EXERCICIO
DE MATEMATICAS
QUE HA DE TENER
EN LOS ESTUDIOS REALES
DE ESTA CORTE

D. AGUSTIN DE BETANCOURT Y MOLINA, Teniente del Regimiento de la Orotava en la Isla de Tenerife:

DIA 9 DE JULIO, A LAS 10 DE LA MAÑANA;

PRESIDIENDOLE

D. ANTONIO ROSELL VICIANO, *Catedrático de Matemáticas en los mismos Reales Estudios.*

MADRID. MDCCLXXX.

Por D. JOACHIN IBARRA, Impresor de Cámara de S. M.

Con las Licencias necesarias.

ADVERTENCIA.

Siendo indispensables la Algebra y Geometría sublime para penetrar á fondo la buena Mecánica, ó mejor Física, segun las luces que se tienen hoy dia; con el ánimo de dirigir nuestros conatos á Ciencia tan util, de quien depende el progreso de casi todas las Artes, y para conformarnos con nuestro Instituto, despues de haber explicado en el curso antecedente la Aritmética, Algebra, Geometría, y Trigonometría, se ha continuado en este por la Analisi, Teórica de las lineas curvas, Cálculos diferencial, é integral, y parte de Mecánica que encierran la Estática y Dinámica. Y teniendo estas solas mas que suficiente extension para llenar el objeto de unas Conclusiones, asegurándose *con su inteligencia la de los tratados en que se fundan, hemos reducido á ellas las proposiciones de este Exercicio.*

DE LA ESTÁTICA Y DINÁMICA.

La Estática y Dinámica son las Ciencias Físico-Matemáticas, en que se hallan como compendiadas las utilidades de las demas; porque no solo depende de ellas gran parte de la perfeccion de muchas Artes, señaladamente de las Arquitecturas civil y naval, sino que tambien son el fundamento de casi todas las otras Ciencias Físico-Matemáticas. Por esta razon son las primeras que se deben entender, y á las que principalmente se dirige el estudio de la Matemática Pura. A ellas pertenece la doctrina de los movimientos uniforme, acelerado, y retardado, de la composicion y descomposicion de las potencias que los producen, del centro de gravedad de los sistemas, de su rotacion, del movimiento de los cuerpos que insisten sobre superficies, de la oscilacion de los péndulos, de la percusion y presion de los cuerpos duros y elásticos, y de las máquinas simples, como se trata por menor en los capítulos siguientes.

Capitulo I.

De los principios del movimiento.

I.

Siendo E y e los espacios absolutos, corridos por los cuerpos A y B, y V y u las velocidades absolutas de los mismos; hallar las expresiones $E \mp e$, y $V \mp u$ del espacio relativo, y de la velocidad relativa de su movimiento, sirviendo el signo — para quando los cuerpos se dirijan ácia la misma parte, y + para quando se dirijan ácia opuestas.

II.

Denotando en el movimiento uniforme de dos cuerpos los espacios corridos por E y e, las velocidades por V y u, y los tiempos por T y t, hallar para un cuerpo solo que $e = ut$, $u = \frac{e}{t}$, y $t = \frac{e}{u}$, y para los dos las proporciones siguientes; 1ª, que $E : e = VT : ut$; 2ª, que $V : u = Et : eT$; y 3ª, que $T : t = Eu : eV$; y en caso de ser $V = u$; 4ª, que $E : e = T : t$; y si $T = t$, 5ª, $V : u = E : e$.

III.

Manifestar que la cantidad de movimiento de un cuerpo, ó su fuerza motriz es igual al producto de su masa A por su velocidad u, esto es $= Au$; y representando a' la potencia que obra por instantes en el cuerpo,

e el espacio corrido, y t el tiempo que durare la accion; hallar las equaciones fundamentales del movimiento acelerado, ó retardado en qualquiera razon; esto es, $a'dt = \pm Adu$, y $u = \frac{de}{dt}$; deduciendo de ellas, que $\pm du = \frac{a'dt}{A}$, y $de = \pm \frac{Audu}{a'}$; sirviendo los signos superiores para quando la velocidad crece, y los inferiores para quando decrece.

IV.

Hallar por medio de las equaciones antecedentes las fórmulas siguientes: $u - V = \pm \frac{1}{A}\int a'dt$, $e = Vt \pm \frac{1}{A}\int dt\int a'dt = \pm A\int\frac{udu}{a'}$, que representan el exceso, ó defecto de velocidad que tiene un cuerpo en el movimiento acelerado, ó retardado en qualquiera razon á qualquier instante de su carrera, y el espacio corrido en el tiempo t; denotando V la velocidad primitiva, ó la que tenia el cuerpo al principio de dicho tiempo.

V.

Deducir de las fórmulas antecedentes las siguientes: $u - V = \pm \frac{a't}{A}$, $e = Vt \pm \frac{a't^2}{2A} = \pm \frac{A}{2a'}(u^2 - V^2)$ para quando la potencia a' es constante en todos los instantes, ó el movimiento es uniformemente acelerado, ó retardado, y para el caso en que sea $V = 0$, estas otras: $u = \pm \frac{a't}{A}$, $e = \pm \frac{a't^2}{2A} = \pm \frac{Au^2}{2a'} = \pm \frac{1}{2}ut$; ó haciendo la cantidad constante $\frac{a'}{A} = x'$, que $u = \pm x't$, $e = \pm \frac{1}{2}x't^2 = \pm \frac{u^2}{2x'} = \pm \frac{1}{2}ut$; sirviendo en todas los signos superiores para el movimiento acelerado, y los inferiores para el retardado.

VI.

Deducir de las últimas fórmulas, que representando E y e los espacios corridos por un mismo cuerpo en los tiempos T y t con las velocidades V y u, será $E : e = T^2 : t^2 = V^2 : u^2$, y $\sqrt{E} : \sqrt{e} = T : t = V : u$; y que así dichas fórmulas convienen al descenso libre de los cuerpos graves en distancias cortas de la superficie de la tierra.

VII.

Siendo a la medida del espacio corrido por un cuerpo grave en el primer segundo de su descenso libre, manifestar que supuesto $e = \frac{1}{2}x't^2 = \frac{u^2}{2x'}$, será tambien $\mathrm{a} = \frac{1}{2}x' = \frac{a'}{2\mathrm{A}}$, $x' = \frac{a'}{\mathrm{A}} = 2\mathrm{a}$, $a' = 2\mathrm{aA}$, $e = \mathrm{a}t^2 = \frac{u^2}{4\mathrm{a}}$, y $u = 2\sqrt{\mathrm{a}e} = 2\mathrm{a}t$ (*).

VIII.

Llamando M y m á las masas de dos cuerpos graves, P y p á sus pesos, S y s á sus solideces, y D y d á sus densidades, manifestar que $M = SD$, $S = \frac{M}{D}$, $D = \frac{M}{S}$, y $P : p = M : m = SD : sd$, $S : s = Md : mD$, y $D : d = Ms : mS$, y siendo $S = s$, que $P : p = M : m = D : d$.

(*) Los valores de a y de x' se supondrán los mismos en todo lo que se se sigue.

Capitulo II.

De la composicion y descomposicion del movimiento.

I.

Manifestar que el movimiento que tenga un cuerpo por una direccion no se alterará por el que se le imprima segun otra, pero que seguirá con un movimiento compuesto por una direccion media entre las de las dos, ó mas potencias que actúen en él; por el mismo ó diferente plano segun las direcciones de las potencias se hallan en uno, ó muchos planos.

II.

Deducir de la proposicion antecedente, que la equacion de la linea, ó trayectoria, que describirá en el movimiento compuesto un cuerpo agitado de dos potencias, se hallará por medio de la igualacion de los valores del mismo tiempo, en que corriera el cuerpo libremente por cada una de las direcciones; y que así, si los movimientos segun cada direccion eran uniformes, el compuesto lo será tambien, y su trayectoria una recta; y si el uno es simplemente uniforme, y el otro uniformemente acelerado, ó retardado, la trayectoria será una parábola, y el movimiento diferentemente uniforme.

III.

Suponiendo que A representa la masa de un cuerpo agitado de dos potencias a' y b', cuyas direcciones forman entre sí el ángulo S'; hallar la expresion de la diferencial del espacio corrido por su trayectoria en el tiempo dt; esto es, $\frac{dt}{A}((\int a'dt)^2 + (\int b'dt)^2 \pm 2(\int a'dt)(\int b'dt)cos.S')^{\frac{1}{2}}$; deduciendo, que quando las direcciones estén en una misma recta, se reducirá á $\frac{dt}{A}\int dt(a' \pm b')$: sirviendo los signos superiores para quando el ángulo que forman las direcciones es agudo, y los inferiores para quando es obtuso; ó en el último caso $+$ para quando las potencias se dirijan ácia la misma parte, y $-$ para quando se dirijan ácia opuestas; haciendo ver, que si entonces $a' = b'$, el cuerpo quedará sin movimiento.

IV.

Manifestar que en el movimiento compuesto de qualesquiera dos potencias, serán estas proporcionales á los lados por donde se dirijan de qualquier paralelogramo formado sobre el ángulo de sus direcciones, y la resultante á la diagonal del paralelogramo que se elija; ó que cada una de ellas, y la resultante es proporcional al seno del ángulo que forman las direcciones de las otras dos.

Capitulo III.

Del centro de gravedad de un sistema de cuerpos, y de su movimiento.

I.

Suponiendo que qualesquiera puntos considerados como centros de masas de otros tantos cuerpos A,B,C,D,&c. que compongan un sistema disten de un plano determinado las cantidades A, B, C, D,&c. y que las potencias que actúen en los mismos puntos sean a', b', c', d',&c. hallar las expresiones $\frac{\mathrm{A}A + \mathrm{B}B + \mathrm{C}C + \mathrm{D}D + \&c.}{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\&c.}$ y $\frac{a'A + b'B + c'C + d'D + \&c.}{a'+b'+c'+d'+\&c.}$ de la distancia del centro de las masas, y del centro de las potencias de todo el sistema al mismo plano.

II.

Manifestar que si el sistema de una serie continua de puntos forma una recta, el centro de masas estará en el medio de ella, y si forma una curva, cuyas ordenadas sean y, y abscisas x, distará la ordenada que pase por el centro de las masas, ó de gravedad, del origen de las abscisas la cantidad $\frac{\int x\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; siendo en la misma ordenada la distancia de dicho centro á la linea de abscisas $= \frac{\int y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, quando la curva sea una rama, ó arco suelto; pero ninguna esta distancia, si la curva se compone de dos ramas iguales y semejantes, por estar entonces el centro en la linea de abscisas á la distancia del vértice que determina la primera fórmula.

III.

Suponiendo que un sistema de infinitos puntos contiguos forme una area, cuyas ordenadas sean y, y abscisas del exe mayor x, hallar la expresion $\frac{\int yxdx}{\int ydx}$ de la distancia del centro de gravedad de todo el sistema, ó area al origen de las abscisas, quando dicho centro esté en el exe mayor; manifestando la misma expresion la distancia de la ordenada donde se halle el centro de gravedad al origen de las abscisas, quando estas se tomen sobre un lado ortogonal de la area; hallando para este caso la expresion $\frac{\int y^2 dx}{2\int ydx}$, que determina en dicha ordenada la distancia del centro á la linea de abscisas.

IV.

Deducir de las proposiciones antecedentes el método de hallar el centro de la masa, ó de gravedad de cada cuerpo homogeneo, determinando la fórmula $\frac{\int y^2 xdx}{\int y^2 dx}$, que expresa la distancia de dicho centro al vértice, ú origen de las abscisas x de qualquier sólido engendrado por la revolucion de una figura plana igual á $\int ydx$ al rededor de la linea de abscisas.

V.

Manifestar que la diferencial dE del espacio corrido en el tiempo dt por el centro de las masas del sistema de dos cuerpos libres A y B, obligados de las potencias a' y b', que actuando ácia la misma parte se dirijan por lineas paralelas á aquella por donde corra el centro de las masas, será $dE = \frac{dt\int(a'+b')dt}{A+B}$.

VI.

Deducir de la fórmula antecedente la siguiente: $dE = \frac{dt\int(a'+b'+c'+d'+\&c.)dt}{A+B+C+D+\&c.} = \frac{dt\int p'dt}{M}$, que representa la diferencial del espacio corrido por el centro de las masas de un sistema compuesto de qualquier número de cuerpos libres; suponiendo que las potencias y el centro de las masas se dirijan paralelamente, y ácia la misma parte, y que la suma de las potencias $a'+b' + c' + \&c. = p'$, y la suma de las masas A + B + C + D + &c. = M.

VII.

Llamando W á la velocidad del centro de las masas de qualquier sistema que se mueva con una direccion paralela á la de las potencias, hallar por medio de la proposicion antecedente las fórmulas siguientes: $W = \frac{1}{M}\int p'dt$, $E = \frac{1}{M}\int dt\int p'dt = M\int\frac{WdW}{p'}$, $t = M\int\frac{dW}{p'}$; ó suponiendo p' constante, y la velocidad primitiva cero: $W = \frac{p't}{M}$, $t = \frac{MW}{p'}$, y $E = \frac{p't^2}{2M} = \frac{MW^2}{2p'}$.

VIII.

Manifestar que el centro de las masas de un sistema de cuerpos ligados entre sí por lineas inflexibles se mueve del mismo modo que si los cuerpos estuvieran libres; y que así las fórmulas que convienen al centro de las masas de un sistema de cuerpos libres convienen tambien al caso de estar los cuerpos ligados entre sí por lineas inflexîbles, y al movimiento del centro de gravedad de qualquier cuerpo, ó al movimiento del mismo cuerpo por considerarse la masa reunida en su centro de gravedad.

IX.

Hallar las expresiones $dW = \frac{(a' + b' + \&c.)\,dt}{A + B + \&c,} = \frac{A\,du + B\,dv + \&c.}{A + B + \&c.}$, deduciendo de ellas, que $W + \frac{Au + Bv + \&c.}{A + B + \&c.}$, y que el centro de las masas no se moverá con velocidad uniforme, ó que no será $dW = \frac{(a' + b' + \&c.)\,dt}{A + B + \&c.} = 0$, sino es la suma de las potencias actuantes $a' + b' + \&c. = 0$, y que si el centro de las masas de dos cuerpos A y B, que compongan un sistema, ó máquina, se hallare sin movimiento, ó fixo, estarán las velocidades de los cuerpos quando se muevan en razon inversa de sus pesos, ó masas, ó $u : v = \frac{1}{A} : \frac{1}{B}$.

Capitulo IV.

De la rotacion de un sistema.

I.

Manifestar que si un sistema de dos cuerpos A y B ligados entre sí por una linea inflexîble se mueve obligado de dos potencias a' y b' que animen á dichos cuerpos dirigiéndose paralelamente ácia la misma parte, é imprimiéndoles velocidades desiguales; siendo la del cuerpo A mayor que la de B, ademas del movimiento que tendrá el centro de las masas, girará el sistema con una velocidad angular, que le obligará á describir en cada instante una diferencial de ángulo giratorio $= \frac{Adt\int a'dtsen.S' - Bdt\int b'dtsen.S'}{A^2A + B^2B}$; denotando A y B las distancias de los cuerpos al centro de las masas, y S' el ángulo que forman las direcciones de las potencias con la linea que une los cuerpos: convirtiendo dicha expresion en esta, $dG = \frac{dt\int dt(aa' - bb')}{A^2A + B^2B}$, expresando G el ángulo giratorio, y a y b las distancias de los puntos donde actúan las potencias á la linea que pasa por el centro de las masas paralela á las direcciones de las potencias; y deduciendo por velocidad del cuerpo A la cantidad $u = \frac{\int dt(aa' - bb')}{AA}$.

II.

Deducir de la proposicion antecedente, que quando todas las potencias actúan positivamente para formar el ángulo giratorio será $dG = \frac{Adt\int a'dtsen\ S' + Bdt\int b'dtsen.S'}{A^2A + B^2B}$ $= \frac{dt\int dt(aa' + bb')}{A^2A + B^2B}$, y $u = \frac{\int dt(aa' + bb')}{AA}$, y que si es una sola la que actúa, y dos los cuerpos, será $dG = \frac{dt\int aa'dt}{A^2A + B^2B}$; haciendo ver, que si en un sistema de dos cuerpos el uno se supone infinito, quedará fixo, y el otro girará al rededor de este como sobre un punto fixo, concurriendo entonces el centro de las masas con dicho punto, y siendo $dG = \frac{dt\int a'dt \text{ sen.} S'}{AA} = \frac{dt\int aa'dt}{A^2A}$.

III.

Hallar por medio de la proposicion antecedente la fórmula $dG = \frac{dt\int aa'dt + dt\int bb'dt + dt\int cc'dt + \&c.}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&c.}$ de la velocidad angular de un sistema compuesto de qualquier número de cuerpos ligados entre sí por lineas inflexíbles, puestos en el mismo plano de rotacion, y animados por qualquier número de potencias que se dirijan paralelamente.

IV.

Haciendo la suma de los momentos de inercia $A^2A + B^2B + C^2C + \&c. = S$, y la de los momentos de las potencias $aa' + bb' + cc' + \&c. = pp'$, y denotando p' la suma de las potencias, p la distancia desde el centro de ellas á la direccion que pasa por el centro de las masas, y S' el ángulo que forme con dicha direccion la linea P tirada desde el centro de las masas al de las potencias; convertir la expresion de la proposicion antecedente en las siguientes: $dG = \frac{dt\int pp'dt}{S} = \frac{dt\int p'dtP \text{ sen.} S'}{S}$; deduciendo de ellas, que quando el centro de las masas concurra con el de las potencias, el sistema no girará, y que siendo diferente, el sistema girará del mismo modo estando su centro de masas libre, que estando fixo.

V.

Manifestar que las fórmulas antecedentes se extienden tambien al caso en que los cuerpos y potencias no estén todos en el mismo plano, con tal que se tome por plano de rotacion aquel que pasando por el centro de las masas y el de las potencias, sea paralelo á las direcciones de estas, y por exe de rotacion la perpendicular al plano de rotacion que pase por el centro de las masas; deduciendo para dicho caso el modo de tomar las distancias A, B, C, &c. a, b, c, &c. P y p, y el ángulo S'.

VI.

Manifestar, que si en el sistema de qualquier número de cuerpos puestos en el mismo ó diferentes planos se supone que uno es infinito, quedará este sin movimiento, concurrirá con él el centro de las masas de todo el sistema, y los demas cuerpos girarán al rededor del exe fixo que pase por dicho centro con una velocidad angular que les obligará á describir el ángulo giratorio G $= \frac{\int dt \int pp'dt}{S} = \frac{\int dt \int pp'dt}{G^2M+Z} = \frac{P\int dt \int p'dt sen. S'}{G^2M+Z}$; denotando Z la suma de los momentos de inercia por respeto á un exe movible paralelo al fixo que pase por el centro de las masas de los cuerpos que se muevan, G la distancia de exe á exe, S' el ángulo que forme la distancia P del centro de las potencias al exe fixo con el plano coincidente con el mismo exe fixo, paralelo á las direcciones de las potencias, p la distancia del centro de estas al mismo plano, M la suma de las masas de los cuerpos movibles, y p' la de sus potencias;

deduciendo que para los cuerpos graves es en dicho caso $G = \frac{\int dt \int pp'dt}{S} = \frac{\int dt \int pp'dt}{P^2 M + Z} = \frac{P \int dt \int p'dt sen. S'}{P^2 M + Z}$.

VII.

Manifestar, que el centro de las masas de los cuerpos graves, que descienden por la accion de su gravedad girando al rededor de un punto ó exe fixo no quedará en reposo, sino dexándole en la situacion en que haya bajado lo mas que le sea posible.

VIII.

Hallar el exe de rotacion ó punto sobre que debe girar el sistema; haciendo ver que éste no puede estar fixo á menos que no lo esté tambien el centro de las masas, y que en tal caso girará sobre éste el sistema.

IX.

Hallar las expresiones del radio de rotacion $\frac{S \int p'dt}{PM \int p'dt \, sen. S'}$ ó $\frac{S \int p'dt}{M \int pp'dt}$, denotando S la suma de los momentos de inercia, M la de las masas, P la distancia del centro de las masas al de las potencias, p la distancia del centro de las potencias á la linea de direccion que pase por el centro de las masas, S' el ángulo que forma esta direccion con la distancia P, y p' en los numeradores la suma de las potencias que ponen en movimiento al centro de las masas, y p' en los denominadores la suma de las que hacen girar al sistema.

X.

Manifestar por medio de la proposicion antecedente, que los cuerpos que caen libremente por la accion de su gravedad no pueden girar jamás, ni tampoco los que estuvieren animados por potencias, cuyo centro concurra con el de las masas, y que si la suma de las potencias que animan al centro de las masas es cero sin que lo sea la que obliga á girar el sistema, este girará sobre dicho centro.

Capitulo V.

Del movimiento de los cuerpos que insisten sobre superficies.

I.

Manifestar, que insistiendo una esfera A sobre otra B, é impeliéndola por actuar en su centro de gravedad una potencia a' con direccion obliqua, la potencia que animará las dos, segun la linea que junta sus centros, será $a'cos.S'$, y la que animará á la A, segun la tangente al contacto $a'sen.S'$, y la diferencial del espacio corrido por los centros de ambas esferas, segun la linea que los junta, será $\frac{dt\int dt a' cos.S'}{A+B}$, y la corrida por el centro de A, segun la tangente $\frac{dt\int dt a' sen.S'}{A}$, denotando S' el ángulo que forma la direccion de la potencia a' con la linea que junta los dos centros; pero que siendo B infinita, la primera expresion será cero, quedando la segunda sin alteracion.

II.

Manifestar, que si la esfera A insiste sobre qualquiera superficie inmobil plana ó curva, cuya longitud ó espacio corrido por ella sea e, y x las abscisas tomadas en una paralela á la direccion de la potencia a' colocada en el centro de la esfera, será la potencia que la obligará á descender en todos los puntos de la curva, en que se hallare, $a' sen. S' = \frac{a'dx}{de}$: llamando S' al ángulo que forma en qualquier tiempo el radio de la esfera tirado al contacto de la curva con la direccion de la potencia (*).

III.

Deducir por medio de la proposicion antecedente, que siendo V la velocidad primitiva, y u la que tuviere el cuerpo en qualquier tiempo t de su descenso, será $du = \frac{a'dxdt}{Ade}$, y $u = \left(\frac{2\int a'dx}{A} + V^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $de = dt\left(\frac{2\int a'dx}{A} + V^2\right)^{\frac{1}{2}}$, y $dt = de\left(\frac{2\int a'dx}{A} + V^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, ó siendo $V = 0$, $de = dt\left(\frac{2\int a\,dx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$, y $dt = de\left(\frac{2\int a'dx}{A}\right)^{-\frac{1}{2}}$; hallando para el caso en que sea la potencia a' la gravedad del mismo cuerpo, que $u = \sqrt{(4ax + V^2)}$, ó $u = 2\sqrt{ax}$, $de = 2dt\sqrt{ax}$, y $dt = \frac{de}{2\sqrt{ax}}$, siendo $V = 0$; haciendo ver que la velocidad que tuviere el cuerpo descendiendo por varias

(*) En los capítulos antecedentes se ha prescindido de la resistencia del ambiente, en este se prescinde además de la frotacion que debe vencer el cuerpo movido por una superficie, á que se atenderá en las máquinas simples, particularmente en el plano inclinado.

superficies no dependerá de la mayor ó menor curvatura de estas, ni de su longitud, sino de la altura vertical que hubiere descendido, teniendo el cuerpo la misma velocidad al llegar á qualquier punto de la misma orizontal que cortare á todas las superficies por donde se dexare caer desde la misma altura, y con igual velocidad primitiva.

IV.

Hallar por medio de las proposiciones antecedentes, que si el cuerpo desciende por un plano inclinado, cuya altura sea m, y cuya longitud n, será $du = \frac{ma'dt}{nA}$, $u - V = \frac{m\int a'dt}{nA}$, $de = dt\left(\frac{m\int a'dt}{nA} + V\right)$; y suponiendo que a' sea la gravedad del cuerpo, $u - V = \frac{2mat}{n}$, $e = \frac{m}{n}at^2 + Vt$, y $t = -\frac{nV}{2ma} + \sqrt{\left(\frac{n^2V_2}{4m^2a^2} + \frac{ne}{ma}\right)}$, ó siendo $V = 0$, $u = \frac{2mat}{n}$, $e = \frac{m}{n}at^2$, y $t = \sqrt{\frac{ne}{ma}}$, ó $t = \sqrt{\frac{e}{a}}$ si el plano se pusiere vertical; haciendo ver que los espacios corridos por un cuerpo grave, que descienda por un plano inclinado, están en razon compuesta de los quadrados de los tiempos, y seno de inclinacion del plano.

V.

Dar el método de hallar el tiempo que empleará un cuerpo grave descendiendo por qualquiera curva; manifestando que si cayere por un arco de cicloyde, cuyo círculo generador tenga por diámetro D, siendo la altura vertical del arco $D - b$, y tomando las abscisas x desde el vértice del mismo arco sobre su altura $D - b$, será $t = \frac{\sqrt{D}}{(D-b)\sqrt{a}} \int \frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{((D-b)x-x^2)}} = \frac{\sqrt{D}}{(D-b)\sqrt{a}} (\textit{arc. cuya sag.} x, \textit{y diám.} (D-b))$, y si el cuerpo cayere por todo el arco, $t = \frac{C\sqrt{D}}{4\sqrt{a}}$; siendo el espacio que correría en el mismo tiempo un grave descendiendo libremente $e = \frac{C^2 D}{16}$, denotando C la circunferencia del círculo, cuyo radio es la unidad; haciendo ver que cayendo los cuerpos desde varias alturas de un mismo arco de cicloyde, siempre emplearán el mismo tiempo en llegar al extremo de la semicicloyde.

CAPITULO VI.

De la oscilacion de los péndulos.

I.

Manifestar que siempre que un péndulo no se dexe en la vertical que pase por el punto de suspension, repetirá oscilaciones ácia uno y otro lado, y que la medida de la oscilacion entera de un péndulo simple de la longitud A y masa A es $\frac{x'}{A}\int dt \int dt \, sen. S'$, y la del péndulo compuesto $\frac{PMx' \int dt \int dt \, sen. S'}{P^2 M + Z}$ (*).

II.

Deducir de la proposicion antecedente, que la longitud del péndulo simple isócrono con el compuesto, ó

(*) Los valores de P, M, S, y Z se tomarán en esta proposicion y la siguiente, como en la VI de la pág. 15.

la distancia del centro de oscilacion al exe fixo es $= P + \frac{Z}{PM} = \frac{S}{PM} = \frac{(A^2 A + B^2 B + C^2 C + \&c.)\ sen. S'}{AA\ sen. a' + BB\ sen. b' + CC\ sen. c' + \&c.}$, denotando a', b', c', &c. los ángulos que forman con el plano vertical coincidente con el exe fijo las perpendiculares *A*, *B*, *C*, &c. tiradas de los cuerpos A, B, C, &c. al mismo exe; manifestando por las mismas expresiones, que el centro de gravedad de los cuerpos oscilantes dista menos del exe fixo, que el de oscilacion; y que si los cuerpos oscilantes están en un plano coincidente con el exe, aunque se dispongan en él como se quiera, con tal que disten lo mismo del exe, la distancia del centro de oscilacion al exe fixo ó de rotacion será entonces $\frac{A^2 A + B^2 B + C^2 C + \&c.}{AA + BB + CC + \&c.}$.

III.

Manifestar, que si un péndulo de la longitud *L* hace sus oscilaciones por arcos muy pequeños de un círculo, ó por qualesquiera arcos de una cicloyde, cuyo círculo generador tenga por diámetro la cantidad $\frac{1}{2} L = D$, el tiempo de la oscilacion entera para uno y otro caso será $t = \frac{C\sqrt{\frac{1}{2}L}}{4\sqrt{a}} = \frac{C\sqrt{D}}{4\sqrt{a}}$, denotando *C* la circunferencia de un círculo, cuyo radio sea la unidad; haciendo ver, que las longitudes de los péndulos son como las gravedades, ó como los quadrados de los tiempos en que cumplen los péndulos sus oscilaciones.

CAPITULO VII.

De la percusion, ó choque de los cuerpos duros y elásticos.

I.

Manifestar, que siendo la dureza del cuerpo chocante como infinita respecto de la del chocado, la fuerza de percusion estará en razon compuesta directa de la dureza del cuerpo chocado, y amplitud de su impresion, deduciendo que la relacion entre la fuerza de percusion, amplitudes de las impresiones, y durezas de los cuerpos chocante y chocado en qualquier choque se expresa por $p' = \frac{\mathrm{DH}DH}{\mathrm{DH}+DH}$ (*).

(*) Se supondrá en todo este capítulo, que los cuerpos que se chocan son regulares, é igualmente densos al rededor de sus exes, como dos esferas, dos cilindros, &c. y de la magnitud necesaria para que las impresiones no lleguen al centro de gravedad, y que moviéndose desde antes del choque en la misma direccion de sus exes, el chocante siga al chocado con mayor velocidad que la de este, de suerte, que siendo

A, B los cuerpos chocante y chocado, expresen

U, V, las velocidades correspondientes con que empiecen los cuerpos el choque,

a', b', las potencias constantes que animen á los cuerpos en la direccion de su movimiento colocadas en su centro de gravedad,

u, v, las velocidades á qualquier tiempo del choque,

a, b, los espacios corridos en el mismo tiempo t,

D, D, las durezas de los cuerpos,

H, H, las amplitudes de las impresiones, II.

Hallar la equacion $a - b = x + z$, que manifiesta la relacion entre las longitudes de las impresiones, y los espacios corridos por los cuerpos; deduciendo de ella, que al fin del choque de los cuerpos casi, ó perfectamente elásticos, el espacio corrido por el cuerpo chocante durante la percusion es siempre igual al corrido en el mismo tiempo por el cuerpo chocado.

III.

Hallar la equacion $dt = \frac{dx + dz}{u - v}$, que expresa la diferencial del tiempo en que se egecuta el choque; manifestando por ella, que los cuerpos desde que cumplen las máxîmas impresiones correrán con iguales velocidades.

IV.

Hallar la equacion $v = \frac{(a' + b')t + AU + BV - Au}{B}$, que manifiesta la relacion entre las velocidades de los cuerpos; deduciendo de ella, que la suma de los movimientos de los cuerpos á qualquier tiempo del choque es igual á la suma de los movimientos antes ó al principio del choque siendo la cantidad $(a' + b')t$ infinita-

z, x, las longitudes ó profundidades de las impresiones,

Z, X, las máxîmas profundidades,

$\int Hdz$, $\int Hdx$, las impresiones en qualquier tiempo,

I, I, las máxîmas impresiones,

p', la fuerza de percusion,

e, la altura de donde cayere libremente el cuerpo A por la accion de su gravedad, para obtener la velocidad U.

mente chica, y que las velocidades de los cuerpos al tiempo de suceder la máxîma impresion son iguales, ó $u = v = \frac{(a'+b')t+AU+BV}{A+B}$, y en el caso de ser $(a'+b')t = 0$, $u = v = \frac{AU+BV}{A+B}$.

V.

Hallar la equacion $\big(a'B-b'A-p'(A+B)\big)(dx+dz) = AB(u-v)(du-dv)$, que manifiesta la relacion entre las diferenciales de las velocidades, y las de las longitudes de las impresiones; deduciendo de ella, que en los cuerpos casi, ó perfectamente elásticos la velocidad relativa antes del choque es igual á la velocidad relativa despues del choque, y que al fin del choque de los mismos cuerpos es $u = \frac{(a'+b')t+U(A-B)+2BV}{A+B}$, y $v = \frac{(a'+b')t+V(B-A)+2AU}{A+B}$, ó siendo $(a'+b')t$ despreciable $u = \frac{U(A-B)+2BV}{A+B}$, y $v = \frac{V(B-A)+2AU}{A+B}$.

VI.

Deducir de la proposicion antecedente, que quando $(a'+b')t$ es despreciable respecto de las otras cantidades, la suma de los productos de cada masa por el quadrado de su velocidad es la misma al principio que al fin del choque; esto es, $Au^2 + Bv^2 = AU^2 + BV^2$.

VII.

Hallar la equacion $(a'B-b'A)(x+z)-(A+B)\int DHdx = \frac{1}{2}AB\big((u-v)^2-(U-V)^2\big)$, que manifiesta la relacion entre las velocidades y las impresiones á qualquier tiempo del choque.

VIII.

Hallar la fórmula $u = \frac{AU+BV+(a'+b')t}{A+B} \pm \frac{B}{A+B}\left((U-V)^2 + \frac{(a'B-b'A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}$, que manifiesta la velocidad con que se mueve el cuerpo chocante á qualquier tiempo del choque; deduciendo que $u = \pm\left(U^2 + \frac{a'(x+z)}{\frac{1}{2}A} - \frac{\int DHdx}{\frac{1}{2}A}\right)^{\frac{1}{2}}$ para quando el cuerpo chocado es infinito respecto del chocante; haciendo ver, que en los cuerpos perfectamente elásticos á iguales distancias del punto donde se termine la máxîma impresion, tendrá el cuerpo chocante la misma velocidad; esto es, la negativa igual á la positiva; pero que no siendo perfectamente elásticos, la negativa resultará menor que la positiva en todos los choques que repitan los cuerpos, hasta que siendo $p' = a'$ queden sin movimiento.

IX.

Hallar la fórmula $v = \frac{AU+BV+(a'+b')t}{A+B} \mp \frac{A}{A+B}\left((U-V)^2 + \frac{(a'B-b'A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}$, que representa la velocidad con que se mueve el cuerpo chocado á qualquier instante del choque.

X.

Hallar la expresion de $\int Hdx = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)+(a'B-b'A)(x+z)}{D(A+B)}$, que representa el valor de la impresion del cuerpo chocado en caso de ser su dureza constante, y deducir que la máxîma impresion, ó $I = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(a'B-b'A)(X+Z)}{D(A+B)}$, ó siendo el cuerpo chocado inmobil, $I = \frac{\frac{1}{2}AU^2 + a'(X+Z)}{D}$.

XI.

Deducir de la proposicion antecedente, que en el choque de un cuerpo contra otro inmobil por la accion de la gravedad en su descenso será $I = \frac{a'U^2}{4aD} + \frac{a'(X+Z)}{D} = \frac{a'(e+X+Z)}{D}$, ó siendo X y Z despreciables respecto de la altura e, que $I = \frac{a'e}{D} = \frac{a'U^2}{4aD} = \frac{2aeA}{D} = \frac{AU^2}{2D}$; y que así quando los cuerpos cayeren por razon de la gravedad, las impresiones que hicieren estarán en razon compuesta directa de los cuerpos y de las alturas de donde cayeren, ó de los cuerpos y quadrados de las velocidades primitivas con que chocaren; y en inversa de las durezas, ó densidades; resultando lo mismo si los dos cuerpos A y B fueren iguales, é hicieren su choque sin potencias que los animaren, por ser entonces $I = \frac{AU^2}{4D}$, suponiendo $V = o$ en la expresion $I = \frac{A(U-V)^2}{4D}$, que conviene á dicho caso.

XII.

Hallar el valor de la suma de las profundidades de las impresiones en caso de ser p' constante; esto es, $x + z = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2 - (u-v)^2)}{p'(A+B) - (a'B - b'A)}$; manifestando, que para el caso de la máxima impresion es $X+Z = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{p'(A+B) - (a'B - b'A)}$, ó siendo el cuerpo chocado inmobil $x + z = \frac{\frac{1}{2}A(U^2 - u^2)}{p' - a'}$, y $X+Z = \frac{\frac{1}{2}AU^2}{p' - a'}$.

XIII.

Hallar el valor de la dureza del cuerpo chocado quando sea sensiblemente constante; esto es, $D = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)+(a'B-b'A)(x+z)}{(A+B)\int Hdx}$; deduciendo para el caso de la máxima impresion $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(a'B-b'A)(X+Z)}{(A+B)I}$, y para quando el cuerpo chocado es inmobil, y el chocante es perfectamente duro respecto de este, $D = \frac{\frac{1}{2}AU^2+a'X}{I} = \frac{a'(e+X)}{I}$; manifestando que la dureza del cuerpo chocante es $\mathit{D} = \frac{DI}{\mathit{I}}$, y que se hallará por medio del valor de D, y el que se halle de *I* por experiencia.

XIV.

Manifestar, que supuestas las durezas constantes es la fuerza de percusion en qualquier tiempo del choque $p' = \frac{H\mathit{H}}{H\mathit{I}+\mathit{H}I}\left(\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(a'B-b'A(X+Z)}{A+B}\right)$, y que la máxima se hallará en el tiempo de concluirse la impresion total, ó quando H, *H* sean las máximas; deduciendo para quando la dureza del cuerpo chocante sea infinita, y el cuerpo chocado inmobil $p' = \frac{H}{I}(\frac{1}{2}AU^2 + a'X)$, ó si el cuerpo chocare cayendo de la altura e, $p' = \frac{Ha'}{I}(e+X)$, siendo entonces la fuerza de gravedad del cuerpo A á la de percusion como I á $H(e+X)$; pero que $p' = \frac{H}{2I}(\frac{1}{2}AU^2 + 2a'X)$ quando el cuerpo A chocare á otro inmobil suponiendo las durezas constantes, é iguales, y $p' = \frac{Ha'}{2I}(e+2X)$ quando el choque se hiciere por caer el cuerpo de la altura e, resultando en este caso, que $a' : p' = 1 : \frac{H}{2I}(e+2X)$.

XV.

Hallar la expresion del tiempo en que se egecuta el choque supuestas las durezas constantes; esto es, $t =$

$$\int \frac{\left(\frac{AB}{2D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}(dx + dz)}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)} + \frac{(a'B - b'A)(x+z)}{D(A+B)} - \int Hdx\right)^{\frac{1}{2}}}$$; deduciendo para el caso en que sea $\int Hdx = Qx^2$, $z = x$, y $dz = dx$, denotando Q una constante, que el tiempo en que se forma, ó aumenta la impresion es $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(arc.sen.\frac{a'B - b'A}{RDQ(A+B)} + arc.sen.\left(\frac{x}{R} - \frac{a'B - b'A}{RDQ(A+B)}\right)\right)$, y para el tiempo en que la impresion disminuye, $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C' + arc.sen.\frac{a'B - b'A}{RDQ(A+B)} - arc.sen.\left(\frac{x}{R} - \frac{a'B - b'A}{RDQ(A+B)}\right)\right)$; siendo $R^2 = \frac{AB(U-V)^2}{2DQ(A+B)} + \frac{(a'B - b'A)^2}{Q^2D^2(A+B)^2}$, y C' la semicircunferencia de un círculo, cuyo radio sea la unidad.

XVI.

Deducir de las fórmulas antecedentes del tiempo la siguiente: $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C' + arc.sen.\frac{a'B - b'A}{RDQ(A+B)}\right)$, que representa el tiempo que emplean los cuerpos en formar la máxima impresion; haciendo ver que por esta fórmula se expresa tambien el tiempo que emplean los cuerpos de muy poca ó ninguna elasticidad sensible en hacer su choque, y que $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C' + 2\,arc.sen.\frac{a'B - b'A}{RDQ(A+B)}\right)$ representa aquel en que los cuerpos perfectamente elásticos cumplen todo su choque; convirtiendo estas dos en $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}C'$, y $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.C'$ para quando no hubiese potencias que animasen los cuerpos; y si al contrario fueren las potencias las que actuaren, y $U = o$, $V = o$, como sucede en los cuerpos graves quando está uno sobre otro, en esta otra $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.C'$

XVII.

Hallar la fórmula $t = \frac{AB((u-v)-(U-V))}{a'B-b'A-p'(A+B)}$, que representa el tiempo en que se egecuta el choque en caso de ser p' constante; deduciendo para el caso de la máxima impresion $t = \frac{AB(U-V)}{p'(A+B)-(a'B-b'A)}$, y para quando el cuerpo chocado fuere inmobil $t = \frac{A(u-U)}{a'-p'}$, siendo su máximo $t = \frac{AU}{p'-a'}$.

XVIII.

Manifestar que la distancia desde el exe de rotacion al plano paralelo al directorio que pase por el centro de percusion de un sistema de cuerpos, ó de un cuerpo en que actuen potencias en direcciones paralelas es $F = \frac{AA^2 + BB^2 + CC^2 + \&c.}{\frac{AA}{sen.c'} + \frac{BB}{sen.d'} + \frac{CC}{sen.e'} + \&c.}$, denotando A, B, C los cuerpos, ó partículas, A, B, C sus distancias al exe, y c', d', e' los ángulos que estas distancias formen con las direcciones de las potencias; deduciendo, que si todos los cuerpos están en un plano coincidente con el exe, la distancia desde el exe al centro de percusion, será $\frac{F}{sen.c'} = \frac{AA^2 + BB^2 + CC^2 + \&c.}{AA + BB + CC + \&c.} = \frac{S}{PM}$, expresando P la distancia desde el exe al centro de las masas

M; haciendo ver que en este caso el centro de percusion y de oscilacion distan lo mismo del exe, y que en los cuerpos que caen por la accion de su gravedad, el centro de percusion y de oscilacion concurren con el de gravedad.

Capitulo VIII.

De las Máquinas simples.

§. I.

De las Palancas.

I.

Si la potencia b' ha de vencer por medio de una palanca de qualquier género á la a', y S' y s' representan los ángulos que forman las direcciones de las potencias a' y b' con la palanca, ó distancias A y B de los puntos donde actúan al hipomoclion; denotando a y b las distancias del hipomoclion á dichas direcciones, S la suma de los momentos de inercia de las partículas, ó masa de la palanca que se pusiere en movimiento, p' la suma de las potencias quando fueren muchas las que actuaren, y p la distancia del hipomoclion á su direccion, será el ángulo giratorio, que producirán las potencias en qualquiera de las palancas en un instante de tiempo, $dG = \frac{dt\int dt(Bb'sen.s' - Aa'sen.S')}{S} = \frac{dt\int dt(bb' - aa')}{S} = \frac{dt\int pp'dt}{S}$.

II.

Deducir de la proposicion antecedente, que para lograr las ventajas posibles en la accion de una palanca aplicando la misma potencia b', ó para disminuir esta, es menester que se aumente la distancia b lo mas que se pueda hasta lograr su máxîmo, que será quando $b = B$ (esto es, quando la direccion de la potencia actuante sea perpendicular al brazo de la palanca), y que se disminuya todo lo posible la distancia a, y materia de que se compusiere la palanca.

III.

Deducir de las proposiciones antecedentes, que si desde el principio de la accion fuere $a' : b' = B sen. s' : A sen. S' = b : a$, ó $pp' = aa' + bb' + cc' + \&c. = 0$, la palanca no girará, y quedará en equilibrio.

IV.

Suponiendo que una palanca esté fixa en uno de sus extremos, y la fuerza de union que tienen sus partículas entre sí, ó la intensidad de su fuerza representada por F, el momento de la potencia que actúe en ella por pp', y los momentos de las dos partes de la seccion ó rotura de la palanca puestas á un lado y otro del exe de rotacion, que se debe hallar en la misma seccion, por HA^2 y ha^2, denotando A^2 y a^2 dichas areas, y H, h las distancias del centro de gravedad de cada una de ellas al exe; manifestar que será $F = \frac{pp'}{HA^2 + ha^2}$, y que así, si $F > \frac{pp'}{HA^2 + ha^2}$ la palanca resistirá, y si $F < \frac{pp'}{HA^2 + ha^2}$ se romperá; haciendo ver, que quanto mas diste del centro de la seccion el exe de rotacion, mas podrá resistir la palanca.

V.

Deducir de la proposicion antecedente, que para que una palanca sea igualmente fuerte en todos sus puntos, quando una potencia qualquiera actúe contra ella, debe ser un conoyde parabólico, cuyos lados sean parábolas del segundo grado definidas por la equacion $y^3 = Q^2 x$; denotando x la distancia de la potencia al exe en qualquiera seccion, y una dimension linear de la misma seccion, y Q una constante; manifestando, que para que sea tambien igualmente fuerte en caso de actuar en ella varias potencias iguales é igualmente distribuidas, debe ser un conoyde correspondiente á la segunda parábola cúbica, ó debe tener por lado la parábola, cuya equacion es $y^3 = Qx^2$.

§. 2.

Del Plano inclinado.

VI.

Insistiendo el paralelepípedo A sobre un plano que forme con el orizonte el ángulo de inclinacion S', actuando en él la gravedad ó potencia a', y suponiendo que por razon de la potencia $a' cos. S'$ haga en el plano una impresion, de la que resulte un obstáculo y escabrosidades, que le impidan descender en virtud de la potencia $a' sen. S'$, hallar la expresion de la fuerza $f = \frac{i(h\mathrm{h})}{\mathrm{I}(hi + \mathrm{h}i)} \left(\frac{1}{2} \mathrm{A} \mathrm{U}^2 cos.^2 S' + a' cos. S' (\mathrm{X} + \mathrm{Z}) \right)$, que manifiesta la resistencia que oponen dicho obstáculo y escabrosidades (*).

(*) En esta y demás proposiciones que se siguen hasta el fin se supondrá que representan

A, B, los cuerpos chocante y chocado, ó el cuerpo y el plano,

H, H, las máxîmas amplitudes de las impresiones,

I, I, las máxîmas impresiones,

D, D, las durezas de los cuerpos,

h, *h*, las amplitudes del obstáculo y escabrosidades,

i, *i*, las impresiones hechas en el choque para vencer la friccion,

z, *x*, las profundidades de estas impresiones ó longitudes de los espacios corridos,

Z, X, las máxîmas profundidades resultantes de la potencia perpendicular,

f, la resistencia que oponen el obstáculo y escabrosidades,

F, la fuerza de percusion que debe vencer el obstáculo y escabrosidades,

a', la gravedad del cuerpo quando no haya mas de una potencia que actúe en él,

S', el ángulo que forma el plano con el orizonte,

a', b', las potencias perpendicular y paralela al plano quando sean dos las que actúen,

U, V, las velocidades primitivas.

VII.

Hallar la expresion de $F =$ .... $\frac{kh}{hi+hi}\left(\frac{1}{2}AU^2 sen.^2 S' + a' sen.S'(x+z)\right)$, que manifiesta la fuerza que tiene el paralelepípedo para descender por el plano, obligado de la potencia $a' sen.S'$.

VIII.

Deducir de las equaciones antecedentes, que si $F < f$ el paralelepípedo no podrá tomar carrera; que si $F > f$ tomará carrera, y continuará con ella sin límite, siendo la fuerza que se emplee para vencer la friccion igual ó mayor que la fuerza f, y que estará en estado de tomarla quando $F = f$; manifestando que en este caso será $a' cos.S' : a' sen.S' = H : h$, ó $a' sen.S' = \frac{ha' cos.S'}{H}$, dando el modo de hallar el valor de S' y de h, para disponer en la práctica los planos, de modo que la potencia $a' sen.S'$ venza la friccion.

IX.

Si en lugar de actuar la gravedad en el paralelepípedo que insista sobre un plano inclinado actúan dos potencias, una a' perpendicular al plano, y otra b' paralela á él, manifestar que será en este caso $f = \frac{i(hh)}{I(hi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2 + a'(X+Z)\right)$, y $F = \frac{hh}{hi+hi}\left(\frac{1}{2}AV^2 + b'(x+z)\right)$, y que el paralelepípedo estará á punto de tomar carrera quando $\frac{\frac{1}{2}AU^2 + a'(X+Z)}{H(X+Z)} = \frac{\frac{1}{2}AV^2 + b'(x+z)}{h(x+z)}$; haciendo ver, que si el plano estuviere orizontal, siendo a' la gravedad del cuerpo A se necesitará para vencer la friccion que sea $\frac{h}{H} < \frac{V^2}{4a(x+\zeta)} + \frac{b'}{a'}$, y en caso de ser $b' = o$, que sea $\frac{h}{H} < \frac{V^2}{4a(x+\zeta)}$.

X.

Hallar la equacion $u = \left(U^2 + \frac{2b'x}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(U^2 + \frac{2b'x}{A} - \frac{2fx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$, que manifiesta la relacion entre la velocidad u, y espacio x corrido por el cuerpo A despues de vencida la friccion; siendo para el caso en que actuare una sola potencia a', $u = \left(U^2 + \frac{2a'x\,sen\,S'}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(U^2 + \frac{2a'x\,sen.S'}{A} - \frac{2fx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; haciendo ver, que para que llegue á pararse el paralelepípedo debe ser $U^2 = \frac{2x}{A}(Dh - b') = \frac{2x}{A}(f - b')$, ó $x = \frac{AU^2}{2(Dh - b')} = \frac{AU^2}{2(f - b')}$.

XI.

Hallar la relacion del espacio corrido por el cuerpo A con el tiempo empleado; esto es, $t = \frac{(A^2U^2 + 2Ax(b' - Dh))^{\frac{1}{2}} - AU}{b' - Dh}$, deduciendo que $x = Ut + \frac{t^2(b' - Dh)}{2A}$.

XII.

Hallar la relacion entre el tiempo que emplea el cuerpo A en su carrera, y su velocidad; esto es, $t = \frac{A(u - U)}{b' - f}$; deduciendo, que $u = \frac{t(b' - f)}{A} + U$, y que en el caso de que haya máxîma impresion será $t = \frac{AU}{f - b'}$.

XIII.

Manifestar que la potencia necesaria para vencer la friccion, y hacer subir un paralelepípedo por un plano inclinado, actuando segun el plano, es $b' = \frac{a'(H\,sen.S' + h\,cos.S')}{H}$, supuesta a' la gravedad del paralelepípedo; haciendo ver, que siendo $sen.S' + \frac{h}{H} cos.S' < 1$, el plano será ventajoso; que si estuviere el plano orizontal, ó fuere $sen.S' = 0$, quedará $b' = \frac{a'h}{H}$; que si fuere $sen.S' = 1$, ó se hubiere de levantar el peso verticalmente sin ayuda del plano, quedará $b' = a'$, ó la fuerza necesaria para subir el paralelepípedo igual á su peso; que si el plano fuere tan duro que el paralelepípedo no hiciere en él impresion sensible, no se empleará la máxima fuerza quando el plano estuviere vertical, sino quando fuere $sen.S' = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, ó que el plano esté casi vertical; ni tampoco la mínima quando estuviere orizontal, sino quando el cuerpo comenzare á descender, ó que fuere $-sen.S' = n\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$: denotando en estos casos n un número qualquiera dependiente de la magnitud de las escabrosidades.

XIV.

Hallar la relacion entre la potencia c' y la velocidad u con que quiera subirse el paralelepípedo por el plano; esto es, $u = \left(U^2 + \frac{2x(c' - a'sen.S')}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; deduciendo $c' = a'sen.S' + Dh + \frac{A(u^2 - U^2)}{2x}$, y $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(c' - a'sen.S' - Dh)}$, expresando U la velocidad que adquirió el paralelepípedo al punto de vencer la fuerza f ó Dh del obstáculo y escabrosidades.

XV.

Hallar la expresion del espacio subido por el paralelepípedo con relacion al tiempo; esto es, $x = Ut$

$+\frac{t^2(c'-a'\,sen.S'-f)}{2A}$; deduciendo que $c'=\frac{2A(x-Ut)}{t^2}+a'\,sen.S'+f$.

XVI.

Suponiendo que el paralelepípedo insista sobre un punto ó linea del plano inclinado, actuando en él á mas de la gravedad a' una potencia $\mp c'$ paralela al plano para hacerle subir ó baxar, hallar la expresion de la rotacion que deberá tomar; esto es, $dG=$................ $\frac{dt\int A(a'sen.S'\pm c')dt\pm dt\int Bdta'cos.S'}{S}=\frac{dt\int A(1\pm n)dta'sen.S'\pm dt\int Bdta'cos.S'}{S}=\frac{dt\int a'dtcos.S'(C\pm B\pm nC)}{S}$; siendo A la perpendicular desde el centro de gravedad del cuerpo al plano, B la distancia desde el punto de apoyo á la perpendicular, C la distancia que hay entre los puntos en que la vertical y perpendicular cortan al plano, y n un número tal que dé $c'=na'sen.S'$, y sirviendo el signo $+$ en los segundos términos para quando la perpendicular cayga mas abaxo del apoyo, y $-$ para quando cayere mas arriba; deduciendo, que quando $c'=0$, será $dG=\frac{dt\int a'dtcos.S'(C\pm B)}{S}$, y que así siempre que $C\pm B$ sea de algun valor, ó que la vertical que pase por el centro de gravedad cayga fuera del apoyo, el cuerpo girará.

XVII.

Supuestos los mismos valores que en la proposicion antecedente hallar para el caso en que el cuerpo hubiere vencido la friccion, y estuviere yá en movimiento la diferencial del ángulo giratorio que podrá describir ; esto es, $dG = \frac{dt\int a' dt \cos. S'(C \pm B) - dt\int Ac' dt}{S}$; deduciendo, que si $C - B = 0$, ó que la vertical pasa por el centro de gravedad , será $dG = \frac{-dt\int Ac' dt}{S}$, ó el cuerpo girará á la parte de arriba ; sucediendo lo mismo siempre que $Ac' > a' \cos. S'(C \pm B)$, aunque la vertical cayga mas abaxo del apoyo.

§. 3.

De la Cuña.

XVIII.

Hallar la potencia necesaria para poner en movimiento la cuña , vencer su friccion , y rajar los cuerpos con ella, determinando quando volverá atrás , dexando de obrar la potencia que actúa en ella , y manifestando, que el efecto de la hacha es proporcional al producto de la masa de ella ó de su peso por el quadrado de la velocidad con que chocare al madero.

§. 4.

Del Tornillo.

XIX.

Hallar la equacion $p' = \frac{ra'}{RH}(H sen. S' + h \cos. S')$, que manifiesta la potencia necesaria para vencer la friccion y poner en movimiento la máquina ; denotando p' la potencia actuante , y R la distancia de su direccion al exe,

a' el peso que se hubiere de levantar, r el radio del tornillo, y S' el ángulo que forma el plano de las roscas con qualquiera orizontal ó perpendicular al exe; manifestando quando dexará el tornillo de actuar desde el principio de la accion, y que si $sen.S' > \frac{h}{H} cos.S'$ volverá atrás luego que cese de obrar la potencia p'.

XX.

Llamando z al espacio subido segun la direccion del tornillo, hallar la equacion $z = \frac{t^2 sen.S'}{2A}\left(\frac{Rp'}{r} - a' sen.S' - f\right)$, que manifiesta la relacion entre el tiempo, la potencia que anima el tornillo, y el espacio que correrá éste segun la direccion de su exe.

§. 5.

Del Torno ó Exe en peritroquio.

XXI.

Hallar la equacion $b' = \frac{a'(H^2RR \pm h^2r^2 cos.S')}{H^2R^2 - h^2r^2} + a'\sqrt{\left(\frac{(H^2RR \pm h^2r^2 cos.S')^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - \frac{H^2R^2 - h^2r^2}{H^2R^2 - h^2r^2}\right)}$, que manifiesta la potencia necesaria para vencer la friccion y poner al exe en peritroquio en movimiento; denotando R la longitud de la palanca á que se aplica la potencia b', R la longitud de la otra palanca en que actúa la potencia resistente a', ó peso que se haya de levantar, S' el ángulo que forman las direcciones de las dos en el punto donde se cortan, y r el radio del exe; sirviendo los signos superiores para quando S' es agudo, y los inferiores para quando es obtuso.

XXII.

Hallar para el exe en peritroquio la máxîma ó mínima potencia $b' = \frac{a'(HR + hr)}{HR \mp hr}$; haciendo ver, que la máxîma se observará quando las palancas estén ácia partes opuestas y en el mismo plano; y la mínima quando estén ácia una misma parte y en el mismo plano; suponiendo en uno y otro caso las direcciones de las potencias perpendiculares á ellas, y que si $\mathrm{R} = R$ en el caso de la mínima, no producirá la máquina ventaja alguna, y que en el de la máxîma producirá desventaja; siendo desventajosa en ambos casos si $\mathrm{R} < R$, y ventajosa ó disminuyéndose su desventaja al paso que sea menor r.

§. 6.

De las Garruchas fixas y movibles.

XXIII.

Hallar la equacion $b' = \frac{a'(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos.S')}{H^2R^2 - h^2r^2} + a'\sqrt{\left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos.S')^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)}$, que expresa la potencia necesaria para vencer la friccion, y poner la garrucha fixa en movimiento; sirviendo los signos superiores en caso de que las direcciones formen ángulo agudo, y los inferiores en caso de formarle obtuso; deduciendo que será la máxîma $b' = \frac{a'(HR + hr)}{HR - hr}$ quando $sen.S' = 0$, ó que las direcciones sean paralelas; haciendo ver, que la mínima no tiene lugar en la garrucha fixa, y que la máxîma será menor disminuyendo r.

XXIV.

Llamando c' á la potencia que actúa en el punto donde esté asegurada la garrucha, hallar la relacion entre esta potencia y las actuantes en la garrucha, ó las equaciones siguientes: $c' = \sqrt{(a'a' + b'b' \pm 2a'b' cos.S')}$, $b = \mp a' cos.S' \pm \sqrt{(c'c' - a'a' sen.^2 S')}$, y $a' = \mp b' cos.S' \pm \sqrt{(c'c' - b'b' sen.^2 S')}$.

XXV.

Hallar la equacion $\mp b' cos.S' \pm \sqrt{(c'c' - b'b' sen.^2 S')}$

$$= \frac{b'}{\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2 cos.S'}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 cos.S')^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}},$$

que manifiesta la relacion entre las potencias b' y c' en la garrucha movible; deduciendo para el caso de la mayor b', ó de ser las direcciones de las potencias paralelas, $c' - b' = \frac{b'(HR - hr)}{HR + hr}$, $c' = \frac{2HRb'}{HR + hr}$, y $b' = \frac{c'(HR + hr)}{2HR}$.

§. 7.

De las Poleas ó Aparejos.

XXVI.

Hallar la equacion $c' = \frac{b'(HR - hr)}{HR + hr} + \frac{b'(HR - hr)^2}{(HR + hr)^2} +$

$\frac{b'(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3}$ + &c. que representa la relacion que hay en las poleas entre la potencia actuante b', y el peso que se haya de levantar c', constando la serie de tantos términos, como lineas ó cuerdas sostuvieren la polea movible.

XXVII.

Suponiendo $Q = \frac{2hr}{HR+hr}$, y n igual al número de las lineas que sostuvieren la polea movible, deducir que c' $= b'((1-Q)^n + (1-Q)^{n-1} + (1-Q)^{n-2} + (1-Q)^{n-3} + \&c.)$

$$= \frac{b'(1-Q)(1-(1-Q)^n)}{Q}$$, y que por consiguiente $b' =$

$$\frac{c'}{((1-Q)^n + (1-Q)^{n-1} + (1-Q)^{n-2} + (1-Q)^{n-3} + \&c.)}$$

$$= \frac{c'Q}{(1-Q)(1-(1-Q)^n)}$$; manifestando quanto conduce en las poleas, que el radio del exe y la friccion sean lo menor posible, y los radios de las garruchas lo mayor posible.

XXVIII.

Hallar la potencia que actúa en el punto donde está asegurada la polea fixa, ó $c' + b' = \frac{b'(1-(1-Q)^{n+1})}{Q}$.

F I N.