EGERCICIO
DE MATEMÁTICAS,
QUE HA DE TENER
EN LOS ESTUDIOS REALES
DE ESTA CORTE

D. ANTONIO VAILLANT BERTIER,
Cadete del Regimiento de Caballería de Alcántara:

DIA 19 DE JULIO, A LAS 10 DE LA MAÑANA;

PRESIDIENDOLE

D. ANTONIO ROSELL VICIANO, *Catedrático de Matemáticas en los mismos Reales Estudios.*

MADRID. MDCCLXXVII.

Por D. JOACHIN IBARRA Impresor de Cámara de S. M.

Con las licencias necesarias.

AL EXCELENTISIMO SEÑOR

D. PEDRO DE ZUÑIGA,

GIRON, PACHECO, TOLEDO Y PORTUGAL;
CONDE DE MIRANDA, DUQUE DE PEÑARANDA, MARQUES DE LA BAÑEZA, TENIENTE GENERAL DE LOS REALES EGERCITOS, CABALLERO GRAN-CRUZ DE LA REAL DISTINGUIDA ORDEN ESPAÑOLA DE CARLOS TERCERO, &c. &c. &c.

EXC.MO SEÑOR.

DEsde que resolví dar una muestra pública de la instruccion, que iba adquiriendo en las Matemáticas, pensé tambien poner al frente de mis Conclusiones un ilustre nombre, que realzara su pequeñez; pero como V. E. ha sido siempre declarado favorecedor, y protector de los mios, no tuve que dudar en la eleccion. Quedaría muy ceñido el debido reconocimiento con que debemos estar á tan singulares beneficios co-

mo recibimos continuamente, si yo por mi parte no diera en esta ocasion un público testimonio de nuestra gratitud. Espero, pues, de la benignidad de V. E. recibirá con agrado estas primicias de mis estudios, mientras alentado con tan alta proteccion, me dispongo para ofrecerle otros frutos mas sazonados.

El Señor conserve á V. E. muchos años, y le colme de verdaderas felicidades, como lo ruega,

EXC.MO SEÑOR,

Su mas humilde, y reconocido servidor,

Antonio Vaillant Bertier.

ADVERTENCIA.

SI los egercicios literarios se tuvieran solo con el ánimo de manifestar el método que se sigue en las Enseñanzas, y de acreditar sus progresos; pudiéramos escusar este de Matemáticas, por haberse dado, respecto á esta facultad, suficiente muestra de uno y otro en los actos públicos antecedentes: se deben tener tambien para estimular y mantener en vigor el aprovechamiento de los discípulos; y á este fin basta ahora ofrecer la demostracion ó resolucion de varias proposiciones de Aritmética, Geometría, Trigonometría, y Algebra, segun se hace en las siguientes Conclusiones; sin necesidad de aumentar su volumen, extendiéndonos á los tratados de Geometría sublime, y Cálculos diferencial, é integral, que se han explicado igualmente.

DE LA ARITMÉTICA.

Proposicion.

EXplicar las principales propiedades de las razones y proporciones aritméticas y geométricas, y los métodos de sumar, restar, multiplicar, partir, elevar á qualquiera potencia, y sacar raices quadradas y cúbicas de los números enteros, quebrados, ó fracciones decimales, y de hallar un medio, tercero, ó quarto proporcional.

DE LOS ELEMENTOS DE GEOMETRÍA, *Y* TRIGONOMETRÍA RECTILINEA.

I.

LA linea recta es la mas corta de todas las que se pueden tirar de un punto á otro.

II.

Las partes de pāralelas comprehendidas entre paralelas son iguales.

III.

Si una linea transversal corta á dos paralelas, hará los ángulos alternos iguales, los ángulos externos iguales á los internos opuestos, y dos internos opuestos tomados juntamente iguales á dos rectos.

IV.

En qualquier triángulo los tres ángulos tomados juntamente son iguales á dos rectos.

V.

Si en qualquier triángulo se prolonga un lado; el ángulo externo será igual á la suma de los dos internos opuestos.

VI.

Si los tres lados de un triángulo fueren iguales á los tres de otro, serán tambien los tres ángulos del uno iguales á los tres del otro.

VII.

Si dos lados de un triángulo fueren iguales á dos de otro, y tambien fueren los ángulos comprehendidos entre ellos iguales; serán los demás ángulos, y tercer lado del uno iguales á los demas ángulos, y tercer lado del otro.

VIII.

Si un lado, y los dos ángulos adyacentes de un triángulo fueren iguales á un lado, y dos ángulos adyacentes de otro; serán tambien los otros dos lados del primero, y el ángulo comprehendido entre ellos iguales á los otros dos lados, y ángulo comprehendido entre ellos del segundo.

IX.

Si en un triángulo se tira una recta paralela á la base, serán los segmentos de los lados proporcionales á ellos, y el triángulo menor que queda formado por la misma recta semejante al otro mayor que se tenia.

X.

Si en un triángulo se baxa una recta, que divida el ángulo del vértice en dos partes iguales, cortará á la base en segmentos proporcionales á los lados adyacentes.

XI.

En qualquier triángulo escaleno la base es á la suma de los lados adyacentes, como la diferencia de ellos á la diferencia de los segmentos hechos en la base por la perpendicular baxada del vértice.

XII.

En qualquier triángulo escaleno la suma de dos lados es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos á los mismos lados á la tangente de la semidiferencia de ellos.

XIII.

En qualquier triángulo los lados son como los senos de los ángulos opuestos.

XIV.

Si en el triángulo rectángulo se toma un cateto por seno total, el otro será tangente de su ángulo opuesto.

XV.

Si en qualquier triángulo rectángulo se baxa una perpendicular desde el vértice del ángulo recto á la hypotenusa ; dividirá el triángulo en otros dos semejantes entre sí, y con el todo; será ella media proporcional entre los segmentos de la base ; y cada cateto medio proporcional entre la hypotenusa, y el segmento correspondiente.

XVI.

En el triángulo rectángulo el quadrado de la hypotenusa es igual á los quadrados de los dos catetos tomados juntamente.

XVII.

El quadrado formado sobre la hypotenusa de un triángulo rectángulo tiene con los quadrados de los catetos la misma razon que la hypotenusa á los segmentos hechos en ella por la perpendicular baxada del vértice del ángulo recto.

XVIII.

En un mismo ó iguales círculos las cuerdas iguales sostienen arcos iguales, y al contrario.

XIX.

El ángulo en el centro del círculo es doblado del ángulo en la periferia que insista sobre el mismo arco.

XX.

La medida del ángulo en la periferia es la mitad del arco sobre que insiste.

XXI.

La medida del ángulo del segmento es la mitad del arco que está dentro de él sostenido por la cuerda que le forma con la tangente.

XXII.

Si una recta corta á otra cuerda en partes iguales, y es perpendicular á ella, pasa por el centro del círculo, y divide á los arcos que sostiene la cuerda en partes iguales.

XXIII.

Si dos cuerdas de un mismo círculo se cortan mutuamente serán los segmentos de la una recíprocamente proporcionales á los segmentos de la otra.

XXIV.

Los quadrados de las cuerdas tiradas desde el extremo de un diámetro, son entre sí como los segmentos que cortan en dicho diámetro las perpendiculares que se le baxen desde los otros extremos de las mismas cuerdas.

XXV.

Si desde un punto tomado dentro del círculo, se tiran rectas á la periferia del círculo, será la mayor de todas la que pase por el centro: las demas serán tanto mayores quanto mas cerca estén de la mayor; y al contrario, la menor de todas será la que prolongada pase por el centro, y las demas serán tanto mayores quanto mas se aparten de la menor.

XXVI.

Si de un mismo punto tomado fuera del círculo se tiran diferentes secantes al círculo, será la mayor la que pase por el centro: las demas serán tanto menores quanto mas se aparten del centro; y al contrario, las porciones de ellas, que estén fuera del círculo, serán tanto mayores quanto mas disten de la del centro, y la menor de todas será la de la secante que pase por el centro.

XXVII.

Si de un mismo punto se tiran dos secantes al círculo, será la primera á la segunda, como la porcion que tenga esta fuera del círculo á la porcion que tenga la otra.

XXVIII.

Si de un punto tomado fuera del círculo se tiran dos rectas, de las quales la una toque al círculo, y la otra le corte; será la tangente media proporcional entre toda la secante, y la porcion que tenga esta fuera del círculo.

XXIX.

La suma de los senos de dos arcos es á la diferencia de los mismos senos, como la tangente de la mitad de la suma de dichos arcos es á la tangente de la mitad de su diferencia.

XXX.

El círculo es igual á un triángulo, cuya base es igual á la periferia, y la altura al radio.

XXXI.

El sector del círculo es igual á un triángulo, cuya base es igual al arco comprehendido entre los dos radios, y su altura al mismo radio.

XXXII.

Los círculos son entre sí como los quadrados de los diámetros y de los radios.

XXXIII.

Qualquiera figura regular se resuelve desde el centro del círculo circunscrito en triángulos iguales, y semejantes; y su area es igual á un triángulo que tenga la base igual á la periferia de todo el polígono, y la altúra al perpendículo tirado del centro del mismo á uno de sus lados.

XXXIV.

Los paralelógramos que están entre unas mismas paralelas, y tienen una misma base son iguales.

XXXV.

Las figuras regulares, é irregulares semejantes están en razon duplicada de los lados homólogos.

XXXVI.

El cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro, é icosaedro, son cuerpos regulares, y no puede haber otro á mas de estos cinco.

XXXVII.

Los paralelepípedos, prismas, y cilindros que tienen iguales bases, y alturas son iguales.

XXXVIII.

Las pirámides, y conos son la tercera parte de los prismas, y cilindros de la misma base, y altura.

XXXIX.

Las pirámides, y conos que están sobre la misma base, y tienen la misma altura son iguales.

XL.

Los paralelepípedos, prismas, cilindros, conos, y pirámides iguales tienen la base y altura de uno recíprocamente proporcional á la base, y altura de otro.

XLI.

Todos los prismas, paralelepípedos, cilindros, pirámides, y conos están entre sí en razon compuesta de las bases y alturas.

XLII.

Todos los cuerpos semejantes, sean prismas, paralelepípedos, cilindros, pirámides, ó conos están en razon triplicada de los lados homólogos, y tambien de las alturas.

XLIII.

La superficie de la esfera es quádrupla de la del círculo descrito con su radio.

XLIV.

La esfera es igual á una pirámide, cuya base es igual á la superficie de la esfera, y la altura á su radio.

XLV.

Las esferas son como los cubos de sus diámetros.

XLVI.

La esfera es al cilindro circunscrito como 2 á 3.

DE LA APLICACION DE LA GEOMETRÍA, *Y* TRIGONOMETRIA *A VARIOS ASUNTOS DE LA PRACTICA.*

I.

TIrar por un punto dado fuera de una recta una paralela á ella.

II.

Levantar una perpendicular de un punto dado en una recta, ó en un plano, ó al extremo de la recta.

III.

Baxar una perpendicular á una recta de un punto dado fuera de ella.

IV.

Dividir una recta dada en qualesquiera partes iguales, ó en dos, levantando en medio de ella una perpendicular.

V.

Encontrar una media proporcional entre dos lineas dadas.

VI.

Dadas tres lineas encontrar una quarta proporcional, ó dadas dos una tercera.

VII.

Medir la distancia de dos lugares, á los quales se pueda llegar de un mismo tercero.

VIII.

Medir la distancia de dos lugares, de los quales uno solo sea accesible.

IX.

Medir la distancia de dos lugares inaccesibles.

X.

Dada la distancia de dos lugares que aparezcan en la misma orizontal, hallar la correccion de nivel, ó lo que diste el uno mas que el otro del centro de la tierra.

XI.

Conocida por el problema antecedente la correccion de nivel, correspondiente á una orizontal dada, hallar la correspondiente á qualquiera otra.

XII.

Hallar la diferencia de nivel de dos lugares que no estén en la misma orizontal.

XIII.

Medir una altura accesible, ó inaccesible.

XIV.

Dividir un ángulo dado en dos partes iguales.

XV.

Describir, ó resolver trigonométricamente un triángulo en qualquiera de estos casos: 1.° dados tres lados, de los quales dos sean mayores que el tercero: 2.° dados dos lados, y el ángulo comprehendido entre ellos: 3.° dados dos lados, y un ángulo opuesto á uno de ellos; previniendo si el opuesto al otro lado ha de ser agudo ú obtuso, quando el dado fuere agudo: 4.° dado un lado, y los dos ángulos adyacentes, que tomados juntamente sean menores que dos rectos.

XVI.

Formar sobre una recta dada un triángulo equilátero, ó un isósceles, si ademas se dá otra recta mayor que la mitad de la primera.

XVII.

Dividir un triángulo en qualesquiera partes iguales.

XVIII.

Hallar la area de qualquier triángulo.

XIX.

Describir un círculo que pase por tres puntos dados que no estén en derechura.

XX.

Dividir un arco en dos partes iguales.

XXI.

Dado el diámetro de un círculo encontrar la periferia y su area, y dada la periferia el diámetro.

XXII.

Dado el radio del círculo, y la razon del arco de un sector á la periferia, hallar la area del sector.

XXIII.

Dada una recta describir un quadrado, ó dadas dos un rectángulo oblongo.

XXIV.

Dada una recta, y un ángulo obliquo, formar un rombo; ó dadas dos, y el ángulo obliquo, que hayan de formar, un romboyde.

XXV.

Hallar la area del quadrado, rectángulo, rombo, ó romboyde.

XXVI.

Encontrar el lado del quadrado igual á un paralelógramo, ó triángulo dado.

XXVII.

Dados todos los lados de qualquiera figura rectilinea, y tantos ángulos quantos lados tenga menos tres, describir la figura.

XXVIII.

Dados todos los lados de qualquiera figura, y tantas diagonales quantos lados tenga menos tres, construir la figura.

XXIX.

Dada una recta formar sobre ella qualquier polígono regular.

XXX.

Encontrar el ángulo de qualquier polígono regular.

XXXI.

Circunscribir un círculo á qualquiera polígono regular.

XXXII.

Inscribir qualquier polígono regular en un círculo dado.

XXXIII.

Encontrar la area del trapecio, ó de qualquier polígono regular, ó irregular.

XXXIV.

Describir la ignografia de qualquiera campo desde dos sitios de su circunferencia.

XXXV.

Levantar el plano de un territorio.

XXXVI.

Medir la superficie y solidez de los cinco cuerpos regulares.

XXXVII.

Determinar la superficie y solidez del paralelepípedo.

XXXVIII.

Determinar la superficie y solidez del prisma.

XXXIX.

Hallar la superficie y solidez del cilindro.

XL.

Medir la superficie y solidez de la pirámide y cono.

XLI.

Hallar la superficie y solidez del cono truncado.

XLII.

Dado el diámetro de la esfera, hallar la superficie y solidez de ella.

DE LOS PRINCIPIOS DEL ÁLGEBRA.

I.

REpresentando $b-d$ qualquiera cantidad que se haya de restar; esto es, b la suma de todos los términos positivos que haya en ella, y d la suma de todos los negativos; manifestar que generalmente para restar $b-d$ de qualquiera otra cantidad a, se indicará la resta, escribiendo: $a - b + d$.

II.

Siendo a qualquier multiplicando, y b qualquier multiplicador; manifestar, que si se multiplica $+a$ por $+b$, el producto será $+ab$; si $+a$ por $-b$, el producto será $-ab$; si $-a$ por $+b$, el producto será $-ab$; y que si $-a$ por $-b$, el producto será $+ab$.

III.

Suponiendo que ab represente qualquier dividendo, y b un divisor; manifestar, que dividiendo $+ab$ por $+b$, el quociente será $+a$; que si se divide $+ab$ por $-b$ resultará $-a$; y si $-ab$ por $+b$ resultará $-a$; y si $-ab$ por $-b$, $+a$.

IV.

Manifestar que el producto $a^m a^n$ se expresa tambien por a^{m+n}, y que el quociente de $a^m : a^n$, ó de $\frac{a^m}{a^n}$, se expresa tambien por a^{m-n}.

V.

Deducir de la proposicion antecedente que a^0 no altera su coeficiente 1, y que a^{-n} equivale á $\frac{1}{a^n}$.

VI.

Manifestar que la suma de dos quebrados, como $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ se expresa por $\frac{ad+bc}{bd}$; que restando el segundo del primero, quedará la resta $\frac{ad-bc}{bd}$; que multiplicando el uno por el otro, resultará el producto $\frac{ac}{bd}$; y que dividiendo el primero por el segundo, dará por quociente $\frac{ad}{bc}$.

VII.

Deducir de la proposicion antecedente, que $\frac{a}{b} \times c$ equivale á $\frac{ac}{b}$, que $\frac{a}{b} : c$ equivale á $\frac{a}{bc}$, y que $a : \frac{c}{b}$ se expresa por $\frac{ab}{c}$.

VIII.

Manifestar que $(\pm a^m)^{2n} = + a^{2mn}$, que $(\pm a^m)^{2n+1} = \pm a^{2mn+m}$, que $\sqrt[2n]{a^{2mn}} = \pm \sqrt[2n]{a^{2mn}} = \pm a^{\frac{2mn}{2n}} = \pm a^m$, que $\sqrt[2n]{a^{2mn+2t}} = \pm a^m \sqrt[2n]{a^{2t}}$, que $\sqrt[2n+1]{\pm a^{2mn+m}} = \pm \sqrt[2n+1]{a^{2mn+m}} = \pm a^m$, que ....

$\sqrt[2n+1]{\pm a^{2mn+m+t}} = \pm a^m \sqrt[2n+1]{a^t}$, y que $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$; sirviendo en todas estas expresiones los signos superiores para quando a^m sea positiva, y los inferiores para quando sea negativa.

IX.

Hallar qualquiera de las fórmulas siguientes: $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \pm \frac{y}{z}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{pz \pm qy}{qz}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \frac{y}{z}\sqrt[u]{\frac{c}{d}} = \frac{py}{qz}\sqrt[nu]{\frac{a^u c^n}{b^u d^n}}$; y $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} : \frac{y}{z}\sqrt[u]{\frac{c}{d}} = \frac{pz}{qy}\sqrt[nu]{\frac{a^u d^n}{b^u c^n}}$; para sumar, restar, multiplicar, y partir las cantidades afectas de signos radicales.

X.

Hallar las fórmulas $\left(\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}\right)^{\frac{u}{s}} = \sqrt[\frac{ns}{u}]{\frac{a^n c}{b^n d}}$, y $\sqrt[\frac{u}{s}]{\left(\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}\right)} = \sqrt[\frac{nu}{s}]{\frac{a^n c}{b^n d}}$, para elevar las cantidades afectas de signo radical á qualquiera dignidad, ó sacar de ellas qualquiera raiz.

XI.

Explicar la igualdad de las siguientes expresiones de las raices imaginarias; esto es, que $\sqrt[2n]{-a} = \pm$

$\sqrt[2n]{-a} = \pm(-a)^{\frac{1}{2n}} = \pm(+a)^{\frac{1}{2n}}(-1)^{\frac{1}{2n}} = \pm$
$a^{\frac{1}{2n}}(-1)^{\frac{1}{2n}} = \pm\sqrt[2n]{a} \times \sqrt[2n]{-1}.$

XII.

Deducir de las proposiciones antecedentes, que $\sqrt{a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-ab}$, que $\sqrt{-a} \times \sqrt{b} = \sqrt{-ab}$, que $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$, que $\sqrt{a} : \sqrt{-b} = -\sqrt{-\frac{a}{b}}$, que $\sqrt{-a} : \sqrt{b} = +\sqrt{-\frac{a}{b}}$, que $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, que $(a\sqrt{-1})^{2m} = \pm a^{2m}$, que $(a\sqrt{-1})^{2m+1} = \pm a^{2m+1}\sqrt{-1}$, y que $\sqrt[2n]{-a^{2mn+1}} = \pm a^m\sqrt[2n]{-a}$; sirviendo en estas los signos superiores para quando m sea número par, y los inferiores para quando sea impar.

XIII.

Explicar las reglas que conviene observar en la resolucion de las equaciones de primer grado.

XIV.

Hallar la fórmula $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, para determinar las raices de las equaciones del segundo grado, representadas generalmente por la equacion $x^2 + px + q = 0$.

DEL USO DEL ÁLGEBRA

EN LOS PROBLEMAS

DE ARITMÉTICA, Y GEOMETRÍA.

I.

Dadas tres de estas quatro cosas, el primer término, el último, el número de los términos, y la suma de todos ellos en una progresion arismética, hallar la quarta.

II.

Dadas tres de estas quatro cosas, el primer término, el último, la razon, y el número de los términos de una progresion geométrica, hallar la quarta.

III.

Dados el primer término, la razon, y número de términos de una progresion geométrica, hallar la suma de todos ellos.

IV.

Partir un número conocido a en tres partes, que sean entre sí como las cantidades m, n, p; esto es, tales que sea la primera á la segunda como m á n, y la primera á la tercera como m á p.

V.

Supuesto que la cantidad a de un género de cierta calidad es del precio m, y otra b del mismo género, pero de diferente calidad del precio *n*; determinar el precio á que se hayan de vender las dos mezcladas para no perder, ni ganar.

VI.

Dados los precios de dos géneros *a* y *b*, hallar en qué proporcion se han de mezclar para venderlos á un precio medio *m*.

VII.

Suponiendo que un jornalero pueda hacer una obra *a* en el tiempo *b*, y otro otra *c* en el tiempo *d*, y otro otra *e* en el tiempo *f*; hallar el tiempo que necesitarán trabajando los tres juntos para hacer otra mayor *g*.

VIII.

Si dos fuentes manan uniformemente, y llenan un estanque *a*, dando agua la una el tiempo *b*, y la otta el tiempo *c*; y tambien llenan las mismas otro estanque *d*, la primera durante el tiempo *e*, y la segunda durante el tiempo *f*; hallar quánta agua ha dado cada una de ellas.

IX.

Dado un capital, el tiempo que esté puesto á interés, y el tanto por ciento que haya de producir anualmente; hallar la suma que componen el capital, y los intereses al fin de dicho tiempo.

X.

Supuesto que se haya de pagar anualmente una cantidad, y que el que la haya de percibir se aguarde algunos años á cobrarla, con la condicion de que se le pague entonces, ademas de la suma de las pagas vencidas, un tanto por ciento anual por las atrasadas; hallar la suma de uno, y otro al fin de qualquier tiempo.

XI.

Dado un capital, el tiempo que esté puesto á ganancia, y el interés anual; hallar á quánto asciende al fin de dicho tiempo la suma del capital, los intereses, y los intereses de los intereses vencidos.

XII.

Hallar lo que importaría al fin de qualesquiera años un fondo compuesto de una renta anual, y del beneficio que debian producir las pagas é intereses vencidos.

XIII.

Prolongar una recta dada, dividida en dos partes qualesquiera, de suerte que el rectángulo entre toda ella con su prolongacion, y la misma prolongacion sea igual al quadrado de la suma de dicha prolongacion, y parte inmediata de las dos dadas.

XIV.

Inscribir un quadrado en un triángulo dado.

XV.

Dados dos círculos y la posicion de sus centros, tirar una tangente de los dos.

XVI.

Dada la base, y los dos ángulos adyacentes de qualquier triángulo, hallar su altura.

XVII.

Hallar una figura igual á la suma ó diferencia de todas las figuras semejantes que se quiera, de modo que sea semejante á ellas.

XVIII.

Hallar una figura semejante á otra dada, y que tenga con ella el respecto de *m* á *n*.

XVI.

Dada la base, y los dos ángulos adyacentes de qualquier triángulo, hallar su altura.

XVII.

Hallar una figura igual á la suma ó diferencia de todas las figuras semejantes que se quiera, de modo que sea semejante á ellas.

XVIII.

Hallar una figura semejante á otra dada, y que tenga con ella el respecto de m á n.