinacion de la figura del terreno que ha de comprender cada corta, aunque lo más frecuente es darlas la figura rectangular, estableciendo cada corta adyacente á la anterior recientemente explotada, siendo el plano de esta la que suministra la base de la nueva. En efecto, si una corta tiene una base de 500 metros y se quiere determinar una segunda corta de 5 hectáreas, se dividirán estas por 500 metros y el cociente 100

metros será la anchura de dicha corta, que se trazará á ángulos rectos.

662. La division de las cortas, llamando tambien así á los terrenos que comprende cada una, en lotes ó parcelas, no es más que un problema de division de una propiedad en partes iguales, desiguales ó proporcionales. Si queremos dividir la corta ABCD (fig. 321) en cuatro lotes iguales, se establecerá la línea de division *ab* paralelamente á AD ó á BC, de modo que las dos partes *ab* BC y *ab* AD tengan la misma superficie. Se dividirá despues cada una de estas dos figuras en dos partes iguales por las rectas *cd* y *rs* perpendiculares á la *ab*, y el trabajo no presenta dificultad, sobre todo cuando se trata de un rectángulo ó de un trapecio.

663. Cuando el terreno es extenso y grande el número de las parcelas, se trazará una línea de base AC (fig. 316) que atraviese el monte por su centro y en sentido de toda su longitud, y el procedimiento no difiere del expuesto (642). Todas las parcelas que no formen un cuadrado, un rectángulo ó un paralelógramo, se medirán por separado como tambien se dijo, para obtener su cabida. Todas las parcelas se numeran tambien por órden, para facilitar su conocimiento en cualquiera de los usos á que se las destine, de renta, arriendo, corta ú otro objeto cualquiera.

664. La comprobacion de las cortas se verifica haciendo de nuevo la medicion del terreno que comprenden, para asegurarse que la superficie es la que se habia consignado á cada una y poder saber en caso contrario la diferencia de cabida y buscar los medios de subsanarla. Cuando se hace una comprobacion, se elige una base distinta de la que se haya adoptado en la operacion primitiva.

665. Concluiremos consignando algunas prescripciones conformes con las Ordenanzas de Montes, para su conservacion y beneficio y que pueden servir de guia á los propietarios.

El Agrimensor debe señalar los montes ó partes de montes que deban destinarse para tal ó cual especie de arbolado; la distribucion en cuarteles para las cortas periódicas; las épocas de estas cortas, y si deben hacerse por *cuarteles*, que es más cómodo y ventajoso, ó por *entresaca* ó *clareo*, escogiendo los piés mejores. La corta por entresaca se practica tambien para hermosear y sanear los montes, derribando los árboles torcidos, los enfermos, los viejos y los no emplazados ó que no llevan fruto ó es coscoja, ejecutando la corta por el pié. Tambien deben cortarse los árboles cuando han llegado á cuanto pueden ser, pues dejándolos, cada dia pierden de su valor, se envejecen, se secan y pudren y al fin perecen.

No debe permitirse la corta de tallares ó árboles que no tengan á lo menos veinticinco años de edad, á no ser en los montes en que domine el castaño, el fresno y álamo blanco ó chopos; ó que estén sitos en tierra de ínfima calidad.

En toda corta de arbolados, se reservarán diez y seis *rezalvos* ó árboles escogidos de los que ya tengan la edad señalada, en cada fanega de tierra del marco de Castilla ó sea de 576 estadales cuadrados, equivalentes á 64,40 áreas. Los árboles así escogidos no se cortarán sino cuando se les vea en decadencia, ó que no pueden ya tener mayores medros.

En cuanto á los montes de árboles resinosos, cuyas cortas deben hacerse por entresaca ó clareo, debe señalarse la edad y grueso que deben tener los árboles para poderlos cortar, así como los medios de sacar provecho de sus resinas por sangrías ó destilacion. Del mismo modo debe expresarse, la forma de aprovechar los productos del corcho, y las cascas ó cortezas para curtidos.

Los medidores no deben dar más de una vara de ancho ó sea $0^{m},836$ á las sendas ó carriles que sea absolutamente necesario abrir para la medicion de los terrenos.

En los parajes destinados á corta servirán de *cotos*, *hitos* ó *mojones*, los árboles más notables que se hallaren en los ángulos y en las líneas laterales, y donde no hubiere árboles á propósito, se fijarán estacas, describiendo el sitio de su colocacion por los principales árboles que haya en su inmediacion. El medidor cuidará de hacer servir de coto, alguno de los árboles que ya sirvió al mismo efecto en la corta anterior.

A todos los árboles que sirvan de mojones angulares, les pondrá el Medidor la marca de su oficio al pié del tronco, y lo más cerca de tierra que sea posible, estampándola á derecha é izquierda de la línea de medicion. A los otros que sirven como de pared lineal los marcará por el lado que mira al terreno en que va á hacerse la corta.

Los Agrimensores deben levantar los planos y describir lo que hayan medido con destino á cortarse, indicando todas las circunstancias necesarias para que se puedan reconocer los lindes de las cortas al tiempo de hacerse la comprobacion de ellas.

En las cortas que deban hacerse, no por trozos de montes, sino por piés de árboles, se debe poner la marca en los que hayan de cortarse, así en su raigal como en el cuerpo de cada uno.

666. **Division de las rentas.**—Muchas veces las heredades no son de fácil particion, y se conviene en que queden pro-indiviso, repartiéndose las rentas ó productos de la finca en partes iguales, desiguales ó proporcionales entre todos los partícipes, segun lo que deba corresponder á cada uno.

En el repartimiento de las rentas totales entre las suertes en que está dividida una dehesa ó heredad, se suelen cometer dos abusos. El primero, que es muy frecuente, consiste en repartir igualmente á cada suerte, sin tener en cuenta que aunque las suertes tengan la misma extension, pueden no ser iguales en calidad, quedando así favorecidos unos y perjudicados los otros, lo que da despues lugar á cuestiones y pleitos. El otro abuso que no suele ser tan comun, pero que es tambien muy perjudicial, tiene lugar en aquellos pueblos en que se acostumbra pagar las rentas en grano, para lo cual antes de hacer la siega se reparte á cada suerte la renta que debe pagar á juicio de los peritos labradores ó tasadores y en vista del grano que calculan puede haber en ellas, segun el estado de la sementera. Se hace la suma de todas las rentas parciales y si sobra ó falta para componer la renta total, se disminuye ó aumenta la renta de la suerte que mejor les conviene ó en que tienen algun interés de amistad, parentesco ó espíritu de venganza. Aparte y aun suponiendo que no existan estas causas, suelen los tasadores atenerse al cuerpo que tiene la sementera, sin tener presente los beneficios que por el mayor abono, mejor labor y otras ventajas, puedan tener unas suertes más que otras, resultando de aquí que el labrador aplicado é industrioso que consigue buena cosecha á costa de su trabajo y mayores gastos, se encuentra luego recargado teniendo que pagar mayor renta, lo cual, además de ser injusto, es una falta de proteccion y de estímulo á la industria y laboriosidad.

667. En los problemas siguientes exponemos los métodos que se deben seguir para hacer el repartimiento de las rentas con equidad y justicia (Arit. 217).

Problema 1.º—*El producto ó renta de una dehesa es* 10.000 *reales y está repartida en* 4 *suertes de igual cabida, pero de distinta calidad; se quiera saber cuánto tiene que pagar cada suerte segun su calidad.*

Una vez averiguada la calidad de cada suerte de la manera que más adelante diremos, y representando por un número tal como el 10 la calidad de la suerte superior, si las demás suertes fuesen en calidad con respecto á la primera, una los $\frac{3}{5}$, otra $\frac{1}{2}$, y la más inferior $\frac{2}{5}$, podríamos representar estas calidades por los números 10, 6, 5 y 4, y dividir la renta total 10.000 rs. en partes proporcionales á estos números. Tendremos, pues, hallando la suma de dichos números que es 25, las siguientes proporciones:

$$
\begin{aligned}
25 : 10.000 :: 10 : x &= 4.000 \text{ rs.}\\
25 : 10.000 :: 6 : x' &= 2.400 \text{ rs.}\\
25 : 10.000 :: 5 : x'' &= 2.000 \text{ rs.}\\
25 : 10.000 :: 4 : x''' &= 1.600 \text{ rs.}\\
\hline
&\ 10.000 \text{ rs.}
\end{aligned}
$$

De modo que la suerte de calidad superior pagará 4.000 reales, la siguiente 2.400 rs., la tercera 2.000 rs., y la de inferior calidad 1.600 rs., cuyas rentas parciales suman la renta total de 10.000 rs.

Problema 2.º—*Una dehesa cuyo terreno es todo de la misma calidad, produce* 12.000 *rs. de renta; está dividida en cuatro suertes desiguales. La* 1.ª *de cabida de* 8 *hectáreas, la* 2.ª *de* 5 *hectáreas, la* 3.ª *de* 4 *hectáreas y la* 4.ª *de* 3 *hectáreas, y se desea saber la renta que corresponde á cada suerte.*

Sumando las hectáreas de las cuatro suertes se tendrán 20 hectáreas, que es la cabida total de la dehesa, y habrá que dividir la renta total 12.000 rs. en partes proporcionales á los números de hectáreas de cada suerte. Tendremos, pues, las proporciones siguientes, que nos darán la renta de cada suerte:

$$
\begin{aligned}
20 : 12.000 :: 8 : x &= 4.800 \text{ rs.}\\
20 : 12.000 :: 5 : x' &= 3.000 \text{ rs.}\\
20 : 12.000 :: 4 : x'' &= 2.400 \text{ rs.}\\
20 : 12.000 :: 3 : x''' &= 1.800 \text{ rs.}\\
\hline
&\ 12.000 \text{ rs.}
\end{aligned}
$$

Problema 3.º—*Una dehesa produce de renta* 8.520 *rs.; está dividida en cuatro suertes de distinta calidad y diferente cabida y se quiere saber la renta que corresponde á cada suerte.*

Supongamos que las calidades de las cuatro suertes están representadas por los números 10, 6, 5 y 4, y sus cabidas respectivamente son 8, 5, 4 y 3 hectáreas. Multiplicando ordenadamente estos números, es decir, el que representa la calidad de cada suerte por el que expresa su cabida, se tendrán los productos 80, 30, 20 y 12 que suman 142, y no habrá más que dividir la renta total 8.520 reales en cuatro partes proporcionales á estos productos, y se tendrán las rentas de cada suerte, para lo cual estableceremos las proporciones siguientes:

$$142 : 8.520 :: 80 : x = 4.800 \text{ rs.}$$
$$142 : 8.520 :: 30 : x' = 1.800 \text{ rs.}$$
$$142 : 8.520 :: 20 : x'' = 1.200 \text{ rs.}$$
$$142 : 8.520 :: 12 : x''' = 720 \text{ rs.}$$

8.520 rs.

CAPITULO IX.

De los deslindes y apeos de los terrenos.

668. Cuando se levanta el plano de una heredad, con el objeto de conocer exactamente su figura y la cabida de su superficie, en los casos de compra y venta, de division ó reparticion, y en todas aquellas operaciones en que hay necesidad de separar ó distinguir una parte de las demás, si no se estableciesen las líneas divisorias en el terreno ó se perdieran los datos, sería preciso volver á hacer de nuevo las operaciones en los casos que hubiera necesidad, y se comprende que lo primero es señalar bien en el terreno las líneas que separan una heredad de las contiguas, así como las que deban dividirla en varias partes iguales, desiguales ó proporcionales, lo que se llama hacer el *deslinde*. Esta operacion tiene la mayor importancia cuando se trata de entresacar un terreno de entre otros varios, por haber sido borradas las líneas divisorias por el transcurso del tiempo y hay que restablecerlas de nuevo. Pero despues de hecho el deslinde, deberán fijarse las líneas de una manera estable para evitar inconvenientes en lo sucesivo, poniendo en el terreno ciertas señales, que marquen dónde acaban las propiedades de los unos y dónde comienzan las de los otros y á esto se llama hacer el *apeo*. Estas dos operaciones simultáneas de *deslindar* una finca y *apearla* ó fijarla de modo que permanezca sin alteracion en

lo sucesivo, las comprenden algunos bajo la sola expresion de *hacer el apeo*.

669. **Deslindes**.—Desde luego se concibe que en fincas en cuya extension y figura no se presente dificultad por parte del mismo dueño y de los propietarios colindantes, la operacion de levantar el plano de una finca y dividirla si es preciso, nos da determinados los linderos y las líneas divisorias, y por lo tanto deberíamos desde luego pasar á tratar de los distintos medios que se emplean para fijar dichas líneas y linderos que constituyen el *apeo*; más como no siempre sucede así, tenemos que ocuparnos de resolver diversos problemas de importancia que se comprenden en la cuestion de los *deslindes*.

Para esto, distinguiremos dos partes: en la primera trataremos del convenio que se hace entre varios propietarios colindantes para transformar los linderos formados por líneas *onduladas* ó *sinuosas* en otros compuestos de líneas rectas, sin que ninguno pierda nada en extension superficial, por la mejor disposicion y mayor sencillez que presentan las figuras rectilíneas sobre las curvilíneas y mistilíneas, tanto para el levantamiento de los planos, como para las demás operaciones de division que sea necesario practicar en los terrenos. Estas operaciones se conocen con el nombre de *transformacion de los linderos*.

En la segunda parte, nos ocuparemos de averiguar las direcciones que deben tener los linderos de una heredad, que se han borrado ó desaparecido con el tiempo, para determinar su situacion, ó bien para entresacar y hallar una tierra que haya desaparecido entre otras en que debe hallarse comprendida, lo que suele suceder con frecuencia, pues hay muchos que usurpan la propiedad agena rompiendo los linderos á pesar de haber leyes que prohiben la translimitacion, que por ser un despojo violento, lleva consigo la pena de perder la propiedad de la tierra, si esto lo hace de su propia autoridad y otro tanto más el que no es dueño, como puede verse en el libro 4.°, título 13 de la Novísima Recopilacion. Estas operaciones se comprenden bajo el nombre de *investigacion* ó *rectificacion de los linderos*.

670. **Transformacion de los linderos**.—Pasaremos á exponer los problemas que pueden ocurrir más comunmente.

671. **Problema 1.°—Transformar en un lindero recto, una línea ondulada ó sinuosa.**

Sea A*mnrs*B (fig. 322) la línea ondulada que es lindero comun á dos propiedades M y N, comprendidas entre las rectas EE′ y CC′, y que se quiere sustituir con una recta. Trácese la recta AB que una sus extremos, y hállese la superficie del espacio comprendido entre dicha AB y la línea ondulada, para lo cual se trazarán en el plano que se supone levantado de antemano, el mayor número de perpendiculares sobre la AB, que sea posible, para determinar con bastante precision dicha superficie, valiéndonos del método expuesto (431). Estas perpendiculares deben ser las trazadas y medidas en el terreno para el levantamiento del plano del contorno de la superficie. Dividiendo el doble de esta superficie por la AB considerada como base de un triángulo, se tendrá (594) la altura del mismo, y levantando en el punto B, ó A segun se designe, una perpendicular, se tomará en ella con arreglo á escala la parte BD igual á dicha altura, y se trazará por el punto D la paralela DC á la AB, que cortará á la linde BC de la tierra N en un punto C. Únase el punto A con el C por medio de la AC, y este será el lindero recto que separará las dos propiedades M y N. Haciendo el *replanteo* ó sea trasladando al terreno la recta AC del plano, quedará resuelta la cuestion.

672. **Problema 2.°—Transformar en dos linderos rectos, una línea ondulada y sinuosa.**

Sea la A*mnrs*B (fig. 323) la línea ondulada; hágase la misma construccion que en el problema anterior y hállese la superficie que dividiendo su doble por la base AB tendremos la altura, que supongamos sea BG. Trazando por el punto G en el plano una paralela á la AB, se podría unir cualquier punto de esta paralela con los A y B, y se tendrian los dos linderos rectos. Si la paralela pasase por un punto notable, como el árbol E que puede servir de hito ó coto, ó cortase una vereda ó sendero AE, que conviene sea camino á las dos tierras M y N, se aprovecharia dicho punto E para tirar las rectas AE y EB que serian los dos linderos rectos.

Si hubiese un pozo D en la heredad N, y el propietario tratase con el de la tierra M para darle participacion, entónces desde este punto D se bajaria una perpendicular DF á la AB, que se tomaria por altura del triángulo que tuviese por superficie la comprendida entre la AB y la línea ondulada. Dividiendo el doble de esta superficie por la altura se tendrá la base AP (594), y en este caso quedaria reemplazada la línea sinuosa por una quebrada compuesta de las tres rectas ó linderos AD, DP y PB.

Se comprende, que á no ser por circunstancias particulares ó por obstáculos que se interpongan, debe siempre trazarse un sólo lindero AC como en el problema 1.°, pues el trazado de las AE y EB, así como el de las AD, DP y PB, dá lugar á ángulos entrantes y salientes que desfiguran las heredades y es ménos á propósito en el caso de dedicarse la tierra á las construcciones de edificios.

673. **Problema 3.°—Transformar un lindero curvilíneo ó tortuoso, en un lindero recto que sea paralelo á la recta que une los extremos del primero.** Supongamos que las líneas AD y BC (fig. 324) limitan las dos propiedades M y N que tienen comun el lindero curvilíneo ó tortuoso A*mnrs*B y que se quiera reemplazar este por una recta que sea paralela á la AB que une los extremos de aquel. Para esto, se trazará en el plano una recta cualquiera DC paralela á la AB y se hallará la superficie del trapecio ABCD, y las medidas de las bases AB y CD y de la altura CH. Con estos datos y el valor de la superficie comprendida entre la AB y la línea sinuosa A*mnrs*B, que se hallará como se ha dicho en el problema 1.°, se puede hacer aplicacion de las fórmulas [83] y [86] (619), para hallar la longitud de la línea de separacion, que tomándola con arreglo á escala desde B á F y trazando la EF, paralela á BC se tendrá el punto E, por el cual se tirará la EG paralela á AB, la cual será el lindero recto que se deseaba, y que separa del trapecio ABCD una parte ABGE, igual en superficie á la comprendida entre AB y la línea sinuosa A*mnrs*B.

674. En los problemas anteriores, hemos supuesto tácitamente que los terrenos que tienen un lindero comun, son de la misma calidad, pues si esta fuera diferente, sería preciso tener en cuenta esta circunstancia, para evitar el que haya perjuicio para ninguno de los propietarios. Supongamos que los terrenos M y N (fig. 322) son de distinta calidad, y que sea N el que tenga calidad doble mejor que el M. Despues de establecido el nuevo lindero recto AC, es evidente, que el propietario de M cede al de N la parte comprendida entre la recta A*r* y la línea ondulada A*mnr*, y que toma del mismo la parte comprendida entre las rectas *r*C y CB y la ondulada *rs*B, cantidades exactamente iguales en extension y que resuelven el problema en la hipótesis de ser las tierras M y N de igual calidad. Pero en el caso presente que decimos que la parte *r*CB*s* vale doble que la A*mnr*, de dos modos puede el propietario de M indemnizar al de N; ó averiguando el valor de las superficies *r*CB*s*

y *Amnr*, que se medirán con cuidado y que deben salir iguales y hallando sus valores que supongamos resulta para la primera 400 rs., en cuyo caso deberá ser 200 rs. el de la segunda, para que el propietario de M entregue al de N la diferencia 200 reales que resulta á favor de este, ó bien apelando al medio de no tomar el propietario de la tierra M, nada más que la mitad de la parte *r*CB*s* de la tierra N. Para esto, dividiendo toda la superficie *r*CB*s* que es el doble de la que ahora se trata de dejar, por la BC considerada como base de un triángulo, se tendrá la altura del mismo. Levantando pues en el punto C una perpendicular CP á la BC igual á dicha altura, trazando por P una paralela PR á la BC y uniendo el punto O de su interseccion con la AC con el punto B, el triángulo BOC de base BC y de altura OF = PC será el que tendrá que ceder el propietario de la tierra M al de la tierra N y tomar solamente de esta la parte *r*OB*s*, verificándose en este caso el tener que sustituir el lindero recto AC que resultó primero, por la línea quebrada compuesta de los dos linderos AO y OB, entre las dos propiedades M y N. De un modo análogo debe procederse en los casos de igual naturaleza.

675. **Problema 4.º—Transformar el contorno irregular ó sinuoso de un terreno cualquiera, en una série de linderos rectos, que le separen de las propiedades colindantes.**

Si suponemos que el terreno O (fig. 325) es de corta extension, y que las líneas *ab*, *cd*, *rs* y *tx* separan entre sí las propiedades colindantes M, N, P y R, se trazarán las rectas *bc*, *cr*, *rx* y *bx* y se transformará el lindero sinuoso que separa al terreno O de cada uno de los contiguos, haciendo aplicacion de los métodos expuestos en los tres problemas anteriores. Mas debe hacerse aquí una observacion importante, y es que trazado el primer lindero recto, como el segundo debe partir del extremo del primero, el tercero del extremo del segundo y así sucesivamente, al final, cuando no quede más que unir el último punto con el primero ó de partida, sería una casualidad muy estraña que la línea de separacion con la última propiedad fuese la que uniese dichos puntos, por lo cual, lo que casi siempre ocurrirá será el tener que valerse de dos linderos rectos para separar la tierra de la última propiedad.

Sea, por ejemplo, el terreno O (fig. 326) y sean A*a*, B*b*, C*c*, D*d* y E*e* las lindes laterales que separan entre sí las propiedades colindantes M, N, P, R y S. Trácense las rectas AB, BC, CD, DE y EA que unen entre sí los extremos de cada una de las partes del contorno sinuoso del terreno O, colindantes con los de cada uno de los distintos propietarios y cuyos linderos ondulados se han de transformar en linderos rectos, relacionados entre sí y de modo que no resulte perjuicio en superficie para la tierra O ni para las colindantes.

Para esto, á partir de un punto tal como el A, se empezará sustituyendo el lindero curvilíneo comun con la tierra M, por el lindero recto *ab* paralelo á AB por el método del problema 3.° (673). No se tomará ahora como base de operacion la BC que une los extremos de la linde sinuosa comun con la propiedad N, sino la *b*C que desde el punto *b* de la linde B*b* comun á las tierras M y N va á parar á C, y dicha linde sinuosa se podrá reemplazar por los dos linderos rectos *br* y *r*C por el método del problema 2.° (672). Tomando despues por base la CD se transformará el lindero ondulado comun con la propiedad P, en el lindero recto C*d* por el método del problema 1.° (671), y para continuar no tomaremos por base de la operacion la DE sino la *d*E y observando que el terreno que hay que tomar de la propiedad R es mayor que el que hay que ceder del terreno O, la línea de separacion obtenida tambien como en el problema 1.° se dirigirá al interior del terreno O hasta encontrar á la prolongacion de la linde lateral E*e* en un punto *s*, y por último nos encontramos ya en el caso de unir el último punto *s* con el de partida *a* para sustituir el lindero curvilíneo comun con la propiedad S por uno ó más linderos rectos. Para esto, no tomaremos por base de la operacion la AE, sino la *as* y como, sería segun hemos dicho, muy casual que la parte que se tome de la propiedad S compense la que se ceda de la propiedad O, en cuyo caso la *as* resolvería la cuestion, y lo natural es que haya una diferencia, se tomará la *as* como base de operacion y se construirá el triángulo *a*S*s* que tenga de superficie esta diferencia, determinando su altura y siguiendo el método expuesto en el problema 2.°, bien hácia la parte de la propiedad S ó hácia el interior de la O, segun deba tomarse la diferencia de la primera como suponemos en la figura, ó de la segunda en caso contrario.

676. Se comprende que en un terreno no puede trazarse más que un lindero paralelo, cualquiera que sea el número de las lindes que haya que modificar, pues de otro modo resultarían entre las que estuviesen contiguas, pedazos de terreno en forma de picos, que no deben permitirse de modo alguno en la figura de las

heredades, supuesto que el principal objeto de la transformacion de los linderos consiste en regularizar los terrenos, de manera que las posesiones se presenten con las formas más regulares, sencillas y agradables á la vista que sea posible.

Del mismo modo se puede observar, que el menor número de linderos rectos que convendría obtener, debe ser igual al número de trozos curvilíneos correspondientes á las propiedades colindantes, es decir, que en el caso de la figura 325 deberían resultar cuatro rectas de separacion, por ser cuatro las propiedades M, N, P y R, colindantes con la propiedad O, á no ser que por la diferente calidad de los terrenos contiguos, como digimos en la figura 322 (674), ó con el objeto de dar mayor regularidad al terreno, ó bien por cualquiera otra circunstancia de conveniencia ó de interés comun á los propietarios, como hemos explicado en la figura 323 (672), haya que doblar el número de los nuevos linderos rectos comunes á unos y otros terrenos.

Por último, convendria que no pasase el número de los nuevos linderos rectos del doble del número de las propiedades colindantes, á no ser tambien que por las razones acabadas de exponer y que sea preciso satisfacer, ó por la mucha extension de los terrenos, sea indispensable aumentar en mayor cantidad el número de los expresados nuevos linderos.

677. Dicho se está, que en todos los procedimientos de que nos estamos ocupando y de los que nos valgamos en lo sucesivo, deben hacerse con precision las operaciones sobre el plano, y el trazado en el terreno de las rectas que resuelven las cuestiones ó sea el *replanteo*. Escusado es decir tambien que de un modo análogo debe procederse en cuantos problemas ocurran de este género y cuyas variedades no influyen en la parte esencial de su resolucion y están siempre al alcance del Geómetra, despues de cuanto se ha indicado sobre el particular.

678. Pero si se supone ahora que en el caso indicado (675) fuese un terreno tal como el O (fig. 325), de grande extension, como pudiera suceder, que las perpendiculares $a'b'$, $c'd'$, para determinar la linde comun á las tierras O y N, tuviesen mucha longitud y hubiera que inscribir un polígono de más lados que el cuadrilátero $bcrx$ para la determinacion del contorno, dividiriamos entonces el trozo curvilíneo $rd'b'c$ en tres partes en los puntos p y q y la cuestion se reduciria á sustituir esta curva por tres ó más linderos rectos, y así en las demás partes del contorno.

679. **Método de las compensaciones.**—Cuando el polígono es de mucha extension, como hemos dicho en el párrafo anterior, y presenta muchos lados de poca longitud ó es curvilíneo, se emplea con ventaja el *método de las compensaciones*, que consiste en sustituirle por otro de ménos lados, dispuestos de manera que haya *compensacion* entre las partes excedentes y deficientes; así, para el contorno curvilíneo representado en la figura 327, se traza una primera recta AB, de manera que la figura deficiente a' equivalga á la excedente a; despues la BC de modo que b' equivalga á b, y así sucesivamente. Si la última recta EA puede trazarse de modo que la parte deficiente e pueda reemplazar á las dos excedentes e' y e'', entonces la línea EA será la última que resuelve el problema; en caso contrario, el último lindero curvo cuyos extremos son A y E, se transformará en dos linderos rectos como ya sabemos (672).

Si los contornos de los terrenos son rectilíneos, pueden establecerse las compensaciones con más exactitud; pues si la recta AB (fig. 328) es un lado de un polígono principal, los triángulos a y c pueden reemplazarse por los b y d que aparecen equivalentes.

Se puede dar un medio sencillo para establecer la *recta de compensacion* que ha de sustituir á una línea ondulada, resolviendo el siguiente

680. **Problema.—Dada la línea ondulada** EHF **(figura 329) que separa dos propiedades** M, N, **comprendidas entre las rectas** AB **y** CD, **reemplazarla por una recta** EF, **sin que se alteren las superficies de las dos propiedades.**

En el punto de interseccion de la línea ondulada con la recta AB, se levantará á esta una perpendicular EF prolongándola hasta su encuentro en F con CD, y se hallarán las superficies de los tres segmentos a, b y c que forma con la línea ondulada. La propiedad AEHFC se hallará aumentada en los segmentos a y c, y disminuida en el b: si b fuese igual á $a+c$, la recta EF resolvería el problema; pero si resulta $a+c>b$, se hallará la diferencia $a+c-b$ y se dividirá por $\frac{EF}{2}$; tomando á partir de E una parte EG igual al cociente hallado, y trazando la FG, ésta resolverá el problema, siendo la recta de compensacion que ha de representar el nuevo límite comun á ambas propiedades. En efecto, se tiene

$$\text{triáng. EFG} = \frac{\text{FE}}{2} \times \text{EG} = a + c - b.$$

681. **Deslinde entre dos pueblos.**—Cuando el deslinde se practica con el fin de distinguir ó separar los términos de dos pueblos contiguos, hay que extender esta operacion á líneas de muchos kilómetros, lo que la complica sobremanera. El Agrimensor que tiene que proceder con arreglo á las formalidades que la ley prescribe y á presencia de muchos interesados, es necesario que dé muestras de mucha inteligencia y rectitud, por lo que debe estudiar mucho cuantos problemas en lo científico y disposiciones en lo legal, puedan conducirle al acierto evitando de este modo los muchos disgustos y cuestiones las más veces fomentadas por las pasiones, que pueden suscitarse entre los particulares y entre familias enteras.

682. **Rectificacion de los linderos.**—Comprendemos en esta parte los medios que deben emplearse para descubrir los linderos borrados por el tiempo ó la mala fé, así como las tierras perdidas y ocultas ú oscurecidas entre las de los propietarios colindantes, para lo cual estudiaremos los siguientes problemas.

683. **Problema 1.º—Dadas cuatro tierras, entre las que se halla otra que resulta tener menos superficie que la que le corresponde, rectificar sus linderos, para recobrar la cantidad que le falta.**

Sea la tierra O (fig. 330) que linda al Norte con la tierra M, al Este con la N, al Sur con la P y al Oeste con la R, determinadas todas por las líneas llenas que se ven en la figura, y supongamos que medida la tierra O por el sugeto que la compra ó hereda, resulta tener 5 hectáreas y 3 áreas, siendo así que segun las escrituras y documentos correspondientes debe contener 5 hectáreas y 35 áreas. Se hallará pues en el caso de reclamar las 32 áreas que le faltan y para esto lo primero que debe exigir á los dueños de las tierras colindantes M, N, P y R es, no sólo la medida de sus tierras, sino la presentacion de los títulos ó escrituras, para hacer el cotejo de las medidas que ahora resulten con las que en los títulos se consignan.

Verificadas las medidas de las cinco tierras, supongamos que resultan las cabidas siguientes:

Para la tierra.	O..............	5 hectáreas y	3 áreas.
Para la »	M..............	7...........	25
Para la »	N..............	8...........	32
Para la »	P..............	6...........	»
Para la »	R..............	9...........	»

Total de la superficie ABCDEF= 35 hectáreas y 60 áreas.

Examinados los títulos ó escrituras, resulta que sus medidas deben ser:

Para la tierra	O..............	5 hectáreas y	35 áreas.
Para la »	M..............	7...........	»
Para la »	N..............	8...........	20
Para la »	P..............	6...........	»
Para la »	R..............	9...........	5

Total de la superficie ABCDEF= 35 hectáreas y 60 áreas.

Haciendo el cotejo de los resultados que acaban de obtenerse por ambos medios, se observa:

1.° Que estando conforme la medida de la tierra P con lo que expresa la escritura, no hay ninguna reclamacion que hacer á favor ni en contra del propietario de esta tierra, resultando deber permanecer el mismo el lindero comun *me*.

2.° Que las tierras M y N, teniendo mayor cabida que las que consignan las escrituras, habrá que reclamar de sus dueños las diferencias que deben pertenecer al dueño de la tierra O, y que son 25 áreas para la primera y 12 áreas para la segunda.

3.° Que no teniendo la tierra R más que 9 hectáreas, y debiendo ser su cabida segun la escritura 9 hectáreas y 5 áreas, hay que restituir al dueño de esta tierra las 5 áreas que le faltan.

De modo, que haciendo la comprobacion resulta, que añadiendo á las 5 hectáreas y 3 áreas que mide la tierra O, las 25 áreas y 12 áreas que resultan demás para las M y N y deben tomarse de ellas; y restando de la suma que resulta 5 hectáreas y 40 áreas, las 5 áreas que hay que restituir á la tierra R, resultan efectivamente para la tierra O las 5 hectáreas y 35 áreas que debe contener segun los títulos y por cuyo valor la heredó ó compró su dueño.

684. Pasemos ahora á rectificar los linderos, ó sea á señalar de nuevo los linderos que deben separar unas tierras de otras para que cada tierra contenga la cabida que le corresponde, y puedan

conservarse los linderos en lo sucesivo sin nuevas alteraciones, con lo cual se tendrá concluida la operacion del deslinde. Empezaremos por el caso más complicado, que es cuando no existen planos de los terrenos, sino solamente los títulos, y aunque parezca extraño el hacerlo así, es, sin embargo, con el objeto de hacer resaltar la importancia de este asunto, siendo además lo mismo en esta clase de cuestiones empezar por el caso más fácil ó por el más difícil.

Para esto, tomando por base de un triángulo el lindero antiguo *ac*, (fig. 330), y dividiendo 50, doble de las 25 áreas que tiene de más la tierra M, por la longitud *ac* de dicha base, se tendrá la altura *bb'*, que levantándola en cualquier punto de la *ac* por la parte interior de la tierra M y trazando las *ab* y *bc*, estos serán los nuevos linderos de la tierra O con la M.

Haciendo las mismas operaciones para rectificar los linderos con las tierras N y R, sin más diferencia que trazar como antes la perpendicular *dd'* en el interior de la N, por tener que quitarle las 12 áreas que tiene demás, y la perpendicular *nn'* por la parte esterior de la tierra R por tenerla que añadir las 5 áreas que la faltan, se tendrán los nuevos linderos *cd* y *de*, *an* y *mn* comunes con las tierras N y R, permaneciendo el mismo el lindero *ae* comun con la tierra P, y debiendo ser la nueva figura de la tierra O la *abcdemn* señalada con líneas de trazos y marcados sus ángulos con piquetes, en vez de la *acem* que antes tenía.

El mayor número de linderos que ahora se obtiene, podrá dar lugar, por el convenio y armonía que pueda establecerse entre los propietarios de las 5 tierras, á la operacion de la *transformacion de linderos*, haciendo uso de los procedimientos ya expuestos.

685. **Problema 2.º—Dadas cuatro tierras, entre las que debe haber otra que aparece perdida ú obscurecida, rectificar los linderos de todas para descubrirla y deslindarla.**

Sean M, N, P, R (fig. 331) las cuatro tierras señaladas en la figura con líneas llenas, entre las que debe existir otra tierra O, que señalamos con líneas de trazos. Por el procedimiento del problema anterior, podremos llegar á descubrir las partes que se han de tomar de cada una de las tierras M, N, P y R, determinando los linderos que deben ser comunes á cada una de ellas con la tierra O. Se podrá despues por la transformacion de linderos (670) reducirla á la forma definitiva *abcde* que se vé en la figura, suponiendo que se ha podido establecer un lindero recto *ab*, *bc* y *cd* con cada una de las M, N y P, y habiendo tenido que trazar dos *ae* y *ed* para separarla de la tierra R, como sucede generalmente, y dar así cima á la operacion.

686. Muy grave y transcendental es la operacion de rectificar los linderos, que acabamos de poner de manifiesto con la resolucion de los problemas anteriores y dá lugar á serias consideraciones. En efecto, puede suceder: 1.° Que las tierras fuesen mal medidas al formar las escrituras. 2.° Que las tierras M, N, P y R que citamos en cualquiera de las figuras 330 y 331, por ejemplo, en la fig. 330, estén perfectamente deslindadas entre sí, no teniendo que alterar las direcciones de los linderos AB, BC, CD... ni las de los Aa, Bc, De... y entonces queda reducida la cuestion á lo expuesto. Pero podrá suceder, que una de las tierras M que ha tomado parte de la tierra O, haya perdido á su vez la misma ó más cantidad por haberse introducido en su propiedad, alterando los linderos AB, A*a* ó Bc los dueños colindantes, resultando que tenga ahora más ó ménos de lo que diga la escritura, aunque la medida que se hiciera para consignarla en aquella estuviera bien hecha. Y de aquí el ponerse sucesivamente en movimiento un gran número de propietarios y originarse todo género de pleitos y disputas. 3.° Que aun en presencia de los hechos, ninguno de los dueños de las tierras vecinas quiera ceder de su parte, ni pasar por ser el usurpador, lo que origina tambien sérios conflictos.

Por todo lo cual, el Agrimensor debe procurar con su prudencia y cordura, evitar todos estos inconvenientes y dejar á todos contentos. Para proceder con el mayor acierto, conviene que se haga acompañar de labradores que hayan trabajado la tierra que se ha de deslindar ó las inmediatas, lo cual unido á las mediciones que practique y á los medios que ponga en juego, podrá hacer que todo se arregle amigablemente entre los interesados, evitando los gastos de procesos que siempre son mayores que el valor de un trozo más ó menos de tierra que pueda ganarse ó perderse.

687. Ahora bien, despréndese de lo dicho, la importancia del caso más sencillo que puede presentarse en la práctica y que hemos dejado para lo último, segun digimos (684), el cual es sin disputa cuando cada propietario posee el plano de su finca, levantado con exactitud y orientado, además de los títulos ó escrituras, pues entonces, suponiendo que se trata de la tierra

O, (fig. 330) no habría más que hacer el replanteo sobre el terreno, partiendo de una de las lindes AB, midiéndola y dándola la longitud que señala el plano, y trazar en los puntos A y B los ángulos B*Aa* y AB*c* con un goniómetro ó con la plancheta. Se fijan las longitudes A*a* y B*c* y formando por último sobre el terreno los ángulos A*ab* y B*cb* que marque el plano, se tendrá el punto *b* y los linderos *ab* y *bc* que suponemos son los de la tierra M comunes con la O y no el lindero *ac* que habia sido sustituido por aquellos con el tiempo ó por la mala fé, y que deberá comprobar con el correspondiente en el plano de la tierra O, así como los A*a* y B*c* deben concordar tambien con los mismos de las tierras R y N, y así sucesivamente se irá haciendo todo el replanteo hasta haber formado sobre el terreno la confeccion de los cinco planos, cual si lo hubiéramos hecho sobre el papel.

688. Pero aunque no todos los propietarios tengan el plano, no por eso deja de facilitarse la operacion, pues siempre con los planos que se tengan, hay medios de hallar con más seguridad la figura de los demás terrenos, pues si en la figura del caso actual, el dueño de la tierra O que hace las reclamaciones, careciese de plano, el replanteo de los demás planos vendría á determinar la figura *abcdemn*, que debe corresponder á su finca O. Esto, unido á las luces que de sí arrojen los títulos de las propiedades de que no haya planos, asegurará el buen éxito de todas las operaciones, en los casos frecuentes de rectificar los linderos de una finca y de buscar una tierra perdida.

Para mayor ilustracion de nuestros lectores, vamos á consignar aquí, el siguiente curioso problema de division y deslinde que resuelve Mr. J. Regnault en su *Curso práctico de Agrimensura*, y que yo he modificado.

689. **Problema.—Tres propietarios poseen un terreno cuya superficie real es de 38 áreas y 48 centiáreas ó metros cuadrados; sus títulos no componen más que 28 áreas; se quiere dividir y deslindar el terreno, de manera que cada uno perciba lo que tenía y además la bonificacion que le corresponda.**

Supongamos que el terreno propuesto sea el representado en la figura 332; que el polígono ó porcion ABCFGE sea la parte del primero, la porcion EGHIJML la parte del segundo y la porcion MJOPLN la parte del tercero.

Es preciso dividir estos polígonos en triángulos, hallar la superficie de la totalidad del terreno, y dividirla despues segun los títulos de los propietarios, dando á cada uno proporcionalmente lo que les toca de la bonificacion; ó bien, es preciso medir cada parcela, sumar despues sus superficies, restar del resultado las cabidas contenidas en los títulos, y la diferencia será la bonificacion que debe repartirse entre todas las partes, proporcionalmente al contenido de cada una segun los títulos.

El polígono ABCFGE puede descomponerse en cuatro triángulos;

	Areas.
ABD cuya superficie es de...........	9,81
AED................. de...........	5,35
DCF................. de...........	0,97
DFG................. de...........	0,21
Cabida del primer polígono...	16,34

El polígono EGHIJML puede descomponerse en seis triángulos;

	Areas.
DGH cuya superficie es de...........	0,66
DHY................. de...........	1,26
IJK................. de...........	0,18
DKL................. de...........	4,77
DEL................. de...........	1,39
KLM................. de...........	4,31
Cabida del segundo polígono...	12,57

El polígono MJOPQN puede descomponerse en cuatro triángulos;

	Areas.
JMO cuya superficie es de...........	1,94
MNO................. de...........	0,61
NOP................. de...........	4.43
PQN................. de...........	2,59
Cabida del tercer polígono.....	9,57

Resúmen de las cabidas de los tres polígonos.

	Areas.
El primer polígono contiene..........	16,34
El segundo..........................	12,57
El tercero..........................	9,57
Cabida total del terreno propuesto...	38,48

El resultado del cálculo de los catorce triángulos que componen el polígono propuesto, dan para superficie del mismo 38 áreas y 48 centiáreas, y no resultando por los títulos más que 28 áreas, hay un esceso ó bonificacion de 10 áreas y 48 centiáreas, que hay que repartir entre los tres propietarios, en proporcion á la cantidad de terreno que expresan sus respectivos títulos.

Ahora bien, segun dichos títulos,

	Areas.
El primero tiene.....................	12,22
El segundo...........................	9,35
El tercero.	6,43
Total................................	28,00

Se establecerán, por lo tanto, para repartir la bonificacion 10,48 áreas, proporcionalmente á estas tres cantidades, las tres proporciones siguientes:

	Areas.
$28 : 10,48 :: 12,22 : x =$	4,58
$28 : 10,48 :: 9,35 : x' =$	3,50
$28 : 10,48 :: 6,43 : x'' =$	2,40
Total igual á la bonificacion...	10,48

Comprobacion.

				Areas.
Corresponde	al 1.er	propietario.....	12,22+4,58=	16,80
Id.	al 2.°	id..........	9,35+3,50=	12,85
Id.	al 3.°	id..........	6,43+2,40=	8,83
Cabida total del terreno propuesto.......				38,48

Hecha la liquidacion á cada uno de los tres propietarios, para deslindar la parte que á cada uno corresponde, vemos que;

	Áreas.
El 1.er propietario tiene por los títulos	12,22
Le corresponde por la bonificacion	4,58
Debe importar su parte	16,80
Importa lo que tiene	16,34
Tiene que restituirle el 2.º propietario	0,46

Estas 46 centiáreas deben tomarse á lo largo de la línea GE cuya longitud es de $39^m,70 + 9^m,00 = 48^m,70$ y á la izquierda, para lo cual se dividirán las 46 centiáreas por la longitud $48^m,70$, para tener la anchura de la zona que hay que devolver. Esta division da por cociente $0^m,94$ y por lo tanto es preciso tirar una paralela *mn* á la GE á una distancia de $0^m,94$ para restituir la superficie que el primer propietario tiene de ménos.

	Áreas.
El 2.º propietario tiene por los títulos	9,35
Le corresponde por la bonificacion	3,50
Debe importar su parte	12,85
Importa lo que tiene	12,57
Tiene que percibir	0,28
Ha entregado al 1.er propietario	0,46
Tiene que restituirle el tercer propietario	0,74

Estas 74 centiáreas deben restituirse á lo largo de la línea JM que tiene 40 metros de longitud; se dividirá pues 74 centiáreas por 40 metros, y el cociente $1^m,85$ será la anchura de la zona que hay que tomar, lo que se conseguirá trazando una paralela á la línea JM, y á su izquierda, á la distancia de $1^m,85$, á fin de ceder al segundo propietario una superficie de 0,74 áreas.

	Áreas.
El tercer propietario tiene por los títulos.........	6,43
Le corresponde una bonificacion de...............	2,40
Debe importar su parte...........................	8,83
Importa lo que tiene	9,57
Exceso que ha devuelto al 2.° propietario	0,74

Este resultado justifica la exactitud de toda la operacion.

690. **Apeos**.—Ya hemos dicho que despues de tener deslindada una propiedad, es menester que las líneas que la determinan queden fijas para siempre, para que se sepa dónde acaban las propiedades de los unos y empiezan las de los otros, y que esta operacion se llama *apeo*.

691. Debiendo ser respetada por todos la propiedad, bastaría emplear los medios más sencillos para su resguardo y seguridad. Así es, que sería suficiente hacer el *apeo* por medio de *rebozos*, de *surcos* ó de *lindazos*.

692. Los *rebozos* consisten en atar con tomizas los sarmientos de las últimas plantas ó cepas linderas de las viñas para indicar que se respete la posesion.

693. Los *surcos* son unas zanjas pequeñas que se hacen al rededor de toda la finca, tan poco anchas y profundas que no ofrecen ninguna dificultad para traspasarlas, borrarlas y cambiarlas de direccion, siendo por lo tanto uno de los peores medios que pueden emplearse y que no obstante se usa con frecuencia.

694. Los *lindazos*, llamados tambien *lindes* ó *linderos*, son unas fajas ó zonas de terreno que se dejan sin labrar entre las respectivas propiedades contiguas de dos propietarios, cuyo terreno se cede por mitad por ambos en beneficio de su comodidad y de la de los habitantes del campo. Sirven en efecto de pequeñas veredas ó sendas para las comunicaciones entre unos y otros en todos sentidos y con toda independencia, evitando los perjuicios de servidumbres onerosas, como son las veredas de paso. En los lindazos crece la yerba espontáneamente, lo que sirve para separar ó distinguir bien cada heredad de las demás colindantes. Suele á veces levantarse el suelo de estos lindazos algo más que las partes labradas inmediatas, lo que es conveniente para que estén practicables en todos tiempos. La verdadera línea divisoria entre cada

dos propiedades contiguas, debe ser el eje de la faja ó zona de terreno que constituye el lindazo.

695. Pero la mala fé de algunos de los propietarios colindantes y la mala intencion de los transeuntes, hace preciso emplear otros medios más seguros que puedan restituir cuando se quiera la figura que corresponde á una tierra, aunque haya esperimentado en ella cualquiera alteracion, y que liberten al mismo tiempo á la heredad de que se apropie nadie sus frutos, y á veces tales prevenciones son necesarias tambien contra los animales campestres. Sin embargo de que la necesidad obligue á tomar todo género de precauciones, es lo cierto que dan muy mala idea del poco respeto que se profesa á la propiedad y de la ninguna cultura de los habitantes de la comarca.

696. Pero antes de exponer estos medios, creemos conveniente dividir las propiedades en tres clases para nuestro objeto, y con el fin de exponer en cada una la manera más conforme de practicar el *apeo*.

En la *primera clase* colocaremos las posesiones de mucho valor ó pertenecientes á ricos hacendados y que son de utilidad y recreo, como las casas de campo, los cortijos, fábricas, que casi todas tienen terrenos adyacentes y las huertas y jardines, contiguos ó separados de los edificios. Para apearlas se emplea el medio del *cerramiento*.

En la *segunda clase*, las fincas de igual naturaleza que las anteriores, pero de mucho menos valor é importancia, las viñas y olivares y todas las análogas, las que se apean por medio de *cercados*.

Y por último, en la *tercera clase*, las dehesas, montes, sotos, prados y tierras de labor de grande ó pequeña extension. Esta clase de fincas se apean por medio del *acotamiento* ó *amojonamiento*.

Las propiedades de la segunda y tercera clase son fincas que por su naturaleza, suelen ser terrenos aislados ó separados á distancia del sitio donde reside el dueño.

697. Es indudable, que las propiedades de la primera clase deben en general hallarse completamente cerradas, tanto por la seguridad personal de sus moradores, como por evitar que las frutas, verduras, flores y demás productos, sean un incentivo á la codicia ajena ó á la mala intencion. Esta clase de cerramientos, corresponde á los Arquitectos, Maestros de obras y Aparejadores, que hayan intervenido en la construccion del edificio, supuesto que es-

tos cerramientos son construcciones de muros ó paredes, que pueden ser de mampostería, de hormigon, tapiales ó de adoves y ladrillos, dando lugar á las distintas combinaciones que usan los constructores y que son cerramientos de cajones de hormigon, con machones de mayor y menor y verdugadas de ladrillo; cerramientos de cajones de mampostería con iguales combinaciones con el ladrillo, y cerramientos de cajones de tapial y machones y verdugadas de ladrillo. Por último, los enverjados de hierro, solo se usan como cerramientos de lujo.

Como esta clase de cerramientos, y las demás obras que puedan adoptarse pertenecientes á la construccion y para las que es preciso primero establecer cimientos, no son del dominio del simple Agrimensor, sino reune además otros títulos que le autoricen, y como no estamos escribiendo un tratado de construccion y ningun fruto sacarían los lectores, si no poseen los principios de aquella, nos creemos dispensados de exponer aquí la manera de hacer estos cerramientos y por lo tanto no nos ocuparemos más de este asunto.

698. Mas para las propiedades que incluimos en la segunda clase, pertenecientes á propietarios menos ricos y que al lado de sus casas quieren tener resguardado el terreno que las rodea, y que dedican igualmente á huertas y otros usos, los medios de *apearlas*, que llamaremos *cercados* por lo que se diferencian de un verdadero cerramiento, se hallan al alcance del Agrimensor y de los mismos propietarios. Estos *cercados* se practican, estableciendo alrededor de las posesiones, *zanjas, vallados, zanjas y vallados, zanjas y vallados alternados, setos vivos ó de rama verde, setos muertos ó de rama seca, y muros de piedras sueltas, y de piedras y tierra.*

699. Todos estos medios, aunque con distintos nombres, son, en una palabra, así como los cerramientos, el mismo acto de *cercar, rodear, atrincherar, circuir* ó establecer el *coto* ó *recinto* que comprende las posesiones, aislándolas y separándolas de las contiguas ó colindantes, para fijarlas y determinarlas de un modo estable, y preservar el terreno y los frutos de las intrusiones y de los ataques de las personas y de los animales.

Pasaremos á explicar estas distintas clases de *apeos*, llamadas en general *cercados*.

700. **Apeo por cercado de zanjas.**—Las zanjas son unos fosos de anchura y profundidad arbitrarias, que se abren ó cavan alrededor de toda la posesion, y que pueden servir tambien

para dar paso á las aguas. En algunas localidades usan las zanjas ó cerramientos militares.

701. **Apeo por cercado de vallados.**—Los *vallados* ó *lomos* son unas especies de barreras levantadas á lo largo de los linderos, con las piedras que se extraen de las fincas despues de haberlas limpiado de los cantos rodados que les son perjudiciales. Tambien se forman con tierras amontonadas de manera que las quede suficiente base y tengan regular altura é inclinacion por uno y otro lado para que no se corran ó se desmoronen, por lo cual deben apisonarse ó mezclarse con raices ó ramas, ó bien céspedes cortados en los prados húmedos, que las presten alguna adherencia. Suelen practicarse tambien sobre algunos vallados de esta clase, pequeñas veredas ó sendas de comunicacion alrededor de las tierras.

702. **Apeo por cercado de zanjas y vallados.**—Se abre la zanja todo alrededor de la finca, y se levanta con la tierra que se estrae de ella un vallado á su orilla y hácia la parte interior de la heredad.

703. **Apeo por cercado de zanjas y vallados alternados.**—Algunas veces no se hace seguida la zanja, sino que se abren de 2 ó 3 metros de largo, y en los trechos que quedan entre cada dos se forma una loma ó vallado con la tierra escavada, de modo que despues de la primera zanja sigue un vallado, despues de este la segunda zanja, y á continuacion de esta otro vallado y así sucesivamente, cuyo procedimiento resulta más económico que el anterior.

704. **Apeo por cercados de ramas verdes, llamados setos vivos.**—Mejor aun que los medios empleados hasta aquí, es el valerse de *setos ó vallados* formados con las plantas llamadas de setos ó vallados, que además de defender mejor las posesiones, las dan un aspecto más agradable y pintoresco. Son estas plantas la *pita*, el *nopal*, la *caña brava* y la *cambronera*. La *pita ó agave* es planta de la region del naranjo, de hojas grandes, color verde claro, y con espinas muy duras en el contorno y punta, siendo el *magüei* una variedad de esta planta, con hoja verde azulada y espinas más pequeñas. Cuando se aproxima la florescencia de esta planta, se eleva muy de prisa un tallo ó pitaco que puede llegar hasta seis metros y medio y se ramifica en la parte superior donde nacen las flores, y aunque poco despues muere la planta quedan á su alrededor muchos hijuelos ó retoños. Estas plantas

crecen, con especialidad la pita, en los terrenos más ingratos y pobres, y se propagan con facilidad por los retoños que se les arrancan y se ponen en zanjas donde prenden. Además del escelente cercado que forman, sacan en Méjico del *maguei*, una bebida espirituosa del país que llaman *pulque*. Estas plantas requieren clima cálido, por lo que en las provincias cálidas y templadas de la península crece con abundancia.

El *nopal*; *tuna ó higuera de pala*, se cria sin ningun cultivo en los parajes templados, áridos y secos, y se multiplica por medio de sus palas que se quitan enteras y dejándolas secar un poco, se introducen en la tierra hasta la mitad, en la que desde luego agarran. Forman cercados excelentes, pues espesan mucho y alejan sus espinas á los hombres y ganados. Producen los higos chumbos, que es fruto delicado y puede darse tambien á los animales cuando le hay abundante. El nopal no está tan propagado en España como debiera.

La *caña brava* es una planta que matéa y ahija mucho, y forma por lo tanto cercados impenetrables. Abunda mucho en los paises templados de América y Asia, y empieza á cundir y propagarse por las costas de Andalucía, siendo conveniente que se extendiera con rapidez, atendida su grande utilidad. En Filipinas la llaman *cahuayang*, y llega á tener cerca de 17 metros de altura y 2 decímetros de diámetro. La caña *macho* es casi sólida, de nudos salientes y de extraordinaria resistencia, pero de menores dimensiones.

La *cambronera*, y despues de ella el espino, la zarza, el sáuce y los escaramujos sirven mucho para construir cercas ó setos vivos, y tambien algunas veces se ponen árboles y arbustos menos hostiles.

Los *setos vivos* son muy útiles al Agricultor, pues de ellos sacará leña, frutos y otros productos, segun las plantas de que se valga. Debe atenderse al suelo, clima, situacion de la finca y cultivos á que se destine, y elegirse plantas de raices perpendiculares y que se estiendan poco, para que no perjudiquen á las principales del cultivo.

En general, en los sitios húmedos ó pantanosos, elíjase para setos el sáuce, aliso, plátano, chopo y otros que absorben mucho la humedad. En los parajes secos y áridos, fórmense los setos con el albaricoquero, granado, almendro, azufaifo, acerolo, mirto, laurel, espino, durillo, níspero y escaramujo. En los puntos frescos ó frios, son convenientes el peral, manzano, grosellero, membrillero, madroño, la haya, el roble, la encina, el árbol del paraiso, las cambroneras y otros muchos. Por último, son preferibles siempre que se pueda los frutales más adecuados al clima y localidad.

La formacion del seto, puede ser de asiento, de estaca ó por trasplanto, preparando la faja del terreno con una cava profunda, y eligiendo árboles ó arbustos de la misma especie, que guarden entre sí la distancia oportuna, pero con la debida espesura. Deben cruzarse las ramas, á fin de que tengan una direccion inclinada y que no se eleven los brotes perpendicularmente. Cuando el seto se eleve de un metro á metro y medio, se le rebaja hasta la altura de medio metro, y despues de esta operacion nacen muchos vástagos en los puntos inferiores. Se repiten los córtes, y despues del segundo ó tercer recorte, se quitan con la podadera todas las cepas que aparezcan de los anteriores córtes, pues sin esta operacion las plantas se achaparran y forman portillos, por todo lo cual deben repetirse los recortes cada dos años, separando las ramas verticales, las de los lados que sobresalgan mucho y las chuponas.

Los setos deben tenerse bien cuidados y preservarlos del diente destructor de los animales. La duracion de los setos vivos, cuando están bien cuidados, puede ser de 50 á 100 años.

705. **Apeo por cercados de ramas secas, llamados setos muertos.**—Estas cercas se hacen con unas estacas clavadas en tierra y entretegidas con ramas, fagina, mimbres ó de otra manera. En algunas localidades, las cercas ó setos muertos, son de cañas, puestas con una inclinacion de 48 á 56°, cruzadas unas con otras formando una especie de enverjado, sostenido con espartos ó cordeles, pero estos setos duran poco.

706. **Apeo por cercados con muros de piedra suelta, ó de piedra y tierra.**—Se hacen tapias alrededor de las lindes, con piedras sueltas, con cantos rodados ó con lascas segregadas de las rocas, segun lo que sea más abundante en las cercanías, y la costumbre que haya en cada país. Se da al muro bastante grueso y poca altura y no llevan cimiento ó muy poco. Se colocan las piedras de modo que encajen unas con otras, sin que resulten grandes intersticios, los que en todo caso pueden rellenarse con guijo ó piedras menudas.

Más resistencia tienen estos toscos muros, recibiendo sus piedras con tierra plástica ó arcilla, pues esta llena los intersticios menores y constituye un macizo más compacto y duradero, suficiente para el objeto que nos ocupa. Muchas veces tambien, estos muros son necesarios para contener las tierras más altas, á fin de que no se corran y desmoronen sobre las colindantes más bajas, y que tanto aquellas como estas no se perjudiquen mútuamente.

Por último, algunas veces, por alguna parte de las heredades, hay que establecer *malecones*, si las fincas están inmediatas á rios, arroyos ó sitios expuestos á inundaciones.

707. **Apeo por acotamiento ó amojonamiento.**—Para las propiedades que incluimos en la tercera clase, y que son las dehesas, los montes, sotos, prados y las tierras de labor de cualquiera clase y extension, el apeo se practica por *acotamiento* ó *amojonamiento*. Llámase así, porque consiste en colocar unas señales que se llaman *cotos*, *mojones* ó *hitos*, en los vértices de los ángulos de los polígonos y en sentido tambien de los lados cuando estos tienen mucha longitud, y que se numeran para determinar más fácilmente el seguimiento del contorno, y fijar así la figura de la finca. Estas señales suelen ser comunmente, montones de piedra ó de arcilla en forma cónica, y mejor aun piedras cortadas á propósito en rollos cilíndricos apuntados en cono, ó en pilares prismáticos terminados en pirámides. Otras veces los mojones se forman con tres piedras metidas en tierra hasta su mitad, siendo la central más gruesa y larga y las laterales más redondas y pequeñas, pero bien distintas: tambien los hay de una sola piedra. Esta clase de apeo es el más á propósito y económico para la clase de fincas á que le destinamos.

708. El modo de colocar en el terreno los *hitos*, *cotos* ó *mojones*, es el siguiente. Sea *eabcd* (fig. 333) el coto ó pilar de forma de paralepípedo recto, terminado en una pirámide cuadrangular, y *abcd* su base, en la cual, trazando las diagonales *ac* y *bd*, su interesección e' será la proyeccion del vértice, ó cúspide *e*. Para colocar el coto en el terreno, sea $a'b'c'd'$ la base, y $a'c'$, $b'd'$ sus diagonales, y e'' la proyeccion del vértice *e*; y supongamos que P es un piquete clavado en el terreno en uno de los vértices del polígono. Se abrirá alrededor de este punto un hoyo lo ancho y profundo que sea necesario para que pueda entrar el coto ó hito la parte que sea suficiente para que quede bien firme y que sea hasta *mnrs* que representan las líneas que han de enrasar con el terreno. Sobre dicho hoyo se atirantan dos cuerdas $a''c''$ y $b''d''$ que se crucen en el piquete P á ángulos rectos, y se coloca y asienta la base del

coto de modo que coincidan sus diagonales con las expresadas cuerdas, con el objeto de que el vértice del ángulo del polígono ó cualquier otro punto de la linde que sea necesario *acotar*, coincida con e'' proyeccion del vértice e, estando así en lo sucesivo este vértice en la vertical del punto en cuestion del terreno, y determinando estos vértices las líneas que constituyen el deslinde de las propiedades. Más conveniente sería, labrar el *coto*, de modo que tuviese la forma de un prisma recto, cuya base *abcd* (fig. 334) tuviese tantos lados como ángulos se forman en el punto e comun á varias tierras M, N, P y O, siendo este punto e la proyeccion del vértice de la pirámide cuadrangular, en que debe terminar e coto, pues colocado éste en el terreno en la disposicion que representa la figura, cada propietario podría inscribir su nombre ó sus iniciales en la cara ó frente del coto, que mirase á su tierra, y el punto e y las aristas verticales del prisma, nos determinarían las respectivas lindes.

709. Como sucede muchas veces que por ser el terreno muy extenso ó haber arbolado, y tambien por ser muy pendiente y quebrado ó presentar otra clase de obstáculos, no se descubre desde un vértice del polígono el siguiente, será preciso, como es fácil comprender, colocar cuantas señales intermedias sean indispensables, todo con el fin de que sea fácil y cómodo observar la situacion de los linderos y sus cambios de direccion, y no dejar duda ninguna de la figura que ha de afectar el terreno. Ahora bien, si en los planos de los terrenos que todos los propietarios deben conservar, se marcan tambien los puntos donde se establecen los *hitos*, cuando desaparezca uno ó varios de estos, será muy sencillo volverlo á colocar en los puntos que antes se hallaban, por la operacion del *replanteo*.

710. Escusamos entrar aquí en las formalidades y prescripciones legales para la operacion del *apeo*, que son las mismas que para el *deslinde* y que no forman parte de nuestro propósito.

711. Pero modernamente se ha pensado en sustituir con los árboles los cotos ó mojones de piedra. Hace muchos años, que en las operaciones de deslinde que se me han ofrecido ejecutar, he inculcado á los propietarios la importancia y conveniencia de hacer esta sustitucion y de hacerles ver las ventajas de emplear el arbolado para el apeo de sus tierras, exponiéndoles una série de ellas y además la sencilla de poder guarecerse á la sombra el fatigado labrador y el ganado, en las horas de descanso y del sol abrasador del

estío. Pero apegados los propietarios y lo mismo toda la gente rústica á rancias preocupaciones y antiguas costumbres, he tenido el disgusto de que no me hayan hecho ningun caso. Sin embargo, como tengo esta cuestion por importante, no puedo menos de dar noticia á mis lectores, de lo que despues se ha publicado sobre este particular, para que se vea que se piensa ya sobre este punto de una manera séria, y que hay personas respetables y científicas que son de esta misma opinion, habiendo llegado su celo hasta el punto de llevar esta cuestion al Congreso, que la ha tomado en consideracion, y cuyas ventajas que enumeran y que son las que yo he procurado siempre imbuir tanto á los propietarios que se han valido de mí como á mis discípulos, son las que se consignan en los siguientes sueltos, que tomamos de varios números de los periódicos *La Correspondencia de España* y *La Nueva Iberia*.

712. *Correspondencia de España* del 26 de Marzo de 1868:—«En la última conferencia del Sr. Galofre en la sociedad económica matritense, manifestó entre otras ideas sumamente razonables, lo conveniente que es hacer plantaciones de árboles en todos los linderos de las fincas destinadas á labor, como medio de dulcificar el clima, atraer las lluvias, tener leña con el tiempo y fijar hitos estables para la integridad de las propiedades rústicas. El Sr. Galofre combatia con grande decision la vulgar idea de que los árboles atraen los pájaros y que la sombra daña á los cereales.»

713. *Nueva Iberia* del 3 de Mayo de 1868:—«El pensamiento de fomentar en España la plantacion de arbolado, asunto de que ya nos hemos ocupado en varias ocasiones, y que no dejaremos de recomendar por la verdadera importancia que en sí tiene, vá fijando la atencion de algunos hombres pensadores, y entre ellos la del Sr. D. Pascual Medina, que acaba de dirijirnos una extensa carta en apoyo de esta idea.

Las ventajas que proporciona el arbolado, reconocidas por todos los agricultores notables, tropiezan entre nosotros con preocupaciones arraigadas que es indispensable destruir. Aquí el labrador, sin saber por qué, profesa generalmente aversion á los árboles, cuando éstos debieran ser sus mejores amigos, porque atraen las lluvias, refrescan y purifican la atmósfera, proporcionan frutos delicados, producen las maderas de construccion, suministran abundante combustible y convierten en ricos bosques y verdes praderas, campos que, abrasados por el sol y agostados por la sequía, se asemejan á los desiertos arenales del África.

Desarrollando la plantacion, no sólo obtendrian los labradores, al cabo de algun tiempo, pingües rendimientos, sin perjuicio de los demás cultivos, sino que acrecentarian con ellos el valor de sus propiedades, y alejarían el riesgo de las prolongadas sequías que en la actualidad esterilizan sus afanes.

El Sr. Medina nos escita en su carta á que aconsejemos un dia y otro la plantacion de moreras, porque la sombra de estos árboles favorece el desarrollo de los cereales, ganando estos en lozanía, y por consiguiente en estimacion.

Veinte moreras distribuidas en los linderos de cada tahulla de tierra, darían, á juicio del comunicante, y á costa de bien poco trabajo, un aumento considerable al valor de la propiedad rústica, y otro aumento no despreciable en la produccion.

Nosotros no discutiremos acerca de la preferencia en la clase, porque cada territorio optará por los que mejor se adapten á las condiciones de su suelo, ó con menor dificultad se aclimaten y produzcan. Lo que sí haremos en todas ocasiones y á todas horas, es encarecer la conveniencia de poblar de arbolado nuestro suelo: frutales, moreras, olmos, álamos, chopos, pinos y robles, segun convenga al suelo y dé mayores utilidades en determinados paises. Árboles y canales de riego: hé aquí lo que ha de aumentar la hermosura y la riqueza de ese suelo: hé aquí lo que deben procurar nuestros agricultores: hé aquí lo que están obligados á promover el Gobierno, las Diputaciones, los Ayuntamientos y las Sociedades de Amigos del país, por cuantos medios estén á su alcance.»

714. *Correspondencia de España* del 5 de Mayo de 1868:—«La proposicion sobre fomento de arbolado leida hoy al Congreso dice así:

Artículo 1.° En todos los pueblos de España, se procederá á la formacion de uno ó más viveros de cuenta del Ayuntamiento, para cria y plantío de arbolado.

2.° Todo labrador ó labradores que cultiven, suya ó agena, una tierra mayor de 30 áreas, están obligados á plantar los árboles que puedan caber en los linderos de la misma á la distancia de 15 á 20 metros cada uno, cuidarlos y reponerlos si perecen. Al efecto, el ayuntamiento dará gratis los plantones, y si hubiese sobrantes los dará tambien á los labradores de tierras menores de 30 áreas, si voluntariamente quisieren plantarlos.

3.° La propiedad de los árboles y todos sus aprovechamientos, pertenecen al dueño de la finca. No se puede cortar ramaje hasta que la planta tenga 8 años de vida. El tronco no puede quitarse sin justificar la reposicion de tres plantones puestos por cada árbol arrancado, ó bien el agrupamiento en propiedad de la finca inmediata. Los plantones muertos se repondrán todos los años en igual número.

4.° Los árboles colocados en los puntos principales de las fincas, servirán de mojones legales desde que tengan cuatro años de vida, y se anotarán en el registro de la propiedad.

5.° Entre finca y finca mayor de 30 áreas, si no existiese zanja ó acequia, se dejará para las mútuas servidumbres privadas una linde neutral de un metro. En las menores de 30 áreas, una de 70 centímetros. Estas servidumbres privadas son únicamente para el uso indispensable de los dueños y cultivadores de las fincas cuando no tengan camino, vereda ó sendero público para entrar en ellas.

6.° La tutela y policía de la plantacion general del arbolado en las lindes, corresponde á la administracion. Toda cuestion entre partes á la jurisdiccion ordinaria.

7.° El gobierno formará el correspondiente reglamento para el cumplimiento de esta ley.

Madrid, 29 de Abril de 1868.—El marqués de Bogaraya, J. de Tro y Ortolano, Braulio Rodriguez, Francisco de P. Lobo, U. Cardenal, Diaz Ajero, Fivaller.

Este proyecto es debido á la iniciativa del Sr. Galofre y está conforme con las ideas que, segun dijimos en su dia, emitió en la Sociedad de Amigos del país.»

715. *Correspondencia de España* del 21 de Mayo de 1868:—«El proyecto de ley sobre plantacion general de arbolado en las lindes, que el Congreso ha tomado en consideracion, ha producido en toda España muy buen efecto, y todos los dias reciben felicitaciones el autor que la ha redactado y el marqués de Bogaraya que la apoyó.

Alguno hace la objecion de que no se puede gravar á la propiedad con esta obligacion; pero téngase en cuenta, que lejos de gravarla, se la beneficia, dándole árboles para que sirvan de mojones, para que los que la labran tengan leña y madera de edificacion, para que se consigan lluvias suaves y benéficas, y para que se salven las cosechas y mejore la salud pública.

En Francia hay la buena costumbre de plantar un árbol cuando nace un hijo, y en Prusia una ley obligaba á presentar un certificado de haber plantado dos árboles á los que contraian matrimonio, y hoy tienen tanto arbolado, que no necesitan hacer uso de esta ley, que hace mucha falta en España.»

716. Por último, para corroborar más y más la importancia que debe darse al arbolado, hasta dentro de las mismas poblaciones, copiamos á continuacion el siguiente suelto:

Correspondencia de la mañana del 13 de Junio de 1875:— «Cada árbol ordinario de los que sirven para la ornamentacion y el saneamiento de la atmósfera en el interior de París, cuesta *ciento ochenta* francos, comprendidas las jaulas de hierro para defenderlos cuando aun son débiles, y el blindaje de guijarros con que se envuelven las cañerías del gas, para preservar la vegetacion contra el efecto deletéreo de las fugas. Y, sin embargo de ese elevado precio, cada vez se considera en Francia más necesario el arbolado dentro de las poblaciones, que en nuestro país ha tenido hasta ahora tantos enemigos, especialmente entre los labradores de muchas grandes comarcas.»

Por último, y para hacer constar que no se abandona este punto tan importante, *La Correspondencia de España* del 6 de Octubre de 1875, pone lo siguiente:

«*El Eco de España* dice, que la sequía prolongada impide la siembra en Castellon; que se ha perdido la cosecha de la oliva en Andalucía y la de garbanzos en Castilla, y escitará en su dia á las Córtes para que fomenten la plantacion de árboles con medidas obligatorias.»

717. **Apeo del término municipal de un pueblo.**— Se emplea tambien el sistema de *acotamiento* ó *amojonamiento*, colocando en todos los puntos notables, en vez de los cotos de piedra que se ponen en las posesiones particulares, otros cotos altos ó postes de fábrica de piedra y cal con el objeto de que se distingan bien de lejos.

718. **Observaciones.**—La naturaleza nos presenta ciertas *señales*, que llamaremos *señales naturales*, para distinguirlas de las otras que hemos explicado y que son *artificiales* por intervenir el arte ó la mano del hombre, y podemos atenernos á estas indicaciones manifiestas que ofrece el terreno, para la separacion entre sí de las diversas propiedades. Tales son la diferencia de altura de terrenos inmediatos que señalan un límite entre los predios superior é inferior; cuando la separacion se verifica por una cañada, un rio sea ó no navegable, canal navegable ó de riego, carretera,

camino, sendero, vereda, arroyo ó paso de aguas de cualquiera clase; cuando en una posesion rústica hay una casa ú otra construccion cualquiera, que se presenta como término ó límite de una ó varias propiedades: cuyos accidentes y los demás que pudieran ofrecerse deben preferirse, siempre que sea posible y conveniente, á las demás clases de apeos, por ser señales más permanentes y que no están expuestas á ser removidas de su sitio ni á ser destruidas por la mala fé de los hombres, ni por los malos temporales. Estas señales naturales se aprovechan tambien en el *apeo* del término municipal de un pueblo, en combinacion con los altos cotos ó postes.

ERRATAS MAS IMPORTANTES.

Página.	Línea.	Dice.	Debe decir.
26	11	$10^\circ 25'$	$10^\circ 26'$
»	última	$\frac{a'b'}{AB}=\frac{b'c'}{BC}=\frac{c'd'}{CD}=$	$\frac{a'b'}{ab}=\frac{b'c'}{bc}=\frac{c'd'}{cd}=$
47	26	$Cb'=CB'+Bb'$	$Cb'=CB'+B'b'$
55	6	á una	á su
69	4	(216) (231 y 233)	(51) (88 y 105)
95	12	AB=BC	AC=BC
100	21	AB y AD	BD y AD
121	12	(159)	159
122	38	*orn*	*orm*
125	13	que	en que
128	última	sobre	desde
132	24	ME	MN
137	4	»	353
142	28	contenian	no contenian
190	9	y, y', y''	y', y'', y''',
204	36	(Fig.ª 184)	(Fig.ª 234)
205	14	*capitular*	*capilar*,
»	20	$e=60^m$	$x=60^m$
217	31	(281)	(481)
251	7	k'	k
254	1	C	C′
»	4	no puede	puede
260	18	CBC′	ABC
»	21	AB′C	AB′C′
329	31	aSs	ats
336	39	MJOPLN	MJOPQN.

FIN DE LA AGRIMENSURA.

E.U.I.T. TOPOGRAFIA BIBLIOTECA

OBRAS DE LOS SEÑORES SOLDEVILLA.

	PRECIOS. Madrid.	PRECIOS. Provincias.
Tratado de las Acotaciones. (Segunda edicion.) Un tomo en 4.° en rústica. Consta de 53 páginas y 8 láminas con 106 figuras, hechas con todo esmero..............................	14	16
Tratado de Topografía. (Segunda edicion.) Dos tomos en 4.° en rústica, cada uno con su atlas por separado, compuesto de láminas perfectamente dibujadas y litografiadas, á saber:		
Tomo 1.° Planimetría.—Consta de 747 páginas y un atlas que contiene 56 láminas con 751 figuras.	80	84
Tomo 2.° Nivelacion.—Consta de 354 páginas y un atlas que contiene 24 láminas y 255 figuras..	50	54
Curso elemental de Topografía. (Segunda edicion.)—Un tomo en 4.° que consta de 286 páginas y 14 láminas con 292 figuras perfectamente dibujadas y litografiadas........................	34	36
Tratado de Agrimensura. (Primera edicion.)—Un tomo en 4.° en rústica. Consta de 352 páginas y 16 láminas con 334 figuras perfectamente dibujadas y litografiadas................	40	44

Todas estas obras se hallan de venta en las librerías siguientes: De Bailly-Bailliere, Plaza de Topete, 8; de Poupart, Paz, 6; de Durán, Carrera de San Jerónimo, 8; de Plaza y Moya, Carretas, 8; de Cuesta, Carretas, 9; de Lopez, Cármen, 29; de la Publicidad, pasaje de Matheu; de San Martin, Puerta del Sol, 6; de Escribano, Príncipe, 25; de Gaspar y Roig, Príncipe, 4; de Hernando, Arenal, 11; de Guio, Arenal, 14; de Murillo, Alcalá, 18; Almacen de Recarte, Lobo, 8; Librería de la Infancia, Plaza del Progreso, 11; de Perdiguero y Compañía, San Martin, 3, y en la Academia preparatoria para todas las carreras especiales, civiles y militares, calle de Toledo, 59, principal, bajo la direccion del Ilmo. Sr. D. Isidro Giol y Soldevilla.

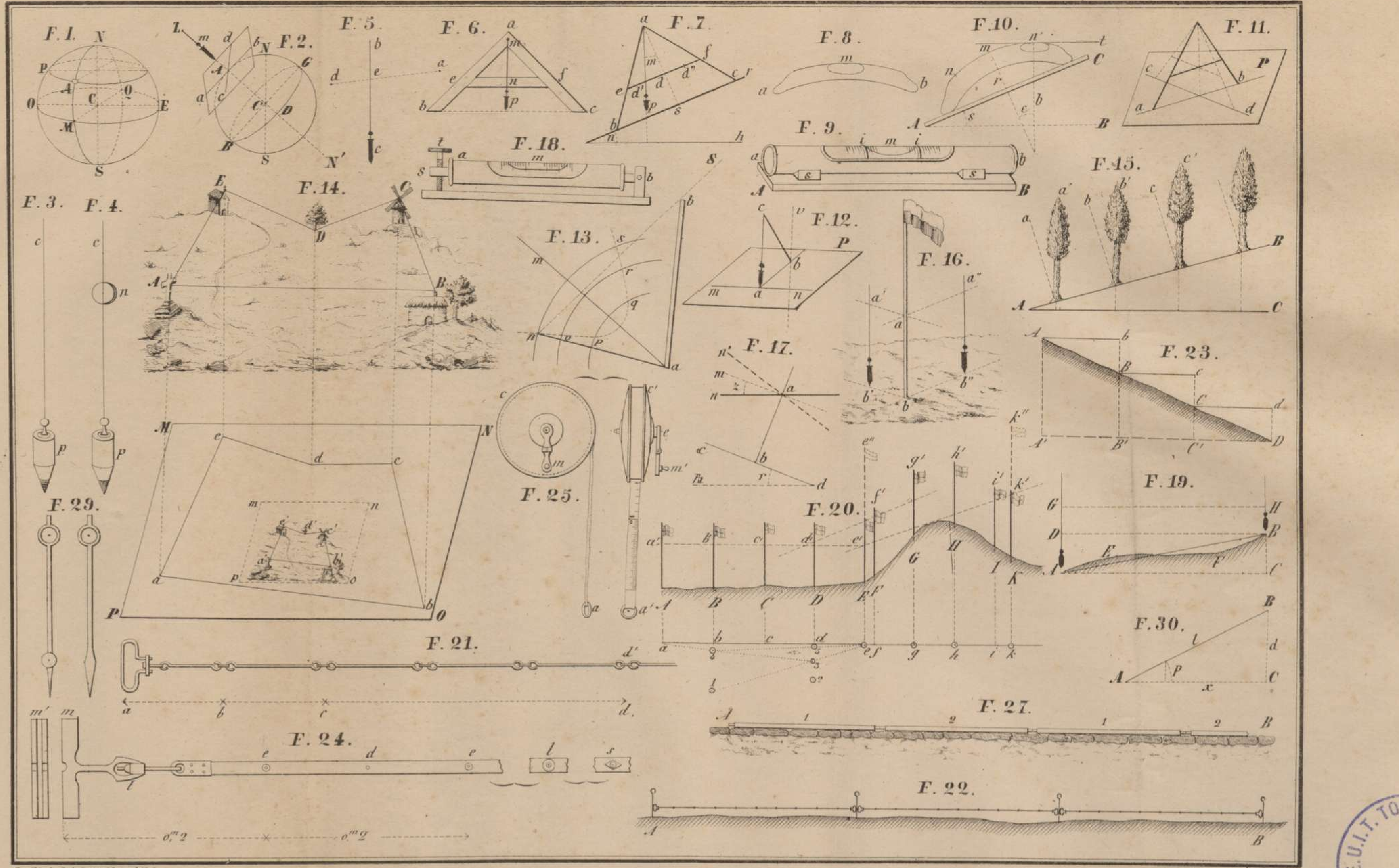
Se sirven los pedidos de provincias á vuelta de correo, remitiendo á dicha Academia el importe anticipado en letras ó libranzas sobre correos á favor de dicho Sr. Soldevilla.

OBRAS DE LOS SEÑORES SOLDEVILLA.

Obra	PRECIOS Madrid	PRECIOS Provincias
Tratado de las Acotaciones. (Segunda edicion.) Un tomo en 4.° en rústica. Consta de 53 páginas y 8 láminas con 106 figuras, hechas con todo esmero.........................	14	15
Tratado de Topografía. (Segunda edicion.) Dos tomos en 4.° en rústica, cada uno con su atlas por separado, compuesto de láminas perfectamente dibujadas y litografiadas, á saber:		
Tomo 1.° Planimetría.—Consta de 747 páginas y un atlas que contiene 56 láminas con 751 figuras.	80	84
Tomo 2.° Nivelacion.—Consta de 351 páginas y un atlas que contiene 24 láminas y 253 figuras..	90	94
Curso elemental de Topografía. (Segunda edicion.)—Un tomo en 4.° que consta de 288 páginas y 14 láminas con 292 figuras, perfectamente dibujadas y litografiadas........................	34	36
Tratado de Agrimensura. (Primera edicion.)—Un tomo en 4.° en rústica. Consta de 362 páginas y 16 láminas con 334 figuras perfectamente dibujadas y litografiadas..................	40	44

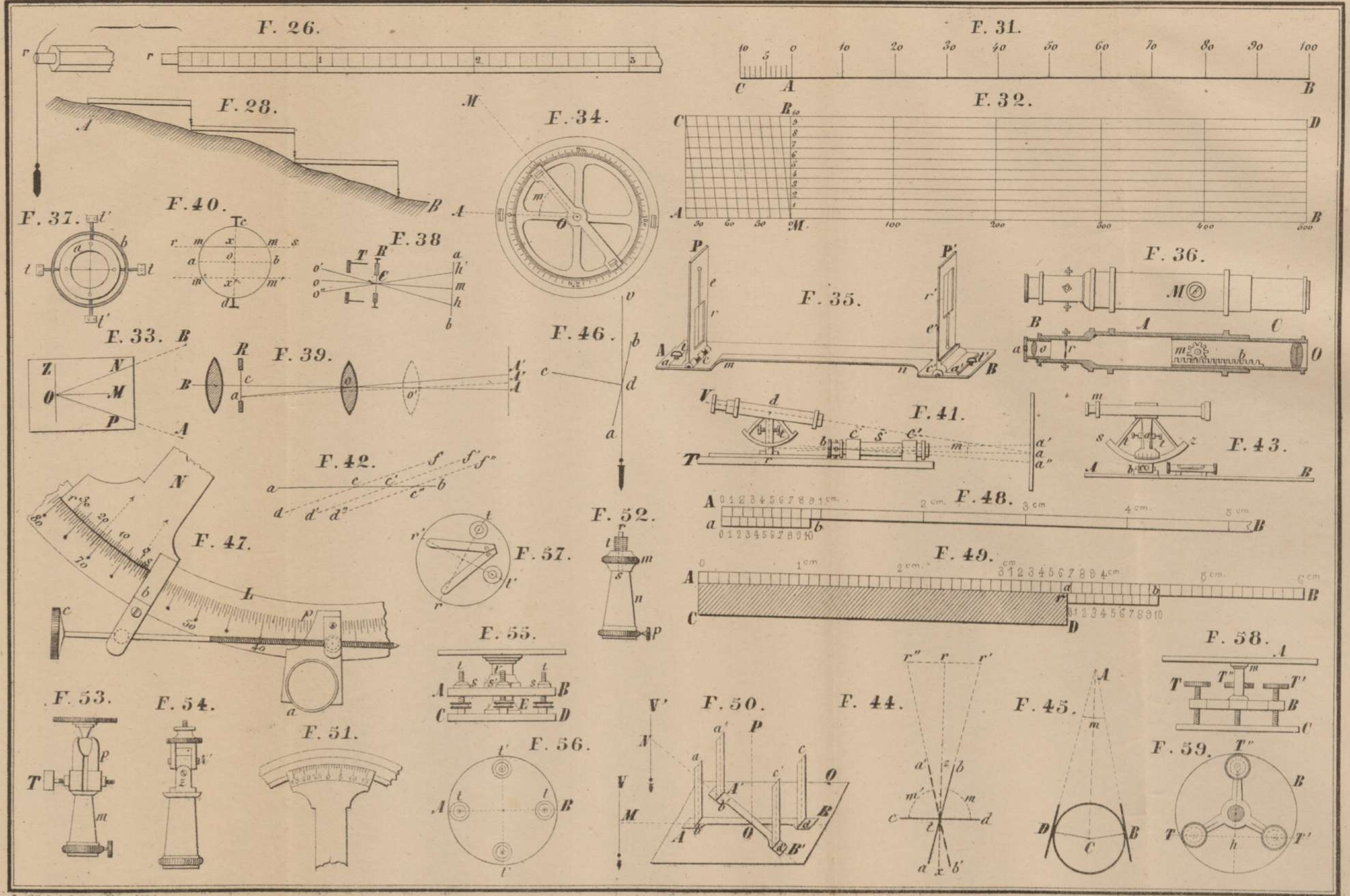
Todas estas obras se hallan de venta en las librerías siguientes: De Bailly-Bailliere, Plaza de Topete, 8; de Fouquet, Paz, 6; de Durán, Carrera de San Jerónimo, 2; de Plaza y Moya, Carretas, 8; de Cuesta, Carretas, 9; de Lopez, Cármen, 29; de la Publicidad, pasaje de Matheu; de San Martin, Puerta del Sol, 6; de Escribano, Príncipe, 25; de Gaspar y Roig, Príncipe, 4; de Hernando, Arenal, 11; de Gulo, Arenal, 14; de Murillo, Alcalá, 18; Almacen de Recaste, Lobo, 8; Librería de la Infancia, Plaza del Progreso, 11; de Perdiguero y Compañía, San Martin, 3, y en la Academia preparatoria para todas las carreras especiales, civiles y militares, calle de Toledo, 59, principal, bajo la direccion del Ilmo. Sr. D. Isidro Giol y Soldevilla.

Se sirven los pedidos de provincias á vuelta de correo, remitiendo á dicha Academia el importe anticipado en letra ó libranzas sobre correos á favor de dicho Sr. Soldevilla.



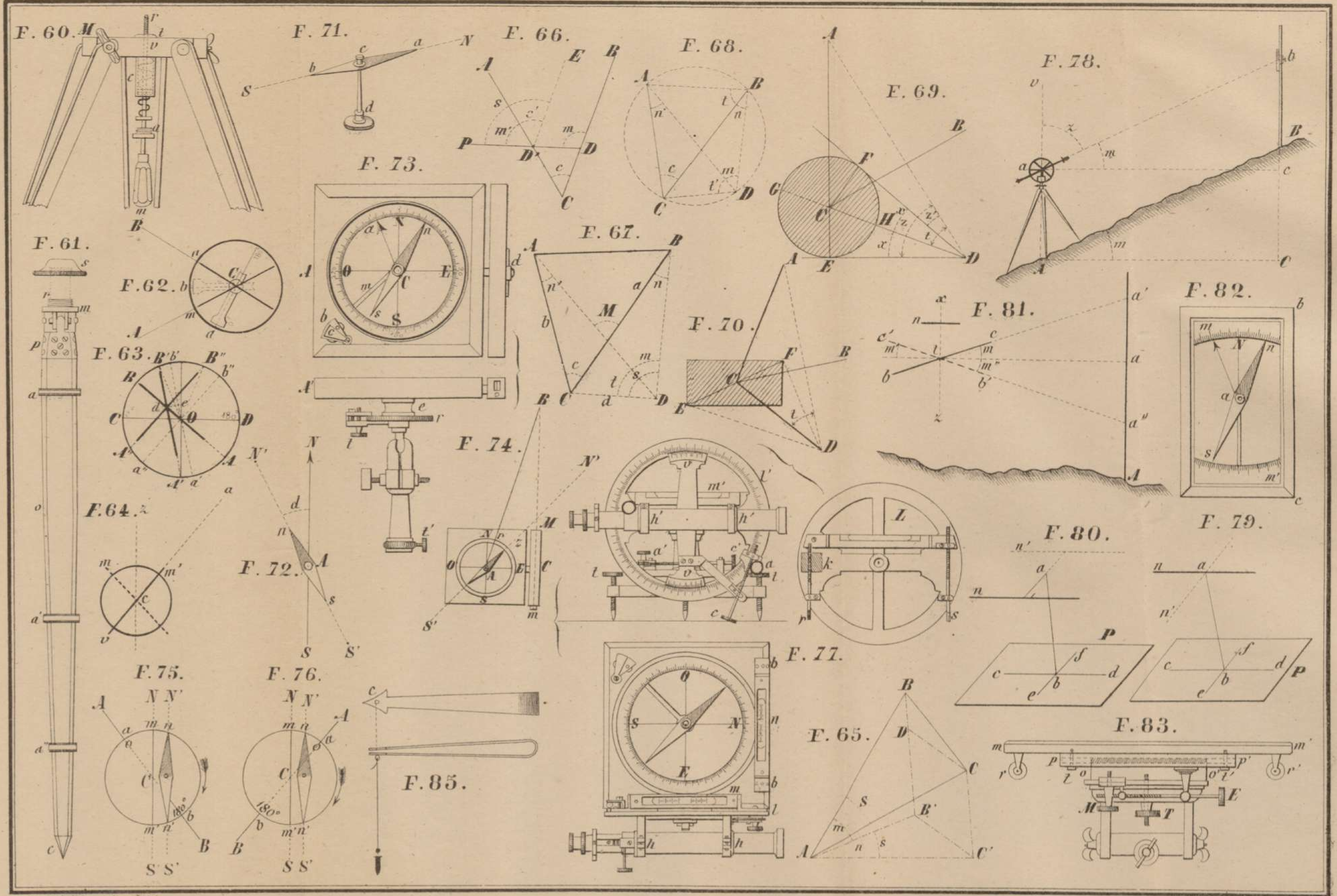
I. Gral Soldevilla, dib.º Lit. Salvador 8, Madrid.

E.U.I.T. TOPOGRA... BIBLIOTE...



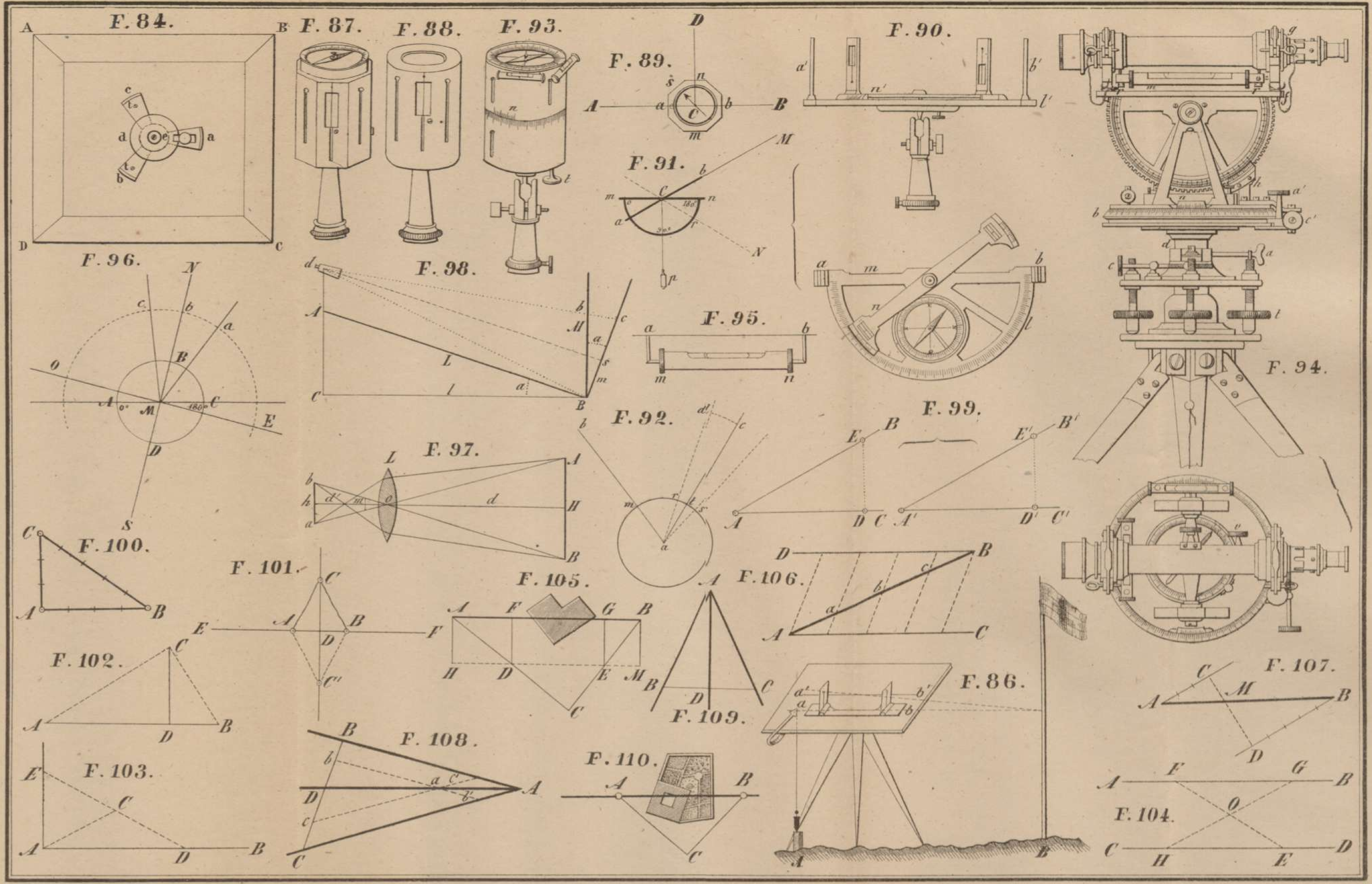
I. Gil Soldevilla, dibº

Lit. Salvador 6 Madrid.



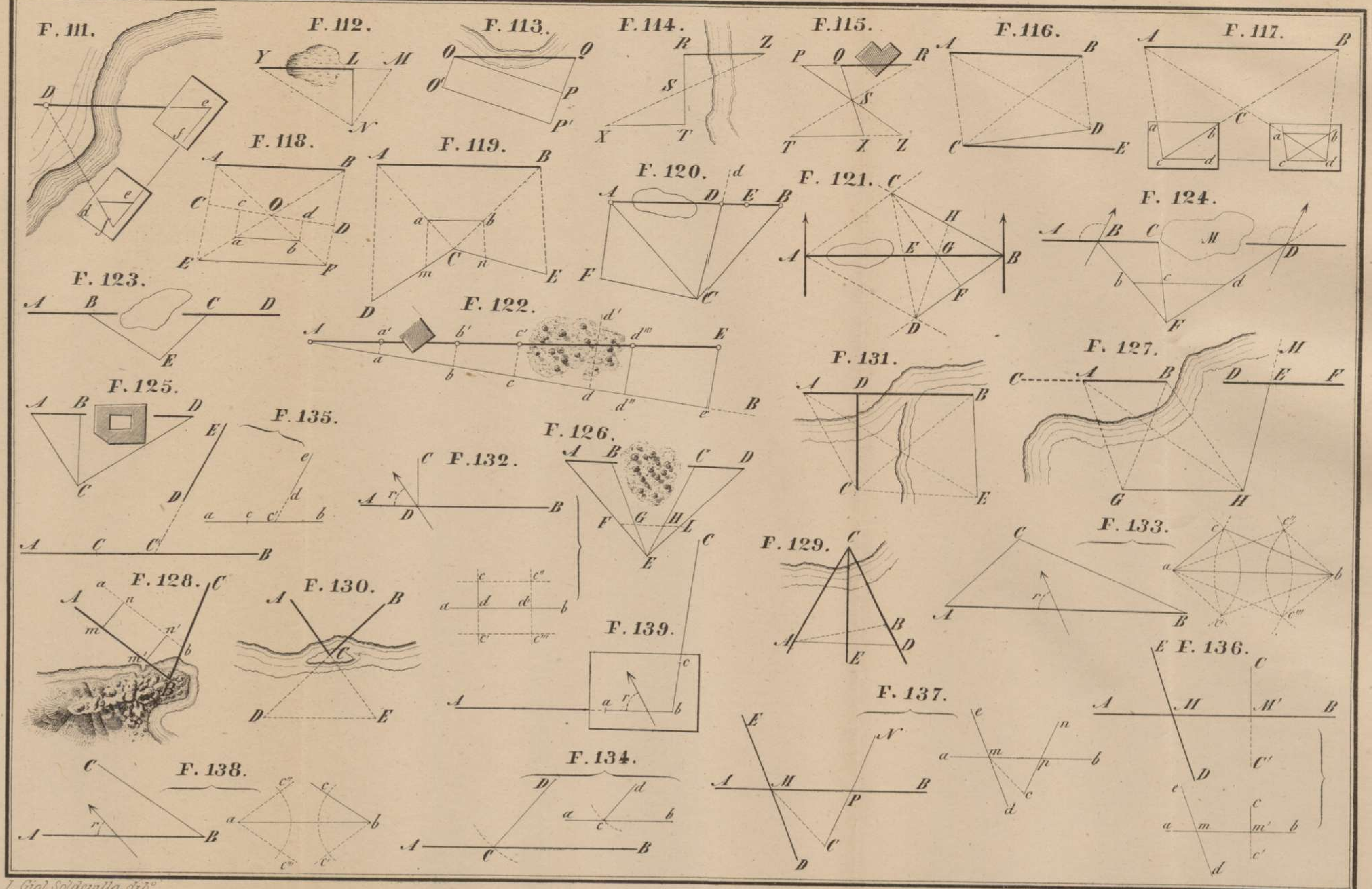
L. Gróf Soldevilla dibº.

Lit. Salvador 8 Madrid.



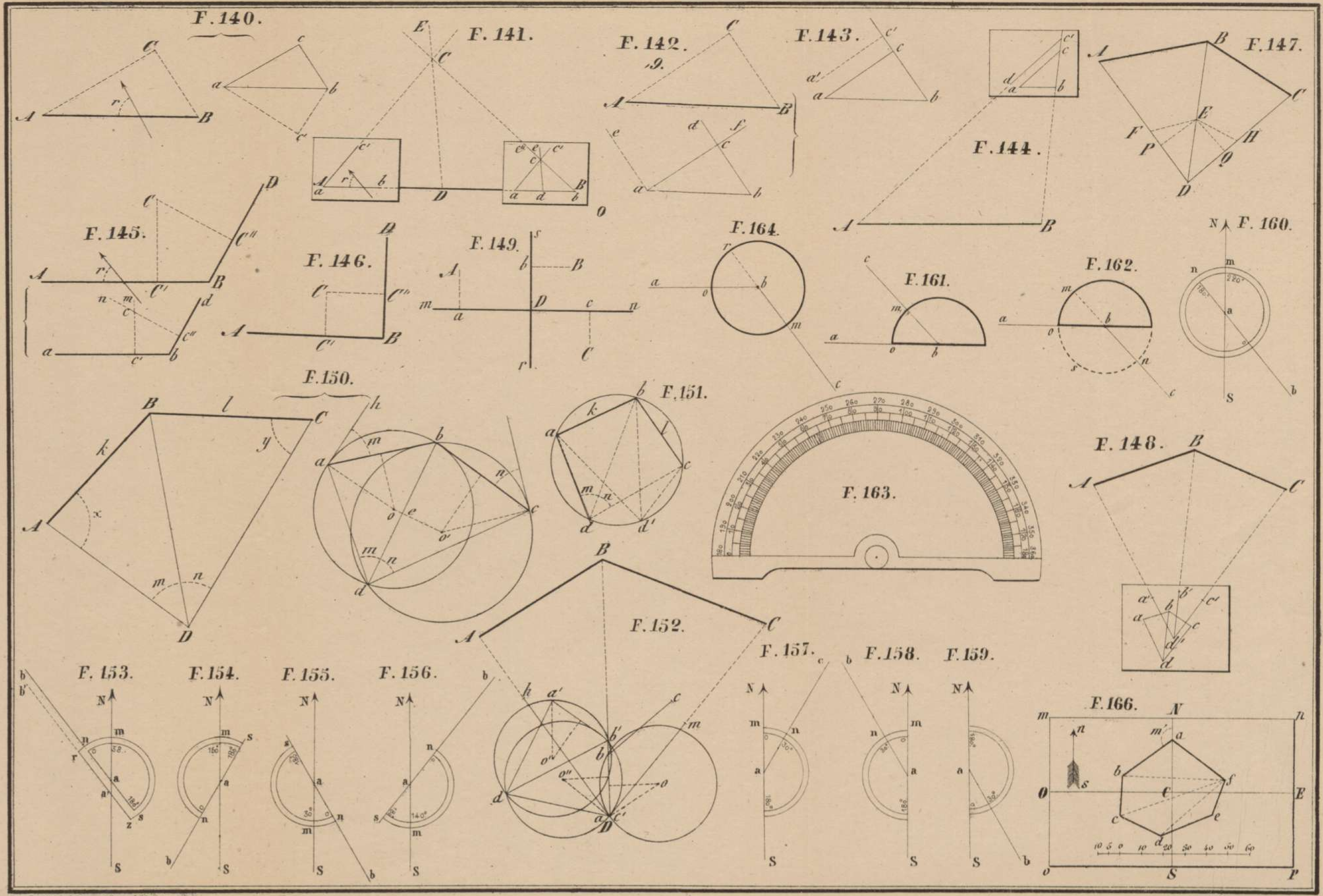
I. Giol Soldevilla, dib.º

Lit. Salvador 8 Madrid

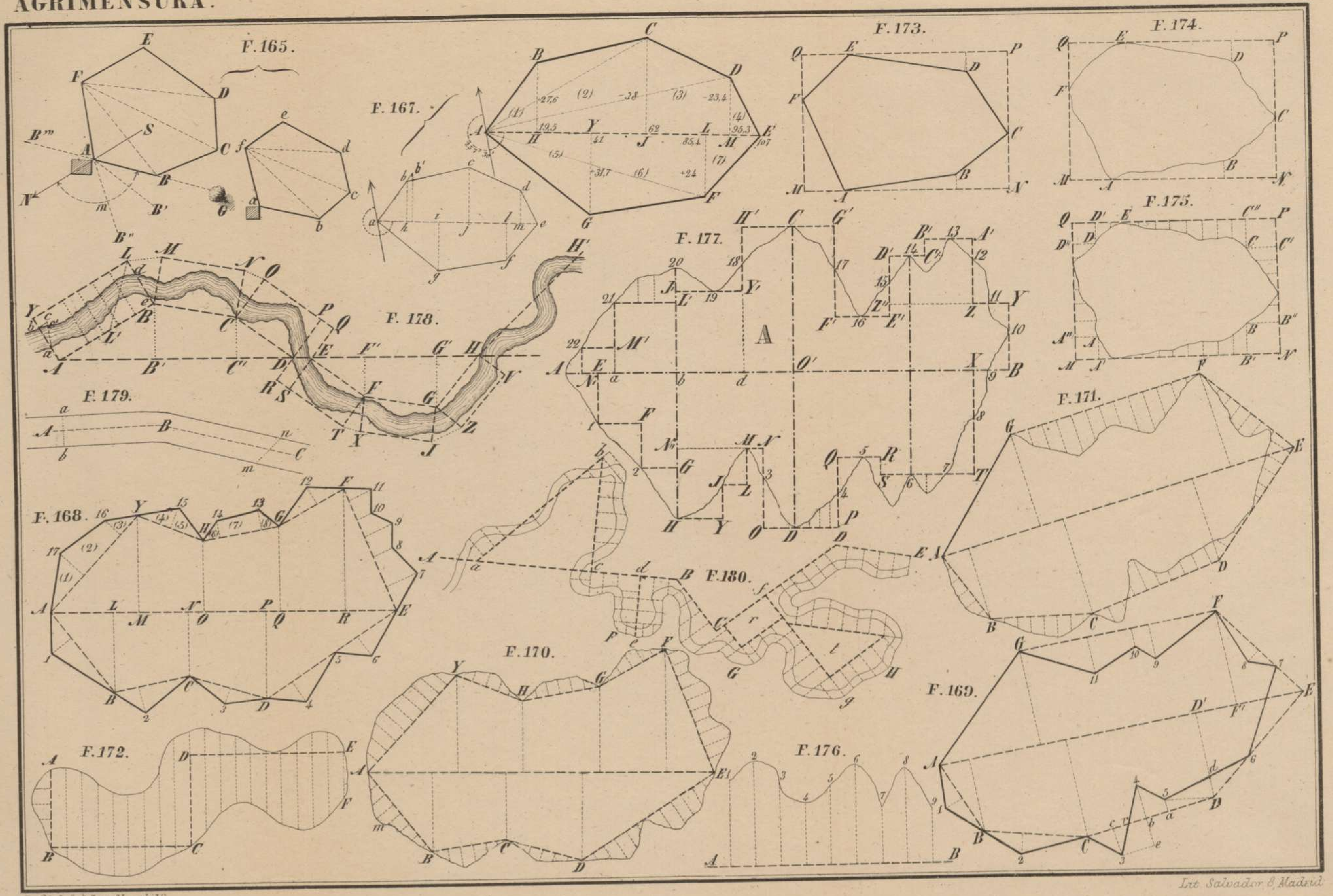


I. Giol Soldevilla dibº

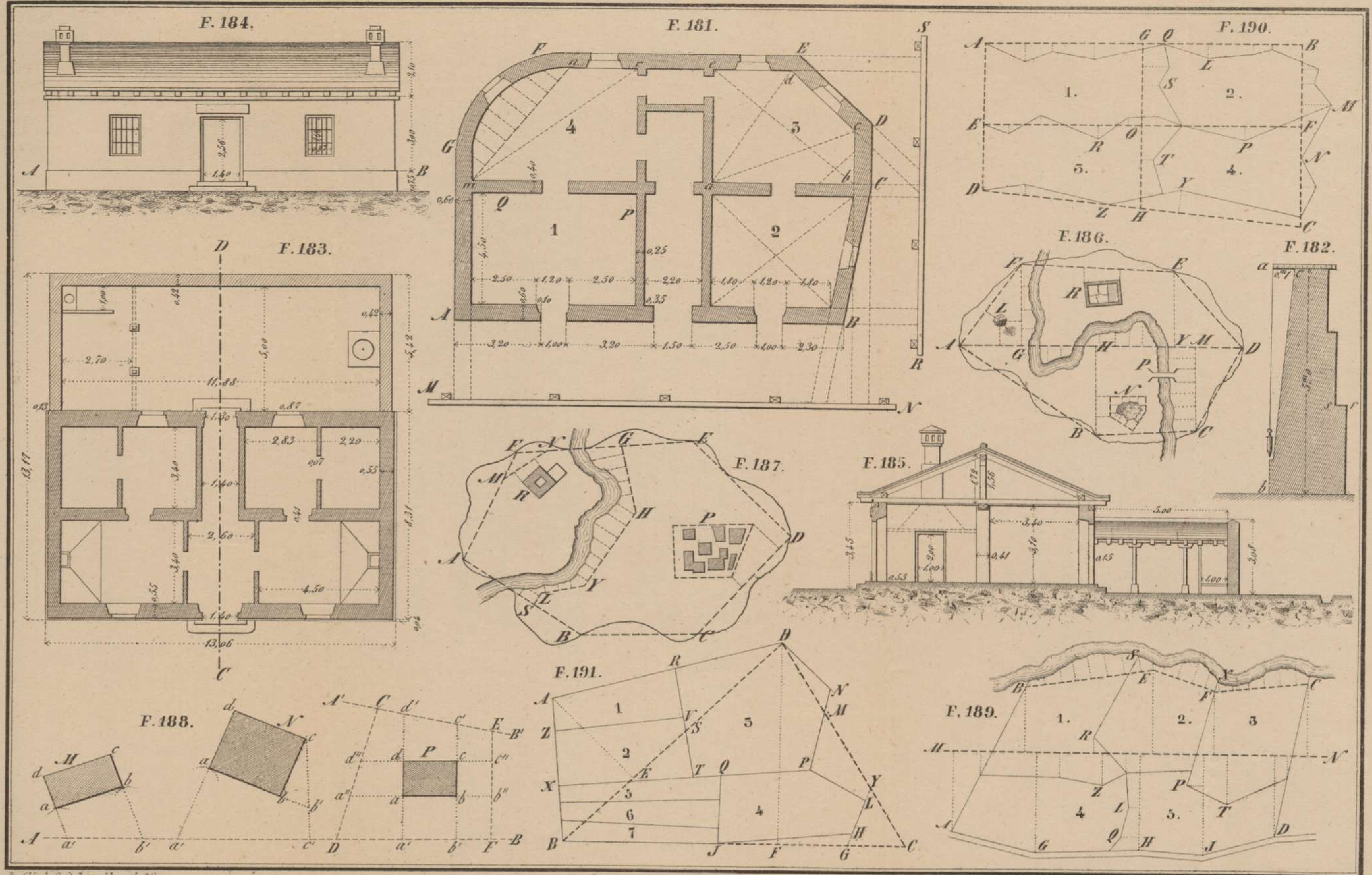
Lit. Salvador 8, Madrid.



I. Giol Soldevilla, dibº. Lit. Salvador é Madrid

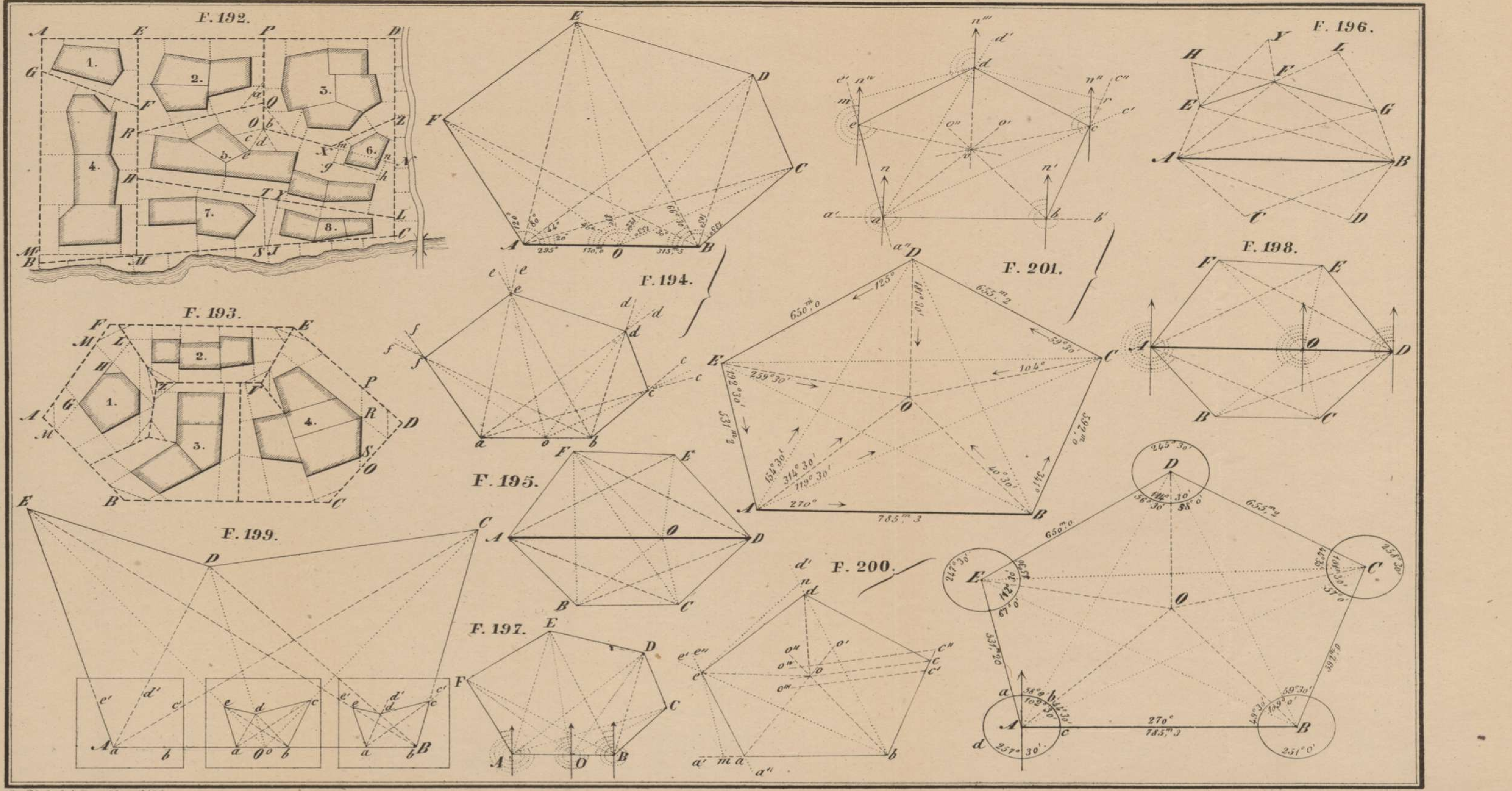


I. Giol Soldevilla, dib.º Lit. Salvador 8, Madrid

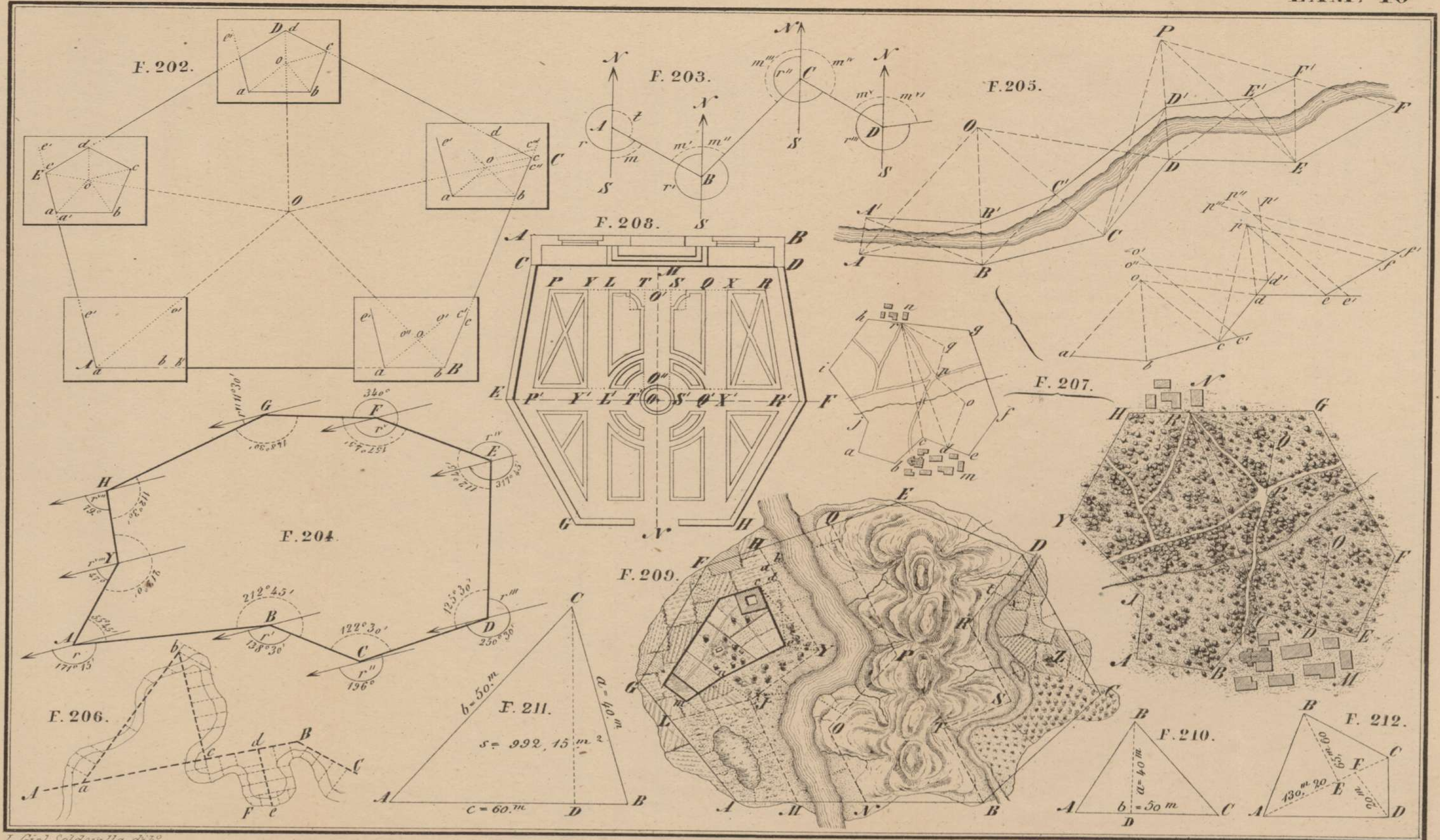


P. Gial Soldevilla, dib.º

Lit. Salvador, 8, Madrid.

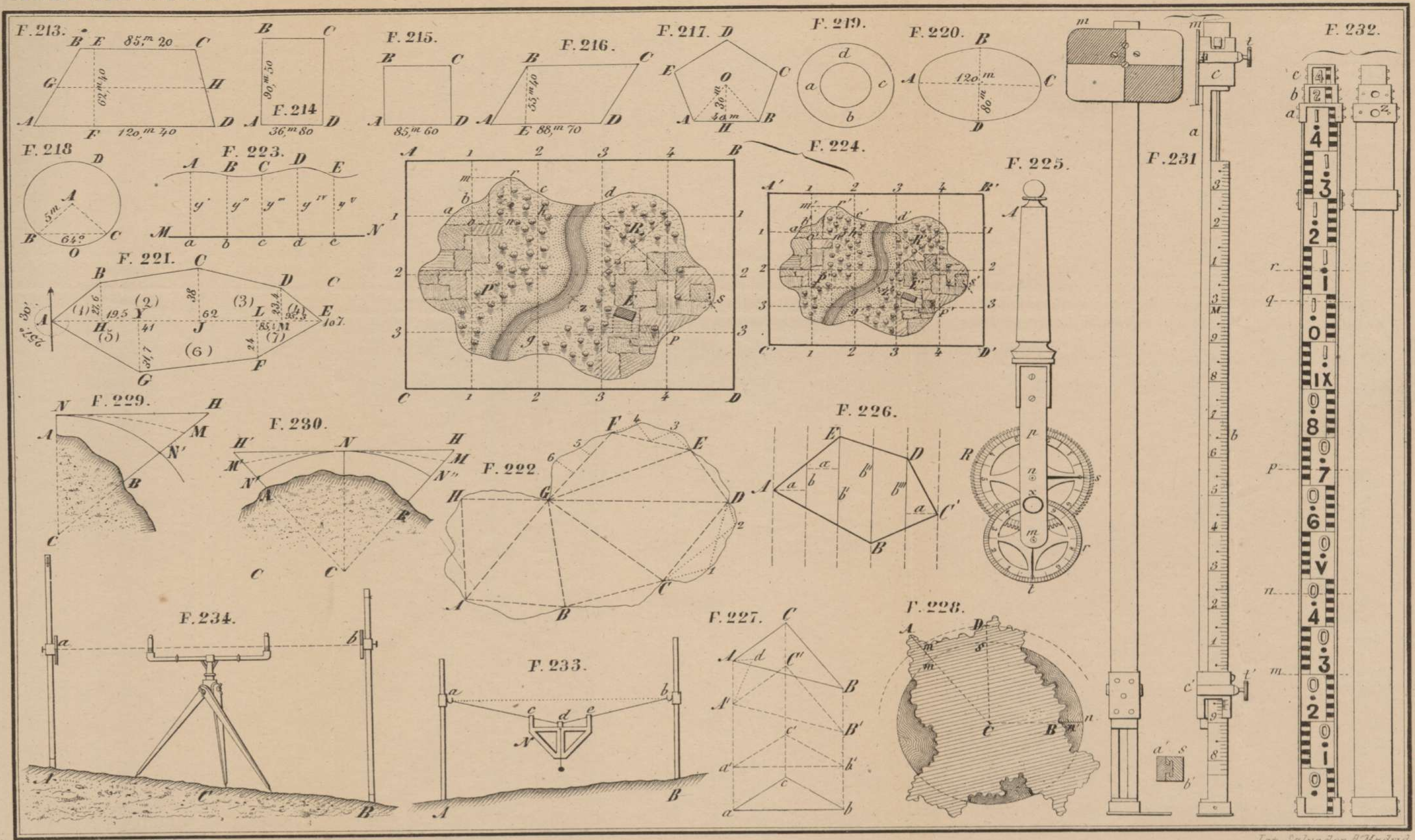


J. Giol Soldevilla, dib.º Lit. Salvador 8 Madrid.



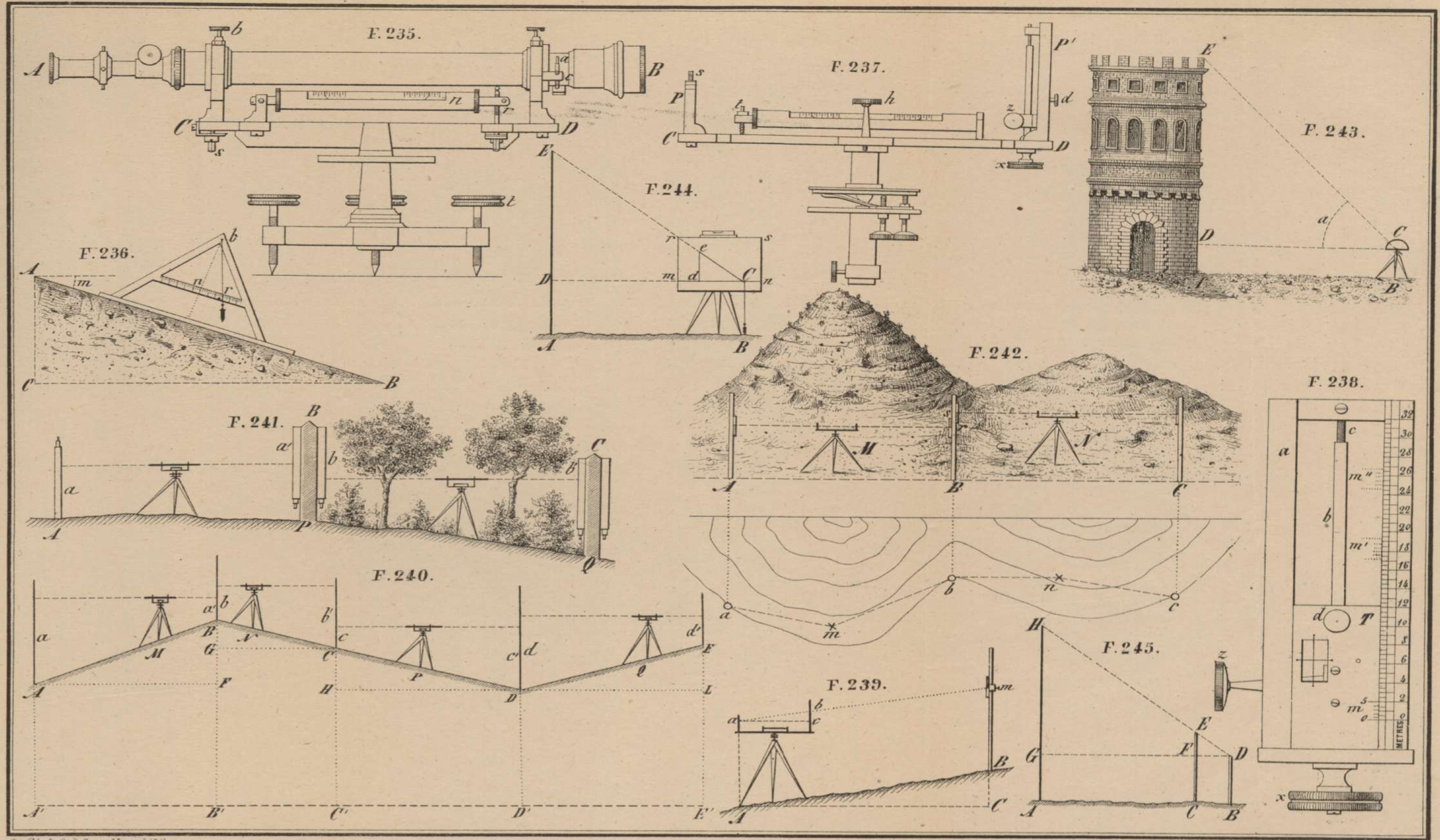
I. Giol Soldevilla, dibᵒ

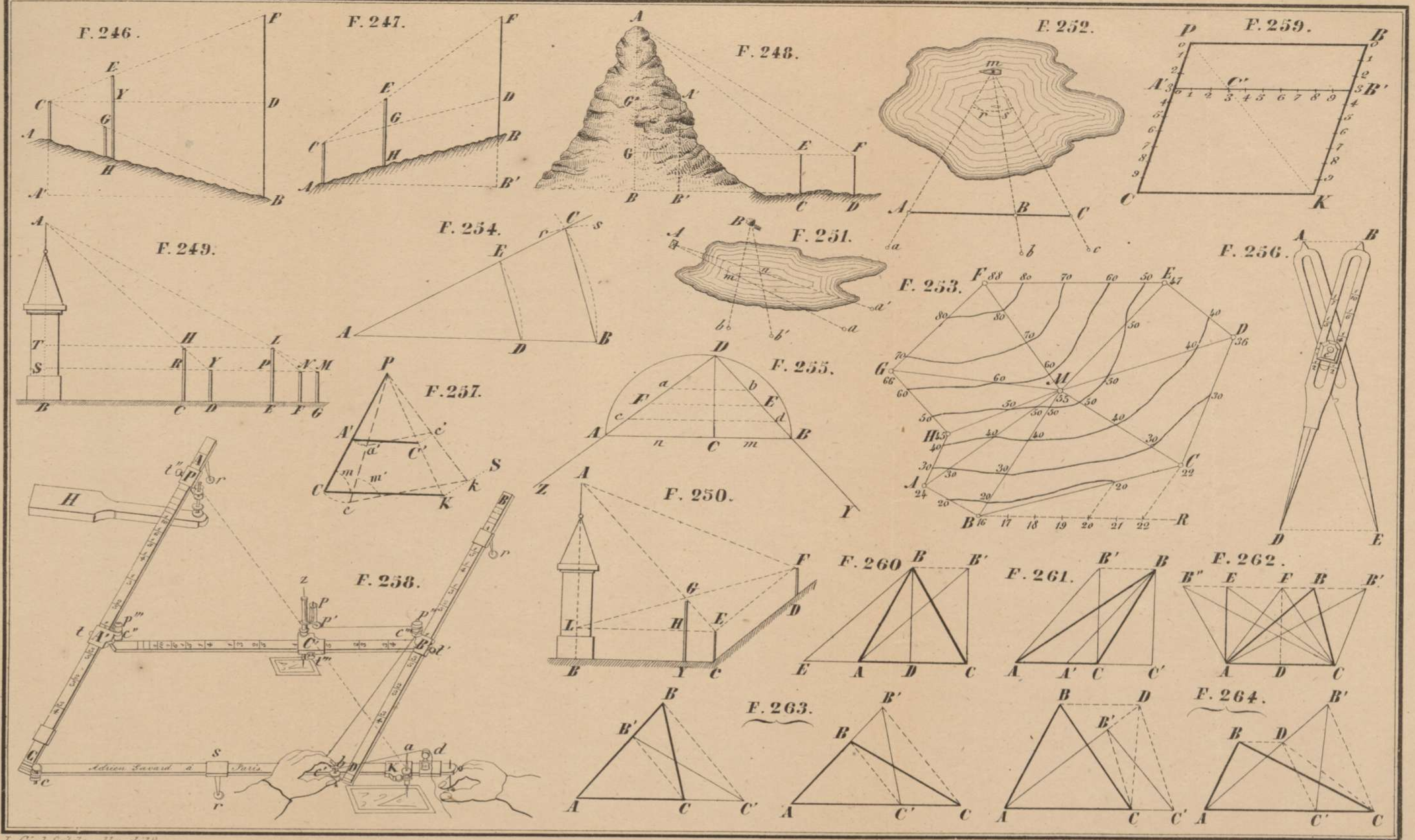
Lit. Salvador S. Madrid



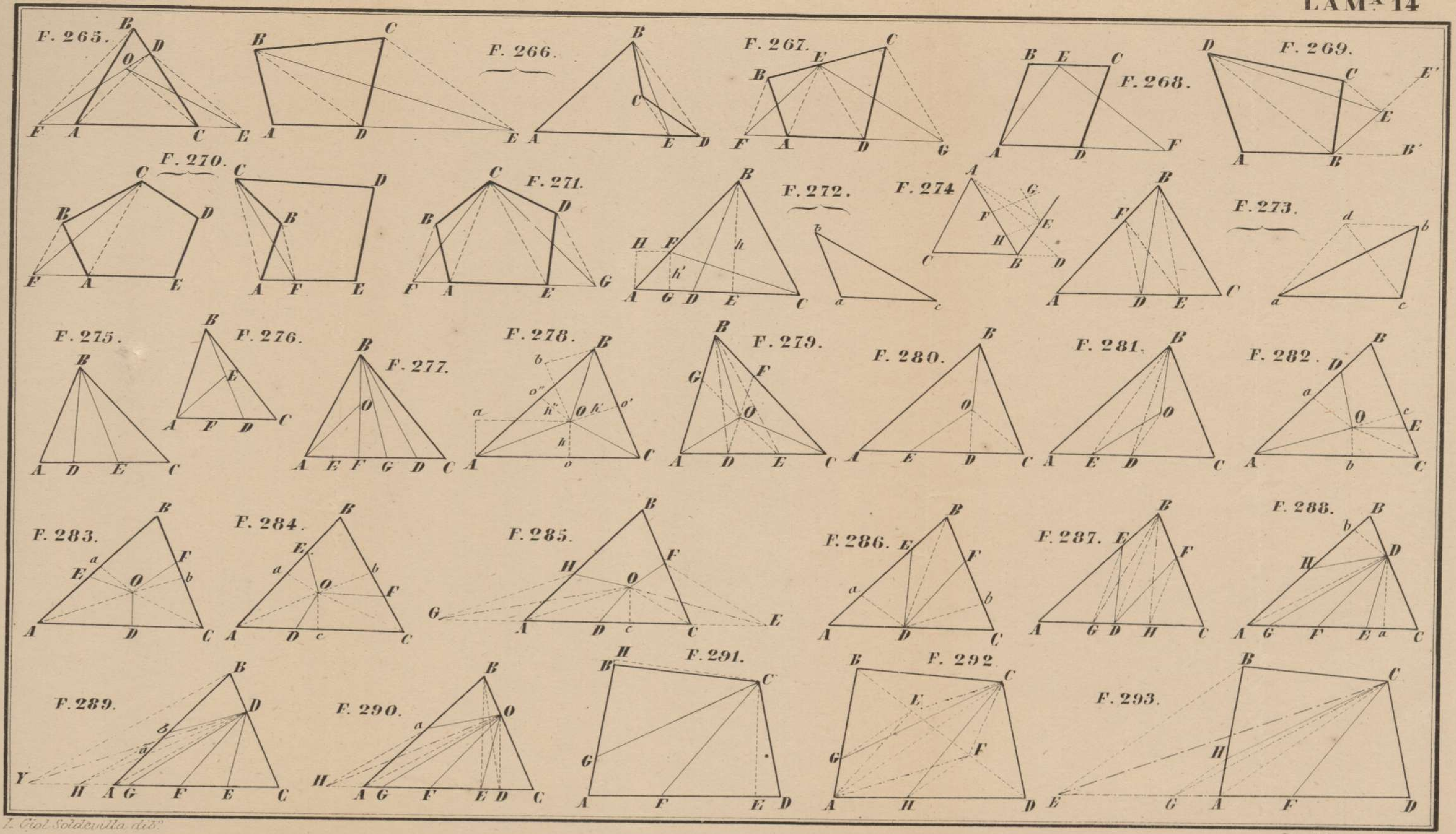
J. Giol Soldevilla, dib.º

Lit. Salvador 8, Madrid


F. 235.
F. 236.
F. 237.
F. 238.
F. 239.
F. 240.
F. 241.
F. 242.
F. 243.
F. 244.
F. 245.

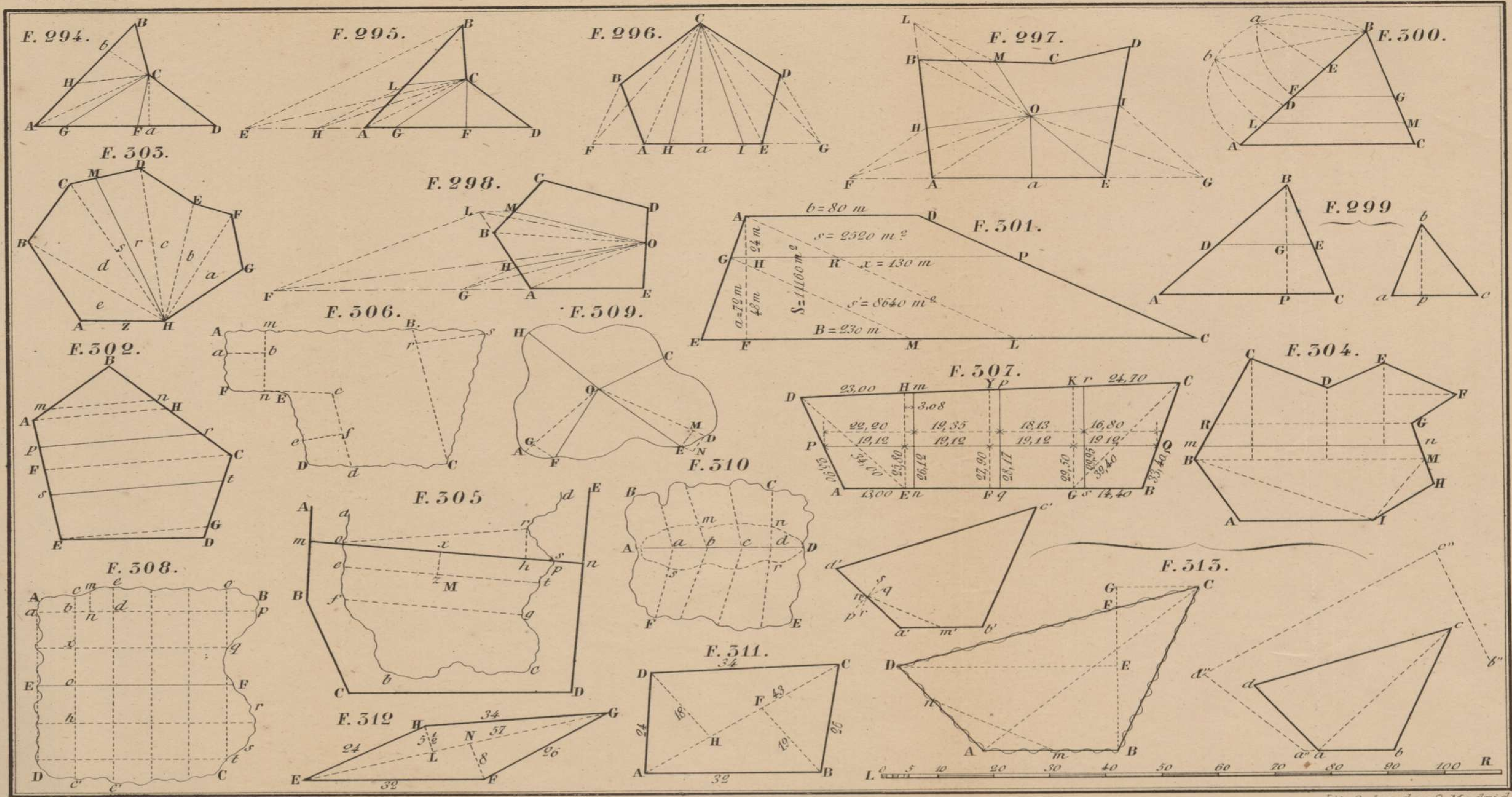


I. Giol Soldevilla, dib.º Lit. Salvador 8, Madrid.



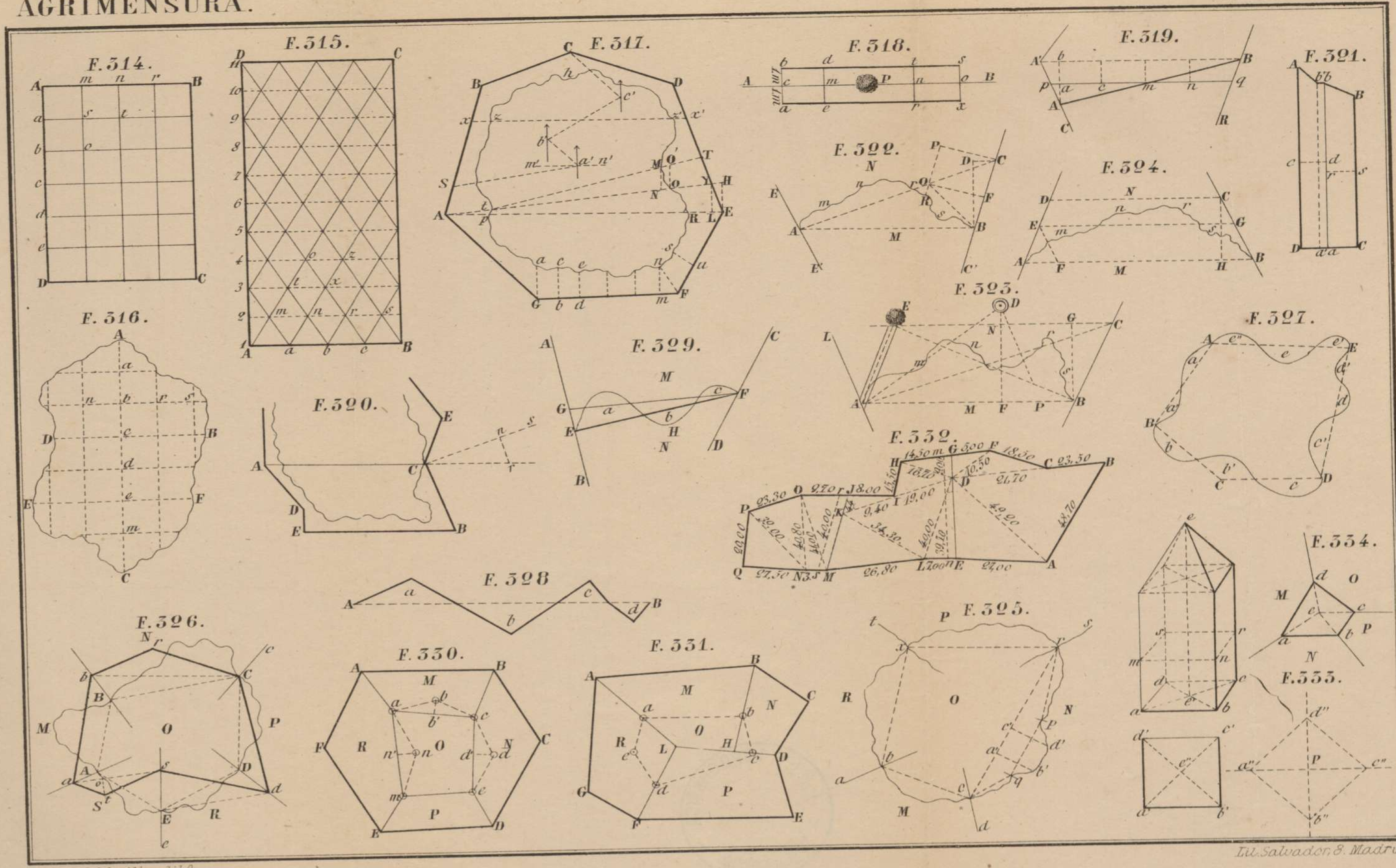
J. Giol Soldevilla dib.

Lit. Salvador 8 Madrid



I. Gid. Soldevilla, dibº

Lit. Salvador. 8. Madrid.



I. Giol Soldevilla dib.º

Lit. Salvador, 8. Madrid

E.U.I.T. TOPOGRAFICA
BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID
6000017673