PARTE SEGUNDA

ARITMÉTICA UNIVERSAL

(Traducida de la sexta edición alemana: 1879.)

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR EL

DOCTOR RICARDO BALTZER

PROFESOR EN LA UNIVERSIDAD DE GIESSEN, MIEMBRO
EN EJERCICIO DE LA
SOCIEDAD DE BUENAS LETRAS DE LEIPZIG

Traducidos directamente del aleman, con autorización del autor

POR

E. JIMENEZ Y M. MERELO

DOCTORES EN CIENCIAS

PARTE SEGUNDA.—ARITMÉTICA UNIVERSAL

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE RICARDO FÉ
Calle del Olmo, núm. 4.—Teléfono 1.114

1897

DOS PALABRAS DE INTRODUCCIÓN

De nuevo me invitan mis buenos amigos, los señores Jiménez y Merelo, á escribir el prólogo de esta, su segunda traducción de las obras del distinguido matemático Ricardo Baltzer, como me invitaron con igual objeto hace tiempo, para la que por entonces hicieron de la *Aritmética vulgar,* del mismo autor; y ahora, como en aquella ocasión, cumplo un deber ineludible de amistad y de cortesía, escribiendo unos cuantos párrafos, que ningún mérito pueden añadir al del libro del geómetra alemán, ni á la concienzuda é inteligente traducción que de la *Aritmética universal* ofrecen al público ambos matemáticos españoles.

Por otra parte ¡qué mayor mérito que el de ocuparse de ciencias exactas en España, donde tal ocupación rara vez da honra, y nunca da provecho! ¡Qué mayor elogio pudiera yo hacer que el que en sí lleva la tenacidad laudable, aunque inverosímil, de mis amigos, al continuar la emprendida tarea y al publicar una segunda parte, aquí donde, si alguien por caso raro se atreve con la primera, es seguro que jamás de ella pasa ni á segundas partes llega! ¡Qué mayor gloria que vencer la apatía ó el desdén del público, obligando á ocuparse á unos cuantos, aunque sean pocos, de estas áridas materias que sólo tratan de la cantidad, del orden y de cosas de este linaje!

Excuso, pues, encarecimientos que pudieran creerse inspirados por la amistad; excuso asimismo un análisis detallado del libro, que fuera inútil para el que se proponga leerlo, y que ningún interés podría ofrecer para el que no haya de pasar de la portada; y voy á cumplir brevemente mi compromiso.

El libro del Sr. Baltzer no es un tratado de *Aritmética* como generalmente se entiende: de la Aritmética de este autor ya publicaron anteriormente una excelente traducción los señores Jiménez y Merelo, como el lector recordará.

Tampoco es un tratado de *Algebra*, en el sentido propio de esta palabra, sobre el cual algo diremos antes de poner punto á estos mal pergeñados renglones.

Es, como su título lo indica, un tratado de *Aritmética universal*, es decir, una Aritmética á la cual se aplica el algoritmo ordinario del Algebra, y que comprende el estudio de las principales propiedades de los números y de sus combinaciones y formas; pero son *números* representados por *letras* y *propiedades numéricas* representadas por *fórmulas algebráicas*.

Así, en el *libro primero*, estudia el autor las cuatro operaciones fundamentales, suponiendo siempre al principio, ó consignándolo explícitamente, que se trata de números enteros, hasta la división, donde ya pueden presentarse números fraccionarios; y á los unos y á los otros se refiere hasta llegar á la raíz cuadrada que le ofrece ocasión para tratar de los números complejos.

En la *Aritmética universal*, según el concepto que de ella forma Baltzer, las letras representan números enteros ó fraccionarios, conmensurables ó inconmensurables, reales ó imaginarios (complejos); pero números, al fin, en su riguroso sentido. Y por esto excluye de ella las teorías en que los signos $+$, $-$, $\times$, $:$, etcétera, representan no solamente las operaciones ordinarias y elementales, sino otras distintas y de orden superior, construcciones geométricas y relaciones nuevas y complejas. Ejemplo de ello, la teoría moderna de las imaginarias, y la admirable creación de Hamilton, es decir, sus célebres *cuaternios*.

Estudia después el autor las operaciones fundamentales de los polinomios, y termina el libro con una interesante teoría de los números primos, y con algunas nociones sobre congruencias, restos de productos y potencias, y restos y norestos cuadráticos. Esta última parte es notable; porque, si bien pasa ya por la naturaleza de las cuestiones á que se refiere la línea de los elementos para penetrar en más altas regiones, la exposición que de dichas teorías se hace, es, sin embargo, elemental y sencilla.

El *libro segundo* se ocupa en general, de las potencias, de las raíces, de los logaritmos y de las progresiones geométricas; y debemos llamar la atención de nuestros lectores sobre el cálculo del logaritmo de un binomio mediante las tablas de Gauss: tablas que tanto sirven para facilitar los cálculos y de las que, sin embargo, no se ocupan la mayor parte de los autores.

El *libro tercero* trata del binomio, de la combinatoria, ó análisis combinatorio, así como de sus aplicaciones; y en él se incluyen una teoría elemental de las determinantes y algunas nociones de cálculo de probabilidades.

Por último, en el *libro cuarto* se ocupa el autor de las fracciones continuas y de las series: todo en los límites de la Aritmética y sin elevarse, por consiguiente, á otras teorías que fueran inabordables á no pasar antes por el Algebra: por la teoría de las funciones y por la gran categoría matemática de la *continuidad*, fundamento de todas las grandes leyes de la ciencia moderna.

En la obra domina, al menos así creemos adivinarlo, un pensamiento fecundo, sobre el cual, para dar por terminadas estas breves líneas, hemos de llamar la atención de nuestros lectores.

Dícese comunmente que la ciencia es un encadenamiento de verdades; una especie de andamiaje mediante el cual se va elevando el edificio científico; una escala en la que para llegar á los últimos escalones hay que pasar forzosamente por los primeros, y que de este modo los teoremas se ordenan en varias series lineales que entre sí se cruzan y enlazan. Esto es cierto, esta es la ciencia en su origen; pero éste no es el bello ideal de la ciencia. Ciencia en que para llegar á un teorema, necesito pasar antes forzosamente por una cadena de 200 teoremas; es ciencia que dista mucho de su más alto grado de perfección.

Demostrada quedará toda verdad matemática, á la cual se llegue partiendo de axiomas, combinando verdades ya probadas, y subiendo de una en otra; pero si la serie es muy larga, si necesito alejarme mucho de lo que es evidente por sí, es decir, del axioma, signo cierto será esta laboriosa demostración de que no nos hemos elevado todavía á los grandes principios. Por el contrario, á medida que para llegar á un teorema la serie de los anteriores se vaya acortando, y los eslabones vayan disminuyendo en número, la ciencia será más perfecta y las verdades más claras y patentes, como que estarán más cerca del origen, que es el axioma, y el artificio de la demostración, más natural y sencillo, y los principios más fecundos y más comprensivos, y la unidad de la ciencia más alta y rica en su contenido.

En suma: la perfección suprema sería aquella en que la forma del artificio científico fuese la que sigue: los axiomas en el centro, los teoremas en la circunferencia, y todo dispuesto de tal suerte que para llegar á *un teorema* bastase combinar lógicamente los axiomas centrales sin pasar por ninguno de los demás teoremas: un centro de axiomas, radios de demostración, circunferencia de verdades. Esta es la construcción más perfecta del saber humano, y cuanto más se acercan á ella las ciencias más perfectas son.

Así nos agrada que en tan corto número de páginas como la *Aritmética universal* contiene, se traten teorías que pasan por elevadas y trascendentales, deduciéndolas rápida é inmediatamente de los primeros principios. En este caso se encuentra la teoría de los números primos, la de las congruencias, la de las determinantes y otras varias.

Para que no se me acuse de parcial y se crea que por el reclamo de la amistad omito censuras, allá va una que se refiere á un concepto filosófico, que para descargo de mi conciencia voy á rectificar. En la página 4.ª, cap. 4.º, dice Baltzer y han debido decir los traductores para respetar el pensamiento del autor: «El axioma es una afirmación que se admite necesariamente sin explicación ni prueba, como *resultado de la experiencia.*» Pues bien; yo niego y he negado siempre, y aquí mi escrúpulo y mi descargo, que los axiomas matemáticos procedan de la experiencia, ni siquiera como supone *Spencer*, de la experiencia acumulada y trasmitida. La experiencia será la *causa determinante* de su aparición, como la chispa eléctrica lo es de que el polvorín estalle; pero el polvorín no es la vibración eléctrica, ni su inmensa fuerza potencial es la mezquina potencia de la corriente, ni la fuerza lógica, necesaria y universal, superior al tiempo y al espacio, del axioma, es lo contingente y circunstancial de la experiencia que prueba para un caso, que no prueba para todos.

Pero asunto es este que me llevaría muy lejos.

Dejando, pues, á salvo este insignificante escrúpulo, en prueba de censor severísimo, termino consignando plácemes para el autor del libro y para sus inteligentes traductores.

José Echegaray

INDICE

LIBRO PRIMERO

Las cuatro especies del cálculo literal.

LIBRO SEGUNDO

La Potencia, la Raíz, el Logaritmo y la Progresión geométrica.

LIBRO TERCERO

El Binomio, la Combinatoria y sus aplicaciones.

LIBRO CUARTO

Las Fracciones continuas y las Series exponencial binómica y logarítmica.

PRÓLOGO DEL AUTOR

Esta *segunda parte* de los ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS consta de cuatro *libros*. El *primero* contiene las *cuatro especies* (operaciones fundamentales) con las cantidades literales; en el *segundo* se estudia la raíz cuadrada, con los números irracionales y complejos; las potencias, las raices, los logaritmos y las progresiones geométricas; el *tercero* comprende el teorema vulgar del binomio, la combinatoria y sus aplicaciones importantes, y el *cuarto*, las fracciones continuas, la serie exponencial, la serie binómica y la serie logarítmica.

Todas estas materias se hallan, en general, agrupadas conforme á un criterio científico; mas expuestas, sin embargo, con tal independencia, que los profesores que adopten esta obra para sus alumnos, puedan ordenarlas con entera libertad, según sean las condiciones de la enseñanza. Por la primera vez deben explicarse solamente los primeros párrafos de cada uno de los capítulos; prescindiendo de sus ulteriores desarrollos, hasta que luego se ofrezcan ocasiones oportunas para hacerlo. No convendrá comenzar el estudio del *Álgebra* sino después de haber concluído el de la *Aritmética universal;* si bien pueden intercalarse los capítulos de la una entre los de la otra. A seguida de las cuatro operaciones fundamentales, por ejemplo, podría explicarse la introducción al *Álgebra* y las ecuaciones de primer grado; detrás, la raíz cuadrada con las ecuaciones cuadráticas y los sistemas de ecuaciones; seguidamente, las potencias, las raices, los logaritmos y las progresiones geométricas, con las ecuaciones trascendentes; luego, la combinatoria; etc., etc. El método de un libro de enseñanza debe patentizar aun exteriormente el enlace científico de los asuntos separados en las lecciones; mas evitando cuanto sea posible que el procedimiento analítico de la exposición oral quede limitado por el plan sintético del libro.

Los teoremas, las denominaciones y las notaciones ó símbolos van acompañados de su historia en breves palabras.

PARTE SEGUNDA

ARITMÉTICA UNIVERSAL

LIBRO PRIMERO

LAS CUATRO ESPECIES DE CÁLCULO LITERAL

I.—Nociones fundamentales.

1. Dos cosas pueden compararse respecto de su *calidad* y de su *tamaño*. En vista de su calidad se dicen: *homogéneas*, si entera ó parcialmente puede ser una de ellas sustituída por la otra; y *heterogéneas*, si tal sustitución no fuere posible. Bajo el concepto de su tamaño se llaman *cantidades* y constituyen el objeto de las Ciencias matemáticas.

Las cantidades homogéneas son *iguales* ó *desiguales*. De dos cantidades desiguales es mayor aquella de la cual una parte es igual á la otra. La afirmación de que la cantidad A es igual á la cantidad B se llama *igualdad (œquatio)* y se escribe $A=B$. Las cantidades comparadas se llaman *miembros (membra)*, de la izquierda y de la derecha, ó sea, primero y segundo de la igualdad. Que la cantidad C es mayor que la cantidad D (D menor que C) se expresa por la *desigualdad* $C>D$. Que la cantidad C se halla entre los límites B y D, que vale más que aquél y menos que éste, se expresa por la *limitación* $B<C<D$.

2. El conjunto de varias cosas homogéneas es determinado por un *número*. Lo que se repite varias veces se llama *unidad;* y esta unidad es *uno*, sin inmediata determinación (*innominada*, abstracta); ó es una cantidad determinada (*denominada*, concreta) como, por ejemplo: *decena*, *docena*, *duro*, *metro*, *grado*, *hora*, etc., etc. Un número es mayor que otro cuando contiene más unidades que este otro. Los números abstractos forman la *serie numérica natural*, ascendente hasta el infinito. Para expresar los números naturales con pocas palabras, y escribirlos con pocos signos (cifras), han adoptado los pueblos civilizados el *sistema decimal*, con arreglo al cual se consideran: diez unidades como una decena; diez decenas como una centena; diez centenas como un millar; mil millares como un millón; un millón de millones como un billón; un millón de billones como un trillón, etc., etc.

Los griegos, á la manera que los pueblos semíticos, designaron las unidades, las decenas, las centenas, respectivamente, por nueve letras de su alfabeto; los millares, por las letras ó signos de las unidades á los cuales ponían rayas; las decenas de millar, etc., etc., nuevamente por los signos de las unidades, de las decenas, etc., á los cuales se dió el nombre de *miriadas*. La división de los números grandes en miriadas no se tuvo después en cuenta por los otros pueblos. Los romanos designaban un *uno*, una *decena*. un *ciento*, un *millar;* y además cinco unos, cinco decenas, cinco centenas, por los signos de la escritura que después no se diferenciaron de algunas letras del alfabeto común; cuatro y nueve unos los expresaban escribiendo el uno delante del cinco y del diez; etc., etc.

Estos modos de escribir fueron relegados al cómputo eclesiástico desde el siglo XII, en que los árabes extendieron el sistema índico, según el cual las unidades se representan respectivamente por su signo propio; las decenas, por su situación á la izquierda de las unidades; las centenas, millares, etc., por su situación á la izquierda de las decenas, de las centenas, etc., mediante la intervención del décimo signo 0. Las voces numéricas millón, billón, ... milliard (mil millones) son más nuevas. La palabra millón significaba en el siglo XVI, vulgarmente, una suma de dinero, un capital; con sentido abstracto no tuvo cabida en los libros de cálculo hasta el siglo XVIII. Las palabras milliard y billón aparecen en los libros franceses del siglo XVI. (Véanse las consideraciones del autor en la *Revista de Leipzig*, 1865, y más extensamente en la de 1871, página 617.)

3. Los números y sus combinaciones son objeto de la *Aritmética*. Practicar una combinación numérica (operar) se llama *calcular*. Para indicar las operaciones que deben hacerse con los números se usan determinados *signos de cálculo*. Los números, en general, esto es, de conjunto indeterminado de unidades, son designados por las *letras* (mayúsculas, minúsculas, numeradas) del abecedario. Así:

$$A, \quad B, \quad C \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a, \quad b, \quad c \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a', \quad a'', \quad a''' \ldots\ldots\ldots\ldots a\,('')$$
$$a_1, \quad a_2, \quad a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$$
$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{13} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}$$
$$a_{21}, \quad a_{22}, \quad a_{23} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}$$

Y de aquí que la Aritmética universal se llame también *Cálculo literal (Arithmetica speciosa, universalis)*, en oposición á la Doctrina vulgar del cálculo *(Logística, Aritmética numerosa)* que es una aplicación de la primera. La Aritmética superior *(Teoría de los números)* comprende las propiedades de los números enteros y de las formas enteras.

[1] *Euclides* designó por rayas los números generales y explicó por construcciones las combinaciones numéricas. *Diofanto* (en

la segunda mitad del siglo IV después de J. C.) representó las cantidades indeterminadas por las primeras letras del alfabeto, y estos signos numéricos se llamaron, hacia el principio de la Edad media, *numeri cossici* (*cossa*, *cosa*, *chose*) y posteriormente *species*. Principios más expresivos del Cálculo literal se encuentran, después de la introducción de los *guarismos* índicos (Aritmética vulgar c. XIV), en *Regiomontano*, 1460 (*Algorithmus demonstratus*, Nürnberg, 1534. Véase *Chasles* (*Apergu historique*) y *Stifel* (*Arithm. integra*, 1544, fólio 352) y con más extensión en *Vieta*, hacia la segunda mitad del siglo XVI).

4. Las leyes de las ciencias matemáticas se clasifican en *Definiciones*, *Teoremas* ó *Axiomas*. La definición ὁρισμός se usa para la inteligencia de un concepto complejo. El Teorema (θεώρημα, *propositio)* enlaza con una hipótesis (ὑπόθεσις) una conclusión ó afirmación (θέσις). El Axioma (ἀξίωμα, ley fundamental) es una afirmación que se admite necesariamente, sin explicación ni prueba, como resultado de la experiencia (ἐμπειρία). La renombrada exactitud de las ciencias matemáticas estriba en que necesitan muy pocos axiomas, y en que sus teoremas pueden ser (lógicamente) demostrados, y probados (empíricamente). La *demostración* (ἀπόδειξις, *demonstratio)* será *directa* cuando de la hipótesis se deduzca la conclusión; *indirecta* (apagógica, ἀπαγωγή, *deductio ad absurdum)* cuando de la negación de la conclusión se deduzca la negación de la hipótesis. El razonamiento matemático (συλλογισμός, *silogismo*) consta de premisas y conclusión. Así son silogismos los siguientes: si $A=B$ y $B=C$ (*præmissæ*) es $A=C$ (*conclusio*); si es $A>B$ y $B>C$ será $A>C$; cosas iguales aumentadas ó disminuídas igualmente permanecen iguales. Todas estas proposiciones se desprenden del concepto de igualdad (1). Según estos modelos, se ha procu-

rado desde Aristóteles ampliar el número de los silogismos con aplicación á otras esferas del saber (Lógica).

Prescindiendo de estas conclusiones que se derivan del concepto de igualdad, no necesita la primera parte de las Ciencias matemáticas (Aritmética, Algebra, Análisis) ningún axioma; mientras que las partes sucesivas (Geometría y Mecánica) exigen para su fundamento algunos axiomas.

En las antiguas publicaciones se llamaba *corolario* un teorema subordinado á otro y que se deducía de éste fácilmente; *lema* (por λαμβανω), un teorema, correspondiente á otra serie, que se anteponía á otro teorema más comprensivo ó general para fundamentarlo ó demostrarlo.

II.—La suma.

(HEIS — 1 y 7.) (*)

5. La *suma* de dos números se efectúa mediante la reunión (adición) con el primero de las unidades del segundo. Uno y otro número se llaman *términos (termini, termes)* de la suma, ó *sumandos*. La suma de los números a y b se escribe $a+b$, y se lee a más b.

6. Los términos de una suma deben ser homogéneos; y la suma es homogénea asimismo con sus términos.

7. El orden de los términos de una suma es arbitrario. Así:

$$a+b=b+a$$
$$a+b+c=b+a+c=a+c+b.$$

(*) Estas citas se refieren á la colección de problemas por *Heis*, cuya traducción española verá pronto la luz pública.

Pues una fila de a unidades, á la cual se agrega otra de b unidades, á saber:

$$1^{(1}+1^{(2}+1^{(3}+\ldots+1^{(a}+1^{(1}+1^{(2}+1^{(3}+\ldots+1^{(b}$$

es lo mismo, contando desde el fin, que una fila de b unidades, con la cual se junta otra de a unidades.

La suma $a+b+c$ no sólo expresa la suma de los términos $a+b$ y c, sino también la de los términos a y $b+c$; y es, por consecuencia, de igual sentido y valor que $b+a+c$ y que $a+c+b$. Dado ó establecido un orden en los sumandos, pueden permutarse los inmediatos y deducir así todas sus coordinaciones posibles.

III.—El producto.

(HEIS — 3 y 15, 8 y 16.)

8. Se llama *producto* la suma de términos iguales. El término repetidas veces sumado se llama *multiplicando;* el número de los términos iguales se denomina *multiplicador*. El producto de los números a y b, esto es, la suma de b términos iguales todos al a, se expresa por ab, ó por $a.b$, ó por $a+b$; y se lee: a multiplicado por b, ó b veces a.

El signo de la multiplicación no puede faltar cuando el multiplicador sea un número ordinario, ó un guarismo. Así:

$$a.2=a+a$$
$$a.3=a+a+a$$
$$ab=a^{(1}+a^{(2}+a^{(3}+\ldots+a^{(b}$$

9. El multiplicador es siempre abstracto ó in-

nominado; el producto es homogéneo con el multiplicando (6).

(1) Multiplicando y multiplicador pueden permutarse sin que se altere el producto, y por eso se llaman ambos, *factores* del mismo. El orden de los factores de un producto es arbitrario. Así.

$$ab = ba$$
$$abc = bac = acb = \ldots$$
$$\begin{array}{l} 5 \times 3 = 1+1+1+1+1 = 3 \times 5 \\ \qquad\quad\; +1+1+1+1+1 \\ \qquad\quad\; +1+1+1+1+1 \end{array}$$

Pues 3 filas con 5 unidades cada una significan lo mismo, miradas de alto á abajo, que 5 columnas con 3 unidades cada una. Y también c filas, con b términos iguales al a cada una, equivalen á b columnas, con c términos a cada una; y contienen, entre unas y otras, filas y columnas, bc términos (7).

Ordinariamente se escribe $2a$, $3a$,... en lugar de $a.2$, $a.3$,...; de modo que $5a = 2a + 3a$... etc. Para multiplicar por ba se puede multiplicar primeramente por b y el producto resultante por a. Así se halla: $3a.\ 2b = 6ab$, etc.

Si el producto de n factores es independiente del orden de éstos, el producto de $n+1$ factores lo será también. Designemos por a, b, c, d, e... estos $n+1$ factores. Para reducir el producto de estos $n+1$ factores al producto de n factores, basta reunir dos factores cualesquiera en un producto. Según esto, resultan iguales productos de los sistemas siguientes de factores:

$$\begin{array}{lcl} ab,\ c,\ d,\ e\ldots & \text{y} & abc,\ d,\ e\ldots \\ ac,\ b,\ d,\ e\ldots & & acb,\ d,\ e\ldots \\ a,\ b,\ cd,\ e\ldots & & ab,\ cd,\ e\ldots \\ ab,\ c,\ d,\ e\ldots & & ab,\ cd,\ e\ldots \end{array}$$

Ahora bien, si $acb=abc$, todos estos productos de n factores coinciden, y el producto de $n+1$ factores será independiente del orden en que la operación se verifique. Mas esta independencia existe realmente demostrada para 3 factores: luego existirá para 4, para 5,... y para cualquier número de factores. (*Dirichlet-Zahlen-Theorie von Dedekind* § 2.)

IV.—La potencia.

(HEIS—5.)

11. Se llama *potencia* el producto de factores iguales. El factor repetido varias veces se llama *dignando;* el número de los factores iguales, *exponente.* Dignando, exponente y potencia sólo pueden ser abstractos ó innominados. La potencia b^a de a, esto es, el producto de b factores iguales al a, se expresa por a^b, y se lee: a elevado á b (*a potenciado* por *b*). La primera potencia de un número es él mismo; la segunda potencia de un número se llama su *cuadrado;* la tercera, su *cubo;* la cuarta, su *bicuadrado.* Se llama *cœficiente* de una potencia todo factor de esta potencia, que sea independiente del dignando, ó todo producto de semejantes factores.

$$a^2=aa,\ a^3=aaa,\ a^5=a^4a=a^3a^2$$
$$a^b=a^{(1}a^{(2}a^{(3}\ldots\ldots a^{(b}$$
$$3a.2a=6a^2;\ 2ab^2.\ 7a^2b^3=14a^3b^5;\ a^ba=ab+^1.$$

Dignando y exponente, en general, no pueden permutarse. Se verifica, es cierto, la igualdad $2^4=4^2$; pero no esta otra: $2^3=3^2$, etc.

V.—Las operaciones indirectas (inversas).

(HEIS—2, 4, 41 y 56.)

12. Dados, la suma y un término de la misma, puede determinarse el otro término, sumando con el término conocido un término suficiente *(diferencia)*.

13. Dados, el producto y un factor, puede determinarse el otro factor multiplicando el factor conocido por un factor suficiente *(cociente)*.

14. Dados, la potencia y el exponente, puede determinarse el dignando, elevando al exponente conocido un número suficiente *(raiz)*.

Dados, la potencia y el dignando, pueden determinarse el exponente, elevando el dignando á un número suficiente *(logaritmo)*.

En la elevación á potencias *(potenciación)*, se fundan dos operaciones indirectas ó inversas, porque no son conmutables el dignado y el exponente.

VI.—Las fórmulas.

(HEIS—6.)

15. *Fórmula (formula, forma)* es un conjunto de números enlazados mediante los signos del cálculo. Por ejemplo: $a+b$, ab, a^b. Un producto (ó potencia) se llama *monomio (mononomium*, abreviadamente *monomium);* una suma, según el número de sus términos, se denomina *binomio, trinomio,... polinomio (binomium, trinomium polynomium)*.

16. Las fórmulas, á su vez, como las letras pue-

den ser ligadas mediante los signos del cálculo, y para ello se encierran en paréntesis (παρέν-δεσις). Los paréntesis suelen ser de diferentes formas. El paréntesis es inútil cuando haya que sumar ó añadir una suma, ó que multiplicar un producto. (7 y 10.) Así:

$$a+(b+c)=a+b+c,\ (ab)c=a(bc)=abc$$

En Euclides, X-37, se designa la fórmula $a+\sqrt{b}$ como constituida ἐκ δύο ὀνομάτων (*ex binis nominibus*); y de allí viene la palabra *binomio* cuyo sentido más particular lo recibió en el siglo XVIII. Las voces *uninomio* y *multinomio* no han logrado naturalizarse. *Vieta* (1580) trazó líneas sobre los términos pertenecientes á una forma, como hoy se usan en las raíces de los polinomios. El uso de los paréntesis, que comenzó en el siglo XVII (*Klügel-math*, w. I, p. 52), se generalizó en el siguiente. Los signos hoy usados se introdujeron después de la invención de las letras de imprenta. El signo de igualdad (=) que empleó *Recorde* primeramente en 1552 (Klügel *math*. w. I, p. 42), no se extendió hasta 100 años después. El signo de desigualdad (<) aparece á principios del siglo XVII en *Harriot* (*Klügel*-I, p. 50). Las palabras *plus* y *minus* se expresaron en Italia y Francia por sus iniciales *p* y *m*; mas aparecen ya representadas por los signos + y — en Alemania en la segunda mitad del siglo XV. (*Drobisch* de Widmanni compendio edito 1849, párrafo 20.) Estos signos, sin embargo, no pueden atribuirse á ningún inventor en particular, siendo lo más probable que provengan de las letras *p* y *m* deformadas. Otro punto de vista acerca del origen de estos signos expresó *Morgan*. (*Athenæum n*. 1931 p. 565-1864 Oct. 29.)

La union de las factores de un producto sin signo alguno de cálculo ú operatorio se encuentra en *Stiefel* (*Arithm*., 1544, fólio 225); el signo de multiplicación (×), en *Oughtred* (*Clavis math*. 1631); el punto (.) en *Leibniz* hacia la segunda mitad del siglo XVII. En *Diofanto* y sus sucesores se encuentra la palabra ἀριθμός, *res, cosa, radix*, para designar un número indeterminado (incógnita); su segunda potencia, la llamaban δύναμις, *potentia*; *potestas*, census, *censo*, por consecuencia del uso antiguo de las voces δύναμις, δύνασθαι (Eucl. *El*. X), su tercera potencia la llamaban κύβος, *cubus*. Las potencias superiores tenían nombres compuestos δύναμο-δύναμις etc., etc.

El nombre *dignitas* fué empleado por *Bombelli* (1572), mientras que *Vieta* vulgarizaba los de *potestas* y *coefficiens*. La notación de las potencias fué preparada por *Stiefel* que escribió sobre los términos de la serie 1, 1A, 1AA, 1AAA..., los números 0, 1, 2, 3... á los cuales dió el nombre de exponentes. (*Arithm.* fól. 250 y en la edición de *Christ. Rudolff. Coss.*, 1513 fol. 62.) Después que *Stevin*, 1585 (*Klugel, math.*, w. I, página 43), hubo introducido las denominaciones de las potencias según sus exponentes, fué extendido el uso de la designación actual de las potencias por *Herigogne* (*Cursus math.*, París, 1634) y por *Descartes*, en 1647.

VII.—La diferencia.

(HEIS—2.)

17. La *diferencia* de dos números es otro número que, sumado con el segundo de aquéllos, da el primero. El primer número se llama *minuendo*, el segundo, *sustraendo;* y, por lo tanto:

$$Diferencia + Sustraendo = Minuendo.$$

La diferencia entre a y b se designa por $a—b$, y se lee: a menos b. El cálculo de una diferencia se denomina *sustracción*, y se efectúa descontando del minuendo las unidades del sustraendo. Para comprobar una diferencia se suma ésta con el sustraendo, y la suma se compara con el minuendo al cual debe ser igual. Particularmente es: $a+b-b=a$; $a+b+c+d-(c+d)=a+b$; $5a-3a=2a$, etc. De la limitación $a<x<b$ se desprende que $x-a<b-a$.

18. Minuendo y sustraendo no pueden ser sino homogéneos; la diferencia es homogénea con ellos, y expresa *cuánto mayor* es el minuendo que el sustraendo.

19. Si el minuendo y el sustraendo son iguales, la diferencia es 0 *(ziphra, cero)*. Cuando el minuen-

do sea menor que el sustraendo, podrá expresarse la diferencia en forma de un sustraendo (sin minuendo). Así:

$$7-7=0$$
$$7-8=-1$$
$$7-9=-2$$
$$a-(a+c)=-c$$
$$a-b=-(b-a);$$

porque de a sólo puede sustraerse a, y queda por sustraer todavía $b-a$.

Para hacer practicables todas las sustracciones sin excepción, se prolonga por bajo del cero la serie de los números naturales, mediante otros números que llevan delante el signo de sustraendos (—) y el nombre de *negativos*, mientras que á los números naturales, para significar su posición á los últimos, se antepone el signo de la adición (+) y se les da el nombre de *positivos*. La nueva doble serie es como sigue:

$$\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\ldots$$

Los números negativos están compuestos por la unidad negativa del mismo modo que lo están los positivos de la unidad positiva. La diferencia $a-b$ se hallará contando desde el 0 hacia la derecha a términos en la serie escrita, y desde allí retrocediendo ó contando b términos hacia la izquierda.

Los números positivos están sobre el *cero*, valen *más que cero;* de los negativos se dice que valen *menos que cero*, en virtud de que una diferencia disminuye cuando su sustraendo aumenta. Y de aquí que las diferencias

$$7-6,\ 7-7,\ 7-8\ldots$$

formen una serie de términos cada vez menores, ó decreciente. De la premisa $-5<0$ se desprende, mediante la adición de 5 unidades, la conclusión exacta $0<5$.

20. Una diferencia puede considerarse como una suma de la cual es un sumando negativo (un sustraendo). De este modo el binomio $a+(-b)$ se define ó explica por la diferencia $a-b$ que tiene el mismo valor que $-b+a$; porque $-b+a+b=-b+b+a=a$.

Dos números se denominan *igualmente opuestos*, cuando el uno de ellos comprende tantas unidades negativas como positivas contiene el otro; y, por consecuencia, su suma es *cero*. Así 1 y -1, c y $-c$, $a-b$ y $b-a$ ó $-a+b$, son igualmente opuestos.

Dos cantidades se dicen *opuestas* cuando la una es igualmente opuesta á una parte de la otra; y, por consecuencia, su suma, formada por sustracción, es menor que la mayor de ambas. Tales son: un número *positivo* y otro *negativo* (de signos opuestos); *haber* y *deber; ganancia* y *pérdida; avance* y *retroceso; subida* y *bajada; aceleración* y *retardación; repulsión* y *atracción; presión* y *espansión*, etc. Quien tiene a pesos y debe b, tiene $a-b$ pesos de haber, ó sea: $a-b$ pesos de efectivo haber, cuando $a-b$ es positiva; ningún haber, cuando $a-b$ sea cero; ó $b-a$ de deuda, cuando $a-b$ sea negativa.

Las deudas pueden, de consiguiente, considerarse en los cálculos como haberes negativos; y los haberes, recíprocamente, como deudas negativas.

Un punto, distante de un punto fijo $a-b$ metros, caerá realmente delante del punto fijo, sobre este mismo punto, ó detrás, según que $a-b$ sea positiva, nula, ó negativa. El avance negativo es retroceso, etc., etc.

VIII.—Suma y diferencia de polinomios.

(HEIS—8 y 13.)

21. Para sustraer un número de una suma se sustrae de uno de los términos de dicha suma.

$$a+b-c=a+(b-c)=a-c+b.$$

Demostración. — Añadiendo al polinomio $a+(b-c)$, ó al $a-c+b$, el sustraendo c (para lo cual se comienza (7) por $b-c+c=b$, ó por $a-c+c=a$) se obtiene el minuendo $a+b$ (17).

Recíprocamente: se agrega una diferencia añadiendo el minuendo y restando el sustraendo, en un orden cualquiera.

22. Para sustraer una suma se sustraen sus términos uno á uno. Para sustraer una diferencia se sustrae el minuendo y se añade el sustraendo.

$$a-(b+c)=a-b-c$$
$$a-(b-c)=a-b+c$$

Demostración.—Añadiendo al resto $a-b-c$ el sustraendo $b+c$, se obtiene el minuendo a; pues, añadiendo primeramente el término c se halla $a-b-c+c=a-b$; y añadiendo después el otro término b, se halla $a-b+b=a$.

Si al resto $a-b+c$ se añade el sustraendo $b-c$ (para lo cual (21), se sustrae primeramente c y después se añade b) se obtiene a, que es el minuendo.

Por lo tanto:

$$-4a+7a=3a;\ -5a+2a=-3a;\ -4a-3a=-7a$$

23 Para añadir un polinomio (suma ó agregado de términos positivos y negativos) se añaden, en un orden cualquiera, cada uno de sus términos, sin cambiar los signos. Para sustraer un polinomio se añaden sus términos uno á uno, con sus signos cambiados (los positivos con el signo — y los negativos con el signo $+$).

$$a+(b-c+d)=a+(b-c)+d=a+b-c+d \ (21).$$

Para indicar la suma de un polinomio con un número no hay necesidad de incluirlo en un paréntesis. Lo contrario sucede cuando se trata de sustraer un polinomio de un número. Así (22):

$$a-(b-c+d)=a-(b-c)-d=a-b+c-d.$$

Al binomio (suma) se oponía antiguamente el ἀποτομή, *recisum, residuum* (diferencia); las diferencias se distinguían en *excesos* y *defectos*. Desapareció esta distinción con los números negativos, cuya existencia data del siglo XVI, coincidiendo casi con la introducción de las letras del alfabeto en los cálculos, y cuyo uso ya fué generalizado en el siglo XVII. (Klügel, *math.*, w. I, párrafos 30 y siguientes). Las expresiones, *numerus verus* y *fictus (falsus)* fueron empleadas por *Cardan* y otros, y las denominaciones, *positivo* y *negativo*, por *Vieta*. Según este autor, *agregado* significa una suma de términos positivos solamente. La designación, mediante una misma letra, de un valor positivo ó negativo, pertenece á *Descartes* (Geom. 1637); y de la utilidad de semejante notación habló expresamente *Newton* á *Leibniz*. (Carta de 24 octubre 1676).

IX.—Producto de polinomios.

(HIES -14 y 16.)

24. Para multiplicar un polinomio se multiplican, uno á uno, todos sus términos.

$$(a-b+c)m=am-bm+cm.$$

Demostración.—La suma de m términos, iguales todos al $(a-b+c)$, tiene m términos iguales al a; m términos iguales al $-b$; m términos iguales al c (8 y 23).

25. Para multiplicar por un polinomio se multiplica por cada uno de sus términos. Cada uno de los productos parciales tendrá el signo del término por el que se multiplica.

Demostración.
$$\begin{aligned} m(a-b+c) &= (a-b+c)m && (10)\\ &= am-bm+cm && (24)\\ &= ma-mb+mc \end{aligned}$$

NOTA. Un multiplicador no puede ser por sí mismo positivo ni negativo (9). Multiplicar por un número, positivo ó negativo, es un modo abreviado de decir lo que más claramente se expresa de este otro: multiplicar por un número (incalificado, absoluto) y añadir ó sustraer el producto resultante.

26. Para multiplicar un polinomio por otro polinomio, se multiplican cada uno de los términos del uno por cada uno de los términos del otro. Factores de signo idéntico dan productos positivos; factores de signos opuestos dan productos negativos. (*)

Demostr.
$$\begin{aligned} (a-b)\,(c-d) &= (a-b)c-(a-b)d && (25)\\ &= ac-bc-(ad-bd) && (24)\\ &= ac-bc-ad+bd && (22) \end{aligned}$$

Los productos $+ac$, $-bc$, $-ad$, $+bd$, provienen

(*) Esta regla se aplicaba ya en la antigüedad por *Diofanto* al menos. (*Arithm.* I, def 9.) Se deduce de los Elementos de *Euclides* II.

de las multiplicaciones de $+a$ por $+c$, de$-b$ por $+c$, de $+a$ por$-d$, y de$-b$ por$-d$ (25 *Nota*).

En conformidad con la regla aplicada á los signos de los productos, se halla también el siguiente:

$$\begin{aligned}(a-b)(c-d) &= -(b-a)(c-d)\\ &= -(a-b)(d-c)\\ &= (b-a)(d-c)\end{aligned}$$

Son dignos de mención además:

$$(a+b)(c+d)+(a-b)(c-d)=2ac+2bd$$
$$(a+b)(c+d)-(a-b)(c-d)=2ad+2bc$$

27. Recíprocamente: los términos de un polinomio, que sean productos con un factor común, pueden reunirse escribiendo delante de un paréntesis el factor común, y dentro del mismo los factores no comunes: con los signos de los términos que los contienen, ó con signos opuestos, según que el factor común, separado, tenga el signo $+$, ó el signo $-$. Así:

$$a+bd-cd=a+d(b-c)=a-d(-b+c)$$
$$ac-bc-da+bd=c(a-b)-d(a-b)=(a-b)(c-d)$$

Cuando dos polinomios están ordenados según las potencias decrecientes de una letra, puede su producto hallarse bajo la misma forma de un polinomio ordenado según las potencias decrecientes de la mencionada letra. Así:

$$(ax^3+bx^2+cx+d)(fx^2+gx+h)=$$
$$=afx^5+bfx^4+cfx^3+dfx^2$$
$$+agx^4+bgx^3+cgx^2+dgx$$
$$+ahx^3+bhx^2+chx+dh$$
$$=afx^5+(bf+ag)x^4+(cf+bg+ah)x^3$$
$$+(df+cg+bh)x^2+(dg+ch)x+dh.$$

Este ejemplo enseña á multiplicar números decimales de varias cifras; porque ax^3+bx^2+cx+d representa un número decimal, cuando $x=10$, y las letras a, b, c, d, son cifras de la serie 0, 1, 2..... 9.

28. Merecen notarse los siguientes ejemplos.

I. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

....

El desarrollo de las potencias de $(a-b)$ se deduce de los anteriores, cambiando b en $-b$: con lo cual b^2, b^4... no mudan de signo, y las potencias impares b^3, b^5... se hacen negativas, presentando los desarrollos correspondientes sus términos con signos *alternados*.

II. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

El cuadrado de un polinomio consta de la suma de los cuadrados de sus términos y de los duplos de los productos de estos términos de dos en dos. El signo de estos duplos está determinado por los signos de sus dos términos constitutivos (26).

III. $(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2$

$(a^2+ab+b^2)\ (a-b)=a^3-b^3$

$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\ (a-b)=a^4-b^4$

....

Cambiando b en $-b$ se obtienen:

$$(a-b)\ (a+b)=a^2-b^2$$

$$(a^2-ab+b^2)\ (a+b)=a^3+b^3$$

$$(a^3-a^2b+ab^2-b^3)\ (a+b)=a^4-b^4$$

....

IV. Haciendo $x+y=u$, $xy=v$, se hallan:

$$x^2+y^2=u^2-2v$$

$$x^3+y^3=u^3-3uv$$

$$x^4+y^4=u^4-4u^2v+2v^2$$

$$x^5+y^5=u^5-5u^3v+5uv^2$$

$$x^6+y^6=u^6-6u^4v+9u^2v^2-2v^3$$

....

Puesto que:

$$x^2+y^2=(x+y)\ (x+y)-2xy$$

$$x^3+y^3=(x^2+y^2)\ (x+y)-(x+y)xy$$

$$x^4+y^4=(x^3+y^3)\ (x+y)-(x^2+y^2)xy$$

....

Fórmulas semejantes se obtienen cuando se cambia y en $-y$, con lo cual también se cambia v en $-v$.

$$\text{V.}\quad (a^2+nb^2)(a_1{}^2+nb_1{}^2)=(aa_1+nbb_1)^2 +n(ab_1-a_1b)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2)= (aa_1+bb_1+cc_1+dd_1)^2+(ab_1-a_1b+cd_1-c_1d)^2 +(ac_1-a_1c+db_1-d_1b)^2+(ad_1-a_1d+bc_1-b_1c)^2$$

Estos productos tienen la misma forma que sus factores.

X.—El cociente.

(HEIS 17 y 20.)

29. El cociente de dos números es otro número que, multiplicado por el segundo de aquellos, produce el primero. Este primer número se llama *dividendo*, y el segundo *divisor;* de modo que:

$$\textit{Cociente} \times \textit{Divisor} = \textit{Dividendo}.$$

El cociente de a por b se designa por $\frac{a}{b}$ ó $a : b$ (*) y se lee: a dividido por b; ó se dice la razón de a con b; ó b en a. El cálculo de un cociente se llama *división*. Para formar el cociente $a : b$ se comparan con el dividendo los múltiplos b, $2b$, $3b$... del divi-

(*) Acerca de la notación griega de los quebrados, véase *Nesselmann* Historia del Algebra, p. 114. La raya aparece simultáneamente con las cifras índicas y se halla ya en *Leonardo de Pisa. (Liber abaci* fol. 11.) El cólon se usaba como signo de separacion ó diéresis entre los ingleses, en el siglo XVII; pero su empleo actual data de Leibniz. El signo de *Pell* ÷ que debía posponerse al dividendo, aparece en Inglaterra en el siglo XVII.

sor. Para comprobar el cociente se multiplica por el divisor y el producto se compara con el dividendo. Son casos particulares:

$$\frac{a}{a}=1;\ \frac{ab}{b}=a;\ \frac{abcd}{cd}=ab;\ \frac{a^5}{a^3}=a^2$$

30. Cuando el dividendo es concreto, el divisor debe ser abstracto ú homogéneo con el dividendo. En el primer caso, será el cociente la parte alícuota del dividendo que exprese ó denomine el divisor, y, por consecuencia, homogéneo con el dividendo; en el segundo, el cociente será la *razón* (λόγος, *ratio, proportio, rapport)* del dividendo al divisor, esto es: el número (abstracto, innominado) que expresa cuántas veces el divisor se halla contenido en el dividendo, *cuántas veces tan grande* como el divisor es el dividendo.

28 pesos: 4=7 pesos; porque 7 pesos × 4=28 pesos; la cuarta parte de 28 pesos son 7 pesos.

28 pesos: 4 pesos=7; porque cuatro pesos × 7= 28 pesos; la razón de 28 pesos á 4 pesos es 7; esto es, 4 pesos se hallan contenidos 7 veces en 28 pesos; ó bien: 28 pesos son 7 veces tan grandes como 4 pesos.

Cuando a y b son abstractos, el cociente $a : b$ expresa lo mismo la b^a parte de a que la razón de a con b.

31. Si el dividendo a no es igual á un múltiplo del divisor b, el cociente $a : b$ no podrá expresarse exactamente, sino meramente por limitación, mediante los números naturales. Así:

$$3 < 22 : 7 < 4$$

Es decir, que el cociente $22 : 7$ se halla comprendido entre 3 y 4; porque 22 lo está entre $3 . 7$ y $4 . 7$

Si el dividendo a está comprendido entre los límites bx y $b(x+1)$, el cociente $a : b$ lo estará entre x y $x+1$; y entonces se llama x el *número entero* del cociente $a : b$; y la diferencia $a-bx$, el *resto* de esta división. Cuando a se halle más proximo á $b(x+1)$ que á bx, el cociente se aproximará más á $x+1$ que á x; y tomando entonces $x+1$ por el entero más aproximado del cociente, el número negativo $a-b(x+1)$ será el *resto mínimo* de la división. Si el resto es *cero*, será x el cociente exacto, y entonces se dice que a es *divisible* por b (sin resto).

En general, si $a=bx+y$, puede considerarse x como el número entero del cociente, é y como el resto de la división $a : b$.

32. Para efectuar todas las divisiones, sin excepción, se considera dividida la unidad (de la cual son múltiplos los números naturales) en tantas partes iguales como expresa el divisor. Una de estas partes $\frac{1}{b}$ se llama *unidad fraccionaria;* un conjunto de ellas, *número fraccionario*, ó *quebrado (fractio)*. El número de unidades fraccionarias de un quebrado se llama *numerador (numerator);* el número de partes en que la unidad natural está dividida, se llama *denominador (denominator)* del quebrado. En oposición á los quebrados, los números naturales se llaman *enteros (integer)*. La suma de un entero y un quebrado se llama *número mixto.*

Todo cociente puede representarse como un quebrado cuyo denominador es el divisor y cuyo numerador es el dividendo. Así:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} a$$

(Es supérflo incluir la unidad fraccionaria $\frac{1}{b}$ en un paréntesis.) Pues multiplicando $\frac{1}{b}$ a por el divisor b (para lo cual se comienza por $\frac{1}{b}$ $b=1$) se obtiene el dividendo a.

El quebrado se denomina *impropio* cuando su numerador es un múltiplo de su denominador; *puro (genuinus)* cuando su numerador es menor que su denominador; *espurio (spurius)* cuando su numerador es mayor que su denominador y no es impropio. El quebrado impropio es igual á un número entero; el puro, menor que 1; el espurio, mayor que 1.

XI.—Cociente de productos.

(HEIS-21, 22, 18, 23 y 24.)

33. Para dividir por un producto se divide sucesivamente por sus factores.

$$\frac{a}{bc}=\frac{a}{b}:c=\frac{a}{c}:b$$

Demostración.—Multiplicando el cociente $\frac{a}{b}:c$ por el divisor bc (para lo cual se multiplica $\frac{a}{b}:c$ por c y el producto resultante $\frac{a}{b}$ por b (10) se obtiene el dividendo a (29). El mismo se obtiene multiplicando $\frac{a}{c}:b$ por b, y el producto por c.

Recíprocamente: para dividir un quebrado se multiplica su denominador.

34. El valor de un quebrado permanece inalterable, aun cuando se multipliquen sus dos términos por un mismo número, ó se dividan por un mismo divisor.

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$$

Demostración.

$$\frac{am}{bm} = \frac{am}{m} : \mathrm{b}\ (33) = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a : n}{b : n} = \frac{(a : n)\, n}{(b : n)\, n} = \frac{a}{b}$$

35. Para dividir un producto se divide un factor del mismo.

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} b = \frac{b}{c} a$$

Demostración.—Multiplicando $\frac{a}{c}\, b$ por el divisor c (esto es, multiplicando $\frac{a}{c}$ por c, y el producto resultante por b) se obtiene ab que es el dividendo. El mismo se obtiene multiplicando $\frac{b}{c}\, a$ por c (esto es, $\frac{b}{c}$ por c y el producto por a.)

Recíprocamente: para multiplicar un quebrado se multiplica un numerador.

36. Se dice abreviadamente *multiplicar por un quebrado*, en vez de decir *multiplicar por su numerador* y *dividir por su denominador*, siendo el orden de estas operaciones arbitrario. Multiplicar, pues, por $\frac{b}{c}$ será tomar b veces la c^a parte, ó dividir por c el *b-plo* (múltiplo b). Así:

$$a\frac{b}{c}=\frac{a}{c}b=\frac{ab}{c}=\frac{b}{c}a$$

Las tres últimas formas coinciden, según (35). Un multiplicador no puede ser en sí fraccionario (9). El orden de los factores de un producto es arbitrario, aunque sean aquéllos quebrados.

37. Para multiplicar un quebrado por otro quebrado, se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\ \left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$$

Demostración.

$$\frac{ac}{bd}=\left(\frac{a}{b}c\right):\mathrm{d}\ (36);\ \text{pero}\ \frac{a}{b}c=\frac{ca}{b}\ (35)\ \text{y}$$

$$\frac{ac}{b}:\mathrm{d}=\frac{ac}{bd}\ (33).\ \text{Luego etc.}$$

38. Para dividir por un quebrado se multiplica por el quebrado recíproco (invertido) que resulta de cambiar el numerador en denominador.

$$a : \frac{b}{c} = a \frac{c}{b}$$

Demostración.—Multiplicando el cociente $a \frac{c}{b}$ por el divisor $\frac{b}{c}$ (36) se obtiene $\frac{acb}{bc}$ (37) $= a$ que es el dividendo.

39. Dos números se dicen *recíprocos;* el uno recíproco del otro, cuando su producto es 1. Se determinará uno de ellos, dividiendo 1 por el otro.

Son recíprocos a y $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$. El recíproco de un quebrado puro es un quebrado espurio. Pequeñez y grandeza, lentitud y celeridad, aproximación y alejamiento, pueden considerarse como recíprocas. Decir que A es n veces tan pequeño, se halla n veces tan próximo, es n veces tan lento, como B, vale tanto como decir que A es $\frac{1}{n}$ veces tan grande (la n^a parte), se halla $\frac{1}{n}$ veces tan lejano, es $\frac{1}{n}$ veces tan veloz como B.

40. I. Si permaneciendo constante el numerador de un quebrado, el denominador crece lo suficiente, el quebrado disminuirá lo suficiente para ser menor que todo número dado. Cuando el denominador llegue á ser infinitamente grande (∞ según *Wallís* y otros), esto es, mayor que todo número, el quebrado alcanzará el límite *(limes)* 0.

II. Si permaneciendo invariable el numerador de un quebrado, el denominador desaparece; esto es, disminuye progresivamente hasta llegar á 0, el quebrado llegará al infinito. Porque la división por un quebrado puro es multiplicación por un quebrado espurio (38).

III. Si numerador y denominador de un quebrado desaparecen ó se hacen infinitos simultáneamente, ó si de los factores de un producto el uno se anula y el otro se hace infinito; el quebrado y el producto serán, en general, indeterminados. Porque existe un número indeterminado de valores diferentes que, multiplicados por un factor evanescente, se anulan ó desaparecen; y la multiplicación por un número, creciente sin fin, vale tanto como la división por un número, sin fin menguante. Pero cuando los términos de un quebrado ó los factores de un producto reciben los valores particulares expresados por haber atribuído un valor particular á alguna letra que en ellos existe, puede determinarse el límite que alcanzarán el quebrado, ó el producto, en cada caso particular dado. Tal sucede con el quebrado.

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b}$$

que se convierte en $\frac{0}{0}$ haciendo en él $b=a$: en cuya hipótesis, como $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, es

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b = 2a$$

IV. Si permaneciendo invariable el dignando, el exponente de una potencia llega hasta el infinito, la potencia alcanzará el límite ∞ ó el límite 0, según que el dignando sea mayor ó menor que 1.

Demostración.—Según lo explicado (28).

$$a^n - 1 = (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)(a-1).$$

En el supuesto de ser $a>1$, será $a^2>1$, $a^3>1$... etc.; y por lo tanto, $a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots a+1>n$ y consiguientemente:

$$a^n>1+n(a-1)$$

Ahora bien: creciendo suficientemente n, el producto $n(a-1)$ y la potencia a^n, por consecuencia, sobrepujarán á todo número dado. Por el contrario, la potencia

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}\ (37),$$

por lo que acabamos de decir, menguará indefinidamente, si así aumenta n.

V. Si el exponente de una potencia llega al infinito mientras el dignando alcanza el límite 1, la potencia puede alcanzar á límites diferentes de ∞ y de 0, que son calculables para cada caso particular (XXXI).

XII.—Cociente de polinomios.

(HEIS—19, 25 y 26.)

41. Para dividir un polinomio se dividen cada uno de sus términos.

$$\frac{a-b+c}{d}=\frac{a}{d}-\frac{b}{d}+\frac{c}{d}$$

Demostración.—Multiplicando el cociente por el divisor, se obtiene

$$\frac{a}{d}d-\frac{b}{d}d+\frac{c}{d}d=a-b+c$$

que es el dividendo

NOTA. $$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b};\frac{a-b}{c-d}=\frac{b-a}{d-c}$$

Se demuestran (26) multiplicando los cocientes por el divisor.

El límite á que llega el quebrado $\frac{ab}{a+b}$ en el supuesto que b se haga infinito, se obtiene dividiendo por b sus dos términos. En efecto, según (34).

$$\frac{ab}{a+b}=\frac{a}{\frac{a}{b}+1}$$

Haciéndose, pues, b infinito, desaparece el quebrado $\frac{a}{b}$ (40); y el propuesto recibe ó adquiere el valor a.

Del mismo modo se obtiene para el quebrado

$$\frac{a+bx+cx^2}{f+gx+hx^2}$$

el límite $\frac{c}{h}$, en el supuesto de hacerse x infinito, dividiendo por x^2 sus dos términos.

Para $\frac{a^n-1}{a-1}$, en el supuesto $a=1$, se obtiene el valor n (40 y IV).

42. Recíprocamente: quebrados con idénticos denominadores pueden reunirse en un solo quebrado con el mismo denominador, y cuyo numerador sea un polinomio compuesto de los numeradores de dichos quebrados, con sus mismos signos ó con sus signos cambiados, según antepongamos al quebrado que se busca el signo $+$ ó el signo $-$. Así.

$$\frac{a}{d}-\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a-b+c}{d}=-\frac{-a+b-c}{d}$$

El número mixto $a+\frac{b}{c}$ poniendo por a el quebrado $\frac{ac}{c}$ puede convertirse en el quebrado $\frac{ac+b}{c}$

43. Quebrados con denominadores diferentes pueden reunirse en uno solo después de darles un *denominador común* (34). Si los denominadores no tienen factores comunes, su producto será su mínimo denominador común. Así, si p, q, r son los denominadores, el denominador general será pqr, el cual tomarán los quebrados, multiplicando sucesivamente sus dos términos (numerador y denominador) por qr, pr, pq. Cuando en varios denominadores exista un factor ó potencias del mismo, se toma solamente la potencia más elevada para formar el producto de los denominadores. Así, si los denominadores son $p^2 q$, $q^2 r$ y pr^2, el producto que constituye el denominador común ó general será $p^2 q^2 r^2$, el cual tomarán los quebrados, multiplicando sus dos términos respectivamente por qr^2, $p^2 r$ y pq^2.

NOTA. Para comparar quebrados con denominadores distintos, se forma su diferencia ó su cociente. Si la diferencia entre el primer quebrado y el segundo es positiva ó el cociente del primero por el segundo es espurio, claro es que el primer quebrado es mayor que el segundo. Así:

$$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{(a+m)b-(b+m)a}{(b+m)b}=\frac{(b-a)m}{(b+m)b}$$

$$\frac{a+m}{b+m}:\frac{a}{b}=\frac{ab+bm}{ab+am}$$

Aquella diferencia es positiva y este cociente espurio, si es $a<b$ y m positivo: luego

$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$, cuando sea $a<b$ y m positivo.

44. Para dividir por un polinomio no se divide por cada uno de sus términos (á diferencia de la multiplicación); pues si así se hiciere, el cociente multiplicado por el divisor completo daría un producto diferente del dividendo.

La *división parcial* (*) se posibilita, ordenando dividendo y divisor, según las potencias de una misma letra contenida en sus términos, ya vayan estas potencias *disminuyendo* sucesivamente, con lo cual los términos que contengan las más elevadas serán los primeros, ya vayan dichas potencias sucesivamente *creciendo*. Así, ordenados, el primer término del dividendo, dividido por el primer término del divisor, da el primer término del cociente; este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor, y el producto se sustrae de todo el dividen-

(*) Coincide con la introducción de las letras en el cálculo. Su primera traza fué la división efectuada por los árabes, de un número decimal de varias cifras por otro.

do, llamándose *resto* la diferencia resultante. Se divide el primer término de este resto por el primero del divisor y se obtiene el segundo término del cociente, que se multiplica por todo el divisor, y el producto resultante se sustrae del primer resto, obteniéndose así un segundo resto, con el cual se opera del mismo modo que con el precedente.

Cuando se llega á un resto 0 está hallado el cociente por completo, y se dice que la división *procede* ó se *realiza*, porque sustrayendo sucesivamente del dividendo los productos del divisor completo por todos los términos del cociente, obtendremos la diferencia 0.

Cuando la división *no procede* ó *no se realiza*, puede detenerse ó cortarse después de haber obtenido un desarrollo suficiente de términos para el cociente, al cual se agregará para *completarlo* un quebrado cuyo numerador sea el último resto y cuyo denominador sea todo el divisor. Es decir, que en cada caso, el cociente completo es un número mixto.

Demostración. Sea A el dividendo, B el divisor, C la serie de términos hallados para el cociente, y R el último resto. Evidentemente:

$$R=A-BC \text{ y } A=BC+R\text{: luego (41).}$$

$$\frac{A}{B}=\mathrm{C}+\frac{R}{B}$$

Ejemplo. Para dividir

$$12x^2+54y^2+48yz-51xy-24xz$$

por

$$4x-9y-8z,$$

se ordenan dividendo y divisor según las potencias decrecientes de la letra x, por ejemplo, como sigue:

$$\begin{array}{l|l} 12x^2-51xy-24xz+54y^2+48yz & 4x-9y-8z \\ 12x^2-27xy-24xz & 3x-6y \\ \hline \quad -24xy \qquad +54y^2+48yz & \\ \quad -24xy \qquad +54y^2+48yz & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

El primer término del cociente se deduce de $12x^2 : 4x$; el primer resto, sustrayendo del dividendo el producto $3x\,(4x-9y-8z)$; el segundo término del cociente, de $-24xy : 4x$; el segundo resto, sustrayendo del primer resto hallado el producto $-6y(4x-9y-8z)$. Este segundo resto es 0: luego la división procede, es factible, y el cociente completo es $3x-6y$.

En las divisiones no factibles por los divisores

$$a+bx,\ a+bx+cx^2,\ a+bx+cx^2+dx^3.....$$

se obtienen para cocientes series infinitas de términos ordenados, según las potencias crecientes de x. Cada término de una de estas series, puede en el primer caso deducirse del término anterior, y en los otros casos, de los 2, 3... términos anteriores, conforme á una ley independiente del lugar que el término calculado ocupe. Por esto se llaman tales series *recurréntes*. (*Moivre Misvell. analyt.* 1730.) Y dada una serie recurrente puede calcularse el quebrado de donde procede. (*Euler*. Introd. I; *Klügel*. math. w. 4, p. 324; *Cauchy*, Anal. algébr. c. 12.)

45. Merece notarse la división factible (28).

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}$$
$$+ab^{n-2}+b^{n-1}$$

y la no realizable

$$\frac{a^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}+\frac{b^n}{a-b}$$

que se desprende de la anterior, puesto que (41):

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=\frac{a^n}{a-b}-\frac{b^n}{a-b}$$

Cambiando b en $-b$ se obtienen para los cocientes,

$$\frac{a^n-(-b)^n}{a+b} \text{ y } \frac{a^n}{a+b},$$

series de términos con los signos alternativamente positivos y negativos. La suma $a+b$ se halla contenida en a^n-b^n, ó en a^n+b^n, según que n sea par ó impar.

Haciendo $a=1$, las fórmulas anteriores se convierten en estas otras:

$$\frac{1-b^n}{1-b}=\frac{b^n-1}{b-1}=1+b+b^2+\ldots+b^{n-1} \text{ (*)}$$

$$\frac{1}{1-b}=1+b+b^2+\ldots+b^{n-1}+\frac{b^n}{1-b}$$

Particularmente, si $b<1$ y n crece indefinidamente, desaparecen b^n y $\frac{b^n}{1-b}$ (40), y queda en tal supuesto reducida la serie última á la que sigue:

(*) Conocida en lo antiguo (*Eucl.* Elem. 9-35.)

$$\frac{1}{1-b}=1+b+b^2+b^3+\ldots$$

esto es, á la suma de una serie de infinitos términos.

Los cocientes

$$\frac{x^{12}y^7-x^7y^{12}}{x-y},\ \frac{c}{a-x},\ \frac{c}{a^2-ax+x^2},\ \frac{1+x}{1+y}$$

pueden fácilmente deducirse de los hallados antes.

En efecto:

$$\frac{x^{12}y^7-x^7y^{12}}{x-y}=x^7y^7\frac{x^5-y^5}{x-y}=$$

$$x^7y^7(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$$

$$=x^{11}y^7+x^{10}y^8+x^9y^9+x^8y^{10}+x^7y^{11}$$

$$\frac{c}{a-x}=\frac{c}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}}$$

$$\frac{c}{a^2-ax+x^3}=\frac{c(a+x)}{a^3+x^3}=\frac{c}{a^3}(a+x)\frac{1}{1+\frac{x^3}{a^3}}$$

$$\frac{1+x}{1+y}=1+\frac{x-y}{1+y}=1+(x-y)\frac{1}{1+y}$$

$$=1+x-y-(x-y)\,y+\ldots$$

46. De la ecuación

$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=a^n+a^{n-1}b+\ldots\ldots+ab^{n-1}+b$$

se deduce como en (40) en el supuesto $a>b$:

$$\text{I} \quad (n+1)b^n < \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} < (n+1)a^n$$

De esta última fórmula, deducida primeramente en la hipótesis de ser b positiva y en la de ser $a>b$ haciendo $a=1+\omega$, $b=1$, y luego $b=1-\omega$, $a=1$, en cuyo caso ω es un quebrado puro, se desprenden las desigualdades:

$$m<\frac{(1+\omega)^m-1}{\omega} \text{ y } \frac{1-(1-\omega)^m}{\omega}<m$$

ó bien

$$(1+\omega)^m> 1+m\omega \text{ y } (1-\omega)^m> 1-m\omega$$

y por consecuencia:

$(1+\omega)^m>c$, cuando $1+m\omega>c$, ó bien $m>(c-1):\omega$
$(1-\omega)^m<d$, cuando $1-m\omega<d$, ó bien $m>(1-d):\omega$
La misma fórmula I, da lugar á la siguiente:

$$(1+\omega)^{n+1}-1<(n+1)\omega(1+\omega)^n \text{ ó } (1+\omega)^n(1-n\omega)<1$$

y por lo tanto:

$$\text{II...} \quad 1+n\omega<(1+\omega)^n<\frac{1}{1-n\omega}$$

Por último, haciendo en la repetida fórmula (I)

$a=1+\frac{1}{n}$ y $b=1+\frac{1}{n+1}$ (conforme su institución exige) en cuyo supuesto $a-b=\frac{1}{n(n+1)}$, se obtendrán:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}:$$

de la cual resulta:

$$\text{III...}\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Esta fórmula expresa numéricamente que las potencias $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(1\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(1\frac{1}{4}\right)^4$... forman una serie creciente. Por otra parte (II) tenemos también:

$$1+\frac{1}{k}<\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{n}<\frac{1}{1-\frac{1}{k}}$$

y elevando á la potencia k:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}<\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}<\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)^{k}$$

Y como el último término de esta limitación adquiere valor, el 4, para el de $k=2$, síguese que los términos de la serie antedicha no podrán subir hasta el valor 4.

De la fórmula (1) poniendo $a=b+1$, se deriva esta otra.

$$(n+1)b^{n}<(b+1)^{n+1}-b^{n+1};$$

y por consecuencia:

$$(n+1).1^n < 2^{n+1} - 1^{n+1}$$
$$(n+1).2^n < 3^{n+1} - 2^{n+1}$$
$$(n+1).3^n < 4^{n+1} - 3^{n+1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

De las cuales, sumando ordenadamente se desprende:

$$(n+1)\,(1^n + 2^n + \ldots + k^n) < (k+1)^{n+1} - 1.$$

Y poniendo $b = a - 1$ (la misma suposición que antes) tenemos:

$$a^{n+1} - (a-1)^{n+1} < (n+1)a^n\,;$$

Y por consecuencia:

$$1^{n+1} - 0^{n+1} < (n+1).1^n$$
$$2^{n+1} - 1^{n+1} < (n+1).2^n$$
$$3^{n+1} - 2^{n+1} < (n+1).3^n$$

De las cuales, sumando ordenadamente resulta:

$$k^{n+1} < (n+1)\,(1^n + 2^n + \ldots + k^n)$$

La limitación hallada, pues, es en suma:

$$k^{n+1} < (n+1)\,(1^n + 2^n + \ldots + k^n) < (k+1)^{n+1} - 1$$

de la cual se desprende esta desigualdad:

$$(n+1)\,(1^n + 2^n + \ldots + k^n) - k^{n+1} < (k+1)^{n+1} - k^{n+1} - 1$$

ó bien dividiendo sus miembros por $(n+1)k^{n+1}$, la siguiente:

$$\frac{1^n+2^n+...+k^n}{k^{n+1}}-\frac{1}{n+1}$$

$$<\frac{1}{n+1}\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{n+1}-1-\frac{1}{k^{n+1}}\right\}$$

A medida que crezca k, el segundo miembro irá disminuyendo; y cuando llegue k al *infinito*, se hará *cero*, y entonces tomará el quebrado

$$\frac{1^n+2^n+...+k^n}{k^{n+1}} \text{ el valor } \frac{1}{n+1} \quad (*)$$

XIII.—Divisibilidad de los números. (**)

(HEIS—27 y 28.)

47. Cuando el cociente de dos números *(enteros)* a y m, sea un número entero, y por lo tanto se realice la división de a por m, se dice que a es *divisible* por m; que m se halla contenido en a; que a es *dividendo* (múltiplo) de m; que m es *divisor* (partidor medida) de a. Todos los números de la

---

(*) Esta ley, cuyos principios se encuentran ya en los escritos de Arquímedes (*Spirale* 10), y cuya institución era el preliminar para el cálculo de las integrales definidas, ha sido demostrada y desenvuelta por los matemáticos de la primera mitad del siglo XVII. *Fermat y Roberval* (Carta de 11 de Octubre de 1637. Fermat op. p. 140). *Pascal* (Obras ed. por Lahure II p. 482) *Wallis* (Arithm. infin. 1656. Véase Estereometría $ 9).

(**) En este capítulo que pertenece á la Aritmética en su propio sentido (Teoría de los números), bajo la palabra número se comprenderá el *número entero*.

forma mx, ó que la forma mx comprende cuando la indeterminada x *(indeterminata)* se sustituye por números enteros, cualesquiera son divisibles por m. Los números divisibles por 2 cuya forma general es $2x$, se llaman *pares (pares)*. Los números no divisibles por 2, cuya forma general es $2x+1$ se llaman *impares (impares)*. EUCL. VII def. 5 y siguientes.

Si a es divisible por m, y m lo es por p, será también a divisible por p. Pues según la hipótesis, $a=mx$, $m=py$; y por consecuencia, $a=pxy$. Y cuando a sea divisible m y z un número cualquiera, el producto az será tambien divisible por m.

48. Si a y b son divisibles por m, y x é y números cualesquiera, será también $ax \pm by$ divisible por m (EUCL. V. 1.) Pues según la hipótesis, $a= m\alpha\, b=m\beta$, y por consecuencia, $ax \pm by=m(\alpha x \pm \beta y)$. Si las diferencias $(a-b)$ y $(c-d)$ son divisibles por m, lo serán también las siguientes:

$$(a \pm c)-(b \pm d),\ ac-bd,\ a^2-b^2,\ a^3-b^3 \ldots$$

Porque

$$(a \pm c)-(b \pm d)=(a-b) \pm (c-d)$$
$$ac-bd=(a-b)c+b(c-d)$$
$$a^2-b^2=(a-b)\ a+b)$$
$$a^3-b^3=(a-b)\ (a^2+ab+b^2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

49. Si el número a se divide por b y obtenemos el resto c y se divide de nuevo b por c y se obtiene el resto d... etc., llegaremos al resto 0. Pues los números b, c, d,... forman una serie decreciente. La serie de ecuaciones que resulta de proceder, como hemos dicho, es esta (31):

$$a=pb+c$$
$$b=qc+d$$
$$\cdots\cdots$$
$$f=tg+h$$
$$g=uh$$

El último resto hallado h, diferente de cero, es el *máximo común divisor* de los números a y b. Pues h es divisor de g, y también (48) de $tg+h$ ó de f, y de todos los restos precedentes; y por consecuencia, de b y de a. Recíprocamente se concluye que todo divisor de a y de b lo es también de los restos $c, d...h$; y por consecuencia, no puede ser mayor que h.

Dos números cuyo máximo común divisor sea 1, ó que no tenga divisor común mayor que 1, se llaman *primos entre sí (primi inter se*, primos relativos). Siendo h el máximo común divisor de los números a y b, los cocientes $a:h$ y $b:h$ son primos entre sí. En particular, dos números consecutivos de la serie natural a y $a+1$, son primos relativos. Eucl. VII, 1.

Nota.—Un quebrado es *reducible* cuando sus términos no son primos entre sí, y entonces se obtiene su más sencilla expresión, dividiéndolos por su máximo común divisor (34). Si el numerador y el denominador de un quebrado son primos entre sí, el quebrado es *irreducible*.

Para hallar el máximo común divisor de varios números a, b, c... se calcula el máximo común divisor h de los dos primeros (ú otros) a y b; luego el de h y c que le designamos por h', y así sucesivamente. Todo número contenido en a y en b, es divisor de h; todo divisor de a, b, c lo es de h y de c, y por lo tanto, de h', etc., etc.

50. Si a y b son primos entre sí, todo divisor común de ak y de b lo será de k, y si además es ak divisible por b, será k divisible por b.

Demostración.—Bajo la hipótesis de ser a y b primos entre si en la serie de ecuaciones (49), será el último resto $h=1$, y por consecuencia:

$$ak=pbk+ck$$
$$bk=qck+dk$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$fk=tgk+k.$$

De aquí se concluye (48) que todo divisor de ak y de b lo es de ck, de dk,...y de k, y también que si ak es divisible por b, este número b es divisor de ck, dk,... y de k.

51. Los dividendos ó múltiplos comunes de los números a y b, esto es, los números divisibles al mismo tiempo por a y por b, son todos de la forma $a\frac{b}{h}x$, en la cual h significa el máximo común divisor de a y de b. Pues haciendo $a=h\alpha$, $b=h\beta$, si ak es divisible por b, será αk divisible por β; y como α y β son primos entre sí (49), será (50) k divisible por , esto es: $k=\beta x$; y por consecuencia, $ak=a\beta x$.

Los dividendos comunes de los números a, b, c, son de la forma $a\frac{b\ c}{h\ h'}$ en la cual h' significa el máximo común divisor de $a\frac{b}{h}$ y de c. Etc., etc.

El *mínimo común dividendo* (múltiplo) de a y b es, por lo tanto, $a\frac{b}{h}$; el mínimo común dividendo de a, b, c, es $a\frac{b}{h}\,\frac{c}{h'}$etc., etc. El de los números primos relativos a y b es ab. Y todo número divisible por los números primos relativos a y b, será divisible por el producto ab de los mismos. EUCL. VII, 36 y siguientes.

52. Recíprocamente: Si cada uno de los números a y k es primo con b, su producto ak será también primo con b. Pues todo divisor de ak y de b sería divisor de k (50), y por consecuencia, ya no podría ser k primo con b: contra la hipótesis. EUCLIDES VII y siguientes.

Las potencias de números primos relativos son también números primos relativos. Si a es primo con b, será también aa primo con b y a primo con bb; y por consecuencia, a^2 primo con b^2, con b^3 ... etcétera.

53. Un número que no sea visible por ningún otro número diferente de la unidad, se llama *primo (primus)*.

Todo número, ó es primo ó es divisible por números primos. EUCL. VII, 34.

Demostración.—Si a no es primo, será divisible por b; este divisor ó será primo ó divisible á su vez por c; c, ó será primo ó divisible por d, etc., etc. Los números b, c, d... forman una serie decreciente, que por serlo consta de un número finito de términos, y acaba en un número primo por el cual son divisibles todos los anteriores, y por lo tanto el número dado (47).

NOTA.—Es conveniente no contar á la unidad entre los números primos, porque así dos números primos serán, sin excepción, primos entre sí. El único número primo par, es el 2. Si el número a se halla comprendido entre los cuadrados r^2 y $(r+1)^2$

y no es divisible por ningún número primo menor que r, será primo. Admitamos que a sea divisible por un número primo mayor que r, por $r+s$, por ejemplo; entonces, de la igualdad $a=(r+s)x$ se deduciría que a habría de ser divisible por x. Pero

$$x=\frac{a}{r+s}<\frac{(r+1)^2}{r+s}<r+1$$

y esto prueba que x ó es un número primo que no sobrepuja á r, ó es divisible por un número primo de esta condición; y por consecuencia, a habría de ser divisible por un número primo inferior á r, lo cual es contra la hipótesis. Luego a no puede ser divisible tampoco por ningún número primo superior á r.

54. La serie natural contiene infinitos números primos. Eucl. IX, 20.

Demostración.—Supongamos que sea p el mayor número primo conocido, y A el producto de todos los números primos conocidos, 3, 5, 7,... p: entonces $A+1$, ó será un número primo superior á p ó divisible por un número primo superior á p. El producto A es, en efecto, divisible por cada uno de los números primos desde el 2 hasta el último p; mas $A+1$ es primo con A (49) y no es divisible, en consecuencia, por ninguno de los números primos, desde 2 hasta p: luego si $A+1$ no es primo, deberá ser divisible por un número primo mayor que p, y de aquí que no exista número dado primo, que sea el *último* de la serie natural.

Nota.—Para el orden de sucesión de los números primos no se conoce ley ninguna. No existe polinomio constituído por potencias de una indeterminada que comprenda solamente números primos.

La fórmula $41-x+x^2$ produce números primos desde $x=1$ hasta $x=40$ (EULER. Hist. de l'Acad. de Berlín, 1772, p. 36); pero la fórmula $a+bx+cx^2$, si para $x=m$ produce un número primo $a+bm+cm^2=p$, para $x=m+py$ produce el número.

$$a+b(m+py)+c(m+py)^2=p+(b+2cm)py+cp^2y^2$$

que es divisible por p (LEGENDRE-*Théorie des nombres, introd.* 20).

55. Un número que es divisible por otro, además de por la unidad, puede considerarse como producto de números primos determinados (factores *simples)* y se dice *compuesto* por estos números primos. La forma general de un número compuesto por los números primo a, b, c,... es la siguiente:

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

Un número compuesto de los números primos a, b, c... no es divisible por otro número primo p; y por lo tanto, no es compuesto de otros números primos diferentes de los primeros. Pues cada uno de los a, b, c,... es primo con p; y en consecuencia, el producto $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ es también primo con p (52).

56. Conocida la composición de ciertos números dados, se sabe mediante sus factores si uno de ellos es divisible por otro; cuál es su mínimo común dividendo; cuál su máximo común divisor, y si son potencias de otro número.

El número N será divisible por N_1, siempre que el segundo no contenga otros factores simples, ni un mismo factor simple repetido más veces que el primero. Pues si ab es divisible por $a_1 b_1$, al mismo tiempo que a_1 está contenido en a, y b_1 primo con a, será b divisible por b_1. Porque haciendo $a = a_1 c$, y siendo cb divisible por b_1 y b_1 primo con c, por necesidad b_1 estará contenido en b (50). Así: $360 = 2^3 . 3^2 . 5$ es divisible por $24 = 2^3 . 3$ más no por $48 = 2^4 . 3$ ni por $63 = 3^3 . 7$. Un quebrado irreducible sólo puede convertirse en una fracción decimal finita, cuando su denominador es de la forma $2^\alpha . 5^\beta$.

El mínimo común dividendo de los números N, N_1 y N_2....se hallará formado el producto de *todos* sus factores simples, diferentes, con el mayor exponente que en ellos aparezca. Así el mínimo común dividendo de los números $N = 3.5.7$, $N_1 = 2^3 . 7$, $N_2 = 2. 3^2$ y $N_3 = 2^3 . 3$ será $2^3 . 3^2 . 5. 7$: en el cual figuran todos los factores simples diferentes de los números dados, pero con los mayores exponentes.

El máximo común divisor de los números N, N_1 y N_2... es el producto de sus factores simples, *comunes*, con el menor exponente que en las descomposiciones de aquéllos tengan. Así: los números $N = 2^2 . 3^4 5$ y $N_1 = 2^5 . 3^3 . 7$ tienen el máximo común divisor $2^2 . 3^3$. Si a, b y c representan números primos y $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ es la potencia m de un número k, los exponentes α, β, γ son divisibles por m. Pues si entran α factores a en el número k, en la potencia k^m entrarán αm, esto es, un múltiplo de m; etc.

Si f, g, h son primos entre sí, y su producto fgh es una potencia m^a, aquellos números f, g, h son también potencias m^{as}. Pues ningún factor simple puede tener en fgh exponente distinto del que tenga en cualquiera de los números f, g, h, que son primos entre sí.

57. Por la descomposición de un número en

sus factores simples pueden fácilmente calcularse todos sus divisores. Siendo a, b, c números primos, $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$ será divisible por todos los términos del producto.

$$(1+a+a^2+...a^\alpha)\,(1+b+b^2+...b^\beta)\,(1+c+c^2+...c^\gamma)$$

y sólo por estos términos. Pues todos ellos están contenidos en la forma $a^r\, b^s\, c^t$, en la cual no pueden los exponentes r, s, t, sobrepujar á los α, β, γ; y, por consecuencia, $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$ será divisible por $a^r\, b^s\, c^t$ (56).

El número de todos los divisores del número $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$ (incluyendo la unidad y el mismo número) está expresado por la forma

$$(1+\alpha)\,(1+\beta)\,(1+\gamma).$$

Porque el primer polinomio, factor del anterior producto, comprende $1+\alpha$ términos; el segundo, $1+\beta$; y el tercero, $1+\gamma$.

La suma de todos los divisores del número propuesto es el producto por cuyo desarrollo pueden hallarse todos aquellos divisores.

Ahora bien, la suma de los divisores $1+a+a^2+...+a^\alpha$ se halla desarrollando el cociente $\dfrac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$ etcétera (37). Luego la suma que buscamos tendrá, según lo dicho, la expresión:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}.$$

Así, el número $360=2^3.3^2.5$, tiene $4.3.2=24$ divisores, á saber:

1, 2, 4, 8; 3, 6, 12, 24; 9, 18, 36, 72;
5, 10, 20, 40; 15, 30, 60, 120; 45, 90, 180, 360.

La suma de todos estos divisores será, según la fórmula, 15.13.6=1170.

Nota.—Un número se llama *perfecto* (τελειός, *perfectus)*, cuando es igual á la suma de sus divisores (exceptuando el mismo número). Los números perfectos se hallan, desde la época que se conocieron, comprendidos en la forma $(2^x-1)\,2^{x-1}$, á condición de que 2^x-1 sea número primo (*).

Así: $2^2-1=3$, $2^3-1=7$, $2^5-1=31$, $2^7-1=127$ son números primos, y por consecuencia:

$$\begin{array}{l} 3\ .\ 2=\ 6=1+2+3 \\ 7\ .\ 4=\ 28=1+2+4+7+14 \\ 13\ .\ 16=496=1+2+4+8+16+\ldots \end{array}$$

Cuando 2^x-1 sea número primo, en efecto, la suma de todos los divisores, incluso él mismo, del número $(2^x-1)2^{x-1}$, es, según acabamos de probar:

$$(1+2^x-1)(1+2+2^2+\ldots+2^{x-1})=2^x(2^x-1)$$
$$=2.(2^x-1)2^{x-1}.$$

Luego, excluyendo el número $(2^x-1).2^{x-1}$, dicha suma es igual á este mismo.

Dos números se llaman *amigables (amicabiles)* cuando cada uno de ellos es igual á la suma de los divisores del otro (no incluyendo entre los diviso-

(*) Eucl. VII, 22, IX, 36. Klügel math. W. V. pág. 887. Terquem, Nouv. Ann. III, Sobre los números *amicabiles* véase Klügel math. W. I p. 546. V. p. 55.

res á los mismos números). Así 220 y 284 son amigables, ó *amigos*, según algunos.

58. Si p, q, r,... significan los factores primos del producto ABC..., y entre los números A', B', C', hay, por lo menos, tantos divisibles por p, p^2..., q, q^2..., r, r^2..., como entre los números A, B, C..., el producto $A'B'C'$... es divisible por el producto ABC... (*).

Así, por ejemplo, entre los números 3, 4, 5, 6, 9 hay 2 divisibles por 2; 1 por 2^2; 3 por 3; 1 por 3^2, y 1 por 5.

Entre los números 12, 18, 45, hay 2 divisibles por 2; 1 por 2^2, 3 por 3; 2 por 3^2; y 1 por 5.

Y como los divisibles últimamente contados no son menos que los contados primeramente; resulta que el producto de los números 12, 18 y 45, es divisible por el producto 3.4.5.6.9.

Demostración.—Fijémonos en un solo factor primo p, y supongamos que entre los números A, B, C,... haya α divisibles por p, β divisibles por p^2, γ divisibles por p^3... El producto ABC... desde luego será divisible por p^α; el cociente resultante será á su vez divisible por p^β; el nuevo cociente lo será por p^γ..., etc. Luego el producto ABC... contiene $\alpha+\beta+\gamma$... factores p. Si, pues, los números α', β', γ',... tienen igual significación para los A', B', C'; como estos últimos, según la hipótesis, no son menores que los primeros, y, por consecuencia, la suma $\alpha'+\beta'+\gamma'+$... tampoco es menor que $\alpha+\beta+\gamma$..., resulta que $A'B'C'$... no contiene menos factores p que ABC.—Lo mismo podría demostrarse que

(*) Los teoremas 58 y 59 son de Gauss. *Disquisitiones arithm.* 126, 127, 41.

$A'B'C'$... tampoco contiene menos factores q, r... que ABC... Luego $A'B'C'$... es divisible (56) por ABC...

59. Si se divide por k un número cualquiera m, de la serie natural, y se designa por m' el entero del cociente $m : k$, en la serie expresada hasta m, esto es, en la serie 1, 2, 3... m, habrá m' términos divisibles por k, á saber: k, $2k$, $3k$... $m'k$. Si designamos por m'' el entero del cociente $m' : k$, en la serie 1, 2, 3... m' habrá también m'' términos divisibles por k; y por consecuencia, en la serie primera m'' términos divisibles por k^2; etc.

En la serie del mismo número de términos consecutivos, $a+1$, $a+2$, $a+3 ... a+m$, existen por lo menos m', y á lo más $m'+1$ números, divisibles por k. El número menor de la serie, divisible por k, no puede ser mayor que $a+k$. Designándolo por $a+c$, en la serie propuesta habrá los m' números,

$$a+c,\ a+c+k, \ldots\ a+c+(m'-1)k$$

divisibles por k; y además el término $a+c+m'k$, cuando c sea suficientemente pequeño.

El producto $(a+1)\,(a+2) \ldots (a+m)$ es divisible por el producto $1.2 \ldots m$. Pues, si los factores primos del segundo producto son p, q, r..., entre los números $a+1$, $a+2, \ldots a+m$, habrá por lo menos, tantos divisibles por $p, p^2, \ldots q, q^2, \ldots r, r^2, \ldots$ como entre los números $1, 2, \ldots m$: y por consecuencia, el producto de los primeros es divisible por el de los segundos (58). El cociente del primer producto por el segundo es un número *figurado* (XXVIII); y por lo tanto, una suma de números enteros, ó sea, un número entero.

Cuando $m=a+b+c...$, el producto $1.2.3...m$ es divisible por el producto

$$1.2...a.1.2...b.1.2...c...$$

Puesto que $1.2...a$ es divisible por $1.2...a$; $(a+1)(a+2)...(a+b)$ es divisible por $1.2...b$; $(a+b+1)(a+b+2)...(a+b+c)$ es divisible por $1.2...c$ etc. El cociente será divisible por m cuando sea m número primo. Y representa también, por otra parte, el número de permutaciones de ciertos elementos (135): de lo cual se desprende que es entero.

60. Cuando los divisores a, b, c... del número m son primos entre sí dos á dos (esto es, cualquiera de ellos primo con cada uno de los restantes) en la serie natural 1, 2, 3,...m existen

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)...$$

números que no son divisibles por a, b, c... (*).

Demostración.—En la serie dada existen $\frac{m}{a}$ términos divisibles por a que son: a, $2a$, $3a$... $\frac{m}{a}\,a$. Quitando, pues, estos $\frac{m}{a}$ términos, quedan en dicha serie

$$m-\frac{m}{a}=m\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

que son divisibles por a.

(*) Euler 1763. Nov. Comm. Petrop. 8 p. 74. Acta Petrop. 4 II p. 18. 8 p. 17. Gauss *Disquisitiones arithm.* 38. Diriclhet *Zahlentheorie von Dedekind* 11.

Veamos ahora cuáles son los múltiplos de b, que no han sido ya descontados en concepto de múltiplos también de a. En la serie propuesta existen los siguientes múltiplos de b:

$$b, 2b, 3b, \ldots \frac{m}{b} b;$$

mas por ser a y b primos entre sí, en esta serie de múltiplos de b, existirán (50) tantos no divisibles por a, como en la serie

$$1, 2, 3 \ldots \frac{m}{b};$$

y en esta serie según dijimos en un principio, existen $\frac{m}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)$ términos no divisibles por a. Quitando estos $\frac{m}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)$ términos no divisibles por a, sino solamente divisibles por b, de los que quedaron en la serie primitiva después de haber sustraído los múltiplos de a, quedarán de la misma

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)-\frac{m}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)=m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

términos que no son divisibles ni por a ni por b.

De estos términos que quedan, hay que sustraer ahora los múltiplos de c que no hayan sido ya sustraídos en el concepto de múltiplos también de a ó de b. Para hallar cuántos son tales múltiplos exclusivos de c, hallaremos en la serie de todos los múltiplos de c, á saber:

$$c.\ 2c,\ 3c,\ldots\ \frac{m}{c}c,$$

cuántos hay no divisibles por a ni por b: del mismo modo que hemos determinado arriba cuantos términos contiene la serie primitiva no divisibles por a ni por b. La cuestión, pues, queda reducida á sustituir m (número de términos de la serie primitiva) por $\frac{m}{c}$ (conjunto de los múltiplos de c en la misma) en la expresión antes escrita. Haciéndolo así obtendremos esta otra:

$$\frac{m}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

para el número de los múltiplos exclusivos de c, comprendidos en la serie propuesta; y la diferencia

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)-\frac{m}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$
$$=m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

expresa el número de términos que quedan en la misma y no son divisibles por a, por b, ni por c. Etcétera.

61. Designando por a, b, c... h, todos los factores primos del número m, en la serie 1, 2, 3...m, existirán

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{h}\right)$$

números no divisibles por a ni por b,... ni por h (60); y que serán, por consecuencia, primos con m.

La última expresión fué designada por *Gauss* (lug. cit.) sencillamente por la función φ (m): la cual expresa cuantos números primos con m existen en la serie 1, 2...m.

Ejemplo. $60=2^2.3.5$. En la serie 1, 2,...60, existen

$$\varphi(60)=60.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{5}=16$$

que son primos con 60, á saber:

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
59, 53, 49, 47, 43, 41, 37, 31,

Cuando m y k son primos entre sí, lo son también m y $m-k$.

Considerando el número 1 como primo consigo mismo, podemos establecer la igualdad $\varphi(1)=1$.

Un número primo p es primo con todos los números inferiores: luego $\varphi(p)=p-1$.

Cuando a, b, c, representan números primos y es $m=a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$, será:

$$\varphi(m)=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(a-1)\ (b-1)\ c-1)$$

Si m es divisible por μ números primos impares, $\varphi(m)$ será divisible por 2μ. Si m y n se componen de los mismos factores primos, el cociente $\varphi(m):\varphi(n)$ estará expresado por potencias de los mismos. Así $\varphi(360):\varphi(60)=6=2.3$.

Si m y m' son primos relativos, tendremos desde luego:

$$\varphi(m)=m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\ldots$$

$$\varphi(m')=m'\left(1-\frac{1}{a'}\right)\left(1-\frac{1}{b'}\right)\ldots$$

$$\varphi(mm')=mm'\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{a'}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{b'}\right)\ldots$$

y por consecuencia:

$$\varphi(mm')=\varphi(m)\varphi(m')$$

Así: $\varphi(36)=\varphi(4)\varphi(9)=2.6=12$.

62. Si δ es divisor de m, en la serie 1.2,... no existirán $\varphi\left(\frac{m}{\delta}\right)$ términos que tienen con m común el máximo divisor δ. En efecto, en la serie dicha hay divisibles por δ los siguientes: δ, 2δ, 3δ,... $\frac{m}{\delta}\delta$; pero δ será máximo común divisor de los números $k\delta$ y $\frac{m}{\delta}\delta=m$, sólo cuando k y $\frac{m}{\delta}$ sean primos entre sí. Luego en la serie desde 1 hasta m, existen tantos números que tienen común con m el máximo divisor δ, cuantos en la serie 1.2... $\frac{m}{\delta}$ haya primos con $\frac{m}{\delta}$, esto es, $\varphi\left(\frac{m}{\delta}\right)$: conforme á la notación ya admitida (61).

Representando, pues, por δ_1, δ_2, δ_3... todos los divisores del número m, se verificará la igualdad: (*)

$$\varphi(\delta_1)+\varphi(\delta_2)+\varphi(\delta_3)+\ldots=m.$$

(*) Gauss *Disq. arith.* 39. Dirichlet, obra ya citada.

En efecto: agrupemos los números de la serie 1.2.3,...m, según el máximo divisor que tengan común con m. En el grupo de los que tengan común con m el máximo divisor δ_1 habrá, como antes dijimos, $\varphi\left(\frac{m}{\delta_1}\right)$ números; en el grupo correspondiente al divisor δ_2 habrá $\varphi\left(\frac{m}{\delta_2}\right)$; etc. La suma $\varphi\left(\frac{m}{\delta_1}\right)$ $+\varphi\left(\frac{m}{\delta_2}\right)+\ldots$ es igual á m, esto es, al conjunto de términos en los grupos expresados distribuídos. Por otra parte, la serie $\frac{m}{\delta_1}$, $\frac{m}{\delta_2}\ldots$ comprende todos los divisores del número m. Para confirmar esto, supongamos que a, b, c, sean los factores primos de $m=a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Todo divisor δ de este número, tendrá la forma $\delta=a^\lambda b^\mu c^\nu$ en la cual pueden recibir: λ uno cualquiera de los valores 0, 1, 2... α; μ uno cualquiera de la serie 0, 1, 2,...β; ν uno cualquiera de la serie 0, 1, 2,... γ. Según el teorema precedente (61).

$$\varphi(\delta)=\varphi(a^\lambda)\varphi(b^\mu)\varphi(c^\nu);$$

y por consecuencia, la suma de todos los valores de $\varphi(\delta)$ que corresponden á cada uno de los que pueden tomar λ, μ, ν, es igual al producto de las series correspondientes

$$\varphi(1)+\varphi(a)+\varphi(a^2)+\ldots+\varphi(a^\alpha)$$
$$\varphi(1)+\varphi(b)+\varphi(b^2)+\ldots+\varphi(b^\beta)$$
$$\varphi(1)+\varphi(c)+\varphi(c^2)+\ldots+\varphi(c^\gamma)$$

Pero escribiendo explícitamente los valores de la función φ en la primera serie tendremos (61):

$$1+(a-1)+a(a-1)+a^2(a-1)+\ldots+(a^{\alpha-1}(a-1)$$
$$=1+(a-1)(1+a+a^2+\ldots+a^{\alpha-1})=1+a^\alpha-1=a^\alpha$$

(37); y lo mismo puede hacerse con las otras dos que valdrán respectivamente b^a y c^γ. Luego la suma de todos los valores de $\varphi(\delta)$, ó sea el producto de las tres series escritas, es $a^\alpha b^\beta c^\gamma=m$.

Ejemplo.—El número 60 tiene los divisores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Luego, aplicando lo dicho antes:

$\varphi(1)$	1	$\varphi(5)$	4	$\varphi(15)$	8
$\varphi(2)$	1	$\varphi(6)$	2	$\varphi(20)$	8
$\varphi(3)$	2	$\varphi(10)$	4	$\varphi(30)$	8
$\varphi(4)$	2	$\varphi(12)$	4	$\varphi(60)$	16

Los valores de la función φ correspondientes á todos los divisores de 60 componen este mismo número.

63. Todo número a puede ser expresado, sin excepción y de un solo modo, mediante un múltiplo de un número positivo, dado k y un número r de la serie 0, 1, 2,... $k-1$. Es decir, que la forma general y determinativa de un número cualquiera es $a=sk+r$. Pues si a pudiera admitir otro modo de expresión tal como $s'k+r'$, restando sus dos supuestas formas, obtendríamos $r-r'=(s'-s)k$, esto es: $r-r'$ divisible por k, cuando r y r' son menores que k.

Representado el número a de esta manera, toma r el nombre de *resto del número a, según el módulo, ó respecto del módulo k*. Dos números a y b se llamarán *congruentes* (*côngruos* también) ó *incongruentes* (*incôngruos*) según que tengan el mismo resto ó restos diferentes respecto del módulo k. La congruencia de los números a y b, según el módulo k, se escribe como sigue (*)

$$a \equiv b (\text{mod. } k)$$

Y de esta expresión se deduce que los números congruentes con b, según el módulo k, tienen la forma $b+tk$. Son ciertas las congruencias: $32 \equiv 17$ (mod. 5); $23 \equiv -17$ (mod. 8); porque en cuanto á la primera, 32 y 17 dan el mismo resto 2, al ser divididos por 5; y respecto de la segunda, 23 y -17 dejan el mismo resto 7 al ser divididos por 8.

La diferencia de dos números congruentes a y b, según el módulo k, es de la forma tk, esto es, divisible por el módulo de la congruencia. Todo divisor común de a y k, es también divisor de b; y por lo tanto, el máximo común divisor de a y k es al mismo tiempo el máximo común divisor de b y k.

Reciprocamente se concluye que los números a y b, serán ó no congruentes (mod. k), según que su diferencia sea ó no divisible por k.

64. I. Dos números congruentes, según el módulo k, lo son también según cualquiera divisor de este módulo. Dos números congruentes, respecto de los módulos k, l, m,..., lo serán tambien, respecto del mínimo común dividendo (51) de tales módulos. Porque, según la hipótesis la diferencia de dichos dos números es divisible por k, por l, por m; etc., etc.

(*) Gauss *Disquisitionis arithmética* 1. Dirichlet *Zahlentheorie* 17.

II. Si los dos pares de números a y b, m y n son congruentes respecto de un módulo, las sumas ó las diferencias, $a \pm m$, y $b \pm n$; los productos am y bn; las potencias a^c y b^c serán congruentes también, según el mismo módulo. Porque éste se halla contenido tanto en $(a-b)$ como en $(m-n)$, conforme á la hipótesis. Luego etc. (48).

En general, si los números x é y, a_0 y b_0, a_1 y b_1 a_2 y b_2 etc., son congruentes respecto de un módulo cualquiera, los polinomios $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ y $b_0+b_1y+b_2y^2+\ldots$ serán también, respecto del mismo módulo, congruentes.

III. De la congruencia (mod. k) de los múltiplos am y bm se desprende la congruencia de los números a y b; no según el mismo módulo k, sino solamente respecto del módulo $\frac{k}{\delta}$, cuando δ representa el máximo común divisor de m y k. En efecto, conforme á la hipótesis, $m(a-b)$ es divisible por k, y por lo tanto, $\frac{m}{\delta}(a-b)$ es divisible por $\frac{k}{\delta}$: y como $\frac{m}{\delta}$ y $\frac{k}{\delta}$ son primos entre sí, es necesario que $(a-b)$ sea divisible por $\frac{k}{\delta}$ (50).

De las congruencias

$27 \equiv 12$ (mod. 5) se desprende $9 \equiv 4$ (mod. 5)
$120 \equiv 84$ (mod. 18) $10 \equiv 7$ (mod. 3)

65. Todos los números pueden distribuirse, respecto del módulo k, en k clases; á condición de que figuren en cada una de ellas los números respectivamente cóngruos con cada uno de los términos de la serie de restos $0, 1, 2, \ldots k-1$. Es decir que

los números comprendidos en una misma clase son congruentes, y los de clases distintas son incongruentes, respecto del módulo adoptado (63). Eligiendo á voluntad un número de cada clase, formaremos con los escogidos un *sistema completo de números incongruentes* (mod. k).

Los k números sucesivos y $1, 2, \ldots k$; $c, c+1, c+2, \ldots c+k-1$; etc., forman dos sistemas completos de números incongruentes.

Si los números $x_1, x_2 \ldots x_k$ son incongruentes (mod. k), y b es primo con k, los números $a+bx_1$, $a+bx_2, \ldots a+bx_k$, constituirán también un sistema completo de números incongruentes. Porque si $a+bx_1$ y $a+bx_2$ por ejemplo, fuesen congruentes (mod. k), su diferencia $b(x_1-x_2)$ sería divisible por k; y, como b y k son primos, x_1-x_2 sería divisible por k (50); ó, lo que es igual, $x_1 \equiv x_2$ (mod. k): contra la hipótesis.

Si δ es un divisor de k, en la serie $1, 2 \ldots k$ existen $\varphi\left(\frac{k}{\delta}\right)$ términos que tienen común con k el máximo divisor δ (62); pero cada uno de dichos términos caracteriza una clase de las que antes hablamos: luego entre éstas habrá $\varphi\left(\frac{k}{\delta}\right)$ clases en las cuales se hallarán contenidos los números que tengan común con k el máximo divisor δ. De donde resulta, por ser $\delta=1$ el máximo común divisor de los números primos entre sí, que los números primos con k se encontrarán distribuídos en $\varphi(k)$ clases.

66. Los restos de productos ó de potencias se deducen con facilidad de los restos de sus factores. Cuando $a \equiv r$, y $a' \equiv r'$ (mod. k), será $aa' \equiv rr'$

(mod. k) (64); y si $a^\alpha \equiv s$ (mod. k), será $a^{\alpha+1} = a^\alpha a \equiv sr$ (mod. k). Los números 217 y 57 dan los restos 9 y 5 según el módulo 13; luego el producto 257.17 dará el mismo resto que el producto de los restos $9.5 = 45 \equiv 6$ (mod. 13); y la potencia $57^2 \equiv 5.5 = 25 \equiv -1$ (mod. 13).

La congruencia, según el módulo 2, $a^\alpha \equiv a$ se verifica siempre; porque a^α y a dan el mismo resto 0, si a es par; y el mismo resto 1, cuando a sea impar.

Tomando por módulo el número 5, todos los números serán congruentes con uno de los de la serie 0, 1, 2, —2, —1; y todos los cuadrados ó segundas potencias serán congruentes, por lo tanto, con alguno de los números 0, 1, —1. Sí, pues, el cuadrado a^2 es congruente con 0, con 1, ó con —1; ó dicho de otro modo: si a, ó a^2-1, ó a^2+1 es divisible por 5, el producto $a(a^2-1)(a^2+1) = a^5 - a$ será divisible por 5, esto es: $a^5 \equiv a$ (mod. 5): y como antes hemos demostrado que $a^5 \equiv a$ (mod. 2), resulta esta congruencia: $a^5 \equiv a$ (mod. 10). Lo cual significa que las quintas potencias tienen la misma cifra de las unidades que los números elevados á ellas.

Las potencias sucesivas 57, 57^2, 57^3,... son congruentes (mod. 13) respectivamente, con los números 5, —1, —5, 1 que se repiten periódicamente. Las 9, 9^2, 9^3,... son congruentes (mod. 11) con los números —2, 4, 3, 5, 1; y las mismas son congruentes (mod. 5) con los números —1, 1. Las 12, 12^2, 12^3... son congruentes (mod. 15) con los números —3, —6, 3, 6 respectivamente.

67. Cuando el módulo es un número primo p, y el dignando a no es divisible por p, los restos de las potencias a, a^2, a^3... forman períodos de $(p-1)$ términos á lo sumo, siendo $a^{p-1} \equiv 1$, $a^p \equiv a$, (módu-

lo p) (*). Si el módulo es un número compuesto k, y a es primo con k, los restos (mod. k) de las potencias a, a^2, a^3,... forman períodos de $\varphi(k)$ términos, lo más; esto es: con tantos términos, á lo sumo, como números primos con k existan en la serie 1, 2, 3...k, siendo $a^{\varphi(k)} \equiv 1$ (mod. k).

Respecto del módulo 5, la potencia 3^4 da el resto 1; según el módulo 37, la potencia 5^{36} da también el resto 1. Respecto del módulo 7, no sólo la potencia 2^6, sino también la 2^3, dan el resto 1; según el módulo 13, la potencia 5^{12} da el resto 1; pero antes que ella la 5^4 da también el resto 1. Como $\varphi(15) = 8$, es $2^8 \equiv 1$ (mod. 15); pero ya antes, 2^4 da también el resto 1, según el mismo módulo 15.

Demostración.—Designemos por r_1, r_2, r_3,... los restos (mod. p) de los productos sucesivos a, $2a$, $3a$,...; entonces los productos

$$1.2.3...(p-1)a^{p-1} \text{ y } r_1 r_2 r_3 ... r_{p-1}$$

serán congruentes (64). Por ser a primo con p, los restos r_1, r_2, r_3,... serán todos diferentes de 0 é incongruentes (65); ó lo que es igual, dichos restos serán los números de la serie 1, 2, 3... $p-1$, cuyo producto es 1.2.3... $(p-1)$. Y como este producto es primo con p, será (64-III) $a^{p-1} \equiv 1$ (mod. p). La congruencia $a^p \equiv a$ (mod. p) se verifica también aun cuando a sea divisible por p.

Cuando el módulo sea un número compuesto,

(*) *Teorema de Fermat* (1640).—La extensión de este teorema á los módulos compuestos, por Euler, se halla en los Nov. Comm. Petrop. 8, p. 74. Véase Gauss, *Disq. arithm.* 50 La demostración sencilla del texto pertenece á Dirihlet, J. de Crelle. 3, p. 390, y Zahlentheorie. § 19.

k, representemos por k_1, k_2, k_3,... los números de la serie 1, 2,... k, primos con k, cuyo conjunto es $\varphi(k)$; y por r_1, r_2, r_3,... los restos (mod. k) de los productos ak_1, ak_2, ak_3,... Por multiplicación obtendremos la congruencia

$$a^{\varphi(k)}\, k_1k_2k_3,... \equiv r_1r_2r_3,...\ (\text{mod. } k).$$

Mas, por ser a primo con k, los números k_1, k_2, k_3,... son incongruentes; y los restos r_1, r_2, r_3,... son también incongruentes; diferentes de 0 y primos con k; luego son números de la serie k_1, k_2, k_3...: de modo que $r_1r_2r_3... \equiv k_1k_2k_3...$; y, por consecuencia

$$a^{\varphi(k)} \equiv 1\ (\text{mod. } k).$$

68. Todos los cuadrados, no divisibles por k, son congruentes (mod. k) con ciertos números de la serie 1, 2...$k-1$, y con los otros no. Los primeros (y todos los congruentes son ellos) se llaman *restos cuadráticos de k;* los segundos *no-restos cuadráticos de k* (*).

Puesto que $(k \pm x)^2 - x^2$ es divisible por k, es evidente la congruencia

$$(k \pm x)^2 \equiv x^2\ (\text{mod. } k).$$

La cual enseña que, para hallar los restos de todos los cuadrados, según el módulo k, ó sean, todos los restos cuadráticos de k, sólo debemos emplear los cuadrados de los números 1, 2... $\frac{1}{2}(k-1)$, ó $\frac{1}{2}k$, conforme k sea impar, ó par.

La formación de los cuadrados de los números

(*) Esta distinción, importante en la Aritmética, se debe á Euler, *Opusc. anal.* I, p. 263. Véase Gauss, *Disq. arithm.* 94. Dirichlet, *Zahlentheorie* § 32.

naturales 1, 2, 3... se facilita mediante la igualdad $(a+1)^2=a^2+2a+1$. Esta nos enseña, en efecto, que los cuadrados de dichos números 1, 2, 3... se forman agregando los números impares. Así: $2^2=1+3$; $3^2=2^2+5$; $4^2=3^2+7$, etc., etc. Y por igual procedimiento se deducen los restos de estos cuadrados, respecto de un módulo cualquiera. Así, por ejemplo, respecto del módulo 13, los cuadrados $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ producen respectivamente los restos 1, $1+3$, $4+5$, $9+7\equiv3$; $3+9$, $12+11\equiv10$. Por consecuencia: todos los cuadrados, no divisibles por 13, son congruentes (mod. 13) con alguno de los números 1, 3, 4, 9, 10, 12; mientras que los otros números, que pueden ser restos también de 13, á saber: 2, 5, 6, 7, 8, 11, no serán restos nunca de cuadrados, respecto del expresado módulo. Los primeros son los *restos* (cuadráticos) de 13; los segundos son los *no-restos*.

	3	5	7	9	11	13			
14 tiene los restos:	1	4	9	2	11	8	7		
y los no-restos:	3	5	6	10	12	13			
	3	5	7	9	11	13			
15 tiene los restos:	1	4	9	1	10	6	4		
y los no-restos:	2	3	5	7	8	11	12	13	14
	3	5	7	9	11	13	15		
17 tiene los restos:	1	4	9	16	8	2	15	13	
y los no restos:	3	5	6	7	10	11	12	14	

Si p es un número primo, impar, y a y b representan números de la serie 1, 2, 3... $\frac{1}{2}(p-1)$, los cuadrados a^2 y b^2 serán incongruentes, según el módulo p; porque, si se verificara la congruencia $a^2\equiv b^2$ (mod. p), ó, lo que es igual, si $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ fuera divisible por p, por ser $a-b$

primo con p, debería ser $a+b$ divisible por p; contra la hipótesis establecida para a y b Luego no existen menos de $\frac{1}{2}(p-1)$ restos cuadráticos de p.

69. Si p es un número primo, y a no divisible por p, los números de la serie 1, 2, 3...$p-1$, podrán aparearse de modo que los productos constituídos por cada par sean congruentes con a, según el módulo p. En particular, si a es resto cuadrático de p, en la serie 1, 2, 3...$p-1$, existen dos números complementarios de p, cada uno de los cuales, repetido, constituye un par de la especie explicada (*).

Ejemplo.—Sea $p=7$; sus restos cuadráticos son 1, 2, 4; y, por lo tanto, $12\equiv 5$ (mod. 7) pertenece á los no-restos; y $9\equiv 2$ á los restos. De los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 pueden formarse tres pares, de tal modo que los productos constituídos por cada uno de ellos sean congruentes (mod. 7) con 12; y otros cuatro pares, cuyos respectivos productos sean congruentes con 9. Los primeros son en efecto:

$$1 \,.\, 5 \equiv 2 \,.\, 6 \equiv 3 \,.\, 4 \equiv 12$$

y los segundos:

$$1 \,.\, 2 \equiv 3 \,.\, 3 \equiv 4 \,.\, 4 \equiv 5 \,.\, 6 \equiv 9$$

Cada uno de los números 3 y 4 cuya suma es 7 (el módulo), forma, repetido, un par, con la propiedad en el teorema expresada.

(*) Este teorema y las demostraciones de los siguentes se deben á DIRICHLET, *J. de Crelle*, 3, p. 390.

Demostración.—Designemos por m cualquiera de los números 1, 2,... $p-1$, el cual será primo con p. Los números m, $2m$,... $(p-1)m$ darán, respecto del módulo p, los restos, diferentes entre sí, aunque en otro orden, que constituyen el sistema 1, 2,... $p-1$ (65). Mas uno de estos restos debe ser el de a, según el mismo módulo p; puesto que a no es divisible por p; luego entre los productos m, $2m$,... $(p-1)m$ existe uno, y uno solo, congruente con a, según el módulo p.

Si a fuese resto cuadrático de p, en la serie 1, 2,...$\frac{1}{2}(p-1)$ habría un solo número k que consigo mismo formaría un par, con la propiedad definida por la congruencia $k^2 \equiv a \pmod{p}$ (68). Al mismo tiempo se verificaría la congruencia $(k-p)^2 \equiv a \pmod{p}$.

70. Si p es un número primo, y a no es divisible por p, se verificará la congruencia.

$$1.\ 2.\ 3\ldots\ (p-1) \equiv \varepsilon a^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

en la cual ε recibe el valor 1 ó -1, según que a sea no-resto cuadrático, ó resto de p.

Demostración.—Si a es no-resto de p, los números m, m_1, m_2... de la serie 1, 2, 3,... $p-1$, pueden aparearse con estos otros n, n_1, n_2... de la misma serie, de tal modo que (69)

$$mn \equiv m_1n_1 \equiv m_2n_2 \equiv \ldots \equiv a \pmod{p}$$

de estas $\frac{1}{2}(p-1)$ congruencias se deduce (64-II) esta otra:

$$mm_1m_2\ldots nn_1n_2\ldots \equiv a^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{p}$$

cuyo primer miembro es el producto 1.2.3... $(p-1)$. Etcétera.

Si a es resto de p, los números m, m_1, m_2... de la serie 1, 2,... $p-1$. después de separar de ella dos determinados, k y $p-k$, podrán aparearse con estos otros n, n_1, n_2... de la misma serie, de modo que:

$$mn \equiv m_1 n_1 \equiv m_2 n_2 \equiv \ldots \equiv a \pmod{p}$$

De estas $\frac{1}{2}(p-3)$ congruencias se desprende la siguiente:

$$m m_1 m_2 \ldots n n_1 n_2 \ldots = \frac{1.2.3\ldots(p-1)}{k(p-k)} \equiv a^{\frac{1}{2}(p-3)} \pmod{p}$$

Pero $k\,(p-k) \equiv -k^2 \equiv -a \pmod{p}$: luego, por multiplicación, resulta:

$$1.2.3\ldots(p-1) \equiv -a^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{p}$$

71. Si p es un número primo, se verificará la congruencia (*)

$$1.2.3\ldots(p-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

La demostración se desprende del teorema último, considerando solamente que 1 es resto cuadrático de p, y que $1^{\frac{1}{2}(p-1)} = 1$.

Recíprocamente se concluye que, si la suma del producto 1.2... $(p-1)$, y 1, es divisible por p, este número p es primo. Porque si p fuese divisible por un número menor, q, el producto 1.2... $(p-1)$ lo

(*) Teorema de Wilson.—Véase Gauss *Disq. arith.* 76.

sería también por el divisor q; pero la suma 1.2... $(p-1)+1$ de ningún modo lo sería.

Si p es un número primo y a no es divisible por p, la potencia $a^{\frac{1}{2}(p-1)}$ será congruente con 1 ó con -1, según a sea resto ó no resto de p (*).

Luego p, ó es divisor de $a^{\frac{1}{2}(p-1)}-1$, ó de $a^{\frac{1}{2}(p-1)}+1$; y por lo tanto, será siempre divisor del producto de estas dos formas; esto es, de $a^{p-1}-1$: conforme expresa el teorema de *Fermat* (67).

(*) Teorema de Euler. *Opusc. anal.* I, p. 263). Sobre la divisibilidad de 10^p-1 y 10^p+1 por el número primo $2p+1$, véase Euler *Hist de l'Acad.* de Berlín, 1772, p. 35.

LIBRO SEGUNDO

LAS POTENCIAS, LAS RAICES, LOS LOGARITMOS Y LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

XIV.—Cuadrado de un número decimal.

72. El cuadrado de un polinomio es igual al cuadrado de su primer término, más el duplo del producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del tercer término; más el duplo del producto de los dos primeros términos por el tercero, más el cuadrado del tercer término; más el duplo del producto de los tres primeros términos por el cuarto, más el cuadrado del cuarto término, etc., etc.

Demostración.—Según (28), tenemos:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2&=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2\\&=a^2+2ab+b^2\\&\quad+2(a+b)c+c^2\\&\quad+2(a+b+c)d+d^2\end{aligned}$$

....

....

73. Para elevar al cuadrado, según la regla anterior, un número decimal, esto es, un polinomio compuesto de unidades, decenas, centenas, etc., etc.; y de décimas, centésimas, etc., se coloca en la primera línea el cuadrado de su cifra más alta; á la derecha del duplo de esta cifra se coloca la inmediata, y el número así formado se multiplica por la segunda cifra, escribiendo este producto en la segunda línea de modo que avance dos lugares á la derecha respecto de la primera; á la derecha del duplo del número constituído por las dos primeras cifras del propuesto, se escribe la tercera y se multiplica el número resultante por esta misma tercera cifra, escribiendo el producto en la tercera línea, de modo que avance dos lugares á la derecha de la segunda, etc., etc.; y últimamente, se suman en columna las cifras escritas. Ejemplo.

$7486^2 =$	49..
144	576..
1488	11904..
14966	89796
	56040196

La primera fila es el cuadrado 7.7; la segunda el producto 144.4; la tercera el producto 1488.8; la cuarta el producto 14966.6. En el primer producto cada factor representa millares; en el segundo, centenas; en el tercero, decenas; etc., etc.; y de aquí procede la advertencia expresada para su colocación. La coma se coloca después del cuadrado de las unidades. Por ejemplo:

$30{,}018^2=900{,}00..$		$0{,}0209^2=0{,}000400..$	
60 01	6001..	409	3681
60 028	480224		0,00043681
	901,080324		

El cálculo abreviado para elevar al cuadrado números decimales inexactos, puede verse en los siguientes ejemplos:

$28{,}357^2=4..$		$3{,}15806^2=9{,}..$	
4	384,..	6 2	61..
56	16 89	6 30	3125.
566	2 83	6 316	5046
	39		38
	804,11		9,97334

74. Si el número comienza por la m^a cifra, antes de la coma, su cuadrado comenzará por la $(2m-1)^a$ ó $2m^a$ cifra, antes de la coma.

Si el número comienza por la m^a cifra, después de la coma, su cuadrado comenzará por la $2m^a$ ó la $(2m-1)^a$ cifra, después de la coma.

El cuadrado de tres millares son 9 millones; el de 4 millares 16 millones; el de 3 milésimas 9 millonésimas; el de 4 milésimas 16 millonésimas.

XV.—Raiz cuadrada de un número decimal.

75. La *raíz cuadrada* de un número es el número cuyo cuadrado es igual al número propuesto *(radicandus)*. La raíz cuadrada de a se designa

por $\sqrt{\ }a$. El signo $\sqrt{\ }$ se formó de la inicial de *radix* en el siglo XVI. La raya que va unida al signo radical sustituye al paréntesis en que se incluye al radicando, cuando es un producto ó un polinomio.

$$\sqrt{a^2}=a;\ \sqrt{a}^{\,2}=a$$
$$\sqrt{49}=7;\ \text{porque } 7^2=49$$
$$\sqrt{0{,}09}=0{,}3;\ \text{porque } 0{,}3^2=0{,}09$$
$$\sqrt{a+b}=\sqrt{\ }(a+b)$$

76. Si el radicando es un número decimal que comienza por el lugar $(2m-1)^o$ ó $2m^o$, antes de la coma, su raíz cuadrada comenzará por el lugar m^o, antes de la coma (74).

Si el radicando comienza por la cifra del orden $(2m-1)^o$ ó el $2m^o$, después de la coma, su raíz cuadrada comenzará por la cifra del orden m^o, después de la coma.

$\sqrt{\ }$ 38475 comienza por las centenas,
$\sqrt{\ }$ 0,007 » » » centésimas.

77. Para calcular la raíz cuadrada de un número decimal, 28573,84521, por ejemplo, se divide partiendo de la coma por la derecha y por la izquierda en secciones de dos cifras así:

2 | 85 | 73.84 | 52 | 1

Desde luego conocemos (76) que su raíz debe comenzar por el orden 3º, después de la coma, esto es, por las centenas, por comenzar el radicando por el orden 5º $=2.3-1$; y, de consiguiente, constará de a centenas, b decenas, c unidades, d décimas; etc. Las cifras de este número decimal, incógnito, se determinarán sucesivamente de modo que las partes del cuadrado del mismo (73) sustraidas del radicando, dejen restos mínimos positivos.

En primer lugar, a^2 no puede ser mayor que la primera sección 2, para que así pueda sustraerse del radicando el cuadrado de la raíz; y, por consecuencia, debe ser $a=1$. Hallada esta primera cifra de la raíz, se sustrae su cuadrado a^2, y á la derecha del resto 1, se escribe la segunda sección 85: y enfrente, el duplo 2 de la dicha primera cifra 1.

En segundo lugar, $2b$ debe ser menor que 18, y, por lo tanto, $b=18:2$; pero no podemos tomar el cociente 9, sino $b=6$; porque 27.7 es ya mayor que 185. Coloco el cociente 6 al lado del duplo 2, y el producto $26.6=156$ lo escribo debajo del 185 para sustraerlo de este número, y á la derecha del resto 29 pongo la sección siguiente 73; y enfrente, el duplo, 32, de las dos primeras cifras, 16, de la raíz.

Ahora bien, $32c$ debe ser menor que 297; y, por lo tanto, $c=297:32$; tomo por cociente la cifra 9 que coloco al lado del duplo 32, y el producto $329.9=2961$ lo sustraigo de 2973, y á la derecha del resto 12 escribo la siguiente sección 84; y enfrente, el duplo, 338, de las tres primeras cifras, 169, de la raíz.

El producto $338d$ debe, pues, ser menor que 128; y, por lo tanto, $d=128:338$; tomo 0 por cociente, y en vez de restar el producto 3380.0 del número 1284, coloco á la derecha de este número la sección siguiente 52; y enfrente, el duplo 3380 de las cuatro primeras cifras, 1690, de la raíz; y así se continúa la operación, como patentiza el ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{lr}
\sqrt{2 \mid 85 \mid 73{,}84 \mid 52 \mid 1} = \underline{169{,}037...} & \\
\underline{1} & \\
185 & 26 \\
\underline{156} & \\
2973 & 329 \\
\underline{2961} & \\
128452 & 33803 \\
\underline{101409} & \\
2704310 & 338067 \\
\underline{2366469} & \\
337841.. &
\end{array}$$

Cuando el cálculo se detiene, se aumenta en 1 la última cifra de la raíz, siempre que esta raíz, así aumentada, produzca un resto menor, en absoluto, que el obtenido con la cifra última sin el aumento. En el ejemplo precedente la última cifra debe ser 8 mejor que 7.

Si el radicando es una fracción decimal pura, su raíz cuadrada tendrá 0 unidades; las décimas de la raíz serán la raíz de las centésimas del radicando; y, si también son 0, las centésimas de la raíz serán la raíz de las diezmilésimas del radicando, etc., etc. Ejemplo:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{0{,}1} = \sqrt{0{,}10} = \underline{0{,}316...} & \\
\underline{9} & \\
100 & 61 \\
\underline{61} & \\
3900 & 626 \\
\underline{3756} & \\
144 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\sqrt{0{,}00003} = \underline{0{,}00547...} & \\
\underline{25} & \\
500 & 104 \\
\underline{416} & \\
8400 & 1087 \\
\underline{7609} & \\
791... &
\end{array}$$

78. Después de haber calculado m cifras de la raíz (prescindiendo de los ceros precedentes) se pueden calcular de un modo sencillo las $m—1$ ó m cifras siguientes, dividiendo abreviadamente el resto por el duplo de la raíz hallada. Ejemplo:

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{30} & = & \underline{5{,}4772_3} \\
\underline{25} & & \\
500 & & 104 \\
\underline{416} & & \\
8400 & & 1087 \\
\underline{7609} & & \\
791 & & 1094 \\
\underline{766} & & \\
25 & & \\
\underline{22} & & \\
3 & &
\end{array}
$$

En lugar de dividir 7910 por 1094, se divide 791 por $109{,}_4$ y se calcula este cociente con cuanta aproximación sea posible, según la regla de la división abreviada. Siendo a el radicando, b la parte calculada de la raíz $\sqrt{a}$, y r el resto, tendremos $b^2+r=a$. Si, pues, tomamos $b+\frac{r}{2b}$ para valor de la raíz que se busca, el error cometido será:

$$b+\frac{r}{2b}-\sqrt{a}=\frac{(b+r:2b)^2-a}{b+r:2b+\sqrt{a}}=\frac{r^2}{2b(2b^2+r+2b\sqrt{a})}$$

$$=\frac{r^2}{2b(b+\sqrt{a})^2}<\left(\frac{r}{2b}\right)^2:2b$$

En el ejemplo anterior es $\frac{r}{2b}$ próximamente igual á 0,007; y $2b$ próximamente igual á 10; luego el error$<0,000005$.

XVI.—Teoremas sobre las raices cuadradas.

(HEIS.—50, 51, 42, 43, 49, 55).

79. La raíz cuadrada de un *producto* es el producto de las raices de cada uno de los factores.

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$$

Demostración.—$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2$ es el producto de los factores $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{a}\sqrt{b}$ (IV), ó de los factores (10) $\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b}$, esto es: ab, que es el radicando (75).

Por ser $12=4.3$ es $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$
» $63=9.7$ » $\sqrt{63}=3\sqrt{7}$
» $75=25.3$ » $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$, etc., etc.

$$2\sqrt{7}=\sqrt{4}\sqrt{7}=\sqrt{28};$$
$$\sqrt{3}\sqrt{5}=\sqrt{15};\ \sqrt{3}\sqrt{15}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

Las fracciones $\frac{a}{\sqrt{b}}$ y $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ pueden ser expresadas en forma más sencilla, multiplicando sus dos términos por $\sqrt{b}$ y $\sqrt{c}$, respectivamente.

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b};\quad \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

80. La raíz cuadrada de un *quebrado* es el cociente de la raíz cuadrada del numerador por la del denominador.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Demostración.—$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$$=\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\frac{a}{b}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{15}{21}}=\sqrt{\frac{5}{7}}$$

La raíz de un quebrado ordinario se calculará más sencillamente convirtiendo dicho quebrado en fracción decimal.

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{0{,}666\ldots}\ \text{mejor que}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

La raíz cuadrada de una fracción, en general, se expresará del modo más sencillo, transformándola de manera que su denominador sea un cuadrado.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b};\sqrt{\frac{7}{12}}=\sqrt{\frac{21}{36}}=\frac{\sqrt{21}}{6}$$

81. La raíz cuadrada de un *polinomio* es diferente del agregado de las raíces cuadradas de cada uno de sus términos.

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Puesto que:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<a+b<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

Mas $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}=\sqrt{(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2}=\sqrt{x+y\pm2\sqrt{xy}}.$

Y aplicando esta fórmula:

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}=\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}$$

Y de éstas, por adición y sustracción:

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}$$

$$\sqrt{a-b}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

a	8	a^2-b^2	4
b	$2\sqrt{15}$	$\sqrt{a^2-b^2}$	2
a^2	64	$\frac{1}{2}(a+\sqrt{\ })$	5
b^2	60	$\frac{1}{2}(a-\sqrt{\ })$	3

La raíz cuadrada de un polinomio puede ser desarrollada en términos por el mismo método que se usa para calcular la de un número decimal (77) y (44).

82. La raíz cuadrada de un número entero, ó es entera ó *irracional*: (*) lo cual quiere decir que no puede ser expresada exactamente por ningún quebrado, aunque sí aproximadamente con un error tan pequeño como queramos.

Demostración.—Supongamos que $\sqrt{a}$ sea igual al quebrado irreducible (49) $\frac{r}{s}$; entonces $\left(\frac{r}{s}\right)^2 = \frac{r^2}{s^2} = a$ (37 y 75); pero $\frac{r^2}{s^2}$ es también quebrado irreducible (52): luego a no puede ser entero, contra la hipótesis; y por consecuencia, $\sqrt{a}$ no puede ser expresada exactamente por un quebrado.

Por otra parte, dado un número entero arbitrario s, siempre puede determinarse otro número entero r, de tal manera que:

$$\frac{r}{s} < \sqrt{a} < \frac{r+1}{s}$$

Y así se encuentra para $\sqrt{a}$ el valor aproximado

(*) ἄλογος ἄῤῥητος, *surdus*. Esta última palabra que se halla en Leonardo Fibonacci 1202 (*Liber abaci* fol. 160) y se usaba aún en el siglo XVIII, era probablemente la traducción de la traducción arábiga de la voz técnica griega. La *irracionalidad* fué estudiada por la Escuela pitagórica, y objeto para Platón de muchas meditaciones. En el libro X de los *Elementos de Euclides* se encuentra un Capítulo dedicado á la irracionalidad. De esta suerte provienen los teoremas anteriores sobre las raíces.

$\frac{r}{s}$ con un error más pequeño que $\frac{1}{s}$, diferencia entre $\frac{r+1}{s}$ y $\frac{r}{s}$.

Nota. Los números que son exactamente expresados por fracciones se llaman *racionales* (ῥητός). La raíz cuadrada de un número entero no puede ser una fracción decimal periódica, porque el valor de esta fracción es racional.

83. Toda raíz cuadrada es *biforme (biformis)* esto es: su valor puede ser tomado positiva ó negativamente. Si, pues, b es un valor de $\sqrt{a}$, también será $-b$ un valor de $\sqrt{a}$; porque $(-b)^2 = b^2$ (25) $\sqrt{49} = \pm 7$; $\sqrt{a^2} = \pm a$. El doble signo es necesario siempre que no se escriba el signo radical. El producto de raíces $\sqrt{a}\sqrt{b}$ es biforme como $\sqrt{ab}$ (79). Sólo $\sqrt{a}\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$ es *uniforme*. La suma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es cuatriforme.

84. Las raíces cuadradas de los números negativos son *imaginarias*, esto es: pueden deducirse por multiplicación y división de la raíz irreducible $\sqrt{-1}$, que se denomina la *unidad imaginaria*, positiva ó negativa, y se representa por i (*)

(*) Desde que se conoció la resolución de las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, fueron tomados en consideración los números imaginarios (Bonbelli, *Algebra*, 1572) El ugel, math. W. I. pág. 37). Se llamaron entonces *imposibles*, porque no podían ser expresados por números reales; del mismo modo que se tuvieron por imposibles *(falsae)* las diferencias con sustraendos mayores que los minuendos, antes de la introducción de los números negativos. Las expresiones *real* é *imaginario* se encuentran por vez primera en Descartes (Geom. III) como predicados de las raíces de las ecuaciones. El signo i fué introducido por Gauss (Disq. arithm. 337).

La fórmula (79) $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$ persiste aun cuando x é y no sean ambos positivos. Puesto que:

$$\sqrt{-a}=\sqrt{(-1)a}=\sqrt{-1}\sqrt{a}=i\sqrt{a};\ \sqrt{-81}=\pm 9i;$$

$$\sqrt{-b^2}=\pm ib;\ \sqrt{a-b}=i\sqrt{b-a}.$$

La raíz cuadrada de la unidad negativa es, como ya dijimos, irreducible; ni es 1, ni — 1; ni ningún otro número, positivo ó negativo, diferente de 1 ó de — 1; porque los cuadrados de estos números son diferentes de — 1.

Los números deducidos por multiplicación y división de 1 y — 1, se denominan *reales;* en oposición á los *imaginarios*, deducidos de i y — i.

La serie de los números reales, y la serie de los imaginarios; tienen al *cero* común solamente.

En la multiplicación y división de números imaginarios, conforme á la regla (79), deben tenerse en cuenta las igualdades:

$$i^2=-1 \qquad i^5=i^4i=i$$

$$i^3=i^2i=-i \qquad i^6=i^4i^2=-1$$

$$i^4=i^2i^2=1 \qquad i^7=i^4i^3=-i$$

$$i^8=i^4i^4=1$$

. . . .

de las cuales se desprenden estas otras:

$$\frac{1}{i}=\frac{i^4}{i}=i^3=-i$$

$$\frac{1}{i^2}=\frac{i^4}{i^2}=i^2=-1$$

$$\frac{1}{i^3}=\frac{i^4}{i^3}=i;\ \text{etc., etc.}$$

85. Los números comprendidos en la fórmula $x + \sqrt{y}$, en la cual x representa un número real, cualquiera, é y un número real cualquiera, *negativo*, son binomios que tienen un término real, y el otro imaginario, y se llaman *números complejos* (*). La fórmula $a + ib$ comprende todos los números de que puede tratar la ARITMÉTICA: el número real a, ó el imaginario ib, según que b, ó a desaparezcan ó se anulen.

Por la suma ó la diferencia de los números complejos $a + ib$, $a + id$, debe comprenderse siempre el complejo $a \pm c + i(b \pm d)$.

La diferencia de dos números complejos se anula solamente, y solamente también son entonces iguales dichos números, cuando el término real del uno es igual al término real del otro, y además el término imaginario del uno es igual al término imaginario del otro.

Todos los números pueden ser representados sobre un plano de tal modo que los puntos (lugares) correspondientes á los números reales se hallen sobre una misma recta; si bien unos, los *positivos* á cierto lado, y los *negativos* al lado opuesto del punto *cero* (origen); y que los puntos correspondientes á los complejos que tengan común el término real a,

(*) Los números complejos, aunque D'ALEMBERT y EULER, 1646, notaran su utilidad en muchas investigaciones, permanecieron tolerados más bien que conocidos, hasta que GAUSS estableció el concepto más general del número haciéndolo perceptible. (*Gott. gel. Anzeig.* 23 *Abril* 1831). En su *Theor. resid. biquad.* 30, se hallan las expresiones de *número complejo* y *norma* del mismo, por vez primera. CAUCHY en 1821. (*Anal. álgebr.*, c. 7), había dado el nombre de *conjugadas* á las formas $a + ib$, $a - ib$; y el de *módulo*, á la raíz cuadrada de su producto.

se hallen sobre otra recta, perpendicular á la primera en el punto a, lugar que representa el número a. Los puntos correspondientes á los números imaginarios se encuentran sobre la perpendicular trazada por el punto *cero* á la recta que contiene los puntos de los números reales.

La magnitud (valor absoluto, *módulo*) del número $a+ib$, está representada por su distancia al origen; y, por consecuencia, según el teorema de Pitágoras, por la raíz cuadrada positiva de a^2+b^2. Los números $a+ib, a-ib, -a+ib, -a-ib$, tienen igual tamaño ó módulo: el cual sobrepuja tanto á la magnitud absoluta de a como á la de b. Sobre una circunferencia trazada alrededor del punto origen, como centro, se encuentran infinitos números de igual magnitud, entre los cuales hay *dos* reales y *dos* imaginarios. La magnitud de la diferencia $c+id-(a+ib)=c-a+i(d-b)$, es la hipotenusa de los catetos $c-a$ y $d-b$, ó sea, la distancia del punto $c+id$ al punto $a+ib$. (Véase más adelante, 192).

La multiplicación por un número complejo se efectúa multiplicando por cada uno de sus términos. Así:

$$\begin{aligned}(a+ib)\,(c+id) &= ac+ibc+iad-bd\\ &= ac-bd+i(bc+ad),\\ (a+ib)\,(a-ib) &= a^2+b^2.\end{aligned}$$

Los complejos $a+ib$ y $a-ib$, cuya suma y cuyo producto son reales, se llaman *conjugados*. El número real a^2+b^2, divisible por $a+ib$ y por $a-ib$, se denomina *norma* de los complejos conjugados $a+ib$ y $a-ib$: la cual es el cuadrado de su módulo.

La suma de los complejos conjugados

$$(\alpha+i\beta)(a+ib)^2+(\alpha-i\beta)(a-ib)^2=2\alpha a^2-4\beta ab-2\alpha b^2$$

$$=\frac{2}{\alpha}(\alpha^2 a^2-2\alpha\beta ab-\alpha^2 b^2)$$

$$=\frac{2}{\alpha}\left\{(\alpha a-\beta b)^2-(\alpha^2+\beta^2)b^2\right\}$$

contiene un término real positivo, y otro término también real, negativo.

La norma del producto de factores complejos es el producto de sus normas respectivas. Porque $pq.p'q'=pp'\,qq'$; y poniendo por p, q, p', q' los factores $(a+ib)$, $(c+id)$, $(a-ib)$, $(c-id)$, tendremos, según el ejemplo anterior:

$$(a+ib)\,(c+id)\,(a-ib)\,(c-id)$$

$$=\left\{(ac-bd)+i(bc+ad)\right\}.\left\{(ac-bd)-i\,(bc+ad)\right\}$$

$$=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)$$

La división por un número complejo puede convertirse en multiplicación por su conjugado, dividiendo después el producto por la norma del complejo divisor dado. Así:

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

La raíz cuadrada positiva de un número complejo es (81):

$$\sqrt{a+ib}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

$$\sqrt{a-ib}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

si las raíces cuadradas se toman positivamente.

Los módulos de la suma y de la diferencia de dos complejos, $a+ib$, $c+id$, se hallan comprendidos entre la diferencia y la suma de los módulos de aquellos números. Puesto que:

$$(a\pm c)^2+(b\pm d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2\pm 2(ac+bd)$$
$$(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ad-bc)^2$$

De donde se desprende que $ac+bd$ se halla comprendido entre

$$-\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \text{ y } +\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

Y como

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\pm\sqrt{c^2+d^2}\right)^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$\pm 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)},$$

resulta que

$(a\pm c)^2+(b\pm d)^2$ se hallan comprendidos entre

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \text{ y } \left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right)^2$$

Nota.—En general, se llaman *conjugados* los diferentes valores de una fórmula irracional, multitiforme. El producto de los mismos es racional, y se denomina *norma de la fórmula irracional*. Así, por ejemplo, $a+\sqrt{x}$ y $a-\sqrt{x}$ son fórmulas irracionales, conjugadas, cuya norma es a^2-x (V. Algebra cap. X.)

XVII.—Teoremas sobre las potencias.

Heis.—36, 37, 38, 34, 35, 39).

86. Para elevar un *producto* á una potencia, (potenciar) se eleva cada uuo de sus factores á dicha potencia. Así:

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Pues $(ab)^m$ es el producto de m factores iguales al ab (IV), en un orden cualquiera (10): y, por consecuencia, es el producto de m factores iguales al a, por m factores iguales al b.

Nota.—Según esta misma regla se elevan á potencias números negativos y números imaginarios. Porque $-a=(-1)a$; y, por lo tanto, $(-a)^m = (-1)^m a^m$.

Las potencias de -1 son 1 ó -1, según que el exponente sea par ó impar (26). Del mismo modo es $(ia)^m = i^m a^m$ (84).

87. Para potenciar un *quebrado* por un exponente cualquiera se potencian por el mismo sus dos términos. Así:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Pues la potencia requerida es el producto de m

factores iguales á $\frac{a}{b}$, esto es: el producto de m factores a, dividido por el producto de m factores b. (37)

En particular es

$$\left(\frac{1}{b}\right)^m=\frac{1}{b^m}$$

88. Para potenciar una potencia se multiplica el exponente de la potencia dada por el de la potencia que se pide. Así:

$$(a^b)^c=a^{bc}=(a^c)^b$$

Porque la potencia buscada es el producto de c factores a^b; y por lo tanto, de bc factores a, en atención á que a^b es ya el producto de b factores a.

Del mismo modo $(a^c)^b$ es el producto de $cb=bc$ factores a.

Por el contrario: a^{b^c} significa una potencia cuyo dignando es a y cuyo exponente es b^c.

89. Para multiplicar potencias del mismo dignando se suman sus exponentes. Así:

$$a^m a^n=a^{m+n}$$

Porque el producto buscado debe tener $m+n$ factores a.

90. Para dividir una por otra, dos potencias del mismo dignando, se restan sus exponentes. Así:

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}=\frac{1}{a^{n-m}}$$

Cuando $m>n$, el dividendo y el divisor pueden ser divididos por a^n y quedan entonces $m-n$ factores a. Si $m=n$, el cociente es 1. Si $m<n$, dividendo y divisor pueden ser divididos por a^m, y en el dividendo resulta 1, y en el divisor $n-m$ factores a.

91. La potencia a^{m-n} se define también por el cociente $a^m : a^n$, aun *cuando su exponente sea nulo ó negativo*. Por consecuencia:

$$a^o = a^{m-m} = a^m : a^m = 1$$

en el supuesto, se entiende, de que el dignando a sea finito (40). Y

$$a^{-k} = a^{m-(m+k)} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}; \left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

En lenguaje vulgar expresan estas fórmulas que una potencia con exponente negativo es igual á la potencia del dignando recíproco con el exponente positivo: ó bien, que para potenciar por un número entero puede potenciarse el dignando recíproco por el número igualmente opuesto al primero.

92. Los teoremas desde el 86 al 90, acerca del cálculo de las potencias, se verifican también para las de *exponentes negativos* (*). Así:

(*) La primera traza de un cálculo con exponentes se encuentra en ARQUÍMEDES ψαμμίτης 10.—Véase NESSELMANN. *Alg. der Griechen*, p. 124 Los exponentes negativos para el mismo objeto fueron usados por STIEFEL (*Arithm.*, fol. 250. Más adelante los emplean STEVIN, 1585. KLÜGEL math. W. I., página 43) y el inventor de los logaritmos. El concepto general de *potencia* se debe principalmente á NEWTON. (Carta á LEIBNITZ de 13 de Junio de 1676).

$$(ab)^{-m}=a^{-m}b^{-m};\ \text{porque}\ \left(\frac{1}{ab}\right)^m=\left(\frac{1}{a}\right)^m\left(\frac{1}{b}\right)^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\frac{a^{-m}}{b^{-m}};\ \text{porque}\ \left(\frac{b}{a}\right)^m=\left(\frac{1:a}{1:b}\right)^m$$

$$=\left(\frac{1}{a}\right)^m:\left(\frac{1}{b}\right)^m$$

$$\left(a^b\right)^{-c}=a^{-bc};\ \text{porque}\ \left(\frac{1}{a^b}\right)^c=\frac{1}{a^{bc}}$$

$$a^m a^{-n}=a^{m-n};\ \text{porque}\ \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$a^{-m}a^{-n}=a^{-(m+n)};\ \text{porque}\left(\frac{1}{a}\right)^m\left(\frac{1}{a}\right)^n=\left(\frac{1}{a}\right)^{m+n}$$

XVIII.—De la raíz.

(HEIS.—41, 42, 43, 45, 46, 47, 48.)

La raíz m^a de un número es el número que, elevado al *exponente-radical* m, da el número propuesto (el *radicando*). Así:

$$Raíz^{\text{exponente-radical}}=Radicando.$$

$$\sqrt[m]{a^m}=a$$

El exponente-radical (*índice* vulgarmente) se escribe sobre el signo de raíz (*) (75). La 2.ª raíz se

(*) A principios del siglo XVI usaban algunos para las raíces signos particulares, como puede verse en CRISTÓFORO RUDOLFF, mientras otros ya comenzaron á colocar los exponentes al lado ó encima del signo radical.

llama *raíz cuadrada*, y su exponente-radical suele omitirse; la 3.ª raíz se llama *cúbica*.

$$\sqrt[3]{8}=2\text{; porque } 2^3=8$$

$$\sqrt[4]{10000}=10\text{; porque } 10^4=10000$$

$$\sqrt[m]{a^m}=a;\ \sqrt[m]{a^{mn}}=a^n$$

Para calcular la raíz 3.ª, 5.ª,... etc. de un número decimal debemos considerar el modo como se forman sus potencias 3.ª, 5.ª,... etc.; y proceder según en los capítulos XIV y XV quedó explicado para la raíz cuadrada; pero los logaritmos nos ofrecen más fáciles procedimientos para el mismo fin, cuando el cálculo no traspasa ciertos límites.

94. Cuando el exponente radical sea un producto rs, puede simplificarse el cálculo, extrayendo la raíz s^a de la raíz r^a, ó bien la raíz r^a de la raíz s^a del radicando. Así:

$$\sqrt[rs]{a}=\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}}=\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}}.$$

En efecto (88):

$$\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}}^{\,rs}=\left(\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}}^{\,s}\right)^r=\sqrt[r]{a}^{\,r}=a.$$

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}};\ \sqrt[6]{a}=\sqrt[3]{\sqrt{a}};\ \sqrt[15]{a}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}$$

$$\sqrt[rs]{a^{rt}}=\sqrt[s]{\sqrt[r]{a^{rt}}}=\sqrt[s]{a^t}$$

Esta última fórmula en lenguaje vulgar expresa que la raíz de una potencia permanece invariable cuando los dos exponentes se dividen ó se multiplican por el mismo número.

95. La raíz de un *producto* es el producto de las raíces de cada uno de sus factores. Así:

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}.$$

Porque (86):

$$\left(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\right)^m = \sqrt[m]{a}^m \sqrt[m]{b}^m = ab.$$

96. La raíz de un *quebrado* es el cociente de la raíz del numerador por la raíz del denominador:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

Porque (87):

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\sqrt[m]{a}^m}{\sqrt[m]{b}^m} = \frac{a}{b}.$$

Puede trasformarse el quebrado de manera que su denominador sea la m^a potencia; y así se obtiene:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{ab^{m-1}}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{ab^{m-1}}}{b};$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{\frac{6}{8}}=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$$

Un quebrado, cuyo denominador sea $\sqrt[m]{A}+\sqrt[m]{B}$ puede transformarse en otro, cuyo denominador sea $A-B$ ó $A+B$, según que m sea par ó impar (45). Porque haciendo $a=\sqrt[m]{A}$ y $b=\sqrt[m]{B}$ tendremos $a^m=A$ y $b^m=B$, etc.

Si r y s son números primos entre sí, y x é y otro par de números, ligados con los primeros por la igualdad $rx-sy=1$, tendremos:

$$\sqrt[rs]{a}=\sqrt[rs]{a^{rx-sy}}=\sqrt[rs]{(a^{rs}:a^{sy})}=\sqrt[rs]{a^{rx}}:\sqrt[rs]{a^{sy}}$$

$$=\sqrt[s]{a^x}:\sqrt[r]{a^y}$$

97. La raíz m^a de una potencia n^a puede reducirse: ó potenciando por n la raíz m^a del dignando, ó dividiendo el exponente n de la potencia por el exponente m de la raíz. Así:

$$\sqrt[m]{a^n}=\overline{\sqrt[m]{a}}^{\,n}=a^{\frac{n}{m}}$$

Porque (88)

$$\left(\overline{\sqrt[m]{a}}^{\,n}\right)^m=\left(\overline{\sqrt[m]{a}}^{\,m}\right)^n=a^n$$

Y en el supuesto de que m se halle contenido en n, es asimismo:

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^{\frac{n}{m}m} = a^n$$

98. La potencia $a^{\frac{n}{m}}$ puede ser definida también por la raíz $\sqrt[m]{a^n}$ aun cuando el *exponente* $\frac{n}{m}$ *sea fraccionario*, esto es, aun cuando no sea m divisor de n. Y de este modo los teoremas anteriormente demostrados (XVII) para las potencias con exponentes enteros, abrazarán también las potencias con exponentes fraccionarios; convirtiendo, por consecuencia, los teoremas últimamente demostrados acerca de las raíces en casos particulares de los relativos á las potencias que antes recordamos. (*)

Si m y n son divisibles por c, las igualdades

$$a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n:c}{m:c}} \text{ y } \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:c]{a^{n:c}}$$

coinciden miembro á miembro.

Si $n = mq + r$,

$$a^{\frac{n}{m}} = a^{q+\frac{m}{r}} = a^m a^{\frac{r}{m}} \text{ coinciden con } \sqrt[m]{a^{mq+r}}$$

$$= \sqrt[m]{a^{mq}\, a^r} = \sqrt[m]{a^{mq}}\, \sqrt[m]{a^r} = a^q \sqrt[m]{a^r}$$

Además:

(*) **Las raíces fueron consideradas ya como potencias con exponentes fraccionarios por Stevin y Newton. Véase (92).**

$(ab)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}}\, b^{\frac{1}{m}}$ es lo mismo que $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}$,

$(a:b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} : b^{\frac{1}{m}}$ » » $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$ » » $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$a^{\frac{1}{m}} a^{-\frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{mn}}$ » » $\sqrt[m]{a}\,\sqrt[n]{a^{-1}}$

$$= \sqrt[mn]{a^n}\,\sqrt[mn]{a^{-m}} = \sqrt[mn]{a^n a^{-m}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$$

Nota.—Las raíces de los números mayores que 1 son también mayores que 1; y las raíces de los números menores que 1 son asimismo menores que 1. Las raíces sucesivas 2.ª, 3.ª, 4.ª..., de un número mayor ó menor que 1, forman una serie decreciente ó creciente hasta 1. En efecto, la razón de dos términos sucesivos de tal serie es:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n+1]{a} = \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} : \sqrt[n(n+1)]{a^n} = \sqrt[n(n+1)]{a}.$$

Por otra parte, si $c > 1$, la diferencia $\sqrt[m]{c} - 1$ puede hacerse menor que una fracción φ por pequeña que ésta sea, es decir: $\sqrt{c} - 1 < \varphi$, tomando m suficientemente grande para que $(1+\varphi)^m > c$, y si es $d < 1$, sucede lo mismo con la diferencia $1 - \sqrt[m]{d}$, puesto que $(1-\varphi)^m < d$ cuando m es suficientemente grande también (46). Luego $\sqrt[m]{a}$ ó $a^{\frac{1}{m}}$, sea a mayor ó menor qne 1, no diferirá en cantidad apreciable de 1 ó de a^0.

99. Las raíces de los números enteros, ó son enteras, ó irracionales (82). Porque, si fuese $\sqrt[m]{a}$ un quebrado irreducible $\frac{r}{s}$, sería $\left(\frac{r}{s}\right)^m = \frac{r^m}{s^m} = a$; en cuyo caso, por ser $\frac{r^m}{s^m}$ también irreducible (52), a no sería entero: contra la hipótesis. Luego $\sqrt[m]{a}$ no puede expresarse exactamente por una fracción.

100. La m^a, raíz de un número real ó imaginario (84), es el producto de un número positivo (absoluto) por la m^a, raíz de la unidad real ó imaginaria, positiva ó negativa. En el supuesto de ser $a = b^m$, será (95)

$$\sqrt[m]{\pm a} = b\sqrt[m]{\pm 1} \quad \text{y} \quad \sqrt[m]{\pm ia} = b\sqrt[m]{\pm i}.$$

Las raíces de las diferentes unidades son multiformes (*) y coinciden con las raíces de la ecuación $x^{4m} - 1 = o$ (Véase el cap. XXXI y parte tercera, cap. X).

Entre los valores de $\sqrt[m]{-1}$ siempre está 1; por-

(*) La multiplicidad de las raíces de una ecuación, fué claramente reconocida en cuanto se resolvieron las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas (DESCARTES, *Geom. III)*. Las raíces m^{as} de 1 y de -1 aparecen por vez primera en el teorema de COTES (*Harm. mens.* 1722 p. 114) que dá geométricamente (goniométricamente) los factores de $x^{2m} - 1$. Más costosa fué la resolución algebráica de la ecuación $x^m - 1 = 0$, esto es, la construcción de sus raíces por raíces de ecuaciones puras de menor grado, buscada por VANDERMONDE (Mem. de París 1771. *Resol. des equat.)* y encontrada por GAUSS (*Disq. arithm. VII)*. Véase LAGRANGE. Traité des equat. Note 14.

que $1^{m}=1$. Si m es par, está -1, porque entonces $(-1)^m=1$; y está $\pm i$, cuando m es divisible por 4; porque entonces $(\pm i)^m=1$.

Los valores de $\sqrt[m]{-1}$ figuran entre los de $\sqrt[2m]{1}$; porque

$$\sqrt[m]{-1}^{\,2m} = \left(\sqrt[m]{-1}^{\,m}\right)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Los valores de $\sqrt{\pm i}$ se encuentran entre los de $\sqrt[4m]{1}$; porque

$$\sqrt[m]{\pm i}^{\,4m} = \left(\sqrt[m]{\pm i}^{\,m}\right)^4 = (\pm i)^4 = 1.$$

De un valor de $\sqrt[m]{1}$ se pueden deducir (85) valores de $\sqrt[2m]{1}$, $\sqrt[4m]{1}$,... Por ejemplo:

$$\sqrt[8]{1} = \sqrt[4]{-1} = \sqrt{\pm i} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

expresión cuatriforme. Los otros cuatro valores de $\sqrt[8]{1}$ son $-i$, i, -1, 1.

Para hallar los valores de $\sqrt[3]{1}$, hagamos $\sqrt[3]{1}=x$, y, por consecuencia, $x^3-1=0$. Y, como $x^3-1= =(x-1)(x^2+x+1)$, igualando á cero, tanto el factor $x-1$ como el x^2+x+1, se obtienen para $x=\sqrt[3]{1}$, además del 1, los valores:

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Para $\sqrt[5]{1}$, de la igualdad $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, y por lo tanto, de las igualdades

$$x - 1 = 0, \text{ y } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

con auxilio de la situación $x + \frac{1}{x} = u, x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$, además del valor 1, se hallan los siguientes:

$$-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \tfrac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \tfrac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) + \tfrac{1}{4}i\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$
$$\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) - \tfrac{1}{4}i\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

101. Entre los valores de la raíz m^a de la unidad puede haber algunos que sean raíces *con menor* exponente de la unidad misma. Así, por ejemplo, entre los valores de $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[9]{1}$... se hallan los de $\sqrt[3]{1}$; porque $\sqrt[3]{1^{3k}} = 1^k = 1$. El número (complejo) α se denomina *raíz propia* (primitiva) del grado m de la unidad, siempre que no sea raíz también con menor exponente, de la unidad misma: de tal modo que α^k sea igual al radicando sólo en el caso de estar m contenido en k (*).

(*) De la teoría de los restos de potencias (Euler, 1773, *Nov. Comm. Petrop.* 18 p. 89.—Gauss *Disq. arithm.* 57) tomó Meier Hirsch la denominación de *raíz primitiva* (*Algebr. Gleichungen,* 1809, § 88). Para evitar equivocaciones prefirió

I. Si α es la m^a raíz de 1, y k un número entero cualquiera, también será α^k una raíz m^a de 1; y α^{m+k} no será diferente de α^k. Puesto que $(\alpha^k)^m = (\alpha^m)^k = 1^k = 1$; y $\alpha^{m+k} = \alpha^m \alpha_k = \alpha^k$.

II. Si k es primo con m, toda raíz k^a de 1, que sea diferente de uno, no podrá ser simultáneamente una raíz m^a de 1. En efecto: sea p el resto de k, según el módulo m; q el resto de m según p; r el resto de p según q; etc., etc. La serie de estos restos concluirá en 1, por ser k primo con m (49). Designemos ahora por α la k^a raíz de 1, diferente de 1, en cuyo caso será $\alpha^k = 1$. Si al mismo tiempo fuese α una raíz m^a de 1, ó bien $\alpha^m = 1$, también debería ser $\alpha^p = 1$; porque

$$\alpha^k = \alpha^{mx+p} = \alpha^{mx} \alpha^p = \alpha^p$$

Y así concluiríamos que debería ser $\alpha^p = 1$, $\alpha^r = 1$,... y, por fin, $\alpha = 1$: contra la hipótesis de ser α diferente de 1. Luego α^m no puede ser 1.

III. Si α es una raíz propia del grado m^o de 1, las potencias α, α^2, α^3... α^m son diferentes entre sí. Supongamos, en efecto, que α^r y α^s, siendo r y s números de la serie 1, 2, 3... m, sean iguales. Entonces $\alpha^r : \alpha^s = \alpha^{r-s} = 1$; y, por consecuencia, no sería α raíz propia, del grado m, de 1. Luego α^r y α son diferentes.

IV. Si α es una m^a raíz propia de 1, y k es primo con m, también será α^k una raíz m^a propia de 1. Puesto que $(\alpha^k)^x = \alpha^{kx}$ sólo puede ser igual á 1, según la definición de raíz propia, cuando sea kx

---

GAUSS (*Werke II*, p. 243) la de *raíz propia* (PROPRIA). Los siguientes teoremas se fundan en las consideraciones de EULER (1741 Comm. Petrop. 13, p. 50) y de LAGRANGE (Mem. de Berlin, 1770. Reflexions 24. Traité des Equat. Note 13).

divisible por m; y esto sólo puede suceder cuando m esté contenido en x (50).

V. Si α y β son dos raíces propias de 1, la primera del grado m y la otra del grado n, y estos exponentes, m y n, son primos entre sí, también será $\alpha\beta$ una raíz propia de 1, del grado mn; es decir, que $(\alpha\beta)^x$ sólo podrá ser igual á 1, cuando x sea divisible por mn. En efecto: si x fuese divisible por m, y no por n, sería $\alpha^x=1$, pero β^x diferente de 1, y, por consecuencia, $(\alpha\beta)^x$ diferente asimismo de 1. Si x no fuese divisible, ni por m, ni por n, α^x y $\beta^x=1$: β^{n-x} serían diferentes de 1. Y aun en el supuesto de que α^x fuese una raíz m^a de 1, y β^{n-x} otra n^a de 1, como m y n son primos entre sí, estas dos raíces α^x y β^{n-x} serían entre sí diferentes (II), y, por consecuencia, $\alpha^x : \beta^{n-x}=\alpha^x\beta^x=(\alpha\beta)^x$ no podría ser igual á 1. Por ejemplo, si α es una raíz m^a propia de 1, y m es impar, $-\alpha$ será una raíz $2m^a$ propia de 1; $i\alpha$ una raíz $4m^a$ propia de 1; y, si m no es divisible por 3, será $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\alpha$ una raíz $3m^a$ propia de 1; etc., etc.

XIX. — Del logaritmo.

(Heis 56, 57).

102. El *logaritmo* de un número, respecto de la *base a*, es el exponente de aquella potencia de la base que sea igual á dicho número, esto es:

$$Base^{logaritmo}=Número.$$

La base se supone real, positiva y diferente de 1.

Todo número positivo x, puede mirarse como una potencia de la base a, cuyo necesario exponente es el logaritmo de tal número x (respecto de la base a), y se escribe ${}^{a}\log x$. Así:

$$
\begin{aligned}
&{}^{2}\log 32=5;\ \text{porque}\ 2^{5}=32\\
&{}^{3}\log\ \ 9=2;\ \text{porque}\ 3^{2}=\ 9\\
&{}^{10}\log 1000=4\ \text{porque}\ 10^{4}=1000\\
&{}^{5}\log \frac{1}{125}=-3;\ \text{porque}\ 5^{-3}=\frac{1}{125}\\
&{}^{a}\log a^{m}=m;\ {}^{a}\log 1=0.
\end{aligned}
$$

Cuando es la base $a>1$, los logaritmos de los números mayores que 1 son positivos; los de los números menores que 1, negativos; ${}^{a}\log \infty=\infty$, ${}^{a}\log 0 =-\infty$ (91·40). Cuando la base $a<1$, los logaritmos de los números mayores que 1, son negativos; los de los números menores que 1, positivos; ${}^{a}\log\infty =-\infty$, ${}^{a}\log 0=\infty$. Los logaritmos de los números negativos no son reales. Si el número no es potencia de la base, las raíces de ésta nos señalarán los límites entre los cuales se halla comprendido el logaritmo, como luego veremos (110).

103. Sean β y γ los logaritmos de los números b y c respecto de la base a, y establezcamos las ecuaciones correspondientes.

$$b=a^{\beta}\quad c=a^{\gamma}$$

Por medio de ellas puede inmediatamente representarse c como potencia de la base b, y hallar su logaritmo respecto de esta base. En efecto (98):

$$a=b^{\frac{1}{\beta}};\ c=a^{\gamma}=b^{\frac{\gamma}{\beta}}$$

ó en otros signos:

$$^{b}\log c = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{^{a}\log c}{^{a}\log b}$$

Y en lenguaje vulgar expresa esta última fórmula que el logaritmo de c, respecto de la base b, es el cociente de los logaritmos de c y de b, respecto de la base a.

104. El conjunto de los logaritmos de todos los números, respecto de una base determinada, se llama *sistema de logaritmos*. De un sistema de logaritmos puede deducirse otro, dividiendo los logaritmos del sistema dado por el logaritmo, respecto de su base, de la base del nuevo sistema (103). Así, dado el sistema (base 10), se obtendrán los logaritmos (base 2), dividiendo los de base 10 por $^{10}\log 2$.

En los cálculos comunes se usan los logaritmos de base 10 que se llaman, por tal razón, *vulgares* (*vulgares, Briggiani, decimales*). En su notación se suprime la base.

En la Análisis matemática se consideran exclusivamente los *logaritmos naturales (naturales, Neperiani, hyperbolici)* cuya base es el número irracional

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2{,}71828\ldots$$

Y son llamados de ese modo, porque pueden calcularse directamente (sin limitaciones). (Véase cap. XXXII). Las notaciones

$$^{e}\log x,\ \log \text{nat}\ x,\ \ln x,\ \lg x,\ lx,$$

expresan siempre logaritmos naturales de x. Todos los demás logaritmos se denominarán *artificiales* *(artificiosi)*, como los *vulgares*, por ejemplo; en atención á que

$$^{a}\log x = \frac{\log \text{nat}\ x}{\log \text{nat}\ a} \text{y, por lo tanto:}$$

$$\log \text{vul}\ x = \frac{\log \text{nat}\ x}{\log \text{nat}\ 10} = lx \times 0{,}4343$$

El recíproco del logaritmo natural de la base por el cual deben multiplicarse los logaritmos naturales para obtener los artificiales, se llama *módulo del sistema artificial.* (*)

Si se dan, por el contrario, los logaritmos vulgares, tendremos:

$$\log \text{nat}\ x = \frac{\log \text{vulg}\ x}{\log \text{vulg}\ e} = \log x \times 2{,}3026.$$

(*) Los logaritmos (*numeri rationem exponentes seu rationum compositarum*) fueron descubiertos y denominados por Neper (Lord John Napier) que publicó los logaritmos naturales de los senos y las tangentes en su *Mirificit logarithmorum canonis descriptio* 1614. El sistema de logaritmos vulgares, fué introducido por Briggs 1618. Independientemente de los inventores ingleses construyó Byrg un sistema artificial calculando las potencias de la base, 1,0001 (*Arithm. und geom. Progress-Tabuln*, Praga 1620). Las tablas de Byrg contienen al lado de los logaritmos los números correspondientes, y forman por esto un *Canon antilogarithmicus*, según expresión usada por Vallis (Algebra 12). Véase Gieswald *Uber Byrg*, en el programa escolar de Danzig 1856. La cuadratura de los sectores y segmentos hiperbólicos, mediante los logaritmos naturales, fué expuesta en 1668 por N. Mercator y J. Gregory. Véase Klügel math. W. III, p. 531 y sig. El nombre de *Módulo de un sistema artificial* fué adoptado por Cotes primeramente (Philos. Trans. 1714, p. 6.) El modo como hoy se expone la teoría de los logaritmos parece que pertenece á Euler 1748 (introd. I $ 102 y sig.)

105. El logaritmo de un *producto* es la suma de los logaritmos de cada uno de los factores. Para la base a, es

$$\log(xy) = \log x + \log y:$$

porque

$$a^{\log x + \log y} = a^{\log x} a^{\log y} = xy \ (98).$$

NOTA. Como $x = x.1$ y $-x = x(-1)$, en el supuesto de ser $a^z = x$, tendremos:

$$\log x = z + \log 1 \quad \text{y} \quad \log(-x) = z + \log(-1)$$
$$\log(ix) = z + \log i.$$

De donde se deduce que log 1 tiene el valor real 0, mientras que $\log(-1)$ y $\log i$ no tienen valores reales. Pero si α fuese un valor (imaginario) de $\log i$, esto es, $a^\alpha = i$, sería 2α un valor de $\log(-1)$; 3α un valor de $\log(-1)$; 4α un valor de log. 1, etc., etc. Los logaritmos son infinitiformes.

106. El logaritmo de un *quebrado* es la diferencia entre el logaritmo del denominador y el logaritmo del denominador. Para la base a es:

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y.$$

Porque $a^{\log x - \log y} = a^{\log x} : a^{\log y} = x : y.$

Los logaritmos de los *números recíprocos* son igualmente opuestos. Así:

$$\log \frac{1}{x} = -\log x.$$

Porque $\log 1 = 0$.

107. El logaritmo de una *potencia* (en su sentido lato) es el producto del logaritmo del dignando por el exponente. Para la base a es:

$$\log x^m = m \log x.$$

Porque $a^{m \log x} = (a^{\log x})^m = x^m$.

$$\log x^3 = 3 \log x; \log x^{-4} = -4 \log x$$

$$\log \sqrt[5]{x^2} = \log x \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \log x.$$

XX.—Logaritmos vulgares de los números decimales.

(Heis - 58).

108. El ogaritmo de un número decimal consta de un número entero, positivo ó negativo, determinable inmediatamente, sin cálculo ninguno, llamado *característica;* y de una fracción decimal propia, que se denomina *mantisa (mantissa, añadidura)* del logaritmo.

a. Cuando la mantisa es positiva, la característica tendrá tantas unidades *positivas* como cifras, sobre la de las unidades, tenga el número de que se trata; ó tantas unidades *negativas* como ceros haya delante de la más elevada cifra decimal.

Así:

Números.	*Logaritmos.*
1000	3
100	2
10	1
1	0
0,1	—1
0,01	—2
0,001	—3

Como 185,7 se halla comprendido entre 100 y 1000, su logaritmo tendrá 2 de característica y mantisa positiva.

Como 0,0346 cae entre 0,01 y 0,1, log 0,0346 tendrá—2 de característica, y mantisa positiva (ó también—1 de característica y mantisa negativa). Las características negativas se escriben después de las mantisas positivas. Por ejemplo:

$$0,\ldots - 2 = 1,\ldots - 3 = \ldots = 8,\ldots - 10$$

b. Recíprocamente se deduce de la característica del logaritmo hasta qué cifra se eleva el número correspondiente.

Si tenemos, pues, log x=3,..., será x=. . . .,. . esto es, x contendrá 3 cifras ú órdenes sobre las unidades. Si log x=0, . . . será x=. ,. . .

Si log x=0, . . .—1, será x=0,. . . esto es: x comienza por las décimas.

Si log x=0,. . . — 4, será x=0,000. . . esto es: x comienza por las diezmilésimas.

109. Los logaritmos de dos números cuya razón sea una potencia de 10 con exponente entero, positivo ó negativo, tienen idéntica mantisa posi-

tiva, y sólo se diferencian en la característica. Por ejemplo:

log 132500, log 1325, log 13,25, log 0,1325, log 0,001325

En efecto; log x y log $(x.10^k)$=log $x+k$ (XIX) tienen la misma mantisa positiva, siempre que k sea un número entero, positivo ó negativo; pues, por este número entero k sólo puede variar la característica.

110. Los logaritmos de los números racionales son enteros ó irracionales, pero nunca fraccionarios. Pues si log x fuese exactamente expresado por la fracción irreducible $\frac{r}{s}$, la potencia $10^{\frac{r}{s}}$ debería ser racional, y para esto $10^r = 2^r \,.\, 5^r$ debería ser una potencia del grado s, y por consecuencia, r divisible por s (56): lo cual contradice el supuesto de ser $\frac{r}{s}$ irreducible.

Para determinar las mantisas de los logaritmos de cualesquiera números, basta encontrar los límites para las mantisas de los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 10, puesto que, por ejemplo, log 3847 y log 3,847 tienen la misma mantisa (109).

Para obtener estos límites del modo más sencillo (*), se calcula la raíz cuadrada de 10; después, la raíz cuadrada de la hallada primeramente, etcétera, etc.; hasta llegar á un número que exceda de

(*) Este método se debe á Long, que se sirvió de la raíz 10^a (Phil. Trans. 1714, p. 52).

1 en una fracción decimal insignificante ó despreciable (98). Con los valores de $10^{\frac{1}{2}}$, $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{1}{8}}$... se forma la tabla siguiente:

Números.	*Logaritmos.*
10,000 00	1,000 00
3,162 28	0,500 00
1,778 28	0,250 00
1,333 52	0.125 00
1,154 78	0,062 50
1,074 61	0,031 25
1,036 63	0,015 62
1,018 15	0,007 81
1,009 04	0,003 91
1,004 51	0,001 95
1,002 25	0,000 98
1,001 12	0,000 49
1,000 56	0,000 24
1,000 28	0,000 12
1,000 14	0,000 06
1,000 07	0,000 03
1,000 04	0,000 02
1,000 02	0,000 01
1,000 01	0,000 00

Para calcular, con auxilio de esta tabla, el log 7,2, por ejemplo, se divide el número 7,2 por el inferior más próximo de dicha tabla 3,16228; el cociente resultante 2,27684, se divide nuevamente por el inmediato inferior de la consabida tabla 1,77828; el cociente 1,28036 por el próximo inferior de la misma 1,15478; y así sucesivamente. De estos cálculos resulta:

$$7{,}2=3{,}16228\times1{,}77828\times1{,}15478\times.....$$

esto es, 7,2 igual á un producto de factores cuyos logaritmos están en la tabla calculada préviamente. Por lo cual (105):

$$\log 7{,}2=\log 3{,}16228+\log 1{,}77828+$$
$$+\log 1{,}15478+.....+$$

III. Para evitar estos cálculos minuciosos se han hecho tablas logarítmicas que contienen las mantisas de los logaritmos de todos los números hasta 999 con 4 cifras; hasta 9999 con 5 cifras; hasta 99999 con 6 cifras; etc., etc. (*)

I. Cuando el número, cuyo logaritmo buscamos, se dé con mayor aproximación de la que tiene designada en las tablas, debemos *interpolar*, esto es, debemos corregir la mantisa contenida en las tablas, según el teorema siguiente:

La diferencia de las mantisas es proporcional á la diferencia de los números, con tanto mayor aproximación cuanto menor sea la razón de la diferencia de los números al número dado. (C. XXXII y *Algebra* 14.)

Por ejemplo, log 1457 se halla comprendido entre log 1450 y log 1460, cuya diferencia, según la

---

(*) Tablas de logaritmos con 4 cifras de J. H. T. Müller; con 5 cifras de Hoüel; con 6 de Bremiker; con 7 de Schrön, etc., etc. En las primeras construcciones de tablas logarítmicas, merecen citarse Ursinus, Kepler, Briggs, Blacq, etc., etc. (Klügel, (mat. W. 3, p. 530).

tabla, son 30 diezmilésimas. Si el número menor aumenta en 10, 1, 7, su logaritmo aumentará en 30, $\frac{30}{10}$, $\frac{30,7}{10}$ diezmilésimas respectivamente; luego $\log 1457 = 3,1614 + 0,0021 = 3,1635$.

Para obtener log 14576 añadiremos á log 14500 $\frac{30.76}{100}$ diezmilésimas. Del mismo se hallan (108 y 109):

$$\log 68,707 = 1,8370; \log 0,03754 = 0,5745 - 2.$$

II. Dado un logaritmo, se puede, mediante las tablas, hallar el número correspondiente con aproximación determinada.

Sea $\log x = 2,3489$. Su característica nos enseña desde luego que $x = \ldots,\ldots$ La mantisa, según la tabla, está comprendida entre las mantisas de logaritmo 2230 y log 2240. Si la mantisa, pues, aumenta en 19,1,6 diezmilésimas, aumentará el número en 10, $\frac{10}{19}$, $\frac{10\ 6}{19}$. Por lo cual: $x = 223,3$.

Á $\log x = 6,1819$ corresponde el número $x = 1520_{000}$ con las indeterminadas centenas. Á logaritmo $x = 0,8362 - 3$, $x = 0,006858$.

En $\log x = -5,8794$ puede hacerse la mantisa positiva, añadiendo 6, y sustrayendo de nuevo 6. De $\log x = 0,1206 - 6$ se deduce $x = 0,000001320$. Haciendo $\log y = 5,8794$ se obtiene $y = 7575_{00}$, y (106) $x = \frac{1}{7575_{00}}$.

XXI.—Cálculo de fórmulas por logaritmos.

(Heis-59.)

112. Pueden calcularse fórmulas algún tanto complicadas, determinando los logaritmos de las mismas, y después los números correspondientes. Este procedimiento encuentra su más sencilla aplicación en los productos, los cocientes, las potencias y las raíces (105 y 107).

Usando tablas con cuatro decimales, como antes, el producto

$$28{,}936 \times 0{,}007803 \times 256{,}84$$

se calcula del modo siguiente:

log 28, ...	1,4614	
+ log 0,007, . .	0,8923	— 3
+ log 256, . . .	2,4097	
log producto	1,7634	
producto	58,00	

El cociente 1,3802: 73,257 se calcula así:

log 1,3, ...	0,1399	
— log 73, . . .	1,8648	
log cociente	0,2751	— 2
cociente	0,01884	

Al efectuar la sustracción hemos agregado 2 al minuendo y las hemos quitado de la diferencia.

La potencia $3{,}428^{27}$ se calcula como sigue:

log 3,......	$0{,}5350\times 27$
	$10{,}700$
	$3{,}745$
log potencia	$14{,}445$
potencia	279 billones.

Para obtener mayor aproximación se necesitan tablas más aproximadas.

La raíz $\sqrt[7]{0{,}098756^3}$ se calcula de este modo:

log 0,09 ...	$(0{,}9946-2)\times 3$
	$2{,}9838-6$
	$(3{,}9838-7):7$
log raíz	$0{,}5691-1$
raíz	$0{,}3707_5$

Para efectuar la división hemos agregado 1 al sustraendo (la característica negativa) y otro tanto al minuendo.

La potencia con exponente negativo $1{,}238^{-5}$ se calcula así:

log 1, 2.....	$0{,}0927\times(-5)$
	$-0{,}4635$
log potencia	$0{,}5365-1$
potencia	$0{,}3439$

113. Encontrados los logaritmos de los términos de un binomio, puede hallarse directamente el logaritmo del binomio, mediante las tablas auxilia-

res de GAUSS (*) Estas tablas, para cada valor positivo de *log* x—*log* y, ó bien, de *log* $\frac{x}{y}$ (columna A) dan los valores correspondientes de

$$\log\left(1+\frac{y}{x}\right) \text{ y de } \log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$$

(Columnas S y U). El primero de éstos, agregado á *log* x, da *log* $(x+y)$, y el segundo, sustraído de *log* x, da *log* $(x-y)$. En efecto, (XIX):

$$(x+\log y)=\log x\left(1+\frac{y}{x}\right)=\log x+\log\left(1+\frac{y}{x}\right)$$

$$\log(x-y)=\log x\left(1-\frac{y}{x}\right)=\log x-\log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$$

Si los números de la columna A forman una serie creciente que comienza en 0, los números correspondientes de las columnas S y U formarán dos series decrecientes hasta 0, que comienzan: aquélla por el *log* 2, y ésta por ∞.

(*) El original de estas tablas dispuestas según el plan de LEONELLI *(Supplement logarilh.* 1802) se encuentra en la *Correspondencia mensual de Zach*, 1812, Noviembre, tomo 26, página 498; y en las *Tablas math.* de VEGA, publicadas en 1840 por Hülsse. La columna S de MÜLLER coincide con la B de GAUSS; pero en lugar de la columna U de MÜLLER, tienen las de GAUSS la columna C con los valores de log $\left(1+\frac{x}{y}\right)$ de modo que en cada línea se tiene $C=A+B$. Van estas tablas al fin del *Algebra*.

En efecto, cuando $log\ \frac{x}{y}$ aumenta ó crece, crece también $\frac{x}{y}$, y decrece, por lo tanto, $\frac{y}{x}$, y también $log\left(1+\frac{y}{x}\right)$; mientras que $1-\frac{y}{x}$ crece, y disminuye, por consecuencia, $log\ \frac{1}{1-\frac{y}{x}}$. Si $log\ \frac{x}{y}=0$ es $\frac{x}{y}=1$; $log\left(1+\frac{y}{x}\right)=log\ 2$ y $log\ \frac{1}{1-\frac{y}{x}}=$ infinito. Si $log\ \frac{x}{y}$, y por lo tanto, $\frac{x}{y}$ es muy grande, $\frac{y}{x}$ será muy pequeño; y en consecuencia, $log\left(1+\frac{y}{x}\right)$ y $log\ \frac{1}{1-\frac{y}{x}}$ se aproximarán á cero.

Sean $log\ a=0{,}3177-1$ y $log\ b=0{,}17325-1$; la diferencia $log\ a-log\ b=0{,}14445$ se buscará en la columna A, y á su lado, en las columnas S ó U se hallará el número que, sumado con $log\ a$ ó restado de $log\ a$, nos dará $log\ (a+b)$ ó $log\ (a-b)$. Al lado del número $A=0{,}144$ se halla $S=02350$ y $U=0{,}5494$; y estos números, disminuídos respectivamente en $\frac{4.45}{100}$ y $\frac{25.45}{100}$ diezmilésimas, se convierten en los siguientes: $S=0{,}2348$ y $U=05483$ que corresponden realmente al $A=0{,}14445$.

Luego:

$$log\ (a+b)=0{,}3177-1+0{,}2348=0{,}5525-1$$
$$log\ (a-b)=0{,}3177-1-0{,}5483=0{,}7694-2$$

Si *log* $m=-A$, será *log* $(1+m)=S$ y *log* $(1-m)$ $=-U$.

Ejemplo.—Calcular la fórmula.

$$\sqrt[16]{\frac{43+5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}}$$

log 43	1,6335	S	0,2453
log 278	2,4440 : 3	log dividendo	1,8788
	0,8147	log 17	1,2304 : 5
log 5	0,6990	log divisor	0,2461
log $5\sqrt[3]{}$	1,5137	log cociente	1,6327 : 16
A	0,1198	log fórmula	0,10204
		fórmula	1,265

Si log $\tan^2 a=c$, y por consecuencia, log $\cot^2 a=-c$, se hallará log $(1+\cot^2 a)=\log\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 a}$, buscando c en la columna A, y el valor correspondiente de S. Si a se determina de modo que sea log tg $a=\frac{1}{2}A$, el valor de S, correspondiente al A, será—2 log sen a. Esto indica que las tablas de Gauss pueden deducirse de las que contienen los logaritmos de las funciones goniométricas. Por otra parte, las tablas de Gauss hacen supérfluo el uso, muy frecuente por cierto, de los ángulos llamados auxiliares.

XXII.—Progresión geométrica.—Cálculo del interés compuesto y de la renta.

Heis.—83 y 84).

114. Se dice que forma *progresión geométrica* una serie de cantidades, cuando la razón de dos inmediatas, cualesquiera, es siempre la misma. Designando por a su primer término, por v la razón de otro término cualquiera á su precedente, la progresión geométrica hasta el n^0 término se expresa como sigue:

$$a, av, av^2, av^3 \ldots av^{n-1}$$

En particular, las potencias sucesivas de un número forman una progresión geométrica, y así fueron consideradas por los matemáticos griegos.

La progresión será *creciente* ó *decreciente*, según que su razón sea mayor ó menor que 1. Los términos de la progresión tendrán signos alternados, cuando la razón sea negativa.

115. La suma de una progresión geométrica es la diferencia entre el término que sigue al último, y el primero, dividida por la diferencia entre la razón y 1. En efecto:

$$s = a + av + av^2 + \ldots\ldots + av^{n-1}$$
$$sv = \quad av + av^2 + \ldots\ldots + av^{n-1} + av^n$$

de donde por sustracción se deduce:

$$sv - s = av^n - a$$
$$s = \frac{av^n - a}{v - 1} = \frac{a - av^n}{1 - v}.$$

en conformidad con lo explicado ya (45). De esta misma expresión se deduce la suma de la progresión infinita decreciente; pues, si $v<1$ y n es infinito, v^n es cero; luego:

$$a+av+av^2+\ldots\ldots \textit{infinito} = \frac{a}{1-v}$$

116. Si un capital produce el p por ciento anual, y los intereses se capitalizan, esto es, se unen con el capital para aumentarlo, los valores que este capital va adquiriendo al cabo de 1, 2, 3.....años, forman una progresión geométrica, cuya razón es $1{,}0p$, ó sea, $1+\frac{p}{100}$. Porque después de un año suben

100 unidades	de capital	á	$100+p$
1	»	»	$1{,}0p$
c	»	»	$c.1{,}0p$

Estas $c.1{,}0p$ unidades de capital, después de otro año, suben á $c.1{,}0p^2$, y así sucesivamente. Es decir: que c unidades, después de un año, se convierten en $c.1{,}0p$; á los 2 años, en $c.1{,}0p^2$; al cabo de 3 años, en $c.1{,}0p^3$;... y al fin de n años en $c.1{,}0p^n$.

Y si en un año 100 unidades producen p, en un día producirán $\frac{p}{360}$, y en t días $\frac{pt}{360}$; subiendo, por lo tanto, las 100 unidades, después de t días, á $100+\frac{pt}{360}$ unidades. Y, por consecuencia, c unidades, después de n años y t días, subirán á

$$c.1{,}0p^n\left(1+\frac{pt}{36000}\right)$$

Si los intereses, por el contrario, no se capitalizan por años enteros, sino por m^{as} partes de un año, la m^a parte del año será la unidad de tiempo en lugar del año, y habrá que sustituir p por $p: m$. De este modo el capital c, al cabo de 1, 2. 3... partes ó fracciones del año, irá tomando los valores:

$$c\left(1+\frac{p}{100m}\right), c\left(1+\frac{p}{100m}\right)^2, c\left(1+\frac{p}{100m}\right)^3 \ldots$$

117. Con el auxilio de las fórmulas halladas se resuelven los problemas siguientes del cálculo del *interés compuesto.*

1.º Hallar el *valor* de un capital, impuesto á un tanto por 100 dado, después ó antes de un tiempo dado.

2.º Hallar el *tiempo* que debe estar impuesto un capital dado á un tanto por ciento dado, para que adquiera un valor determinado.

3.º Hallar el *tanto por ciento* á que debe imponerse un capital dado, para que en un tiempo dado adquiera un valor determinado.

Designemos por k el valor de un capital c, impuesto al p por ciento de interés compuesto (capitalización anual) al cabo de n años y t días. Tendremos:

$$k = c.1{,}0p^n\left(1+\frac{pt}{36000}\right), \quad c = \frac{k}{1{,}0p^n\left(1+\dfrac{pt}{36000}\right)}$$

$$1{,}0p^n\left(1+\frac{pt}{36000}\right) = \frac{k}{c}$$

Las fórmulas para k y c son adecuadas al cálculo logarítmico. Para calcular n y t tomemos los logaritmos de ambos miembros de la tercera fórmula, y será:

$$n \log 1{,}0p + \log\left(1 + \frac{pt}{36000}\right) = \log \frac{k}{c}$$

En esta última se ofrece n como el entero del cociente $\log \frac{k}{c}$: $\log 1{,}0\,p$ y $\log\left(1 + \frac{pt}{36000}\right)$ como el resto de la división. Haciendo este resto $= \log 1{,}0s$ será, en consecuencia: $1 + \frac{pt}{36000} = 1{,}0s$ y $t = \frac{360s}{p}$.

Ejemplo.—¿Cuánto tiempo hace que el capital 5326,4 pesos tenía el valor de 5000 pesos, al 6 por 100 de interés (capitalización anual)?

Cálculo.

$\log k$	3,7264
$\log c$	3,6990
$\log \frac{k}{c}$	0,0274 : 0,253 = 1 (log 1,0p)
	253
$\log (1+\ldots)$	0,0021
$1+\ldots$	1,005
t	0,5.360 : 6 = 30

El tiempo buscado es 1 año 30 días.

En el caso de ser $t=0$, para el cálculo de p se tiene exactamente:

$$1{,}0p = \sqrt[n]{\frac{k}{c}}$$

Mas si t no desaparece, el valor hallado para p por esta última fórmula sirve de base para una aproximación.

118. Cuando del capital impuesto (*Mise*) c, al p por ciento, y capitalización anual, se separa anualmente una cantidad r (*Renta*), la cual producirá también el mismo p por ciento, queda en caja:

Después de 1 año $c.\,1{,}0p - r$
» 2 » $c.1{,}0p^2 - r.1{,}0p - r$
» 3 » $c.1{,}0p^3 - r.1{,}0p^2 - r.1{,}0p - r$

....

....

» n » $c.1{,}0p^n - r.1{,}0p^{n-1} \ldots - r.1{,}0p - r.$

Los sustraendos de la última línea forman una progresión geométrica, mediante cuya suma se obtiene para el remanente en caja, después de n años la expresión.

$$c.1{,}0p^n - r\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}$$

$$= \frac{100r}{p}\left\{1 - \left(1 - \frac{cp}{100r}\right).\,1{,}0p^n\right\}$$

$$= \frac{100r}{p}\left\{\left(\frac{cp}{100r} - 1\right).\,1{,}0p^n + 1\right\}.$$

Si en lugar de segregar la renta r al cabo de 1, 2, 3...n años, se deja en la caja con sus intereses correspondientes, después de n años el capital acumulado será:

$$\frac{100r}{p}\left\{\left(\frac{cp}{100r}+1\right)1{,}0p^n-1\right\}$$

Ejemplo.—Sea $c=10000$ pesetas, $p=5$, $r=800$ pesetas, $n=10$.

Cálculo.

$\log\frac{100r}{p}$	4,2041	$\log 1{,}0p^n$	0,2119
$\log c$	4,0000	$\log 1{,}0p^n(...)$	—0,2141 (—A)
$\log\frac{cp}{100r}$	—0,2041 (—A)	$\log[1—...]$	—0,4098 (—U)
$\log(1—...)$	—0,4260 (—U)	log fórmula	3,7943
		fórmula	6227

Nota.—Si en el supuesto de la capitalización anual de los intereses al p por ciento, la renta no se paga también después de años completos, sino después de cada parte m^a del año; para calcular el remanente en caja al cabo de n años, debemos hallar la renta que corresponde al año, mediante las que después de cada fracción del año se abonan. Como 100 unidades producen p al año, en $\frac{t}{m}$ del año producirán $\frac{pt}{m}$: de donde se deduce que por cada 100 unidades, al cabo de $\frac{t}{m}$ del año habrá que pagar $100+\frac{pt}{m}=100\left(1+\frac{pt}{100m}\right)$; y, por consecuencia, por una unidad la 100^a parte, esto es: $\left(1+\frac{pt}{100m}\right)$; y por ρ unidades (siendo ρ la renta correspondiente á la m^a parte del año) $\rho\left(1+\frac{pt}{100m}\right)$

De esta última expresión resulta que, al fin de un año, en vez de las rentas parciales, habrá de pagarse su suma:

$$\rho\left(1+\frac{p(m-1)}{100m}\right)+\rho\left(1+\frac{p(m-2)}{100m}\right)+\ldots+\rho\left(\frac{P}{100m}\right)+\rho.$$

Ahora bien; es evidente que la doble suma

$$\begin{array}{c}(m-1)+(m-2)+\ldots+2+1\\ 1+2+\ldots+(m-2)+(m-1)\end{array}$$

es igual á $m(m-1)$; y, por consecuencia:

$$(m-1)+(m-2)+\ldots+2+1=\frac{m(m-1)}{2}$$

Sabido esto, la suma escrita arriba se expresa como sigue:

$$\rho(m+\frac{m-1}{200}p)$$

Poniendo esta cantidad en vez de r, se calculará como antes el saldo ó remanente en caja.

119. Suponiendo $=0$ la expresión que hallamos para el remanente en caja, se obtiene la *ecuación de la renta*, por la cual se resuelven los problemas siguientes:

1.º Hallar el *capital* (préstamo, empréstito) que se extingue ó paga por una renta (anualidad, amortización) dada y con un interés (compuesto) determinado.

2.º Hallar la *renta* (anualidad, amortización) por la cual deberá extinguirse un capital (préstamo empréstito) dado en un período de tiempo y edad y con un interés determinados.

3.º Hallar el *tiempo* (duración al cabo del cual se habrá pagado un capital dado por una anualidad y con un interés conocidos).

4.º Hallar el *tanto por ciento* conveniente para que se amortice ó pague un capital dado con una renta ó anualidad determinada.

1.º y 2.º—Si el capital c se paga en n años, mediante una amortización r, y el tanto por ciento p, capitalizando anualmente los intereses, tendremos, según antes indicamos, la ecuación (118),

$$c.1{,}0p^n - r\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} = 0 \qquad (1)$$

de la cual, después de dividir por $1{,}0p^n$, se deducen las siguientes:

$$c = \frac{100r}{p}\left(1 - 1{,}0p^{-n}\right), r = \frac{cp}{100(1 - 1{,}0p^{-n})}$$

Ejemplo 1.º

Sean $r=800$; $p=3{,}5$; $n=20$

$\log\frac{100r}{p}$	4,3590
$\log 1{,}0p^{-n}$	—0,2988(—A)
$\log(1—...)$	—0,3033(—U)
$\log c$	4,0557; $c=1137_o$

Ejemplo 2.º—$c=20000$; $p=3$; $n=10$

$\log\frac{pc}{100}$	27782
$\log 1{,}0p^{-n}$	—0,1284(—A)
$\log\frac{1}{1—...}$	0,5918 (U)
$\log r$	3,3700; $r=2344$

3.º Dados, el capital, el tanto por ciento y la renta, para calcular la duración de ésta, se le da á su ecuación (118) la forma

$$1{,}0p^n\left(1-\frac{cp}{100}\right)=\frac{1}{\alpha}\text{ de la cual: }\alpha.1{,}0p^n=\frac{1}{1-\frac{cp}{100r}}$$

puesto que n sólo puede ser entero, según la hipótesis. Para determinar n y α se toman logaritmos y se obtiene:

$$n\log 1{,}0p+\log\alpha=\log\frac{1}{1-\frac{cp}{100r}}$$

En esta fórmula figura n como el entero del cociente $\log\frac{1}{1-\ldots} : \log 1{,}0p$, y $\log \alpha$ como resto de la división. Después de pagada la renta r en los n años, queda en caja: $\frac{100r}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$

Ejemplo. $c=20000$; $p=3{,}5$; $r=1200$.

$\log \frac{100r}{p}$	4,5351
$\log c$	4,3010
$\log \frac{cp}{100r}$	—0,2341 (—A)
$\log \frac{1}{1-\ldots}$	0,3803(U)0,01494=25 (log 1,0p)
	2988
	815
	747
$\log \alpha$	0,0068 (A)
$\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$	—1,81 (—U)
$\log\frac{100r}{p}\left(\ldots\right)$	2,72=log 53_0

La renta dura, pues, 25 años, al cabo de los cuales queda en caja 53_0

4.º Dados: el capital (imposición, empréstito, etcétera), la renta y su duración, no puede, en general, calcularse el tanto por ciento. Porque la ecuación de la renta (1)

$$\frac{100}{p}\left(1-1,0p^{-n}\right)=\frac{c}{r}$$

convertida para mayor claridad, mediante la suposición $\frac{1}{1,0p}=x$, y su consiguiente $\frac{100}{p}=\frac{x}{1-x}$ en esta otra:

$$x\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{c}{r},$$

es del grado n, en atención á que $1-x^n$ es divisible por $1-x$. Una ecuación de esta especie sólo puede ser resuelta por aproximaciones (*Alg.* VIII), cuando se conocen los valores determinados de c, r, n, advirtiendo que en cada caso particular está p limitado entonces por la condición:

$$\log\frac{100r}{c}+\log\left(\frac{1-1,0p^{-n}}{p}\right)=0$$

que se desprende de la fórmula antes escrita.

XXIII.—Potencias con exponentes enteros y positivos de los binomios.

120. De la igualdad

$$(a+b)^m=\left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^m=a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$

se deduce que la m^a potencia de un binomio puede referirse á la de otro binomio cuyo primer término es 1 y cuyo segundo término es un quebrado puro.

Mediante la multiplicación, hallamos:

$$(1+x)^2=(1+x)\,(1+x);\ (1+x)^3=(1+x)^2\,(1+x);\text{etc.}$$

$$
\begin{array}{l}
(1+x)^2=1+2x+x^2 \\
(1+x)^3=1+2x+x^2 \\
\qquad\qquad +x+2x^2+x^3 \\
\hline
\qquad\qquad 1+3x+3x^2+x^3 \\
(1+x)^4+1+3x+3x^2+3x^3 \\
\qquad\qquad +x+3x^2+3x^3+x^4 \\
\hline
\qquad\qquad 1+4x+6x^2+4x^3+x^4
\end{array}
$$

Y así, en los demás casos, obtendríamos una serie ordenada de potencias ascendientes de x.

Los coeficientes (IV) de cada una de estas potencias de x, se denominan *coeficientes binómicos* de la 0ª, 1.ª, 2.ª,... en el desarrollo de la m^a potencia del binomio. Tales coeficientes para la 2.ª, 3.ª y 4.ª potencia son respectivamente:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Y este cuadro de coeficientes y el cálculo de donde provienen, enseñan que los relativos á la 5.ª potencia son las sumas de cada dos sucesivos de la 4.ª, etc., etc. (*) Mas para que los coeficientes bi-

(*) Una tabla, así construída, de los coeficientes binómicos (*Triangulus arithmeticus* de PASCAL), se encuentra ya en STIFEL. (*Arithm.* 1544, fol. 44.)

nómicos, propios de una potencia, no dependan de los relativos á la potencia inferior, los expresaremos mediante el exponente de la misma potencia á que pertenezcan. Y así, en efecto, los de la 4.ª potencia serán:

$$4=4,\ 6=4.\frac{3}{2},4=4.\frac{3}{2}\,\frac{2}{3};$$

Los de la 5.ª:

$$5=5,\ 10=5.\frac{4}{2},10=5\,\frac{4}{2}.\frac{3}{3},5=5.\frac{4}{2}.\frac{3}{3}.\frac{2}{4}.$$

En estos casos particulares la ley de formación es evidente; pero lo que importa demostrar es si los coeficientes binómicos en la potencia m^a obedecen á la misma ley, y son por consecuencia:

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1.2},\ \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.2.3},\ldots$$

de tal modo que se verifique realmente la igualdad

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.2.3.}x^3+\ldots$$

La base preparatoria para la formación de los coeficientes binómicos con los exponentes, fueron las fórmulas de los números figurados halladas por FERMAT y PASCAL. *(Carta de Fermat á Roberval,* 4 *Nov.* 1636.— *Obras de Pascal editadas por* LAHURE, 1858, II, p. 443, 452, 403.) Los coeficientes binómicos y el teorema del binomio para exponentes enteros positivos y exponentes reales cualesquiera, fueron encontrados por NEWTON y comunicados en sus cartas á *Oldenburg* de 13 de Junio y 24 de Octubre de 1676. La notación $\binom{m}{k}$ aparece por primera vez en las Memorias póstumas de EULER. (Acta Petrop. V—1, p. 86 y V—2, p. 76. Nov. Act. V, p. 52.)

121. Los números.

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1.2},\ \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.2.3},\ldots$$

serán designados respectivamente por

$$\binom{m}{0}\binom{m}{1}\binom{m}{2}\binom{m}{3},\ldots$$

La forma ó símbolo $\binom{m}{k}$, que se lee *m sobre k*, representa el producto de k factores que, comenzando en m, descienden según la serie natural, dividido por el producto de k factores sucesivos, también de la serie natural, que comienza por 1. En consecuencia:

$$\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots\,k}$$

y expresa (49) un número entero. El símbolo $\binom{m}{m}$ tiene el valor 1, mientras que $\binom{m}{m+1}$, $\binom{m}{m+2}$,... desaparecen, por existir el factor 0 en sus numeradores.

Un producto de factores, tal como $a(a+b)(a+2b)(a+3b)\ldots$ en el que dos cualesquiera sucesivos, tienen la misma diferencia (*productum continuorum* de Pascal, *functio inexplicabilis* de Euler. Cal. dif. II. c. 16 y 17. Véase Oettinger J. de *Grelle* 33,

p. 1) fué llamado por Kramp 1799 *facultad*, y por Arbogast, *factorial*. El producto particular 1.2.3... n se designó por Kramp (Arithm. univers. 1808 número 289) por $n!$ y se denominó facultad n^a.

Admitida esta notación, el numerador de $\binom{m}{k}$ estará representado por $\frac{m!}{(m-k)!}$; y así se obtiene esta nueva fórmula:

$$\binom{m}{k} = \frac{1.2.3...m}{1.2...k.1.2...(m-k)} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

De la cual, suprimiendo los k factores primeros (desde 1) en el numerador y el denominador, se deduce inmediatamente:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

Así:

$$\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = \frac{12.11.10.9}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 495$$

122. La fórmula simbólica $\binom{m}{k}$ goza también de la propiedad siguiente:

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$$

En efecto: $\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}$

$$=\binom{m}{k-1}\frac{m-k+1}{k}$$

Luego

$$\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}=\binom{m}{k-1}\left(\frac{m-k+1}{k}+1\right)$$

$$=\binom{m}{k-1}\frac{m+1}{k}=\binom{m+1}{k}$$

123. La expresión $\binom{m}{k}$ es el k^0 coeficiente binómico en el desarrollo de la m^a potencia de un binomio; por manera que:

$$(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\ldots+\binom{m}{m}x^m$$

(Binomio de Newton, Teorema del binomio).

En efecto, supongamos que para un valor determinado de m se verifica el teorema

$$(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\ldots$$

Para la potencia $(m+1)^a$, hallamos:

$$(1+x)^{m+1}=(1+x)^m(1+x)$$

$$=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\ldots$$

$$\ldots+x+\binom{m}{1}x^2+\binom{m}{2}x^3+\ldots$$

$$=1+\binom{m+1}{1}x+\binom{m+1}{2}x^2+\binom{m+1}{3}x^3+\ldots$$

Puesto que (122)

$$\binom{m}{1}+1=\binom{m+1}{1};\ \binom{m}{2}+\binom{m}{1}=$$

$$\binom{m+1}{2}\ldots \text{ etc.}$$

Mas el teorema se verifica para la 3.ª potencia:

$$(1+x)^3=1+\binom{3}{1}x+\binom{3}{2}x^2+\binom{3}{3}x^3$$

como se prueba comparando este desarrollo con el obtenido antes (120). Luego también serán:

$$(1+x)^4=1+\binom{4}{1}x+\binom{4}{2}x^2+\binom{4}{3}x^3+\binom{4}{4}x^4$$

$$(1+x)^5=1+\binom{5}{1}x+\binom{5}{2}x^2+\binom{5}{3}x^3+\binom{5}{4}x^4$$

$$+\binom{5}{5}x^5$$

y en general:

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \ldots$$
$$+ \binom{m}{m} x^m$$

para todo valor entero y positivo de m (*).

NOTA.—Si cambiamos x por $-x$, las potencias pares x^2, x^4... permanecerán inalterables, mientras que las impares x^3, x^5... se cambiarán en $-x^3$, $-x^5$... Por consecuencia:

$$(1-x)^m = 1 - \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 - \binom{m}{3} x^3 + \ldots$$

Haciendo $x = \frac{b}{a}$, tendremos (120):

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2$$

$$+ \binom{m}{3} a^{m-3} b^3 + \ldots + \binom{m}{1} a b^{m-1} + b^m$$

Porque

$$a^m \frac{b}{a} = a^{m-1} b;\ a^m \left(\frac{b}{a}\right)^2 = a^{m-2} b^2 \ldots, \text{ etc.; y}$$

(*) Este método de *inducción* (ἐπαγωγή) deducción de una regla general de un caso particular se debe á SANTIAGO BERNOULLI (*Act. Erud.* 1686, p. 360) y se denomina *Método de inducción de m á m + 1.*

$$\binom{m}{m}=1, \binom{m}{m-1}=\binom{m}{1} \dots (121).$$

124. Siendo x una fracción pura, en la serie encontrada para $(1+x)^m$, á partir de cierto término, cualquiera otro es menor que su precedente.

En efecto, la razón del $(k+2)^0$ término á su precedente $(k+1)^0$ es

$$\binom{m}{k+1} x^{k+1} : \binom{m}{k} x^k = \frac{m-k}{k+1} x < 1$$

con tal que k supere á cierto límite.

El error que se comete cuando se desprecian los términos siguientes al elegido, puede calcularse en todo caso. Hagamos, por ejemplo:

$$(1+x)^m = 1+mx.$$

El error será entonces:

$$E = \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \dots + \binom{m}{m} x^m$$

$$= \binom{m}{2} x^2 \left\{ 1 + \frac{m-2}{3} x + \frac{(m-2)}{3} \frac{(m-3)}{4} x^2 + \dots \right\}$$

$$< \binom{m}{2} x^2 \left\{ 1 + \frac{m-2}{3} x + \left(\frac{m-2}{3} x \right)^2 + \dots \right\}$$

Puesto que los factores $\frac{m-3}{4}$, $\frac{m-4}{5}$... son menores que $\frac{m-2}{3}$. Ahora bien:

$$1+\frac{m-2}{3}x+\left(\frac{m-2}{3}x\right)^2+\ldots<\frac{1}{1-\frac{m-2}{3}x}$$

en el supuesto (45) de que $\frac{m-2}{3}x<1$. Luego:

$$E<\binom{m}{2}\frac{x^2}{1-\frac{m-2}{3}x}$$

Pongamos ahora

$$(1-x)^m=1-mx.$$

El error será:

$$E=\binom{m}{2}x^2-\left\{\binom{m}{3}x^3-\binom{m}{4}x^4\right\}$$
$$-\left\{\binom{m}{5}x^5-\binom{m}{6}x^6\right\}-\ldots$$
$$<\binom{m}{2}x^2,\text{ cuando }\frac{m-3}{4}x<1.$$

Del mismo modo, siendo la razón $b:a$ suficientemente pequeña, al establecer la igualdad

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b$$

hallaremos para límite del error cometido en ella

$$\binom{m}{2}\frac{a^{m-2}\,b^2}{1-\frac{m-2}{3}\,\frac{b}{a}}$$

Y en la igualdad

$$(a-b)^m = a^m - ma^{m-1}\,b$$

será el límite del error

$$\binom{m}{2} a^{m-2}\,b^2$$

125. Las raíces m^{as} de los números c, $c\,.\,2^m$, $c.\,3^m$..., son entre sí como los números 1, 2, 3... Entre los expresados radicandos se prefiere, para calcular su raíz aquel que difiera menos de una m^a potencia. Por ejemplo: $a^m \pm b$, cuando $b : a^m = h$ es una pequeña fracción pura, tendrá por raíz:

$$\sqrt[m]{a^m \pm b} = a\sqrt[m]{1 \pm h};$$

puesto que efectivamente es

$$\sqrt[m]{1 \pm h} < 1 \pm \frac{h}{m};$$

por ser (124)

$$\left(1 \pm \frac{h}{m}\right)^m = 1 \pm h + ... > 1 \pm h$$

Para obtener mayor aproximación hagamos

$$\sqrt[m]{1+h}=1+x$$

y, en consecuencia:

$$(1+x)^m=1+h$$

$$mx+\binom{m}{2}x^2=h-\binom{m}{3}x^3-\ldots$$

$$x=\frac{h-\binom{m}{3}x^3-\ldots}{m+\binom{m}{2}x}>\frac{h-\binom{m}{3}\left(\frac{h}{m}\right)^3-\ldots}{m+\binom{m}{2}\frac{h}{m}}$$

por ser $x<h:m$. De modo que:

$$\sqrt[m]{a^m+b}=a+ax>a+\frac{ab-\frac{m-1}{2m}\,\frac{m-2}{3m}\,\frac{b^3}{a^{2m-1}}-\ldots}{ma^m+\frac{1}{2}(m-1)b}$$

Por otra parte:

$$\frac{2x}{m-1}+x^2=\frac{2h}{m(m-1)}-\frac{m-2}{3}x^3-\ldots$$

de donde:

$$x=-\frac{1}{m-1}+\sqrt{\frac{1}{(m-1)^2}+\frac{2h}{m(m-1)}-\frac{m-2}{3}x^3-\ldots}$$

y al fin:

$$\sqrt[m]{a^m+b}=a+ax< \frac{m-2}{m-1}\,a$$

$$+\sqrt{\left(\frac{a}{m-1}\right)^2+\frac{2b}{m(m-1)a^{m-2}}}$$

El límite inferior, racional, y más todavía el superior, irracional, determinan la raíz con grande aproximación. Cuando b, h y x son negativos, la fórmula racional es límite superior de la raíz y la irracional límite inferior (*).

XXIV.—Permutaciones de elementos dados.

126. En éste y los capítulos inmediatos dáse el nombre de *elementos* á las entidades, de cualquier especie que sean, distintas unas de otras, no por su calidad ni cantidad, sino por algún índice, letra de cualquier alfabeto ó número de orden. Entre dos elementos se llama *superior* el que tenga mayor número de orden.

Se denomina *coordinación* de varios elementos un conjunto ó reunión de los mismos, cualquiera que sea el modo como estén reunidos, ó unos á otros se sucedan. Las *permutaciones* de varios elementos dados comprenden todas sus coordinaciones posibles, distintas unas de otras sólo por el orden ó sucesión de los elementos componentes.

(*) Lagny *Méth. nouv. pour l'extraction...* París, 1692. Halley Philos. Trans. 1694, p. 136. Lambert *Beiträge* II, 1 pág. 152 Investigaciones más generales sobre estas aproximaciones pueden verse en Euler Nov. Comm. Petrop. 18, página 136.

127. El total de las permutaciones de n elementos asciende á $1.2.3\ldots n = n!$ (121).

Demostración.—Al 1.º, al 2.º, al 3.º... elemento pueden asociarse las permutaciones de los $(n-1)$ elementos restantes; y por consecuencia, n elementos diferentes producen n veces tantas permutaciones cuantas producen $(n-1)$ elementos. Mas 2 elementos producen 1. 2 (*ab* y *ba*) permutaciones: luego 3 producirán 1.2×3 ó sea 3 veces tantas; 4 elementos, $1.2.3 \times 4$; etc. etc.

128. Para obtener las permutaciones de 3 elementos se agregan al elemento 1 las permutaciones de los elementos 2 y 3; después, al elemento 2, las permutaciones de los elementos 1 y 3; y últimamente, al elemento 3, las permutaciones de los 1 y 2. Como sigue, en columna:

123	213	312
132	231	321

Para obtener las permutaciones de 4 elementos se asocian al 1 las permutaciones de los 2, 3 y 4; al 2, las de 1, 3 y 4; al 3, las de 1, 2 y 4; al 4, las de 1, 2 y 3, como sigue en columnas:

1234	2134	3124	4123
......	......	......	......
1432	2431	3421	4321

Para formar las permutaciones de 5 elementos se reunen con el elemento 1 las permutaciones de los elementos 2, 3, 4, 5; con el 2, las de 1, 3, 4 y 5 etcétera; como sigue:

12345	21345	31245	41235	51234
....	....	....	....	....
15432	25431	35421	45321	54321

En general, según este métodc para hallar las permutaciones, un elemento cambia de lugar cuando los números ordinales de los elementos que le suceden forman una serie decreciente, y pasa á ocupar entonces en la permutación siguiente el lugar que corresponde al inmediatamente superior en la serie natural, colocándose los restantes de modo que sus números de orden formen una serie creciente. Así, el elemento 1 de la última permutación de la columna primera, por formar los que le siguen una serie decreciente, debe cambiar de lugar y colocarse en el 2.º de la permutación siguiente.

El elemento 2 de la permutación 25431 debe cambiar de lugar, para continuar formando las permutaciones y colocarse el 3.º en la permutación siguiente 31245; y detrás de él los elementos 4 y 5 que forman una serie creciente; etc.

129. De una coordinación cualquiera, de n elementos, pueden deducirse todas sus permutaciones, cambiando uno por otro, cuantas veces fuere menester, *dos* de aquellos n elementos (*)

Dada, por ejemplo, la coordinación 123, de *tres* elementos, si cambiamos en ella el 3 con el 2, en la resultante el 2 con el 1; luego el 1 con el 3, el 3 con el 2 y el 2 con el 1 obtenemos las permutaciones

(*) Gallenkamp. *Elem. der. Mathem.* 1850 § 110.

123	231	312
132	213	321

Tratándose, pues, de tres elementos, la proposición anunciada no admite duda de ningún género.

Pues, cuando sean *cuatro*, todas las permutaciones que comiencen por el elemento 1 podrán formarse anteponiendo este elemento á las permutaciones de los 2, 3 y 4. Y como estas últimas se forman por la regla enunciada y ya demostrada, por la misma regla se formarán las permutaciones de los cuatro elementos que principian por el 1. Y por la misma, evidentemente, se formarán las que comiencen por cualquiera de los demás elementos. Las permutaciones con cuatro elementos son:

1234	2431	3124	4321
......	......	......	......
1432	2134	3421	4123

Cuando los elementos sean *cinco*, apoyándose en lo dicho en el caso anterior, se deducirá que también es cierta la regla. Y cierta también, por el mismo género de consideraciones, en todos los demás casos ó supuestos consecutivos. Según ella, las permutaciones con cinco elementos son las siguientes:

12345	25134	34512	42351	51234
....	....	....	....	....
15234	24513	32451	41235	54123

Para 6 elementos:

123456	265134	342651	415326	562143	634521
....	....	....	....	....	....
165234	243651	315426	462153	534621	612345

130. La primera coordinación contiene dos elementos en orden natural ascendente: en las otras ya los elemeneos se apartan del orden establecido en la primera. Todo elemento que preceda, en vez de seguir á otro inferior, diremos que está *invertido*. Si contamos, pues, en una de las permutaciones desde cada elemento los inferiores que le siguen, el total de estos elementos inferiores constiye el número de *inversiones (derangements, variations)* comprendidas en dicha permutación. Así, la coordinación 2431 comprende 4 inversiones, á saber: 21, 43, 41, 31.

El número de las inversiones existentes en una coordinación por el cambio de dos elementos varía en un número impar. En efecto, cuando un elemento de la coordinación dada se cambia por su inmediato, la posición de los elementos cambiados permanece invariable respecto de los elementos restantes, pero el número de inversiones varía en 1. Así sucede, por ejemplo, en la coordinación antes escrita 2431: si cambiamos 4 con 3, la nueva coordinación será 2341; los lugares 2.º y 3.º los ocupaban y ocupan los elementos cambiados; pero el número de inversiones en la nueva coordinación es 3, á saber: 21, 31, 41.

Por el mismo procedimiento de cambiar uno con otro dos elementos inmediatos, se logra, repitiéndolo, que un elemento G llegue á colocarse en el sitio de otro H, aun cuando haya que recorrer para conseguirlo, k lugares ó elementos intermediarios.

En tal supuesto, para llegar G á colocarse en el mismo sitio de H, habrá de efectuar hacia la derecha $(k+1)$ cambios; y el elemento H deberá efectuar k cambios hacia la izquierda, después de haber sido desalojado por G, hasta ponerse en el sitio primitivo de este último. Entre los dos verifican $k+1+k=2k+1$ cambios; y como por cada cambio varía en 1 el número de inversiones existentes en la coordinación dada, por $(2k+1)$ cambios variará en $(2k+1)$ veces 1, esto es: un número impar de veces 1.

Ahora bien, si el número de inversiones existentes en la coordinación dada fuese par, al variar en un número impar de veces 1 por el cambio de dos elementos, se convertiría en número impar; y en par, por la misma razón, si fuere impar. Luego en uno y en otro caso, la diferencia entre el número de inversiones existentes en la coordinación y el número de las que resultan en ella después del cambio mutuo de dos elementos, es siempre impar.

131. Despréndese de lo dicho que cuando se forman las permutaciones de varios elementos, mediante el cambio cada vez de dos de ellos (129), los números de inversiones que van resultando en las permutaciones sucesivas, son alternativamente pares é impares (130). Y siendo par el total de permutaciones, entre ellas habrá tantas de una *clase* (pares, positivas, con número *par* de inversiones), como de la otra (impares, negativas, con número *impar* de inversiones). Según esta distinción, $ABCD$ y $CDAB$ son permutaciones de la misma clase; porque la segunda se deduce de la primera mediante 2 cambios: (A con C y B con D); y 31245 y 14325 no son permutaciones de la misma clase; porque la segunda se deduce de la primera, mediante 3 cambios (3 con 1, 4 con 2 y 4 con 3).

XXV.—Variaciones y combinaciones con elementos dados.

(Heis.—88 y sig.)

132. *Variaciones del grado k* de varios elementos son las coordinaciones de cada k elementos de la serie dada. Las variaciones del grado n de n elementos no se diferencian de las permutaciones de los mismos. Con n elementos no pueden formarse variaciones del grado $(n+1)$.

Las coordinaciones con k elementos cada una, pero entre las cuales no hay dos constituídas por los mismos k elementos, se denominan *combinaciones del grado k*. Las combinaciones del primer grado están formadas por los elementos aislados; las de 2.º grado *(ambos)* por los elementos de 2 en 2; las de tercer grado *(ternos)* por los elementos de 3 en 3, etcétera, etc.

133. Con n elementos diferentes pueden formarse:

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$ *variaciones* del grado k; y

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1.2...k} = \binom{n}{k}$$ *combinaciones* del grado k.

Demostración.—De las variaciones del grado k se deducen las del grado $(k+1)$, juntando con cada una de las primeras, uno á uno, los $(n-k)$ elementos que respectivamente no existan en ellas. De lo cual resulta que cada variación del grado k produce $(n-k)$ variaciones del grado $(k+1)$; y, por consecuencia, que las variaciones del grado $(k+1)$ son $(n-k)$ veces tantas como las del grado k. Ahora bien: el número de variaciones del grado 1.º con n elementos, es n; luego el número de variaciones del 2.º grado será $n(n-1)$; el de variaciones del tercer grado será $n(n-1)(n-2)$, etc., etc.

Las variaciones del grado k con n elementos, pueden distribuirse en grupos, cada uno de los cuales contenga las variaciones que sean precisamente las permutaciones de los k elementos existentes en cada una de ellas. Es evidente que así en cada grupo habrá incluídas $1.2...k$ variaciones (127), y que el número de estos grupos será la $(1.2...k)^a$ parte del número total de las variaciones del grado k; y precisamente también el número de combinaciones del mismo grado, puesto que á cada uno de los grupos corresponde una sola combinación.

La fórmula simbólica (121).

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

representa el número de combinaciones del grado k con n elementos, y es, por lo tanto, un número entero; y expresa además que con n elementos diferentes pueden formarse tantas combinaciones del grado k como del grado $(n-k)$.

134. Para formar las *variaciones* de 2.º grado se escriben al lado de cada elemento sucesivamente todos los demás; para formar las de tercer grado se colocan al lado de cada elemento las variaciones de 2.º grado de los otros elementos; las de 4.º grado se

forman poniendo junto á cada elemento las variaciones de tercer grado de los elementos restantes; etcétera, etc.

Para 5 elementos serán:

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

123	213	312	412	512
124	214	314	413	513
...	...	...	...	...
154	254	354	453	543 etc., etc.

Las *combinaciones* de 2.º grado (ambos) se forman, colocando después de cada elemento sucesivamente todos los superiores; las de 3.º, escribiendo al lado de cada elemento las combinaciones de 2.º grado de los elementos superiores; las del 4.º grado, poniendo al lado de cada elemento las combinaciones de tercer grado de los elementos superiores, etcétera, etc.

Para 6 elementos tendremos las combinaciones siguientes:

12	23	34	45	56
13	24	35	46	
14	25	36		
15	26			
16				

123	134	145	156	234	245	256	345	356	456
124	135	146		235	246		346		
125	136			236					
126									

1234	2345	3456
....	....	
1456	2456	

En general, al formar las combinaciones, cada elemento conserva su lugar, mientras que los elementos siguientes puedan ser sustituídos por elementos superiores. Cuando esto ya no sea posible, aquel elemento es sustituído por el inmediato superior, detrás del cual irán los próximamente superiores ordenadamente.

135. Distribuyamos ahora n elementos diferentes en grupos A, B, C... de α, β, γ... elementos respectivamente, de todas las maneras posibles, en el supuesto, se entiende, de ser $n = \alpha + \beta + \gamma \ldots$ Para conseguirlo, elijamos primeramente de todos los elementos los α que han de constituir el grupo A; y esta elección podremos hacerla $\binom{n}{\alpha}$ veces (133) para formar otros tantos grupos A. En cada una de estas elecciones quedarán $(n - \alpha)$ elementos, entre los cuales elegiremos β para constituir el grupo B; y esta segunda elección podrá hacerse $\binom{n-\alpha}{\beta}$ veces, etc., etc. El último grupo podrá ser formado siempre de un solo modo. En suma: los n elementos podrán ser distribuídos simultáneamente en:

$\binom{n}{\alpha}$ grupos diferentes A;

$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}$ grupos diferentes AB;

$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ grupos diferentes ABC, etcétera, etc.

Cuando $\delta=n-\alpha-\beta-\gamma$, y el último grupo D podrá cada vez ser formado de un solo modo; porque $\binom{n-\alpha-\beta-\gamma}{\delta}=1$; y, por consecuencia, podrán efectuarse entonces.

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}$$

agrupaciones diferentes $ABCD$.

Si en todas éstas se permutan los elementos de cada uno de los grupos, se obtendrán todas las permutaciones de los elementos dados; puesto que cada una de estas permutaciones comienza por α elementos determinados, á los que siguen β elementos determinados también; etc. etc. Y, en efecto, resulta el número $n!$, multiplicando el número hallado de agrupaciones $ABCD$ por $\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \delta!$

Si entre los n elementos dados hay α iguales entre sí; entre los restantes, β iguales entre sí; entre los restantes, γ iguales entre sí; y los δ restantes son entre sí diferentes, cada agrupación $ABCD$ dará lugar á $\delta!$ permutaciones: luego, multiplicando por $\delta!$ el número hallado para estas agrupaciones, obtendremos este otro:

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

que expresa el de permutaciones con n elementos de las especies α, β, γ, δ, que hemos distinguido anteriormente (*).

136. Entre las combinaciones del grado k con n elementos, unas no contienen el n^o elemento, y otras le contienen. Las primeras son las combinaciones del grado k de los $(n-1)$ primeros elementos; las segundas, las combinaciones del grado $(k-1)$ de los mismos $(n-1)$ elementos, á las cuales se agrega el último ó n^o elemento. Por consecuencia:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

según ya se demostró aritméticamente (123).

Entre las combinaciones con n elementos, del grado k, unas terminan por el elemento k^o; otras por el $(k+1)^o$; otras por el $(k+2)^o$; etc., etc. Mas por el elemento $(k+m)^o$ terminan tantas combinaciones, del grado k, cuantas del grado $(k-1)$ pueden efectuarse con los $(k+m-1)$ elementos primeros. Luego

$$\binom{n}{k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \dots + \binom{n-1}{k-1}$$

Prosiguiendo de este modo las descomposiciones

(*) Frénicle, Abrégé des comb., 1676. (Anc. Mem. de París, t. V.) Wallis, Combín., 1685, c. 2.

se patentiza de nuevo que $\binom{n}{k}$ es una suma de números enteros; y por lo tanto, un número entero.

Las combinaciones del grado k con $u+v$ elementos, ó contienen k elementos del sistema ó conjunto u; ó $k-1$ elementos de este sistema y 1 del otro sistema de v elementos; ó $k-2$ elementos del primero y 2 elementos del segundo, etc., etc. Ahora bien; $k-m$ elementos del primer sistema pueden combinarse con m elementos del otro, de $\binom{u}{k-m}\binom{v}{m}$ maneras diferentes. Luego (*)

$$\binom{u+v}{k}=\binom{u}{k}+\binom{u}{k-1}\binom{v}{1}+\binom{u}{k-2}\binom{v}{2}$$
$$+\ldots+\binom{u}{1}\binom{v}{k-1}+\binom{v}{k}$$

137. Si entre los n elementos cada uno de ellos se repite arbitrariamente las veces que se quiera, serán:

n^k el número de variaciones con repetición del grado k, y

$\binom{n+k-1}{k}=\binom{k+n-1}{n-1}$ el número de combinaciones con repetición del grado k.

Demostración.—Para deducir de las variaciones del grado k las del grado $(k+1)^{o}$, se agregan á cada variación sucesivamente todos los elementos, y así se obtienen n veces tantas variaciones del grado

(*) Euler. Véase la nota del § 120 y 196.

$(k+1)^{o}$, como del grado k. Mas existen n variaciones de primer grado: luego del grado segundo existirán n^2; del grado tercero existirán n^3; etc., etc.

De la especie antes expresada existen n combinaciones de segundo grado que comienzan por el elemento 1; $n-1$ que comienzan con el elemento 2 etc., etc., y entre todas (136)

$$\binom{n}{1}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{1}{1}=\binom{n+1}{2}$$

Según esto, existen $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ combinaciones de tercer grado que comienzan por 1; $\binom{n}{2}$ que comienzan por 2, etc., etc., y entre todas:

$$\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{2}{2}=\binom{n+2}{3}.$$

Y admitiendo que existan $\binom{n+i-1}{i}$ combinaciones del grado i, del grado $(i+1)$ habrá: $\binom{n+i-1}{i}$ que comienza por 1; $\binom{n+i-2}{i}$ que comienzan por 2; etc., etc., y entre todas:

$$\binom{n+i-1}{i}+\binom{n+i-2}{i}+\ldots+\binom{i}{i}=\binom{n+i}{i+1}$$

Pero antes hemos demostrado que existen $\binom{n+2}{3}$ combinaciones de tercer grado: luego existirán $\binom{n+3}{4}$ del cuarto grado, etc., etc.

Por la misma demostración se prueba que del grado k pueden hacerse tantas combinaciones con n elementos, cada uno de los cuales puede repetirse k veces, como con $n+k-1$ elementos, de los cuales no puede ninguno repetirse (133). Y en efecto, de las primeras combinaciones se deducen las segundas, aumentando en cada una los elementos en 0, 1, 2,...$k-1$ respectivamente.

NOTA. Los principios de la Combinatoria se encuentran en BUCLEY, CARDAN y otros matemáticos del siglo XVI. La primera publicación extensa sobre combinaciones se debe á PASCAL, 1650, y en ella, coincidiendo con FERMAT, explicó el enlace de los números combinatorios, con los figurados *(Œuvres ed. Lahure II, p. 423 y siguientes.)* La Memoria de LEIBNIZ *De arte combinatoria* (1666), contiene, más que pura y nueva teoría, aplicaciones de la doctrina de las permutaciones y combinaciones. La teoría y el concepto actual de la Combinatoria se hallan completamente desenvueltos por SANTIAGO BERNOULLI en su *Ars conjectandi* (op. posth. 1713). En este libro aparece el nombre de permutaciones, por el cual habían usado: WALLIS, el de alteraciones, y LEIBNIZ, el de variaciones. El nombre coordinación (complexión) significaba para LEIBNIZ combinación; el de variaciones adquirió su propia significación hacia el fin del siglo XVIII.

XXVI.—Determinante de un sistema de números.

138. Dado un cuadrado de elementos, esto es, n^2 elementos (números), ordenados en series de n en n, á saber: en filas y en columnas, con n elementos cada una; y designando por a_{ik} el término ó elemento k^o de la fila i^a (el i^o de la columna k^a) el sistema de dichos elementos será:

$$\begin{array}{l} a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \;\; a_{22} \;\; a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \;\; a_{n2} \;\; a_{n3} \ldots a_{nn} \end{array}$$

Bajo el nombre de *determinante* (*) de este sistema se comprende un conjunto determinado de todos los productos posibles, cada uno con n elementos entre los cuales no haya dos que correspondan á una misma fila ni á una misma columna. Así, cuando fyh... representa una permutación de una clase determinada (131) de los índices de filas, y rst... otra permutación de la misma clase, ó de distinta clase, de los índices de columnas y ε significa 1 en el primer caso, y —1 en el segundo, el producto $\varepsilon a_{fr} a_{gs} a_{ht} \ldots$ es un *término de la determinante*. En particular el producto $a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ formado por los elementos de la diagonal, es un término de la determinante, llamado el término *inicial* de la misma.

(*) La historia y ulterior desenvolvimiento de estas formas pueden verse en la obra del mismo autor. *Theorie und Auwendung der Determinantem.*

De un término de la determinante, por ejemplo, del $a_{11}a_{22}a_{33}$..., se deducen todos los demás con sus correspondientes índices. Para esto, ó se permutan los índices que señalan las columnas, dejando invariables los correspondientes á las filas, ó se permutan estos últimos, dejando invariables los primeros. Así, por ejemplo, el término $\varepsilon\, a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht}$... puede derivarse del $a_{ff}\, a_{gg}\, a_{hh}$... ó del $a_{rr}\, a_{ss}\, a_{tt}$... (los cuales no se diferencian del $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$...): de aquel, por la permutación de los índices de las columnas; de éste, por la permutación de los índices de las filas. Cuando en el tránsito de *fgh*... á la *rst*... se encuentra un cambio de signo, también se encuentra en el tránsito de *rst*... á *fgh*... Por ambos modos de deducción se encuentran los mismos términos con los mismos signos.

La determinante del sistema de n^2 elementos tiene $n!$ términos, tantos positivos como negativos, y se llama de grado n^o, porque sus términos (productos comprenden n factores. La determinante del sistema se designa: incluyendo entre rayas el sistema de números dados, ó escribiendo su término inicial ligado con el doble signo $\pm$ al de suma Σ. A saber.

$$\begin{vmatrix} a_{11}\; a_{12} \ldots\; a_{1n} \\ a_{21}\; a_{22} \ldots\; a_{n2} \\ .\quad .\;\ldots \\ a_{n1}\; a_{n2} \ldots\; a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\; a_{22} \ldots\; a_{nn}.$$

Las determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ . & . \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots & a_{n2} \\ . & . \dots & \\ a_{1n} & a_{2n} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

en las cuales coinciden las filas de la una con las columnas de la otra son iguales, puesto que tienen el mismo término inicial, y cada uno de los términos de la primera se encuentra con el mismo signo en la segunda.

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\, b_2\, c_8 - a_1\, b_3\, c_2 + a_2\, b_3\, c_1 - a_2\, b_1\, c_3 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc - af^2 - gb^2 - ch^2 + 2fgh$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$-\left\{ \begin{array}{l} a_1b_2c_3d_4 - a_1b_2c_4d_3 + a_1b_3c_4d_2 - a_1b_3c_2d_4 \\ \qquad + a_1b_4c_2d_3 - a_1b_4c_3d_2 \\ - a_2b_1c_3d_4 + a_2b_1c_4d_3 + a_2b_3c_1d_4 - a_2b_3c_4d_1 \\ \qquad - a_2b_4c_1d_3 + a_2b_4c_3d_1 \\ + a_3b_1c_2d_4 - a_3b_1c_4d_2 - a_3b_2c_1d_4 + a_3b_2c_4d_1 \\ \qquad + a_3b_4c_1d_2 + a_3b_4c_2d_1 \\ - a_4b_1c_2d_3 + a_4b_1c_3d_2 + a_4b_2c_1d_3 - a_4b_2c_3d_1 \\ \qquad - a_4b_3c_1d_2 + a_4b_3c_2d_1 \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & h & g \\ b & h & 0 & f \\ c & g & f & 0 \end{vmatrix} = a^2f^2 + b^2g^2 + c^2h^2 - 2abfg - 2acfh - 2bcgh$$

139. Si en el sistema dado de elementos se cambian dos líneas paralelas, la determinante cambia de signo. Si en el sistema dado dos líneas paralelas son iguales, la determinante es 0.

Demostración.—Sea R la determinante del sistema dado, y R' la del sistema que resulta del dado, después de cambiar entre sí dos líneas (filas ó columnas) paralelas. Si $\varepsilon a_{fr} a_{gs} a_{ht}...$ es un término de R, será $-\varepsilon a_{fr} a_{gs} a_{ht}..$ un término de R'; pues permaneciendo invariables las columnas, fgh... es una permutación de una clase de los índices que señalan las filas en el sistema dado, y una permutación de la otra clase (130) de los índices que señalan las filas en el segundo sistema; y permaneciendo invariables las filas, si rst... es una permutación de la una clase, de los índices de las columnas, en el primer sistema, será una permutación de la otra clase, de los índices de las columnas en el segundo. Luego los términos de R' son respectivamente iguales y opuestos (de signo contrario) á los de R; es decir, que $R' = -R$.

Si ahora suponemos que las dos líneas paralelas (filas ó columnas) cambiadas entre sí, son iguales R' no se diferenciará de R; y por consecuencia, $R = -R$, esto es: $R = 0$, cualesquiera que sean los elementos.

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a & a_2 \\ b & b_1 & b & b_2 \\ c & c_1 & c & c_2 \\ d & d_1 & d & d^2 \end{vmatrix} = 0$$

140. Cuando de un sistema de n^2 elementos se escogen m filas, y de estas filas escogidas, otras tantas columnas, obtenemos un sistema parcial de m^2 elementos, cuya determinante se denomina *subdeterminante* del grado m^o del sistema propuesto. Como m filas, entre las n del sistema, pueden elegirse de $\binom{n}{m}$ modos diferentes, resulta que, mirando solo á la combinación de las filas, habrá $\binom{n}{m}$ subdeterminantes del grado m; y mirando á filas y columnas, el sistema dado contendrá $\binom{n}{m}^2$ subdeterminantes del grado m^o, y otras tantas del grado $(n-m)^o$ (133). De lo dicho se desprende que en el sistema de n^2 elementos, además de la determinante del grado n, podremos considerar, pues en él se hallan comprendidas:

$$n^2 \text{ subdeterminantes del grado } (n-1)$$

$$\binom{n}{2}^2 \text{ subdeterminantes del grado } (n-2)$$

. . . .

Las subdeterminantes de primer grado son los elementos aislados del sistema. Las combinaciones de m elementos, entre los n de cada fila y de cada columna, pueden numerarse como se quiera. Conviniendo en que la combinación i^a, entre las $\binom{n}{m}$

formadas con los índices de las filas, constituya con la combinación k^a de los índices de las columnas, la subdeterminante p_{ik} del grado m, y en representar por μ el número $\binom{n}{m}$, el *sistema de las subdeterminantes del grado* m^o que corresponde al sistema dado, podrá expresarse como sigue:

$$\begin{matrix} p_{11} \ldots p_{1\mu} \\ \ldots\ldots \\ p_{\mu 1} \ldots p_{\mu\mu} \end{matrix}$$

141. Dos subdeterminantes cuyos grados sean complementarios respecto de n, ó que compongan este número n, tales como:

$$= \Sigma \pm a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \ldots \text{ y } = \varepsilon \Sigma \pm a_{t\rho}\, a_{\sigma u} \ldots,$$

se llamarán *adjuntas*, ó la *una adjunta de la otra*, cuando el producto de los elementos,

$$\varepsilon a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \ldots a_{\rho t}\, a_{\sigma u} \ldots$$

sea un término de la determinante $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ (138). Son adjuntas, por ejemplo.

$$\Sigma \pm a_{22} \ldots a_{nn} \text{ y } a_{11};\ \Sigma \pm a_{33} \ldots a_{nn} \text{ y } \Sigma \pm a_{11} a_{22}.$$

Para $n = 5$ son adjuntas:

$$a_{34} \text{ y } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} & a_{53} \end{vmatrix}$$

porque $3|1245$ y $4|1253$ son permutaciones de la misma clase.

Lo son también:

$$\begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} \\ a_{35} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

porque $13|245$ y $52|134$ pertenecen á la misma clase.

Si p_{ik} y q_{ik} representan subdeterminantes adjuntas, los sistemas (140)

$$\begin{matrix} p_{11} \cdots p_{1\mu} \\ \cdots\cdots \\ p_{\mu 1} \cdots p_{\mu\mu} \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} q_{11} \cdots q_{1\mu} \\ \cdots\cdots \\ q_{\mu 1} \cdots q_{\mu\mu} \end{matrix}$$

son *sistemas adjuntos de subdeterminantes* del sistema dado. En particular, los sistemas

$$\begin{matrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nn} \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{matrix}$$

serán adjuntos, siempre que α_{ik} sea la adjunta del elemento a_{ik}, ó bien, la subdeterminante del grado $(n-1)^o$, adjunta del mismo elemento.

142. Cuando las subdeterminantes p_{ik} y q_{ik}, de los grados respectivos complementarios, m^o y $(n-m)^o$, son adjuntas (141), todos los términos del producto $p_{ik}\ q_{ik}$ son términos de la determinante R, del grado n^o, del sistema propuesto.

En efecto, el término inicial del producto

$$a_{\alpha f}\ a_{\beta g} \ldots a_{\rho t}\ a_{\sigma u} \ldots,$$

es un término de R (141). Después de invertir los dos primeros números α y β, son $\beta\alpha \ldots \rho\sigma \ldots$ y $fg \ldots tu \ldots$ permutaciones de diferentes clases; y, por lo tanto, $-a_{\beta f}\ a_{\alpha g} \ldots$ es un término de p_{ik}, y el término.

$$-a_{\beta f}\ a_{\alpha g} \ldots a_{\rho t}\ a_{\sigma u} \ldots$$

del producto consabido, es también un término de R; etc., etc.

En general: $\Sigma \pm a_{\alpha f}\ a_{\beta g} \ldots a_{\rho t}\ a_{\sigma u} \ldots = R$ (151).

Los términos de R que contienen los elementos $a_{\alpha f}, a_{\beta g}, \ldots$ se hallan compendiados en la fórmula $a_{\alpha f}\ a_{\beta g} \ldots \Sigma \pm a_{\rho t}\ a_{\sigma u} \ldots$ Los términos, en particular, de la determinante $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{55}$, que contienen el elemento a_{23}, se hallan compendiados en la forma $a_{23}, \Sigma \pm a_{12}\ a_{31}\ a_{44}\ a_{55}$: los que contienen los elementos a_{31} y a_{14}, en la expresión

$$a_{31}\, a_{14} \Sigma \pm a_{22}\, a_{43}\, a_{55}.$$

143. Sea

$$\begin{array}{c} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nn} \end{array}$$

el sistema adjunto (141) del

$$\begin{array}{c} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{array}$$

cuya determinante es R. Multipliquemos ordenadamente, uno á uno, v. gr., los elementos de la fila i^a del segundo por los de la fila k^a del primero; y los elementos de la columna i^a del segundo por los de la columna k^a del primero; y sumemos los productos en uno y otro caso. Cada una de las dos sumas, así obtenidas

$$a_{i1}\, \alpha_{k1} + a_{i2}\, \alpha_{k2} + \ldots + a_{in}\, \alpha_{kn}$$

y

$$a_{1i}\, \alpha_{1k} + a_{2i}\, \alpha_{2k} + \ldots + a_{ni}\, \alpha_{nk}$$

tendrá el valor R, ó el valor 0, según que i y k sean iguales ó desiguales.

En efecto: de los términos de la determinante contienen unos el elemento 1.°, otros el 2.°, otros el 3.° etc., etc. de la línea i^a (sea fila ó columna) del sistema propuesto. (138) Hallándose compendiados en el producto $a_{ik}\ \alpha_{ik}$ todos los que contienen el elemento a_{ik} (142), resulta que $a_{i1}\ \alpha_{i1}$ será el agregado de los términos de la determinante que contienen el elemento a_{i1} (1.° de la fila i); el $a_{i2}\ \alpha_{i2}$ el conjunto de los términos que contienen el elemento a_{i2} (2.° de la fila i); etc.; y la suma

$$a_{i1}\,\alpha_{i1} + a_{i2}\,\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\,\alpha_{in}$$

comprenderá, por consecuencia, todos los términos de la determinante R una sola vez cada uno.

Del mismo modo, si nos fijamos en los elementos de la columna i^a, en la suma

$$a_{1i}\,\alpha_{1i} + a_{2i}\,\alpha_{2i} + \ldots + a_{ni}\,\alpha_{ni}$$

estarán todos los términos de la determinante R una sola vez cada uno.

Luego la suma

$$a_{k1}\,\alpha_{i1} + a_{k2}\,\alpha_{i2} + \ldots + a_{kn}\,\alpha_{in}$$

ó esta otra:

$$a_{1k}\,\alpha_{1i} + a_{2k}\,\alpha_{2i} + \ldots + a_{nk}\,\alpha_{ni}$$

será la determinante del sistema que se deriva del propuesto, cambiando en él la línea (fila ó columna) i^a por la k^a. Y, como después de tal sustitución, no son ya diferentes todas las líneas del sistema deducido, su determinante será 0 (139).

Ejemplos:

Sean $\begin{matrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{matrix}$ y $\begin{matrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix}$ dos sistemas adjuntos

Por definición tendremos:

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b \\ c_2 & c \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}$$

$$\beta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \quad \beta_1 = \begin{vmatrix} c_2 & c \\ a_2 & a \end{vmatrix} \quad \beta_2 = \begin{vmatrix} c & c_1 \\ a & a_1 \end{vmatrix}$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a \\ b_2 & b \end{vmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix}$$

Siendo R la determinante del sistema dado, será:

$$\begin{matrix} a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = R & \text{y} & a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma = R \\ b\alpha + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 = 0 & & a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0 \\ c\alpha + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0 & & a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma = 0; \text{ etc.} \end{matrix}$$

144. Si todos los elementos de una línea de un sistema dado son ceros, también la determinante del sistema es cero. Cuando todos los elementos de una línea, menos uno, sean nulos, desaparecerán en la determinante todos los términos que no contengan este único elemento significativo. Así:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} \dots \\ 0 & a_{32} & a_{33} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \dots \\ a_{32} & a_{33} \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \dots \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \dots \\ a_{43} & a_{44} \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Cuando todos los elementos situados á un mismo lado de la diagonal sean ceros, queda solamente el término inicial de la determinante.

Un sistema dado, recíprocamente, puede meterse en una escuadra cuyo vértice sea 1, uno de sus brazos, constituído por ceros, y el otro compuesto de elementos cualesquiera, sin que varíe, su determinante. Así:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & a & a_1 \\ y & b & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & u \\ 0 & a & a_1 \\ 0 & b & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & v \\ b & b_1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

145. Si todos los elementos de una línea del sistema se multiplican por un número, la determinante queda multiplicada por el mismo número. Pues entonces: (143)
$a_{1k}\,\alpha_{1k} + a_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots$ se convierte en $pa_{1k}\,\alpha_{1k} + pa_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots$; y, por consecuencia, R en pR. Así, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} pa_1 & a_2 & a_3 \\ pb_1 & b_2 & b_3 \\ pc_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & pa_2 & pa_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & a_1 \\ -b & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a \\ b_1 & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & pa & a_1 \\ b & pb & b_1 \\ c & pc & c_1 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a & a & a_1 \\ b & b & b_1 \\ c & c & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

Cuando los elementos de una línea (fila ó columna) se hallen ó estén entre sí como los correspondientes de otra línea paralela la determinante, es cero (139).

146. Cuando los elementos de una línea sean polimonios, la determinante del sistema es la suma de varias determinantes. Así:

$$\begin{vmatrix} p_1+q_1+r_1 \, a_{12}\dots \\ p_2+q_2+r_2 \, a_{22}\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 \, a_{12}\dots \\ p_2 \, a_{22}\dots \\ \dots\dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 \, a_{12}\dots \\ q_2 \, a_{22}\dots \\ \dots\dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_1 \, a_{12}\dots \\ r_2 \, a_{22}\dots \\ \dots\dots \end{vmatrix}$$

Pues, haciendo $a_{ik}=p_i+q_i+r_i$, será:

$$R=a_{1k}\alpha_{1k}+a_{2k}\alpha_{2k}+\dots=p_1\alpha_{1k}+p_2\alpha_{2k}+\dots+q_1\alpha_{1k}$$
$$+q_2\alpha_{2k}+\dots+r_1\alpha_{1k}+r_2\alpha_{2k}+\dots$$

Cuando á los elementos de una línea (fila ó columna) se agregan los correspondientes de otra línea (fila ó columna) multiplicados por un número cualquiera, la determinante no varía. Así:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+pa_1 & a_1 & a_2 \\ b+pb_1 & b_1 & b_2 \\ c+pc_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}; \text{ porque } \begin{vmatrix} pa_1 & a_1 & a_2 \\ pb_1 & b_1 & b_2 \\ pc_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$=0 \ (145)$$

Por consecuencia:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1-x & x_2-x \\ y_1-y & y_2-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & x_1-x & x_2-x \\ y & y_1-y & y_2-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

147. El teorema (143) se verifica también para los sistemas adjuntos (141)

$$\begin{matrix} p_{11}\cdots p_{1\mu} \\ \cdots\cdots \\ p_{\mu 1}\cdots p_{\mu\mu} \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} q_{11}\cdots q_{1\mu} \\ \cdots\cdots \\ q_{\mu 1}\cdots q_{\mu\mu} \end{matrix}$$

Lo cual significa que las sumas de productos (de los elementos de dos líneas)

$$p_{i1}q_{k1}+p_{i2}q_{k2}+\cdots+p_{i\mu}q_{k\mu}$$

$$p_{1i}q_{1k}+p_{2i}q_{2k}+\cdots+p_{\mu i}q_{\mu k}$$

tienen (cada una) el valor R, ó el valor 0, según que i y k sean iguales ó desiguales.

Demostración.—En los términos de la determinante R, con la combinación i^a de las filas, se hallan los elementos de la 1.ª, ó la 2.ª, ó la 3.ª... etc. combinación de las columnas (140). Compendiados en el producto simbólico $p_{ik}\ q_{ik}$ los términos de R que contienen la subdeterminante p_{ik} (142), resulta que la suma

$$p_{i1}q_{i1}+p_{i2}q_{i2}+\cdots p_{i\mu}q_{i\mu}$$

ó esta otra

$$p_{1i}q_{1i}+p_{2i}q_{2i}+\cdots p_{\mu i}q_{\mu i}$$

contendrán todos los términos de la determinante

R una sola vez cada uno. Y, por consecuencia, la suma

$$p_{k1} q_{i1} + p_{k2} q_{i2} + \ldots . p_{k\mu} q_{i\mu}$$

será la determinante del sistema que se deriva del propuesto, sustituyendo la combinación i^a, de las filas, por la k^a; y como en este sistema, así modificado, no son ya diferentes todas las filas, su determinante es cero (139)

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = 12 \mid 34 + 23 \mid 14 + 31 \mid 24 \\ + 34 \mid 12 + 14 \mid 23 + 24 \mid 31 \end{array}$$

siempre que

$$12 \mid 34 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix}; \text{ etc., etc.;}$$

esto es, siempre que los índices 1, 2, 3, 4, señalen al mismo tiempo filas y columnas ($i = k$).

$$\begin{vmatrix} a_1 \ldots a_5 \\ \ldots\ldots \\ c_1 \ldots c_5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = 12|345 + 23|145 + 34|125 + 45|123 \\ + 13|425 + 24|315 + 35|142 \\ + 14|235 + 25|134 \\ + 15|243 \end{array}$$

cuando, según antes dijimos:

$$12|345 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \\ d_3 & d_4 & d_5 \\ e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} ; \text{etc.}$$

148. Si la determinante de un sistema dado es cero, las adjuntas de una línea (fila ó columna) son entre sí como las adjuntas de otra línea (fila ó columna).

Designemos, para simplificar la demostración, por $(abcd)$ y (abc) las determinantes de los sistemas

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{matrix}$$

y, como ya se hizo (143) por $\alpha, \alpha_1 \ldots \beta, \beta_1 \ldots \gamma, \gamma_1 \ldots \delta, \delta_1 \ldots$, etc. etc., las adjuntas correspondientes, en el primer sistema, á los elementos $a, a_1 \ldots b, b_1 \ldots c, c_1 \ldots d, d_1 \ldots$ Según (146) tendremos.

$$(acd)\alpha + (bcd)\beta = (a\alpha + b\beta, c \quad d)$$
$$= (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta, c \quad d).$$

Pero (143): $a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta ; = (abcd) \; a_1\alpha + b_1\beta + + c_1\gamma + d_1\delta = 0$, etc., etc:. luego (144):

$$(acd)\,\alpha + (bcd)\,\beta = (abcd)\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

y por la misma razón:

$$(acd)\,\alpha_1 + (bcd)\,\beta_1 = (abcd)\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c & d \end{vmatrix}$$

Ahora bien, en el supuesto de ser $(abcd) = 0$, y de no serlo (acd), de las dos últimas igualdades se derivan las siguientes que buscábamos:

$$\alpha : \beta = \alpha_1 : \beta_1 \quad \alpha : \alpha_1 = \beta : \beta_1 \text{ y } (145) \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Estas demuestran también que, para el sistema de las adjuntas, todas las determinantes desde el segundo grado en adelante son nulas.

149. Sean

$$\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1n} & & b_{11} \ldots b_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} & \text{y} & b_{21} \ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}$$

dos sistemas (rectangulares ó cuadráticos); y designemos, en general, por c_{ik} la suma de los productos sucesivos de cada uno de los elementos de la fila i^a del primer sistema por cada uno de los elementos de la fila k^a del segundo sistema, á saber:

$$c_{ik} = a_{i1}\,b_{k1} + \ldots + a_{in}\,b_{kn} = \sum_t a_{it}\,b_{kt} \quad (t = 1, 2, \ldots n)$$

Multiplicando cada una de las filas de uno de los sistemas dados por todas las del otro, formaremos un sistema compuesto, cuyos m^2 elementos serán polinomios, y el cual podrá expresarse, conforme al simbolismo adoptado, como sigue:

$$\begin{matrix} c_{11} \dots c_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ c_{m1} \dots c_{mm} \end{matrix}$$

I. *La determinante de este sistema compuesto* tendrá por término inicial la suma

$$\begin{aligned} c_{11}c_{22}c_{33}\dots &= \sum_t a_{1t}b_{1t} \sum_u a_{2u}b_{2u} \sum_v a_{3v}b_{3v}\dots \\ &= \sum_{tuv\dots} \left(a_{1t}a_{2u}a_{3v}\dots b_{1t}b_{2u}b_{3v}\dots\right) \end{aligned}$$

cuyos términos se formarán atribuyendo á cada uno de los índices $t, u, v \dots$ sucesivamente los valores $1, 2 \dots n$. De este término inicial se deducirán los restantes, permutando los segundos índices de los elementos c y dejando invariables los primeros (138); mas, al efectuar esta operación, serán permutados solamente los primeros índices (los de las filas) de los elementos b, y los de las columnas no sufrirán cambio alguno. Quedando, pues, invariables los índices de las columnas, $t, u, v \dots$, y permutando los índices de las filas de los elementos b, hallaremos los términos de la determinante $\Sigma \pm b_{1t}\, b_{2u}\, b_{3v} \dots$ siempre afectados del común factor $a_{1t}\, a_{2u}\, a_{3v} \dots$; y, por consecuencia, será:

$$\Sigma \pm c_{11}c_{22}c_{33}\dots = \sum_{tuv\dots} \left(a_{1t}a_{2u}a_{3v}\dots \Sigma \pm b_{1t}b_{2u}b_{3v}\dots\right)$$

Si entre los índices, t, u, v ... hubiere dos iguales, se anularía (139) la determinante $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} \ldots$; y esto enseña que, para obtener todos los términos de la suma (determinante del sistema compuesto), debemos reemplazar el sistema de índices $tuv \ldots$, cuantas veces sea posible, por sistemas de m números diferentes todos entre sí, de la serie natural, $1, 2, \ldots n$.

II. Cuando $m < n$, hallamos en esta serie natural $\binom{n}{m}$ combinaciones de grado m, ó sistemas numéricos, para reemplazar al $tuv \ldots$; y, por consecuencia, otros tantos términos de la suma determinante del sistema compuesto. Si por una de tales combinaciones $tuv \ldots$. sustituímos ahora todas sus permutaciones, la determinante $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} \ldots$ tomará el valor Q ó el $-Q$ (139); y los términos que de semejante sustitución resultan para la suma que buscamos serán los de la determinante $\Sigma \pm a_{1t} a_{2u} a_{3v} \ldots$ multiplicados todos por el factor Q. La suma en cuestión será, pues:

$$\Sigma \pm c_{11}\, c_{22}\, c_{33} \ldots = \sum_{tuv\ldots} \left(\Sigma \pm a_{1t} a_{2u} a_{3i} \ldots \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} \ldots \right)$$

Y, como lo mismo puede decirse de todas las $\binom{n}{m}$ combinaciones $tuv \ldots$, resulta que la determinante del sistema compuesto es la suma de $\binom{n}{m}$ productos de las determinantes correspondientes del grado m de los dos sistemas componentes dados: expresada por el segundo miembro, de la igualdad última á condición de que $tuv\ldots$ sea sustituída por todas las combinaciones de m números diferentes entre los de la serie natural 1, 2,... n.

III. Cuando $m=n$, el sistema ó coordinación $tuv\ldots$ sólo puede ser sustituída por la numérica 123... y entonces:

$$\Sigma\pm c_{11}\ldots c_{nn}=\Sigma\pm a_{11}\ldots a_{nn}\Sigma\pm b_{11}\ldots b_{nn}$$

Es decir, que la determinante del sistema compuesto, en este caso, es el producto de las determinantes de los dos sistemas componentes.

IV. Cuando $m>n$, son nulos todos los términos de la suma

$$\sum_{tuv\ldots}\left(a_{1t}\, a_{2u}\, a_{3v}\ldots \Sigma\pm b_{1t}\, b_{2u}\, b_{3v}\ldots\right)$$

y, nula también, por consecuencia, la determinante del sistema compuesto.

Ejemplos.—Sean los dos sistemas.

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{matrix}$$

El sistema compuesto de estos dos será:

$$\begin{matrix} a_1 f_1+b_1 g_1+c_1 h_1 & a_1 f_2+b_1 g_2+c_1 h_2 \\ a_2 f_1+b_2 g_1+c_2 h_1 & a_2 f_2+b_2 g_2+c_2 h_2 \end{matrix}$$

Y la determinante de este sistema compuesto se expresa por el producto

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

que se resuelve en la suma de los productos siguientes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & h_1 \\ f_2 & h_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

De los dos sistemas

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{matrix}$$

se compone el siguiente:

$$\begin{matrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & a_1 f_2 + b_1 g_2 + c_1 h_2 & a_1 f_3 + b_1 g_3 + c_1 h_3 \\ a_2 f_1 + b_2 g_1 + c_2 h_1 & a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2 h_2 & a_2 f_3 + b_2 g_3 + c_2 h_3 \\ a_3 f_1 + b_3 g_1 + c_3 h_1 & a_3 f_2 + b_3 g_2 + c_3 h_2 & a_3 f_3 + b_3 g_3 + c_3 h_3 \end{matrix}$$

cuya determinante es el producto

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

De los dos sistemas

$$\begin{matrix} a_1\, b_1\, c_1 & & f_1\, g_1\, h_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \text{y} & \cdots\cdots\cdots \\ a_4\, b_4\, c_4 & & f_4\, g_4\, h_4 \end{matrix}$$

se compone el siguiente:

$$\begin{matrix} a_1f_1+b_1g_1+c_1h_1 & \cdots\cdots\cdots & a_1f_4+b_1g_4+c_1h_4 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_4f_1+b_4g_1+c_4h_1 & \cdots\cdots\cdots & a_4f_4+b_4g_4+c_4h_4 \end{matrix}$$

cuya determinante se expresa también por el producto

$$\begin{vmatrix} a_1\, b_1\, c_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_4\, b_4\, c_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} f_1\, g_1\, h_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_4\, g_4\, h_4 \end{vmatrix}$$

y es nula, puesto que no se diferencia de esta otra

$$\begin{vmatrix} a_1\, b_1\, c_1\, d_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_4\, b_4\, c_4\, d_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} f_1\, g_1\, h_1\, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_4\, g_4\, h_4\, 0 \end{vmatrix} = 0$$

150. Cuando el sistema $\alpha_{11}\ldots\alpha_{nn}$ es adjunto (141) del sistema $a_{11}\ldots a_{nn}$, cuya determinante es R, las subdeterminantes del mismo grado del sistema α son entre sí como las adjuntas de las subdeterminantes correspondientes del sistema a.

Demostración.—Sean $\Sigma\pm\alpha_{fi}\,\alpha_{gk}\ldots$ y $\Sigma\pm\alpha_{ru}\alpha_{sv}\ldots$, dos subdeterminantes adjuntas de los grados m y $(n-m)$ respectivamente, en el sistema α; y $\Sigma\pm a_{ru}$ $a_{sv}\ldots$ la subdeterminante del sistema a, correspondiente á la segunda de aquéllas. De los dos sistemas, con n^2 elementos cada uno,

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{fi} & \alpha_{fk}\ldots\alpha_{fu} & \alpha_{fv}\ldots \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk}\ldots\alpha_{gu} & \alpha_{gv}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots 1 & 0 \\ 0 & 0\ldots 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{cccc} a_{fi} & a_{fk}\ldots a_{fu} & a_{fv}\ldots \\ a_{gi} & a_{gk}\ldots a_{gu} & a_{gv}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{ri} & a_{rk}\ldots a_{ru} & a_{rv}\ldots \\ a_{si} & a_{sk}\ldots a_{su} & a_{sv}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

se forma el sistema compuesto (149) también con n^2 elementos, $c_{11}\ldots c_{nn}$. En este sistema y en sus m primeras columnas, los elementos polinómicos c_{ik} tendrán el valor R ó el valor 0, según que i y k sean iguales ó desiguales (143). Las columnas siguientes á las m primeras no se diferencian de las correspondientes del segundo sistema de los dos que componen el c. Ahora bien; el producto de las determinantes de estos dos sistemas es la determinante del sistema compuesto (149 III). La del primero de aquéllos, después de la supresión de las escuadras con el vértice 1, es $\Sigma\pm\alpha_{fi}\,\alpha_{gk}\ldots$ (144); la del segundo es R (142); la del sistema compuesto, después de la supresión de las escuadras con el vértice R, es $R^m\Sigma\pm a_{ru}a_{sv}\ldots$(144). Luego expresándolo así, tendremos:

$$R\Sigma\pm\alpha_{fi}\,\alpha_{gk}\ldots=R^m\,\Sigma\pm a_{ru}\,a_{sv}\ldots$$

de donde:

$$\begin{vmatrix} \text{adj. } a_{fi} & \text{adj. } a_{fk} \ldots \\ \text{adj. } a_{gi} & \text{adj. } a_{gk} \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} : \text{adj.} \begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} \ldots \\ a_{gi} & a_{gk} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = R^{m-1}$$

En particular: $\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn} = R^{n-1}$. Cuando $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{55} = R$, será $\Sigma \pm \alpha_{21}\alpha_{43}\alpha_{54}$: $\Sigma \pm a_{15}a_{32} = R^2$, etcétera.

La misma ley se verifica, según lo demostrado en el teorema (147), para las subdeterminantes del mismo grado, de los sistemas adjuntos $p_{11} \ldots p_{\mu\mu}$ y $q_{11} \ldots q_{\mu\mu}$.

XXVII.—Productos y potencias de polinomios.

(HEIS-92.)

151. El producto $(a_1 + x)$ $(a_2 + x) \ldots (a_n + x)$ se convierte cuando se desarrolla en una suma de 2^n términos. El primero de éstos es el producto de todos los primeros términos de los binomios, á saber: $a_1 a_2 \ldots a_n$; y el último es x^n, ó sea, el producto de todos los segundos términos. Los términos del producto que tienen el factor común x^k son los productos de cada $(n-k)$ primeros términos de otros tantos binomios, por los segundos términos de los binomios restantes. El coeficiente de x^k, por consecuencia, será la suma de los productos

de $(n—k)$ términos diferentes entre los de la serie $a_1 a_2 ... a_n$; y para calcularlo deberemos formar las combinaciones (productos diferentes) del grado $(n—k)^o$ con dichos elementos $a_1, a_2 ... a_n$. Así por ejemplo:

$$\begin{aligned}&(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)\\ &=abcd+(abc+abd+acd+bcd)x+(ab+ac+ad\\ &\quad+bc+bd+cd)x^2+(a+b+c+d)x^3+x^4\end{aligned}$$

Si suponemos ahora, en particular, que todos los términos $a_1, a_2 ... a_n$ son iguales á la cantidad a, el coeficiente de x^k será la suma de $\binom{n}{n-k}$ términos iguales todos á la potencia a^{n-k}; y, como $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ (121), tendremos:

$$(a+x)^n = a_n + \binom{n}{1} a^{n-1}x + \binom{n}{2} a^{n-2}x^2 + \ldots$$

según demostramos, partiendo de otro fundamento, en el Capítulo XXIII.

152. La potencia $(a+b+c+...)^n$ produce cuando se desarrolla, una suma de términos que contienen cada uno n factores de entre los de la serie $a, b, c...$; y se deducen todos de la fórmula general:

$$\frac{n!}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! ..} a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots$$

á condición de que $\alpha, \beta, \gamma...$ reciban todos los valores posibles desde 0 hasta n, iguales ó desiguales, cuya suma, para todas las coordinaciones, sea siempre n. (*)

Demostración.—De la serie de los n polinomios $a+b+c\ldots$ tómense α para formar el producto a^α con sus primeros términos; de los $n-\alpha$ polinomios restantes tómense β para formar con sus segundos términos el producto b^β; de los $n-\alpha-\beta$ que quedan, tómense γ para formar con sus terceros términos el producto c^γ; etc., etc. Componiendo el producto $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$ de todas las maneras posibles se obtendrán todos los términos de la potencia $(a+b+c\ldots)^n$

Ahora bien: a^α puede formarse de $\binom{n}{\alpha}$ maneras diferentes; puesto que tantas son las combinaciones del grado α con los n polinomios; y por la misma razón b^β podrá formarse de $\binom{n-\alpha}{\beta}$ modos diferentes; c^γ, de $\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ modos diferentes; etcétera, etc.; y, por consecuencia, $a^\alpha b^\beta$ podr formarse de $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}$ modos; $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, de $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ modos, etc. Luego, el término ${}^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$ tendrá el coeficiente

---

(*) LEIBNIZ á JUAN BERNOULLI $\frac{6}{16}$ de Mayo 1695. KLÜGEL, math. W. 3, p. 832.

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}\ldots=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}$$

que representa el número de permutaciones con n elementos, de los cuales son α iguales al a, β al b, γ al c; etc., (135).

Ejemplo.—Siendo $n=4$, son posibles las siguientes combinaciones de los exponentes:

4	31	211	1111
	22		

Con los elementos a, b, c,... fórmense las combinaciones de 1.°, 2.°, 3.° y 4.° grado; y aquellos elementos recibirán:

En cada combinación de primer grado el exponente 4.

En cada una de 2.° grado respectivamente los exponentes

3,1   1,3   2,2

En cada una de tercer grado, los exponentes

2,1,1   1,2,1   1,1,2.

En cada combinación de 4.° grado el exponente 1.

Los términos a^4 llevan el coeficiente $\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4}=1.$

Los términos a^3b, ab^3... el coeficiente $\frac{1.2.3.4}{1.2.3}=4.$

Los términos $a^2\ b^2$,...el coeficiente $\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2}=6.$

Los términos a^2bc, ab^2c,... el coeficiente $\frac{1.2.3.4}{1.2}=12.$

Los términos $abcd$,...el coeficiente $1.2.3.4=24$.

Si designamos respectivamente las sumas de estos términos por

$$\Sigma a^4,\ \Sigma a^3b,\ \Sigma a^2\ b^2,\ \Sigma a^2bc,\ \Sigma abcd,$$

y el polinomio $a+b+c$... por P, la potencia 4.ª de este mismo será:

$$P^4=\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc+24\Sigma abcd.$$

De un modo análogo se obtienen:

$$P^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab$$

$$P^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc;\ \text{etc., etc.}$$

Para determinar en el desarrollo de la potencia 6.ª, por ejemplo, los términos de la suma $\Sigma a^3\ b^2\ c$, se forman las combinaciones de tercer grado con los elementos a, b, c...y en cada una de las coordinaciones resultantes se atribuyen á sus elementos sucesivamente los exponentes

3,2,1 3,1,2 2,3,1; etc., etc.

153. Para desarrollar la potencia

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)^n$$

en una suma de términos ordenados según las potencias de x, se forman las combinaciones del grado n con los elementos $a_0\ a_1\ a_2\ldots$, cada uno de los cuales puede hallarse repetido n veces; de modo que las sumas de los índices en cada una de las combinaciones tengan sucesivamente los valores 0, 1, 2... Si una combinación se compone de α elementos a_0, β elementos a_1, γ elementos $a_1\ldots$ y designamos por k la suma $\alpha.0+\beta.1+\gamma.2\ldots$ de los n índices de sus elementos, será (152):

$$\frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \ldots} a_0^{\alpha} (a_1x)^{\beta}\ (a_2x^2)^{\gamma} \ldots.$$

un término de la serie que buscamos, que contendrá la potencia x^k; puesto que

$$a_0^{\alpha} (a_1x)^{\beta} (a_2x^2)^{\gamma} \ldots = a_0^{\alpha}\ a_1^{\beta}\ a_2^{\gamma} \ldots x^{\beta+2\gamma+\ldots}$$

Y todos los términos que contengan la potencia x^k se obtendrán, componiendo el número k con n índices, iguales ó desiguales, de los 0, 1, 2,... que afectan á los términos del polinomio propuesto, de todas las maneras posibles. (*)

(*) Moivre *Philos. Trans.* 1697 p. 619. Un desarrollo recurrente se encuentra en Euler, *Introd.* I § 76.—Acerca del número de descomposiciones posibles de un número dado, en otros, más pequeños, hizo Euler investigaciones ulteriores. *Introd.* I. c. 16.

Para $n=5$, por ejemplo, los exponentes $k=0, 1, 2, 3, \ldots$ de x, pueden componerse del modo siguiente:

0 de los 5 índices		00000	6	»	00006
1	»	00001			00015
2	»	00002			00024
		00011			00033
3	»	00003			00114
		00012			00123
		00111			00222
4	»	00004			01113
		00013			01122
		00022			11112
		00112	7	»	00007
		01111	etc., etc.		
5	»	00005			
		00014			
		00023			
		00113			
		00122			
		01112			
		11111			

designando por *rstuv* una cualquiera de estas coordinaciones de los índices, el término

$$a_r a_s a_t a_u a_v x^{r+s+t+u+v}$$

tendrá los coeficientes que siguen:

1	cuando en él haya	5	índices iguales	
5	»	4	»	
20	»	3	»	
60	»	2	»	
30	»	2 y 2	»	
10	»	2 y 3	»	

120 cuando todos los índices sean diferentes.

Poniendo, pues, por los índices cuyas coordinaciones hemos escrito antes, los elementos correspondientes a_0, a_1..., la potencia que se busca será la siguiente:

$$\begin{array}{r|l|l}
a_0^5 + 5a_0^4 a_1 x + 5a_0^4 a_2 & x^2 + 5a_0^4 a_3 & x^3 \\
10a_0^3 a_1^2 & 20a_0^3 a_1 a_2 & \\
 & 10a_0^2 a_1^3 &
\end{array}$$

$+\ 5a_0^4 a_4$	$x^4 +\ 5a_0^4 a_5$	$x^5 +\ 5a_0^4 a_6$	$x^6 + ..$
$20a_0^3 a_1 a_3$	$20a_0^3 a_1 a_4$	$20a_0^3 a_1 a_5$	
$10a_0^3 a_2^2$	$20a_0^3 a_2 a_3$	$20a_0^3 a_2 a_4$	
$30a_0^2 a_1^2 a_2$	$30a_0^2 a_1^2 a_3$	$10a_0^3 a_3^2$	
$5a_0 a_1^4$	$30a_0^2 a_1 a_2^2$	$30a_0^2 a_1^2 a_4$	
	$20a_0 a_1^3 a_2$	$60a_0^2 a_1 a_2 a_3$	
	a_1^5	$10a_0^2 a_2^3$	
		$20a_0 a_1^3 a_3$	
		$30a_0 a_1^2 a_2^2$	
		$5a_1^4 a_2$	

154. Si en la serie de cantidades $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, se resta cada una de todas las siguientes, se obtienen $\binom{n}{2}$ diferencias, cuyo producto se reduce á una determinante, á saber: (*)

(*) Teorema de CAUCHY.—Véase el Tratado sobre Determinantes del autor, cap. 10.

$$\begin{matrix}(a_2-a_1)\,(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\\ (a_3-a_2)\dots(a_n-a_2)\\ \dots\dots\dots\dots\\ (a_n-a_{n-1})\end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

Demostración.—Designemos por i y k dos números cualesquiera de la serie 1, 2...n, siendo $i<k$; por P el producto que se busca; por Q el producto de las diferencias que no contengan ni la cantidad a_i ni la cantidad a_k; por R el producto de las diferencias que contengan la cantidad a_i pero no la a_k; y por S el de las diferencias que contengan la cantidad a_k, pero no la a_i. Entonces será $P = Q\,R\,S\,(a_k - a_i)$. Si cambiamos a_i por a_k el producto Q permanece invariable; el RS también permanece invariable, puesto que los productos de cada par de diferencias, $(a_h - a_i)\,(a_h - a_k)$ ó $(a_i - a_h)\,(a_h - a_k)$, ó $(a_i - a_h)\,(a_k - a_h)$ tampoco varían; pero la diferencia $a_k - a_i$ muda de signo; y por consecuencia, el producto P también recibe su valor opuesto.

Ahora bien: en primer lugar, en el producto P se encuentra el término $a_1^0 a_2^1 a_3^2 \dots a_n^{n-1}$ que es el producto de todos los minuendos de las diferencias que son factores de aquél; y todo término que se deduzca del $a_1^0 a_2^1 a_3^2 \dots a_n^{n-1}$ mediante la permutación de sus índices, con el carácter siempre de producto de todos los minuendos, se hallará comprendido en un producto que tendrá el valor P, ó el valor—P, según que las permutaciones de los índices pertenezcan á las que llamamos pares (positivas), ó impares (negativas) (131). De lo cual se desprende que el producto P contiene todos los términos que pueden deducirse del $a_1^0 a_2^1 a_3^2 \ldots a_n^{n-1}$ mediante las permutaciones de sus índices, unos positivos y otros negativos, conforme las expresadas permutaciones sean pares ó impares; y por lo tanto, que en P se hallan todos los términos de la determinante anteriormente escrita (138).

Por otra parte, ningún término de P contiene las cantidades $a_1, a_2, \ldots a_n$ elevadas á una potencia, superior á la $(n-1)^a$; puesto que cada una de ellas entra en $(n-1)$ diferencias. Los términos de P en que entran dos de aquellas cantidades con iguales exponentes, son, á pares, igualmente opuestos. Si, por ejemplo, $a_h^\alpha a_i^\beta a_k^\gamma \ldots$ es un término de P, $a_i^\alpha a_h^\beta a_k^\gamma \ldots$ será otro de—P; y $-a_i^\alpha a_h^\beta a_k^\gamma \ldots$ será un término de P, pero los términos $a_h^\alpha a_i^\beta a_k^\gamma$ y $-a_i^\alpha a_h^\beta a_k^\gamma \ldots$ son igualmente opuestos, cuando $\alpha=\beta$ y por consecuencia, se destruyen: luego en P sólo quedarán los términos de la determinante expresada.

De los $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ términos del producto P sólo quedarán, de resultas, los $1.2\ldots n$ términos de la determinante; de modo que, particularmente, quedarán $1.2.3$, en vez de los 2^3; $1.2.3.4$, en lugar de 2^6; $1.2.3.4.5$, en vez de los 2^{10}; etc., etc.

En el caso más sencillo tenemos:

$$(b-a)(c-a)(c-b)=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a$$

$$=ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)$$

Y dividiendo ambos miembros por el primero $(b-a)(c-a)(c-b)$, también:

$$1=\frac{ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}$$

En el desarrollo del producto $(b-a)(c-a)(c-b)$ los términos $-abc$ y $-acb$, como igualmente opuestos se destruyen. En ellos tienen igual exponente las cantidades a y b, etc., etc.

XXVIII.—Los números figurados y las progresiones aritméticas.

(HEIS-93, 81, 82.)

155. La fórmula $\binom{m+n-1}{m}$ que, como coeficiente binómico (123) y como expresión del número de combinaciones ó permutaciones (137) ya conocemos, lleva además el nombre y represen-

tación del n^o *número figurado del orden* m^o (*). Haciendo, pues, en ella $n=1,2\ldots$, se obtiene la serie de números figurados del orden m^o:

$$\binom{m}{m} \binom{m+1}{m} \binom{m+2}{m} \ldots \binom{m+n-1}{m}$$

El primer número figurado de cualquier orden es siempre 1. Los números figurados de primer orden son los números naturales. El n^o número figurado del orden m, cuya expresión escribimos al principio, puede considerarse: ó como suma del $(n-1)^o$ número figurado del orden m y del n^o del orden $(m-1)$ solamente; ó bien como la suma de los n primeros números figurados del orden $(m-1)$; puesto que (136):

$$\binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-2}{n} + \binom{m+n-2}{m-1}$$

(*) La formación de los números figurados (números poligonales, etc., etc.), por sumas sucesivas se atribuye á la escuela pitagórica. Las noticias más antiguas sobre los mismos son de Nicomaco (*Arithm. II*) y de Diofanto, acerca de las cuales habla Nesselmann (*Gesch. der. Algebra*, p. 201 y 462). A la investigación de formas más generales para los números figurados se dedicaron, en los siglos XVI y XVII, Maurolyco (*Arithm. I*-1575); Benz (*Manuductio ad numerum geometricum.*—Ulm 1621); Faulhaber, y otros. (Véase Kästner (*Gesch. der. Math.* 3. p. 120). La constitución de un número figurado por cocientes de productos de números sucesivos pertenece á Fermat (*Carta á* Roberval de 4 de Nov. de 1636) que la descubrió muy poco tiempo antes que Pascal (*Traité des ordres numeriques.*—Ouvres ed. Lahure II, p. 440).

$$=\binom{m-1}{m-1}+\binom{m}{m-1}+\binom{m+1}{m-1}+\ldots+\binom{m+n-2}{m-1}$$

Las sumas de los primeros 1, 2, 3... números naturales son los números figurados de segundo orden; las sumas de los primeros 1, 2, 3... números figurados de segundo orden son los números figurados en tercer orden; etc., etc.; puesto que, aplicando la última fórmula, tenemos:

$$1+2+3+\ldots+n=\binom{n+1}{2}$$

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{2}$$

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\ldots+\binom{n+2}{3}=\binom{n+3}{4}$$

y así sucesivamente.

Según esto, los números figurados de los primeros órdenes son:

1	2	3	4	5	6	7...
1	3	6	10	15	21	28...
1	4	10	20	35	56	84...
1	5	15	35	78	126	210...

NOTA.—Los números figurados de segundo orden se llaman *triangulares;* los de tercer orden *tetraédricos* (piramidales triangulares), y por esto se dice que el n^o número figurado del segundo orden es el triángulo del número n, y el tetraedro de este mismo número el figurado n^o del tercer orden. Las unidades (objetos adecuados) del n^o número trigonal, pueden, pues, colocarse en líneas paralelas (filas) para formar un triángulo cuyos lados contienen n unidades cada uno.

Las unidades del n^o número tetraédrico pueden distribuirse en triángulos paralelos, semejantes, para constituir un tetraedro cuyas aristas tendrán n unidades cada una. Los números figurados de órdenes superiores no pueden ser construídos del modo que los del segundo y tercero.

156. Cuando los números figurados del orden m se multiplican respectivamente por los términos de la progresión geométrica 1, v, v^2, v^3 ..., se obtiene una serie de términos cuya suma s_m puede ser expresada mediante la suma s_{m-1} de los términos de la serie formada del mismo modo con los números figurados del orden (m—1).

En efecto, de las dos series

$$s_m = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} v + \ldots + \binom{m+n-1}{m} v^{n-1}$$

$$v s_m = \binom{m}{m} v + \ldots + \binom{m+n-2}{m} v^{n-1} +$$

$$+ \binom{m+n-1}{m} v^n$$

teniendo en cuenta que (155)

$$\binom{k+1}{m} - \binom{k}{m} = \binom{k}{m-1},$$

se desprende:

$$(1-v)s_m = s_{m-1} - \binom{m+n-1}{m} v^n$$

deduciéndose la suma s_{m-1} de la s_m por la disminución de m en 1. (155)

Estableciendo, pues, las sumas particulares:

$$s^0 = 1 + v + v^2 + \quad + \ldots + v^{n-1}$$

$$s_1 = 1 + 2v + 3v^2 + \quad + \ldots + nv^{n-1}$$

$$s_2 = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} v + \binom{4}{2} v^2 + \ldots + \binom{n+1}{2} v^{n-1}$$

deducimos estas fórmulas:

$$(1-v)s_0 = 1 - v^n$$

$$(1-v)s_1 = s_0 - nv^n$$

$$(1-v)\, s_2 = s_1 - \binom{n+1}{2} v^n.$$

157. Si los números figurados

$$\binom{m+k-1}{m}, \binom{m+k-1}{m+1}, \binom{m+k-1}{m+2} \ldots$$

se multiplican respectivamente por los números dados a, b, c,... y se suman luego los productos, se obtiene un *número figurado en sentido lato,* cuya forma general es:

$$f_k = a\binom{m+k-1}{m} + b\binom{m+k-1}{m+1} + c\binom{m+k-1}{m+2} + \ldots$$

La suma de n números figurados de este género ($k=1,2,3\ldots n$), es, á su vez, otro número figurado, cuya forma puede deducirse de la de f_n, aumentando en 1 la letra m.

En efecto, recordando que $\binom{m}{m+1} = 0$, tendremos:

$$f_1 = a\binom{m}{m}$$

$$f_2 = a\binom{m+1}{m} + b\binom{m+1}{m+1}$$

$$f_3 = a\binom{m+2}{m} + b\binom{m+2}{m+1} + c\binom{m+2}{m+2}$$

....

$$f_n = a\binom{m+n-1}{m} + b\binom{m+n-1}{m+1} +$$

$$c\binom{m+n-1}{m+2} + \ldots$$

Y sumando por columnas (155), se halla finalmente:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$$

$$= a\binom{m+n}{m+1} + b\binom{m+n}{m+2} + c\binom{m+n}{m+3} + \ldots$$

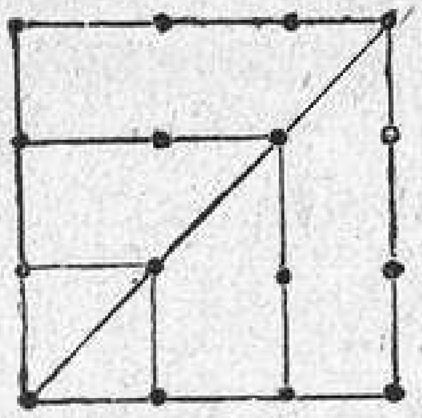
158. A los números figurados en sentido lato pertenecen los llamados *poligonales*, *piramidales* y *poliédricos*. (Véase KLÜGEL math. W. III, p. 822.)

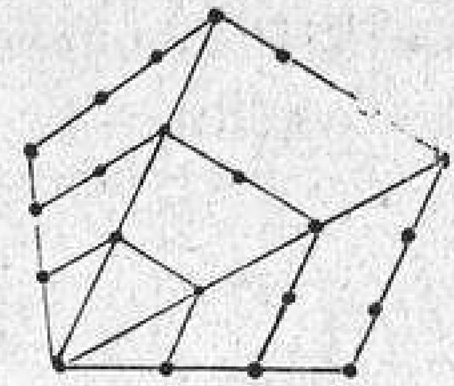
I. Bajo la denominación de *polígono de p vértices del número n* (el n^o número poligonal de p vértices, se comprende la suma de n términos de la serie

$$1,\ 1+p-2,\ 1+2(p-2),\ 1+3(p-2), \ldots$$

cuyas unidades (objetos adecuados) pueden colocarse de modo que formen polígonos semejantes (de p vértices), con un vértice común, como se vé en las figuras siguientes que representan los tetragonales y los petagonales:

.....





La suma en cuestión consta de n unidades y del producto.

$$(p-2)\,(1+2+\ldots+n-1)=(p-2)\frac{n(n-1)}{2}\binom{n}{2}\text{que}$$

representa $p-2$ triángulos del número $n-1$ (155); de donde resulta que la forma general del polígono p vértices del número n es

$$n+(p-2)\binom{n}{2}$$

Haciendo en esta expresión $p=3, 4, 5, 6,\ldots$ se obtendrán las de los números *trigonales*, *tetragonales*, *pentagonales*, *exagonales*, etc., etc.

Suponiendo $p=3$ y $p=4$, las fórmulas resultantes

$$n+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}\text{ y } n+2\binom{n}{2}=n^2$$

patentizan que los números trigonales coinciden con los figurados del 2.° orden, y los tetragonales con los números cuadrados.

Para $p=5$ y $p=6$, se hallan las fórmulas

$$\frac{n(3n-1)}{2} \text{ y } n(2n-1);$$

y haciendo en ellas $n=1,2\ldots$ obtendremos los pentágonos y los exágonos de los números 1,2...., á saber:

$$1,\quad 5,\quad 12,\quad 22,\quad 35,\ldots \text{ pentágonos}$$
$$1,\quad 6,\quad 15,\quad 28,\quad 45,\ldots \text{ exágonos}$$

Sobre el perímetro del polígono con p vértices del número n existen $p(n-1)$ unidades; y *dentro* del mismo.

$$n+(p-2)\binom{n}{2}-p(n-1)$$

$$=p-(p-1)n+(p-2)\binom{n}{2}=\frac{1}{2}(n-2)\left[(p-2)n-p\right]$$

Así, por ejemplo: en el trigonal habrá $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$, es decir, el triángulo de $(n-3)$; en el tetragonal $(n-2)^2$, esto es, el tetrágono de $(n-2)$; en el pentagonal $\frac{1}{2}(n-2)(3n-5)$.

II. Bajo la denominación de *pirámide de p caras laterales del número n*, se comprende la suma de los polígonos de p vértices de los números de la serie natural $1, 2\ldots n$, cuyas unidades (objetos adecuados) pueden colocarse formando pirámides semejantes de p caras laterales con la cúspide común. Aplicando á la fórmula de los polígonos (de p vértices) del número n, antes escrita, la de la suma de los términos que en este caso se desprenden del término general

$$f_n = \binom{n}{1} + (p-2)\binom{n}{2}$$

hallamos la expresión de la pirámide (de p caras laterales) del número n, que es:

$$\binom{n+1}{2} + (p-2)\binom{n+1}{3}$$

Si en esta fórmula atribuimos á p los valores 3, 4, 5, 6, obtendremos las de las pirámides de 3, 4, 5, 6 caras laterales. Las pirámides de 3 caras laterales coinciden con los números figurados del tercer orden. Las de 4, 5 y 6 caras de los números naturales son las siguientes:

$$1,\quad 5,\quad 14,\quad 30,\quad 55, \ldots,\ \binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}$$

$$1,\quad 6,\quad 18,\quad 40,\quad 75, \ldots,\ \binom{n+1}{2} n$$

$$1,\quad 7,\quad 22,\quad 50,\quad 95,\quad \binom{n+1}{2}\frac{4n-1}{3}$$

Una pila de balas, de capas rectangulares, que termina en una fila de balas, y cuya base tenga n balas por ancho y $n+r$ por el largo, contiene un número de balas representado por la suma de las pirámides de 4 caras de n, y de r triángulos de n, á saber:

$$\binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}+r\binom{n+1}{2}=\binom{n+1}{2}$$

$$\left(\frac{2n+1}{3}+r\right)$$

La última fila, ó sea la cresta, se halla formada por $1+r$ balas.

III. Bajo el nombre de *número poliédrico* n^o se comprende la suma de n términos constituídos por números poligonales, con la propiedad de que sus unidades (objetos adecuados) pueden colocarse formando poliedros semejantes con un ángulo sólido ó vértice común.

Admitiendo que el poliedro tenga e picos (vértices) f caras y k aristas, y que en el ángulo sólido (pico) común de los poliedros semejantes se reunan g caras, la diferencia entre los poliedros de los números n y $n-1$ comprende: primeramente, $e-1$ unidades correspondientes á los vértices no comunes; en segundo lugar, $(k-g)$ $(n-2)$ unidades sobre las aristas no comunes; y últimamente, sobre las caras no comunes, $(f-g)$ diferencias de los polígonos de n y sus perímetros (I).

El exaedro del número n, por ejemplo, en el que $e=8, f=6 k=12, g=3$, y las caras son cuadrados, es la suma de n términos de la serie

$$1,\ 7,\ 7+9+3,\ 7+9.2+3.\ \text{cuadrado de } 2,$$

$$7+9.3+3.\text{cuad. de } 3,\ 7+9.4+3.\ \text{cuad. de } 4...$$

los cuales se forman calculando la diferencia antes determinada entre los exaedros de los números n y $n-1$.

Agrupando los n términos de la serie anterior, según sus factores comunes respectivos, y sumándolos tendremos:

$$1+7\,(n-1)+9(1+2+\ldots+n-2)+$$

$$3\,(\text{cuad. de } 1+\text{cuad. de } 2+\ldots+\text{cuad. } (n-2)$$

La suma que 9 multiplica es $\binom{n-1}{2}$; la multiplicada por 3 es (II) $\binom{n-1}{2}+2\binom{n-1}{3}$. Luego el exaedro del número n será:

$$1+7(n-1)+12\binom{n-1}{2}+6\binom{n-1}{3}$$

$$=n+6(n-1)+6\binom{n-1}{2}\frac{3+n}{3}$$

$$=n+6\binom{n+1}{3}=n^3$$

Y de esta fórmula se deduce la siguiente (157).

$$\binom{n+1}{2}+6\binom{n+2}{4}=\binom{n+1}{2}^2$$

que expresa la suma de los exaedros de los números 1, 2,... n.

La diferencia de los *octaedros* ($e=6$, $k=12$, $f=8$, $g=4$) es:

$$5+8(n-2)+4\binom{n-2}{2}$$

y el octaedro de n:

$$1+5(n-1)+8\binom{n-1}{2}+4\binom{n-1}{3}=\frac{1}{3}n\left(2n^2+1\right)$$

La diferencia de los *incosaedros* ($e=12$, $k=30$, $f=20$, $g=5$) es:

$$11+25(n-2)+15\binom{n-2}{2}$$

y el icosaedro de n:

$$1+11(n-1)+25\binom{n-1}{2}+15\binom{n-1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}n(5n^2-5n+2)$$

La diferencia de los *dodecaedros* ($e=20$, $k=30$, $f=12$, $g=3$) es:

$$19+27(n-2)+9\left[5-4n+3\binom{n}{2}\right]$$

$$=10-9n+27\binom{n}{2};$$

y el dodecaedro de n:

$$10n-9\binom{n+1}{2}+27\binom{n+1}{3}=\frac{1}{2}n$$

$$\left(9n^2-9n+2\right)$$

$$=\frac{1}{2}n\left(3n-1\right)\left(3n-2\right)=n\binom{3n-1}{2}$$

159. Una serie de cantidades se llama *progresión aritmética*, cuando las diferencias de dos consecutivas, cualesquiera, son siempre iguales. Toda progresión aritmética se determina mediante 2 elementos, á saber: su primer término y su diferencia. Si a es el primer término y d la diferencia de dos términos consecutivos, la progresión hasta el término n^o, será esta:

$$a,\ a+d,\ a+2d, \ldots\ a+(n-1)d$$

La suma de estos n primeros términos será (157):

$$na+\binom{n}{2}d=\frac{a+[a+(n-1)d]}{2}\,n$$

ó sea, en lenguaje vulgar, la semisuma del primero y del último término (su medio aritmético) multiplicada por el número de términos.

También se halla la suma antes escrita observando que dos términos cualesquiera, equidistantes del primero y del último, dan la misma suma que estos dos términos extremos.

Ejemplos.—La serie natural de los números es una progresión aritmética cuyo primer término es 1, y cuya diferencia es también 1. La suma de los n primeros números es, por consecuencia:

$$\binom{n+1}{2}.$$

Los números impares forman una progresión aritmética cuyo primer término es 1, y cuya diferencia es 2. La suma de los n primeros números impares, es, por lo tanto: n^2.

Las potencias impares pueden también hallarse como sumas de conjuntos determinados de números impares consecutivos. En efecto, los n^a números impares consecutivos

$$(n-1)n^a+1 (n-1)n^a+3, \ldots (n-1)n^a+1+2(n^a-1)$$

producen la suma

$$[(n-1)n^a+1+n^a-1]n^a=n^{2a+1}$$

Fijándonos en las terceras potencias, n^3, en cuyo caso debe ser $a=1$, resulta:

$$1^3=1, 2^3=3+5, 3^3=7+9+11; \text{ etc., etc.}$$

Y de estas igualdades se colige que la suma de los cubos de los números naturales (*), á saber:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$$

es igual á la de los $\binom{n+1}{2}$ primeros números impares. Y como el último de estos números es $2\binom{n+1}{2}$ -1, hallamos nuevamente que dicha suma es $\binom{n+1}{2}^2$ (158).

160. Una serie de cantidades se llama *progresión aritmética de* 2.°, 3.°... *orden*, cuando las diferencias entre sus términos consecutivos forman una progresión aritmética de 1.°, 2.°... orden. Sean t_1, t_2, t_3,... las cantidades dadas. La serie de sus *primeras diferencias* se forma así:

$$t_2-t_1=t_{1,1}\,,\ \ t_3-t_2=t_{2,1}\,,\ \ t_4-t_3=t_{3,1}\,,\ldots$$

La serie de las *segundas diferencias*, ó sea de las diferencias entre las primeras diferencias consecutivas, se expresa de este modo:

$$t_{2,1}-t_{1,1}=t_{1,2}\,,\ \ t_{3,1}-t_{2,1}=t_{2,2}\,,\ \ t_{4,1}-t_{3,1}=t_{3,2}\,,\ldots$$

La de las *terceras diferencias*, será:

(*) Conocida esta ley desde la antigüedad.—Nicomacc.—*Arith.* II, 20.

$$t_{2,2}-t_{1,2}=t_{1,3}\,,\quad t_{3,2}-t_{2,2}=t_{2,3}\,,\quad t_{4,2}-t_{3,2}=t_{3,3}\,,\ldots$$

Y así sucesivamente. Cuando la serie de las diferencias m^{as} se compone de términos iguales, se dice que las cantidades propuestas t_1, t_2, t_3,... forman una progresión aritmética del orden m^o (*).

Ejemplo:

Cantidades dadas.. . . .	1	8	27	64	125	216
Primeras diferencias. .		7	19	37	61	91
Segundas » . .			12	18	24	30
Terceras » . .				6	6	6

Por donde colegimos que los números 1, 8, 27,... forman una progresión aritmética de tercer orden, en virtud de que sus terceras diferencias son iguales.

Los números figurados del orden m^o forman una progresión aritmética del orden m^o también; porque sus primeras diferencias son números figurados del orden $(m-1)$ (155); y, por consiguiente, sus diferencias $(m-1)^{as}$ son los números naturales que forman una progresión aritmética de primer orden.

161. Los términos de una progresión aritmética de orden superior, y la suma de sus n primeros, pueden calcularse, si se conoce su primer término y los primeros términos también de las series

(*) Las series de las diferencias correspondientes á una serie de cantidades dadas, aparecen en las investigaciones acerca de los números figurados (155 y 164); y particularmente fueron estudiadas al descubrirse el cálculo diferencial. El nombre de «progresiones aritméticas de órdenes superiores» se halla por vez primera en LAGNY (*Mén. de París*, 1722, p. 264.)

constituídas por sus primeras, segundas, terceras... diferencias, respectivamente.

Sea a_0 el primer término de la progresión que se se busca; a_1 el primer término de sus primeras diferencias; a_2 el primer término de sus segundas diferencias;... a_m el valor común de sus m^{as} y últimas diferencias. El término n^o de la progresión (*) que tratamos de formar, será:

$$a_0 + (n-1)a_1 + \binom{n-1}{2}a_2 + \ldots + \binom{n-1}{m}a_m;$$

y la suma de sus n primeros términos:

$$na_0 + \binom{n}{2}a_1 + \binom{n}{3}a_2 + \ldots + \binom{n}{m+1}a_m$$

Demostración.—La serie de las $(r-1)^{as}$ diferencias se formará, añadiendo al primer término, conocido, de la misma, los primeros 1, 2, 3,... términos de la serie de las diferencias r^{as} (160). A saber:

$$t_{2,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r}$$
$$t_{3,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r} + t_{2,r}$$
$$t_{4,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r} + t_{2,r} + t_{3,r}$$

Y así sucesivamente. De lo cual se concluye:

(*) Esta fórmula en su esencia pertenece á NEWTON *(Principia III, lemma V)*; su forma actual es de SANTIAGO BERNOULLI. *(Ars conj.* p. 98.)

$$t_{n,m-1} = a_{m-1} + (n-1)\, a_m$$

Si en esta última expresión damos á n los valores 1, 2, n,... — 1 la suma resultante

$$t_{1,m-1} + t_{2,m-1} + \ldots + t_{n-1,m-1}$$

podremos hallarla mediante el procedimiento explicado (157), y agregándola al término a_{m-2} (primero de las $(m-2)^{as}$ diferencias), tendremos:

$$t_{n,m-2} = a_{m-2} + (n-1)\, a_{m-1} + \binom{n-1}{2} a_m.$$

Ahora bien, si admitimos como cierta la igualdad

$$t_{n,m-k} = a_{m-k} + (n-1) a_{m-k+1} + \binom{n-1}{2} n_{m-h+2} + \ldots$$
$$+ \binom{n-1}{k} a_m$$

lo será también la siguiente:

$$t_{n,m-k-1} = a_{m-k-1} + (n-1)\, a_{m-k} + \binom{n-1}{2} a_{m-k+1}$$
$$+ \ldots + \binom{n-1}{k+1} a_m.$$

Pero la igualdad hipotética, cuyo primer miembro es $t_{n,m-k}$ es efectivamente cierta para $k=2$: luego lo será también para $k=3,4\ldots m$. En este último caso ($k=m$) la fórmula para $t_{n,m-k}$ nos da el término n^o de la progresión buscada, á saber:

$$t_{n,0}=a_0+(n-1)a_1+\binom{n-1}{2}a_2+\ldots+\binom{n-1}{m}a_m$$

Y si en esta expresión del n^o término *(término general)* atribuímos á n los valores 1, 2...n, por el método ya conocido (157) calcularemos la suma de los n primeros términos de la progresión

$$t_{1,0}+t_{2,0}+t_{3,0}+\ldots+t_{n,0}$$

que es la escrita en el enunciado del teorema.

162. Si los números $t_1, t_2, t_3, \ldots$ forman una progresión aritmética del orden m^o, cuya última diferencia común es c, y a representa un número dado, los productos $at_1, at_2, at_3, \ldots$ formarán también una progresión aritmética del orden m^o, pero cuya última diferencia (constante) será ac.

Las diferencias de la segunda progresión, en efecto, son iguales á las de la primera (propuesta) multiplicadas por a, puesto que

$$at_{k+1}-at_k=a(t_{k+1}-t_k);\ \text{etc., etc.}$$

Y siendo iguales entre sí las m^{as} diferencias de la progresión $t_1, t_2, t_3, \ldots$, lo serán asimismo las m^{as} diferencias de la progresión $at_1, at_2, at_3, \ldots$; y además a veces tan grandes como aquéllas.

Si $t_1, t_2, t_3, \ldots$ forman una progresión aritmética del orden m^o; y $u_1, u_2, u_3, \ldots$ otra de orden inferior

t_1+u_1, t_2+u_2, t_3+u_3,... formarán una progresión aritmética del orden m^o.

En efecto, la diferencia n^a entre las diferencias k^{as} de la progresión compuesta por los binomios t_1+u_1, t_2+u_2,... es la suma de las diferencias n^{as} también, entre las del mismo orden k de las dos progresiones dadas, puesto que

$$t_{k+1}+u_{k+1}-(t_k+u_k)=(t_{k+1}-t_k)+(u_{k+1}-u_k).$$

Pero, según la hipótesis, las diferencias m^{as} de la serie u_1, u_2, u_3,... son nulas; luego las diferencias m^{as} de la serie t_1+u_1, t_2+u_2, t_3+u_3,... no difieren de las diferencias m^{as} también de la serie t_1, t_2, t_3,...

163. Si t_1, t_2, t_3... forman una progresión aritmética del orden m^o, cuyas últimas diferencias son iguales á c, los productos sucesivos t_1, $2t_2$, $3t_3$... formarán una progresión aritmética del orden $(m+1)^o$ con la última diferencia $(m+1)\,c$.

Demostración.—La n^a diferencia, entre las primeras de la serie última, es, según la notación admitida (160):

$$(n+1)\,t_{n+1}-nt_n=n\,(t_{n+1}-t_n)+t_{n+1}=nt_{n,1}+t_{n+1}$$

Y, por consecuencia, la n^a diferencia entre las segundas de la misma serie, será:

$$(n+1)t_{n+1,1}+t_{n+2}-nt_{n,1}-t_{n+1}=nt_{n,2}+2t_{n+1,1}$$

Suponiendo, pues, que la n^a entre las diferencias k^{as}, sea

$$nt_{n,k}+kt_{n+1,\,k-1},$$

la n^a, entre las diferencias $(k+1)^{as}$, será

$$(n+1)t_{n+1,k}+kt_{n+2,k-1}-nt_{n,k}-kt_{n+1,k-1}$$

$$=nt_{n,k+1}+(k+1)t_{n+1,k}.$$

Pero la n^a entre las segundas diferencias es efectivamente

$$nt_{n,2}+2t_{n+1,1}$$

Luego la n^a entre las terceras, será:

$$nt_{n,3}+3t_{n+1,2}.$$

Y la n^a, entre las $(m+1)^{as}$, será finalmente:

$$nt_{n,m+1}+(m+1)t_{n+1,m}.$$

Y como según la hipótesis,

$$t_{n,m+1}=0;\ t_{1,m}=t_{2,m}=\ldots=c;$$

resulta que las $(m+1)^{as}$ diferencias de la serie en cuestión tienen el valor común $(m+1)\,c$.

164. Si t_1, t_2, t_3... forman una progresión aritmética del orden m^0 con la última diferencia c, y u_1, u_2, u_3... forman otra progresión aritmética de primer orden con la diferencia d, los productos $t_1\,u_1$, $t_2\,u_2$, $t_3\,u_3$... formarán una progresión aritmética del orden $(m+1)^0$, con la diferencia última $(m+1)cd$.

En efecto, de la igualdad (159)

$$u_n = a + (n - 1)d$$

se deduce esta otra:

$$t_n u_n = t_n (a - d) + n t_n d.$$

Ahora bien:

$$t_1(a-d),\ t_2(a-d),\ t_3(a-d)\ldots$$

forman una progresión aritmética del orden m^0 (162); los productos

$$t_1 d,\ 2t_2 d,\ 3t_3 d\ldots$$

forman una progresión aritmética del orden $(m+1)^0$ (163): luego los productos

$$t_1 u_1,\ t_2 u_2,\ t_3 u_3\ldots$$

formarán (162) una progresión aritmética del orden $(m+1)^0$ cuya última diferencia coincide con la de la progresión anterior (163).

Suponiendo, por consecuencia, que u_1, u_2, $u_3\ldots$ forman una progresión aritmética de primer orden con la diferencia d, formarán:

u_1^2, u_2^2, $u_3^2\ldots$ otra, de segundo orden

u_1^3, u_2^3, $u_3^3\ldots$ otra, de tercer orden

....

$u_1^m\, u_2^m\, u_3^m \ldots$ otra, de m^0 orden.

La última diferencia de esta última progresión es (*)

$$1.2.3\ldots m d^m.$$

En efecto, si c representa la última diferencia de la progresión $u_1^k, u_2^k, u_3^k\ldots$, será según lo dicho antes, $c(k+1)d$ la última diferencia de la progresión $u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, u_3^{k+1}\ldots$ Pero $2d^2$ es la última diferencia de la progresión $u_1^2, u_2^2, u_3^2\ldots$: luego $1.2.3d^3$ será la última diferencia de la progresión $u_1^3, u_2^3, u_3^3\ldots$, etc.

Cuando $u_1, u_2, u_3\ldots$ formen una progresión aritmética de primer orden, y $a_0, a_1, a_2\ldots$ representen números dados, los valores

$$f_1 = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + \ldots + a_m u_1^m$$

$$f_2 = a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2 + \ldots + a_m u_2^m$$

$$f_3 = a_0 + a_1 u_3 + a_2 u_3^3 + \ldots + a_m u_3^m$$

....

(*) Propiedades ya estudiadas en la primera mitad del siglo VXII. Véase FAULHABER, *Academia Algebrae* 1631.

formarán una progresión aritmética del orden m^0; puesto que $u_1^2, u_2^2, u_3^2 \ldots$ forman una progresión de segundo orden; etc., etc. (162).

165. Como $1^3, 2^3, 3^3 \ldots$ forman una progresión aritmética de tercer orden (164 y 160) cuyo primer término es 1, cuyas diferencias iniciales son 7 y 12, y cuya última diferencia es 6; la suma $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ puede calcularse mediante la fórmula (161). Haciéndolo así hallamos para valor de dicha suma la expresión

$$n+7\binom{n}{2}+12\binom{n}{3}+6\binom{n}{4}$$
$$=\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}$$
$$=\binom{n+1}{2}+6\binom{n+2}{4}=\binom{n+1}{2}^2$$

como anteriormente (158). Por el mismo procedimiento podría calcularse la suma $1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m$ para todo valor entero y positivo de m (*).

Pero es más sencillo el cálculo recurrente, mediante el cual se expresa una suma de las potencias de los números naturales por la suma de las potencias inferiores de los mismos números, como sigue: (**)

(*) Acerca de la solución de este problema, véase EULER, Calc. dif. II cap. 5 y KLUGEL *math. Worterbuch* «Potenz.»

(**) La suma de los cuadrados (158) se encuentra en ARQUÍMEDES (Spiral. 10) Las de los bicuadrados y potencias superiores fueron halladas por FERMAT y otros. (155—Nota).

Según la fórmula del binomio (XXIII),

$$(n+1)^{m+1}=n^{m+1}+\binom{m+1}{1}n^m+$$

$$\binom{m+1}{2}n^{m-1}+\ldots$$

Y en particular:

$$2^{m+1}=1^{m+1}+\binom{m+1}{1}1^m+\binom{m+1}{2}1^{m-1}+\ldots$$

$$3^{m+1}=2^{m+1}+\binom{m+1}{1}2^m+\binom{m+1}{2}2^{m-1}+\ldots$$

....

$$(n+1)^{m+1}=n^{m+1}+\binom{m+1}{1}n^m+$$

$$\binom{m+1}{2}n^{m-1}+\ldots$$

Sumando por columnas, y haciendo $1^m+2^m+3^m+\ldots n^m=s_m$, hallamos:

$$\text{(I)}\quad (n+1)^{m+1}=1+\binom{m+1}{1}s_m+$$

$$\binom{m+1}{2}s_{m-1}+\ldots$$

Serie que termina por $\binom{m+1}{m} s_1 + s_0$; donde

$$s_0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n$$

y

$$s_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}$$

Por la misma fórmula del binomio tenemos también:

$$(n-1)^{m+1} = n^{m+1} - \binom{m+1}{1} n^m +$$

$$\binom{m+1}{2} n^{m-1} - \ldots$$

Y en particular:

$$0 \quad = 1^{m+1} - \binom{m+1}{1} 1^m + \binom{m+1}{2} 1^{m-1} - \ldots$$

$$1^{m+1} = 2^{m+1} - \binom{m+1}{1} 2^m + \binom{m+1}{2} 2^{m-1} - \ldots$$

....

$$(n-1)^{m+1} = n^{m+1} - \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} - \ldots$$

Y sumando por columnas, cuanto antes se halla:

$$\text{(II)}\quad 0 = n^{m+1} - \binom{m+1}{1} s_m + \binom{m+1}{2} s_{m-1} - \ldots$$

De las relaciones (I) y (II) entre s_m, $s_{m-1} \ldots$ se deducen, por adición y sustracción, las más sencillas que siguen:

$$(n+1)^{m+1} = 1 + n^{m+1} + 2\binom{m+1}{1} s_{m-1}$$

$$+ 2\binom{m+1}{4} s_{m-3} + \ldots$$

$$(n+1)^{m+1} = 1 - n^{m+1} + 2\binom{m+1}{1} s_m$$

$$+ 2\binom{m+1}{3} s_{m-2} + \ldots$$

Y de éstas, en particular:

$$(n+1)^3 + n^3 - 1 = 2.3 s_2 + 2 s_0$$

$$(n+1)^5 + n^5 - 1 = 2.5 s_4 + 2\binom{5}{3} s_2 + 2 s_0$$

$$(n+1)^7 + n^7 - 1 = 2.7 s_6 + 2\binom{7}{3} s_4 + 2\binom{7}{5} s_2 + 2 s_0$$

....

$$(n+1)^4+n^4-1=2.4s_3+2.4s_1$$

$$(n+1)^6+n^6-1=2.6s_5+2\binom{6}{3}s_3+2.6s_1$$

$$(n+1)^8+n^8-1=2.8s_7+2\binom{8}{3}s_5+2\binom{8}{5}s_3+2.8s_1$$

....

Y, por consecuencia:

$$s_2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

$$s_4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{2n^3}{6}-\frac{n}{30}$$

$$s_6=\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{3n^5}{6}-\frac{n^8}{6}+\frac{n}{42}$$

....

$$s_1=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

$$s_3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{3n^2}{12}$$

$$s_5=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$$

$$s_7=\frac{n^8}{8}+\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7n^4}{24}+\frac{n^2}{12}$$

....

Observación.—La fórmula general es:

$$s_m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1\, n^{m-1} - \frac{1}{4}\binom{m}{3} B_3\, n^{m-3}$$
$$+ \frac{1}{6}\binom{m}{5} B_5\, n^{m-5} - \ldots$$

á cuyos coeficientes $B_1 = \frac{1}{6}, B_3 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{1}{42} \ldots$ llamó Euler *números bernoullianos*, por haber sido Santiago Bernoulli quien, en su *Ars conjectandi* p. 97, calculó los valores de s_1, s_2, s_3 ... en orden ascendente, é hizo conocer el valor de s_m.

XXIX.—Cálculo de las probabilidades.

(Heis 91.)

166. Cuando en circunstancias dadas son posibles los n acontecimientos A, B, C..., de los cuales ha de realizarse uno solo sin preferencia sobre los demás, se dice que dichos acontecimientos tienen la misma *probabilidad (probabilitas)*, la cual disminuye, aumentando el número n de los casos posibles. Designando por $1{:}n$ la probabilidad del solo acontecimiento A entre los n posibles, la probabilidad de que se realice uno de los dos, A y B, se representará por $2{:}n$; etc. En general, la probabilidad de un suceso es la razón entre el número de casos favorables *(chance)*, en los que se satisface la esperanza y el número de casos posibles (*).

(*) Las primeras cuestiones relativas al *Cálculo de probabilidades* fueron propuestas y resueltas hacia la mitad del siglo XVII, especialmente por Fermat y por Pascal *(Oeuvres de Pascal* ed. *Lahure* II, p. 392, 429). Huygens en 1647 procuró fundamentar y extender dichos problemas en su Memoria *De*

Un acontecimiento se considera como

imposible cuando su probabilidad es				0;
inverosímil	»	»	»	$<\frac{1}{2}$;
dudoso	»	»	»	$=\frac{1}{2}$;
verosímil	»	»	»	$>\frac{1}{2}$;
cierto	»	»	»	$=1$.

Ejemplo 1.° La probabilidad de que salga uno de los seis números que un dado tiene es $\frac{1}{6}$. Dos dados pueden caer de 6^2 maneras diferentes, y entre éstas pueden salir 6 parejas y ocurrir 6 tiradas en las que sumen 7 las cifras de los dos dados. La probabilidad, pues, de obtener ó hacer una pareja con 2 dados es $\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$. Y la misma es la probabilidad de que salgan dos números, uno en cada dado, cuya suma sea 7.

Ejemplo 2.° Cinco dados pueden caer de 6^5 modos diferentes. Entre todas estas tiradas pueden salir 3 números iguales de $\binom{5}{3}.6.5.4$ modos diferentes; porque 3 números determinados pueden

---

ratiociniis in ludo aleae. Pero las más exactas investigaciones sobre esta teoría son debidas á SANTIAGO BERNOULLI (*Ars conjectandi* 1713, donde por vez primera se halla la palabra *probabilitas, gradus certitudinis* p. 211), y á MOIVRE (*Doctrine of chances*, 1717, y más completamente en 1738). Ulteriores investigaciones se encuentran en LAPLACE (*Theorie anal. des probab.* 1812. 3.° ed. 1820).

hallarse sobre 3 dados cualesquiera, y en estos salir 6 veces 3 números iguales, mientras en el 4.º dado salga uno de los otros 5 números, y en el 5.º uno de los 4 restantes. Por consecuencia, la probabilidad de que al tirar 5 dados, salgan 3 números iguales, será

$$\frac{\binom{5}{3}.6.5.4}{6^5}=\frac{25}{162}=\frac{1}{6,48}$$

Ejemplo 3.º Tenemos 52 cartones de cuatro colores; esto es, cada 13 del mismo color. De los 52 cartones pueden elegirse 3 de $\binom{52}{3}$ maneras diferentes; y ser éstos $\binom{13}{3}$ veces del mismo color. Luego la probabilidad de sacar 3 cartones de un mismo color, será

$$4\binom{13}{3}:\binom{52}{3}=\frac{22}{425}=\frac{1}{19,32}$$

Ejemplo 4.º De 90 números pueden sacarse 5 de $\binom{90}{5}$ modos diferentes. Mas si deben salir 3 números de 12 que se juegan, con otros 2 cualesquiera de los 78 restantes, tendremos $\binom{12}{3}\binom{78}{2}$ combinaciones favorables. Luego la probabilidad de aceptar un terno, jugando 12 números, será

$$\binom{12}{3}\binom{78}{2}:\binom{90}{5}=\frac{1}{66,52}$$

Si en vez de jugar 12 números se juegan todos los ternos que pueden hacerse con los mismos, ganaremos siempre que salga uno de dichos ternos con 2 números cualesquiera de los 78 restantes, lo cual se verificará en $\binom{12}{3}\binom{78}{2}$ extracciones. Luego la probabilidad de sacar un terno de los jugados estará representada por el cociente

$$\binom{12}{3}\binom{78}{2}:\binom{90}{5}=\frac{1}{66,52}$$

Ejemplo 5.° Cuando en una urna haya a bolas negras, b blancas y c rojas pueden extraerse $\alpha+\beta+\gamma$ bolas de $\binom{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}$ modos diferentes. Y una combinación de α bolas negras, con otra de β bolas blancas, y con otra de γ bolas rojas, pueden asociarse de $\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}$ modos. Luego la probabilidad de que en una extracción salgan α bolas negras, β blancas y γ rojas, será:

$$\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}:\binom{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Ejemplo 6.° De n bolas contenidas dentro de una urna puede sacarse un número cualquiera (esto es: 1,2,3... bolas) de

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots$$

modos diferentes. Un número impar de bolas puede sacarse de

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$$

modos diferentes; un número par de

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\ldots$$

modos diferentes. Ahora bien; según el teorema del binomio (123) para $x=\pm 1$, tenemos:

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots=2^n$$

$$1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots=0$$

y, por consecuencia, sumando y restando,

$$2+2\binom{n}{2}+2\binom{n}{4}+\ldots=2^n$$

$$2\binom{n}{1}+2\binom{n}{3}+\ldots=2^n$$

ó

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\ldots=2^{n-1}-1$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}$$

Luego las probabilidades de sacar un número par ó impar de bolas son respectivamente:

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1} \text{ y } \frac{2^{n-1}}{2^n-1}$$

167. La probabilidad de que se verifique un hecho y la probabilidad de que no se verifique son complementarias, siendo su suma 1 (la certeza). Si de n casos hay m en que tenga lugar un acontecimiento, habrá $n-m$ casos en que no se realice; y por lo tanto, la probabilidad del acontecimiento será $\frac{m}{n}$; y la probabilidad de que el mismo no se verifique será:

$$\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}$$

Así, por ejemplo, la probabilidad de hacer 7 con dos dados es $\frac{1}{6}$; y la probabilidad de no hacer 7 es $\frac{5}{6}$.

168. La probabilidad de que entre varios acontecimientos independientes E, F, G,... se verifique uno cualquiera, sea el E, ó el F, ó el G... es la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

Demostración.—Supongamos que E, F, G tienen respectivamente las probabilidades p, q, r, y que en general, de N casos hay m_1 en que tiene lugar E; m_2 en que tiene lugar F, y m_3 en que se verifica G. Es evidente que de los N casos hay $m_1 + m_2 + m_3$ en que se realiza uno de los acontecimientos E, F, G. Luego la probabilidad de que uno de ellos, el E, ó el F ó el G se verifique, será

$$\frac{m_1+m_2+m_3}{N} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \frac{m_3}{N}$$
$$= p + q + r$$

Así, por ejemplo, la probabilidad de hacer con 2 dados ó una pareja ó 7, es $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. La probabilidad de hacer 7 ú 8 ó 9 con 2 dados, es $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} = \frac{5}{12}$.

169. Los acontecimientos E, F, G, se llaman *contrarios* cuando ciertamente sucederá uno de ellos. Pero la probabilidad de que se verifique el acontecimiento E ó el F ó el G,... es la suma de

las probabilidades de estos acontecimientos (168) y esta suma tiene el valor 1, en virtud de que ahora $m_1+m_2+m_3+\ldots=N$. Luego los acontecimientos E, F, G,... serán contrarios cuando la suma de sus probabilidades tenga el valor 1 (la certeza).

En particular, E y *no*-E son contrarios; y este modo de decir expresa que es cierto que E ocurre, ó que E no ocurre. Y en efecto, las probabilidades de E y de *no*-E, según (167), son complementarias respecto de 1.

170. Entre los sucesos E, F, G,... puede considerarse la probabilidad *relativa* de uno de ellos, el E, por ejemplo, es decir: la probabilidad de que ocurra E entre los E, F, G... Esta probabilidad relativa de E es la razón de la probabilidad (absoluta) de E á la probabilidad de que suceda uno de los acontecimientos E, F, G,... Ahora bien; según lo dicho anteriormente (168), entre los $m_1+m_2+m_3+\ldots$ casos, existen m_1 en que se verifica E; y por consecuencia, la probabilidad relativa de E será:

$$\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3+\ldots}=\frac{\dfrac{m_1}{N}}{\dfrac{m_1}{N}+\dfrac{m_2}{N}+\dfrac{m_3}{N}}$$

$$=\frac{p}{p+q+r+\ldots}$$

Así, por ejemplo, la probabilidad de que salgan con 3 dados 3 números iguales es $\frac{6}{6^3}$; la probabilidad con los mismos dados, de obtener solamente 2 números iguales es $\binom{3}{2}\frac{6.5}{6^3}$ (166—Ejemplo 2.°)

Luego la probabilidad de obtener con 3 dados, más bien 2 números iguales que 3, será la razón

$$\frac{\binom{3}{2}\frac{6.5}{6^3}}{\binom{3}{2}\frac{6\,5}{6^3}+\frac{6}{6^3}}=\frac{3.6.5}{3.6.5+6}=\frac{15}{16}$$

Si los sucesos fueren contrarios (169), la probabilidad relativa de cualquiera de ellos no se diferenciaría de su probabilidad absoluta.

171. La probabilidad de que varios sucesos independientes entre sí *coexistan* ó se realicen simultáneamente, ó bien según un orden determinado, es el producto de las probabilidades de cada uno de ellos.

Demostración.—Si entre n casos hay m, en los que ocurre E (y no F); y entre n_1 casos hay m_1, en los que se verifica F (y no E), es claro que de los nn_1 casos, en los que pueden coexistir los casos de la primera especie con los de la segunda, habrá mm_1 en los cuales coexistirán E y F. Luego la probabilidad de la coexistencia de E y F (del suceso compuesto EF) será

$$\frac{mm_1}{nn_1}=\frac{m}{n}\,\frac{m_1}{n_1}$$

Suponiendo, pues, que las probabilidades respectivas de los sucesos E, F y G sean p, q y r, la probabilidad de la coexistencia de los sucesos E y F, con el G (ó del suceso EFG) será

$$(pq)r=pqr.$$

Y así para mayor número de acontecimientos.

Ejemplo 1.º Si en una urna U hay 5 bolas blancas y 7 negras, la probabilidad de que sacando 6 bolas salgan 2 blancas, es $\binom{5}{2}\binom{7}{4}:\binom{12}{6}$.

Si en otra urna V hay 8 bolas blancas y 10 negras, la probabilidad de que al sacar 9 bolas salgan 4 blancas, es $\binom{8}{4}\binom{10}{5}:\binom{18}{9}$

Luego la probabilidad de que sacando 6 bolas de la primera y 9 de la segunda urna, salgan 2 blancas entre las primeras simultáneamente con 4 también blancas entre las segundas, será

$$\binom{5}{2}\binom{7}{4}\binom{8}{4}\binom{10}{5}:\binom{12}{6}\binom{18}{9}=$$

$$=\frac{3675}{26741}=\frac{1}{7,28}$$

Ejemplo 2.º Designando por p y q las probabilidades correspondientes de los sucesos E y F, la probabilidad de la coexistencia de

E y F............... será	pq
E y *no*-F................	$p(1-q)$
no-E y F................	$(1-p)q$
no-E y *no*-F...........	$(1-p)(1-q)$

Pero necesariamente debe ocurrir alguno de los 4 sucesos compuestos ó casos de coexistencia enumerados, y esto prueba que son contrarios (169). Así es, en efecto; y la igualdad

$$pq+p(1-q)+(1-p)q+(1-p)(1-q)=1$$

lo patentiza.

Ejemplo 3.º Admitiendo que sean p, q, r las probabilidades respectivas de los sucesos E, F, G, la probabilidad de que E no ocurra y F sí, será $(1-p)q$, la de que no se realicen ni E ni F, pero sí G, será $(1-p)(1-q)r$, y la probabilidad, por consecuencia, de que se realice E ó de que ocurra F si E no se realiza, ó de que tenga lugar G sin que ocurran E ni F, será

$$p+(1-p)q+(1-p)(1-q)r$$

Ejemplo 4.º Por U y V como antes, representamos dos urnas: en la primera hay 5 bolas blancas y 1 negra; en la segunda, 3 blancas y 4 negras. La probabilidad de meter la mano en una de las 2 urnas es evidentemente $\frac{1}{2}$; la de sacar una bola blanca de la urna U es $\frac{5}{6}$; la de sacarla de la urna V es $\frac{3}{7}$. Luego la probabilidad compuesta, de meter la mano en U ó en V y sacar bola blanca, será respectivamente $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}$ ó $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}$: y por consecuencia, la probabilidad de sacar bola blanca de una de las dos urnas tendrá por expresión (168)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{53}{84}$$

Ejemplo 5.º Si las tentativas ó ensayos en que puede ocurrir E con la probabilidad p, ó F con la probabilidad q, se ordenan de modo que los sucesos E y F sean contrarios, en cuyo supuesto la suma de sus probabilidades $p+q=1$ (169); la probabilidad de que en n tentativas ocurra k veces E y $n-k$ veces F en un *orden determinado*, es $p^k q^{n-k}$. Pero con n elementos de los cuales son k iguales entre sí (E) y $n-k$ también iguales entre sí (F), pero diferentes de los anteriores, pueden efectuarse (135) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ permutaciones. Luego la probabilidad de que en n tentativas ocurra k veces E y $(n-k)$ veces F en un *orden cualquiera*, será

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^n q^{n-k}$$

Y ahora podemos asegurar con certeza que E se verificará n veces, ó que E se verificará $(n-1)$ veces y 1 vez F, ó E $(n-2)$ veces y 2 veces F... ó al fin, 1 vez E y $(n-1)$ veces F, ó n veces F. Porque la suma de las probabilidades que se desprenden de la última fórmula, atribuyendo en ella á la letra k los valores n, $n-1$,... 1, 0, tiene por expresión $(p+q)^n = 1$ (cap. XXIII).

La probabilidad de que en n tentativas ocurra E *por lo menos* k veces, es la suma de las probabilidades de que el mismo suceso E ocurra k veces, $(k-1)$ veces,... n veces. Y la probabilidad de que en n tentativas se verifique E *á lo más* $(k-1)$ veces, es la suma de las probabilidades de que E ocurra 0, 1,... $(k-1)$ veces. Las dos probabilidades son complementarias respecto de 1.

Análogas consideraciones pudieran hacerse respecto de mayor número de sucesos contrarios que ocurriesen en una serie de tentativas con probabilidades determinadas.

Ejemplo 6.º Si designamos respectivamente por $p_1, p_2, p_3, \ldots$ las probabilidades de obtener con un dado los números 1, 2, 3..., será $p_1+p_2+p_3+\ldots=1$. La probabilidad de obtener con el mismo dado en n tiradas y en un orden cualquiera, k veces 1, l veces 2, m veces 3,... bajo la condición $k+l+m+\ldots=n$, es

$$\frac{n!}{k!\,l!\,m!\ldots}\,p_1^k\,p_2^l\,p_3^m\ldots$$

Y las probabilidades de obtener las coordinaciones diferentes de las n tiradas serán los términos respectivos de la potencia $(p_1+p_2+p_3+\ldots)^n$ (152).

La probabilidad de que valga s la suma de los números obtenidos en las n tiradas es la suma de los términos de la potencia $(p_1+p_2+p_3+\ldots)^n$ en que valga s la suma de los índices de p. Sustituyendo p_1 por p_1x; p_2 por p_2x^2; p_3 por $p_3x^3\ldots$ dicha probabilidad aparecerá como el coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(p_1\,x+p_2x^2+p_3x^3+)^n$ y por consecuencia, como el coeficiente de x^3 en el desarrollo de $\frac{1}{6^n}\,(x+x^2+\ldots+x^3)^n$ cuando las tiradas se verifiquen con un dado ordinario para el cual $p_1=p_2=p_3=\ldots=\frac{1}{6}$. (*)

(*) Moivre *Misc. anal.* p. 196 y Euler *De partitione numerorum (Noc. Comm. Petrop.* 3 y 14.)

La probabilidad de obtener una tirada (coordinación) fija ó marcada con n dados iguales, no se diferencia de la probabilidad de obtener la misma coordinación numérica con un dado en n tiradas.

172. Si los sucesos E, F, G... tienen respectivamente las probabilidades p, q, r... y son contrarios, por lo cual $p+q+r+...=1$, y se conviene además entre ciertas personas A, B, C..., de la agraciada al verificarse uno de los sucesos E, F, G..., reciba el premio S la parte alícuota de este premio á que antes de la *decisión* tendrá derecho cada una de aquellas personas, será pS, qS, rS... respectivamente.

En efecto, si en general hay n casos posibles y otras tantas personas avenidas en que la 1.ª ó la 2.ª ó la 3.ª... habrá de recibir el premio S, según que ocurra el 1.º ó el 2.º ó el 3er... caso de los admitidos, todas ellas tendrán igual derecho al premio y la parte en él de cada una, antes de la decisión ó realización de los sucesos, será, por consecuencia, $\frac{S}{n}$. Pero, si entre los n casos hubiese m en que se verifica el suceso E, la persona A reuniría en sí sola las pretensiones ó derechos de aquellas m personas, subiendo así su pretensión ó su derecho á $\frac{m}{n}S$ esto es: á pS. Y lo mismo pudiéramos decir de las demás. Lo cual patentiza, por otra parte, la igualdad

$$pS+qS+rS+...=(p+q+r+...)\ S=S.$$

Los productos de la ganancia ó premio esperado por las respectivas probabilidades de conseguirlo expresan las *esperanzas (partis, exspectationes, sortes)* de las personas interesadas en dicho premio; y son entre sí respectivamente como las probabilidades de cada uno de los interesados á que les toque el premio entero.

Si la ganancia S que recibirá una de las personas A, B, C... al verificarse uno de los sucesos contrarios E, F, G..., ha de satisfacerse por los copartícipes del convenio ó trato, las cuotas respectivas de aquéllos serán pS, qS, rS... iguales á sus esperanzas y proporcionales á las probabilidades de los sucesos E, F, G... respectivamente. Las personas A, B, C... deberán poner iguales cuotas, cuando para una apuesta ó un juego de azar, se convienen en que la suma de las cantidades puestas la perciba A, ó B, ó C... según que ocurra el suceso E, F, ó G...

En particular, si A y B apuestan, el uno á que sucederá E y el otro á que no sucederá, el primero debe poner pS y el segundo $(1-p)\ S$, ó lo que es igual, B debe poner contra A el $\frac{1-p}{p}$ *plo*.

Las puestas y las ganancias de los jugadores deben relacionarse ó estar entre sí como las probabilidades de ganar y de perder. La lotería, sin embargo, ofrece al jugador un premio que dista mucho de lo que debiera ser: contando los especuladores, para obrar de ese modo con la propensión de la multitud á ganar sin trabajo.

LIBRO CUARTO

LAS FRACCIONES CONTINUAS Y LAS SERIES EXPONENCIAL BINÓMICA Y LOGARÍTMICA

XXX.—Fracciones continuas.

173. Cuando de las cantidades a y b por divisiones sucesivas se deduce la serie de igualdades

$$a=bq+c$$
$$b=cr+d$$
$$c=ds+e$$
$$\dots\dots\dots$$

tenemos inmediatamente:...

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{q+\frac{c}{b}},\ \frac{c}{b}=\frac{1}{r+\frac{d}{c}},\dots$$

y, por consecuencia:

$$\frac{a}{b}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{\dots}}}}$$

Este desarrollo de $\frac{b}{a}$ se llama *fracción continua* (*fractio continua*) y está constituído por los *términos* $\frac{1}{q}, \frac{1}{r}, \frac{1}{s}\ldots$ que permiten expresarlo también como sigue (*)

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{q}\dot{+}\frac{1}{r}\dot{+}\frac{1}{s}\dot{+}\ldots$$

Los puntos sobrepuestos significan que cada término que sigue á los mismos pertenece al denominador del término precedente.

Una fracción continua permanece invariable cuando el numerador y el denominador de uno de sus términos y el numerador del término siguiente se multiplican por un mismo número. Pues, por ejemplo:

(*) Lord BROUNCKER hizo una célebre aplicación de las fracciones continuas (*fractio continuc fracta*) en 1655 (WALLIS *opp.* I, p. 469). Poco después adoptó HUYGENS las fracciones continuas y publicó una teoría de las mismas (*Automatum planetarium* 1682). EULER introdujo el nombre de *fractio continua* (*Comm. Petrop.* 9), haciendo común esta expresión á principios del siglo XIX. La notación del texto pertenece á J. H. T. MÜLLER (*Állg Arithm.* 1838). La teoría de las fracciones continuas fué aumentada especialmente por EULER (*Nov. Comm* 9. *Acta* 1779, I); LAMBERT (*Memorias* II, 1 p. 55 y 140); LAGRANGE (Notas al *Algebra* de EULER, edición francesa de Lyon, 1795); GAUSS *Disq. gen. circa seriem inf.* 1812); MÓBIUS (*Crelle J.* 6, p. 215). La exposición aquí adoptada para dicha teoría se debe á SCHEIBNER (Berichte der Leipz. Gesder W. 1864).

$$\frac{m}{mr+mx}=\frac{1}{r+x}$$

174. De la serie más general de ecuaciones,

$$p_1u-q_1u_1+u_2=0$$
$$p_2u_1-q_2u_2+u_3=0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_iu_{i-1}-q_iu_i+u_{i+1}=0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

se deducen las siguientes:

$$\frac{u_1}{u}=\frac{p_1}{q_1-\frac{u_2}{u_1}},\ \frac{u_2}{u_1}=\frac{p_2}{q_2-\frac{u_3}{u_2}},\dots$$

y por consecuencia, la fracción continua

$$\frac{u_1}{u}=\frac{p_1}{q_1}\,\dot{-}\,\frac{p_2}{q_2}\,\dot{-}\,\frac{p_3}{q_3}\,\dot{-}\,\dots$$

Las cantidades u_2, u_3, u_4,... pueden expresarse sucesivamente por las u y u_1 acompañadas de las p_1, p_2... q_1, q_2... Para hacer esto se despeja u_2 de la ecuación primera; hallado el valor de u_2 se sustituye en la segunda, de la cual se deduce el de u_3 etc. Los resultados tendrán las formas siguientes:

$$u_i=\mu_iu_1-\lambda_iu,\ u_{i+1}=\mu_{i+1}u_1-\lambda_{i+1}u$$

y de ellos se desprenden las igualdades

$$\frac{u_1}{u} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{u_i}{\mu_i u}, \quad \frac{u_1}{u} - \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} = \frac{u_{i+1}}{\mu_{i+1} u}.$$

Cuando $\frac{u_i}{\mu_i}$ y $\frac{u_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ sean números de signos opuestos, la fracción continua $\frac{u_1}{u}$ se hallará comprendida entre los límites $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ y $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ que reciben por tal motivo el nombre de *fracciones aproximadas*. Y cuando u_n desaparezca ó sea cero, será $\frac{u_1}{u} = \frac{\lambda_n}{\mu_n}$

De lo dicho resulta que

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{p_1}{q_1} \qquad \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \cdot \ldots$$

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \qquad \frac{u_3}{u_2} = \frac{p_3}{q_3} \cdot \frac{p_4}{q_4} \cdot \ldots$$

$$\frac{\lambda_4}{\mu_4} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \qquad \frac{u_4}{u_3} = \frac{p_4}{q_4} \cdot \frac{p_5}{q_5} \cdot \ldots$$

....

175.—Para determinar las cantidades λ_i y μ_i sustituiremos (174) los valores de u_{i-1}, u_i y u_{i+4} expresados por u_1 y u, en la tercera ecuación de las escritas primeramente, y hallaremos ésta:

$$p_i(\mu_{i-1}u_1-\lambda_{i-1}u)-q_i(\mu_i u_1-\lambda_i u)+$$
$$+\mu_{i+1}u_1-\lambda_{i+1}u=0$$

la cual debe verificarse para valores cualesquiera de u_1 y u, y esto exige *(Algebra.* Cap. IV) que los coeficientes de u_1 y u desaparezcan. El sistema de las ecuaciones que expresan esta condición, á saber:

$$\lambda_{i-1}p_i-\lambda_i q_i+\lambda_{i+1}=0$$
$$\mu_{i-1}p_i-\mu_i q_i+\mu_{i+1}=0$$

nos proporciona los medios de calcular sucesivamente los valores de las cantidades λ y μ.

Efectivamente: de las ecuaciones (174)

$$\left.\begin{array}{l} u_1=\mu_1 u_1-\lambda_1 u \\ u_2=\mu_2 u_1-\lambda_2 u \end{array}\right\} \text{ se deducen } \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=0, \mu_1=1 \\ \lambda_2=p_1, \mu_2=q_1 \end{array}\right.$$

Y aplicando las dos anteriores:

$$\lambda_3=\lambda_2 q_2-\lambda_1 p_2 \qquad \mu_3=\mu_2 q_2-\mu_1 p_2$$
$$\lambda_4=\lambda_3 q_3-\lambda_2 p_3 \qquad \mu_4=\mu_3 q_3-\mu_2 p_3$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

176.—Del mismo sistema de ecuaciones (175)

$$\lambda_{i-1}p_i-\lambda_i q_i+\lambda_{i+1}=0$$
$$\mu_{i-1}p_i-\mu_i q_i+\mu_{i+1}=0$$

se desprenden las siguientes relaciones:

$$\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i\mu_{i+1} = (\lambda_i\mu_{i-1} - \lambda_{i-1}\mu_i)\,p_i$$

$$\lambda_{i+1}\mu_{i-1} - \lambda_{i-1}\mu_{i+1} = (\lambda_i\mu_{i-1} - \lambda_{i-1}\mu_i)\,q_i$$

Pero $\lambda_2\,\mu_1 - \lambda_1\,\mu_2 = p_1$, según antes hallamos: luego

$$\lambda_3\mu_2 - \lambda_2\mu_3 = p_1p_2;\ \lambda_4\mu_3 - \lambda_3\mu_4 = p_1p_2p_3; \ldots$$

$$\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i\mu_{i+1} = p_1p_2p_3\cdots p_i$$

y por consecuencia:

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{p_1\cdots p_i}{\mu_i\mu_{i+1}},\quad \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} = \frac{p_1\cdots p_{i-1}q_i}{\mu_{i-1}\mu_{i+1}}$$

Aplicando la primera de estas dos últimas fórmulas á la igualdad evidente

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3} - \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) + \ldots + \left(\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)$$

hallamos esta otra:

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_1p_2}{\mu_2\mu_3} + \frac{p_1p_2p_3}{\mu_3\mu_4} + \ldots + \frac{p_1\cdots p_i}{\mu_i\mu_{i+1}}$$

La cual sirve para transformar una fracción continua en un polinomio que nos permite estimar ó avalorar la fracción misma, especialmente en el caso de que sea infinito el número de sus términos.

177.—Del sistema anterior (174).

$$u_i = \mu_i u_1 - \lambda_i u$$

$$u_{i+1} = \mu_{i+1} u_1 - \lambda_{i+1} u$$

se desprenden las siguientes relaciones:

$$\mu_{i+1} u_i - \mu_i u_{i+1} = (\lambda_{i+1} \mu_i - \lambda_i \mu_{i+1}) u$$

$$\lambda_{i+1} u_i - \lambda_i u_{i+1} = (\lambda_{i+1} \mu_i - \lambda_i \mu_{i+1}) u_1$$

y por consecuencia (176).

$$\mu_{i+1} u_i - \mu_i u_{i+1} = p_1 \ldots p_i u.$$

Una relación semejante existe entre 3 cantidades cualesquiera u, que pudiera deducirse del sistema

$$u_h = \mu_h u_1 - \lambda_h u$$

$$u_i = \mu_i u_1 - \lambda_i u$$

$$u_k = \mu_k u_1 - \lambda_k u$$

178.—De los valores antes hallados (176) se desprende:

$$\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}-\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right):\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}-\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}}\right)=\frac{\mu_{i-1}p_i}{\mu_{i+1}}$$

Ahora bien, cuando los números p_2, p_3... sean negativos y los números q positivos, será $\mu_{i+1} > -$ $-\mu_{i-1}p_i$ (175): lo cual manifiesta que la razón de las diferencias entre las fracciones consecutivas $\frac{\gamma}{\mu}$, es un quebrado puro; y, por lo tanto, que tales diferencias constituyen una progresión decreciente con los signos alternados.

Pero la diferencia (176)

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}=\frac{p_1p_2}{\mu_2\mu_3}$$

es una cantidad negativa: luego

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2}-\frac{\lambda_3}{\mu_3}>\frac{\lambda_4}{\mu_4}-\frac{\lambda_3}{\mu_3}>\frac{\lambda_4}{\mu_4}-\frac{\lambda_5}{\mu_5}>\frac{\lambda_6}{\mu_6}-\frac{\lambda_5}{\mu_5}>\dots$$

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2}>\frac{\lambda_4}{\mu_4}>\frac{\lambda_6}{\mu_6}>\dots$$

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3}<\frac{\lambda_5}{\mu_5}<\frac{\lambda_7}{\mu_7}<\dots$$

De aquí viene el llamar á las aproximadas fracciones *convergentes*.

179. Si los números p son unidades y los q son

enteros, los términos λ_i y μ_i, de las fracciones aproximadas, son primos entre sí; porque su máximo común divisor debe estar contenido en la diferencia $\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i\mu_{i+1}$ y no puede ser, en consecuencia (176), superior á la unidad. Por ser irreducibles las fracciones aproximadas se denominan también *reducidas*.

En el supuesto de que sean $p_1 = 1$, y $p_2 = p_3 = \ldots = -1$; y q_1, $q_2 \ldots$ enteros y positivos, las cantidades λ_2, $\lambda_3 \ldots \mu_2$, $\mu_3 \ldots$ formarán series crecientes; y entre dos aproximadas consecutivas no podrá estar comprendido el cociente de dos números a y b, cuando el divisor b lo está entre los denominadores de aquéllas. En efecto, admitamos que

$$\frac{\lambda_i}{\mu_i} < \frac{a}{b} < \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$$

Como consecuencia tendremos:

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} > \frac{a}{b} - \frac{\lambda_i}{\mu_i}; \text{ ó bien } \frac{1}{\mu_{i+1}} > \frac{a\mu_i - b\lambda_i}{b}$$

de donde resulta:

$$b > (a\mu_i - b\lambda_i)\,\mu_{i+1} > \mu_{i+1}$$

por ser $a\mu_i - b\lambda_i$ entero y diferente de 0. Luego b no puede estar comprendido entre μ_i y μ_{i+1}.

Ejemplo.—Para expresar el cociente de dos enteros por cocientes de números menores, con la mayor aproximación, se convierte aquél (173) en fracción continua y se calculan las reducidas. Así se halla:

$$\frac{5829}{7834}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$$

con las reducidas correspondientes

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{29}{39},\ \frac{32}{43},\ \frac{125}{168},\ \frac{157}{211},\ \frac{282}{379},\ \frac{1849}{2485}$$

Las reducidas $\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{32}{43} \ldots$ forman una serie decreciente que termina en el cociente ó fracción dada; y esta misma es el límite de la serie creciente que forman las fracciones $\frac{2}{3}, \frac{29}{39} \ldots$ La reducida $\frac{125}{168}$ menor que la fracción dada, expresa el valor de esta misma con el error $\frac{1}{168.211} < \frac{1}{168^2}$; y con mayor aproximación que cualquiera otra fracción cuyo denominador no llegue á 211 y cuyo numerador sea entero.

180. Si $p_1, p_2, p_3 \ldots$ representan números enteros y positivos, la fracción continua, infinita,

$$\frac{p_1}{p_1+1}-\frac{p_2}{p_2+1}-\frac{p_3}{p_3+1}-\ldots$$

representa el valor 1. (*)

(*) Legendre *Geom.* Nota 4.

En efecto, según (175) tenemos:

$$\lambda_{i-1}p_i - \lambda_i(p_i+1) + \lambda_{i+1} = 0$$

de donde se deduce:

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = (\lambda_i - \lambda_{i-1})\, p_i$$

Ahora bien:

$$\lambda_3 - \lambda_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)\, p_2 = p_1 p_2$$

Y repitiendo el procedimiento se halla por fin:

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = p_1 p_2 \cdots p_i$$

Lo cual expresa que $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \mu_2, \mu_3 \ldots$ son series crecientes de números enteros y positivos.

Por otra parte tenemos:

$$\mu_{i+1} - \lambda_{i+1} = (\mu_i - \lambda_i)(p_i + 1) - (\mu_{i-1} - \lambda_{i-1})p_i$$

Mas

$$\mu_1 - \lambda_1 = 1; \mu_2 - \lambda_2 = 1; \mu_3 - \lambda_3 = p_2 + 1 - p_2 = 1 \text{ etc.}$$

Luego

$$1 - \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{1}{\mu_i} \text{ ó } \frac{\lambda_i}{\mu_i} = 1 - \frac{1}{\mu_i}$$

y en conclusión:

$$\lim \frac{\lambda_i}{\mu_i} = 1 \quad \text{para } i = \infty$$

181. Si $p_1, p_2 \ldots, q_1, q_2 \ldots$ representan números enteros, positivos, y desde cierto índice i, se verifica que $q_i > p_i + 1, q_{i+1} > p_{i+1} + 1 \ldots$. etc.; la fracción continua

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$$

formada por infinitos términos, positivos ó negativos, tiene un valor *irracional*, menor que 1.

Demostración. — Claro es que podemos tomar, desde uno cualquiera, todos los términos siguientes de esta fracción y formar así sus restos. Uno cualquiera de estos restos, por consecuencia, tendrá la forma

$$\frac{v_k}{v_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k} \dotplus \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \dotplus \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} \dotplus \ldots$$

ó bien esta otra:

$$\frac{v_k}{v_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k \pm \dfrac{v_{k+1}}{v_k}}$$

de la cual resulta:

$$\pm v_{k+1} = v_{k-1} p_k - v_k q_k$$

Esta última relación manifiesta que si, por ejemplo, v_{i-1} y v_i fuesen enteros, los números v serían todos enteros, y entonces la fracción continua tendría un valor racional.

Pero, según la hipótesis:

$$p_i < q_i - 1 \quad \text{y} \quad p_{i+1} < q_{i+1} - 1$$

y, por lo tanto:

$$\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} < 1 \quad \text{y} \quad p_i < q_i - 1 < q_i \pm \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$$

De la última desigualdad resultan:

$$\frac{p_i}{q_i \pm \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}} < 1; \quad \frac{p_{i+1}}{q_{i+1} \pm \frac{p_{i+2}}{q_{i+2}}} < 1; \ldots \text{ etc., etc.}$$

y, por consecuencia:

$$\frac{p_i}{q_i} \pm \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} < 1$$

$$\frac{p_i}{q_i} \pm \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} \pm \frac{p_{i+2}}{q_{i+2}} < 1$$

. . . .

Lo cual prueba que los restos $\frac{v_i}{v_{i-1}}, \frac{v_{i+1}}{v_i}, \frac{v_{i+2}}{v_{i+1}} \ldots$ son quebrados puros. Admitiendo ahora que v_{i-1} y v_i fuesen números enteros, los números enteros $v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \ldots$ formarían una serie decreciente con el límite 0: contra la hipótesis de que no podía desaparecer ningún resto de la fracción continua propuesta. Luego esta fracción no puede tener valor racional.

XXXI.—La serie exponencial.

182. Una *serie infinita*, esto es, un polinomio $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$, con número infinito de términos, no es, en general, la expresión de una cantidad determinada, sino en el solo caso de ser *convergente* (*), esto es: cuando entre sus términos pueda elegirse un conjunto determinado de tal modo, que la suma de los restantes adquiera un valor tan pequeño como deseemos. Si mediante la suma de sus n primeros términos se expresa, con un error que no supere á una cantidad dada ε, el valor de una serie infinita, ésta convergirá tanto menos rápidamente cuanto mayor sea el número n. Las series infinitas, no convergentes, no pueden representar el valor de una cantidad, y se llaman *divergentes*.

Los ejemplos más sencillos de series convergentes son las fracciones decimales infinitas, y las progresiones geométricas decrecientes infinitas.

Si x es una fracción pura real, la serie infinita $1 + x + x^2 + \ldots$ tiene el valor $\frac{1}{1-x}$. Mediante la suma, $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$, de sus n primeros términos, será expresado su valor con el error $\frac{x^n}{1-x}$ que, creciendo n suficientemente, puede llegar á ser más pequeño que cualquiera cantidad dada, por diminuta que ésta sea (40-XII y XXII).

(*) *Series infinita convergens*, según Newton: el primero que adoptó las series infinitas como expresión general de la cantidad.

Cuando los términos de una serie infinita dependen de la variable x; dado el valor ε, el número suficiente n para el objeto que antes hemos dicho, depende también de x; mas, cuando para todos los valores de la variable comprendidos entre dos límites dados basta un número finito n, la serie dentro de la expresada limitación se dice *convergente en igual grado* ó *regularmente convergente* (*).

Si la expresión $u_h = a_h + ib_h$ es un número complejo, y son por sí convergentes cada una de las dos series infinitas $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ y $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$, la serie infinita $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ lo será también. Si por v_h designamos el módulo del complejo u_h, y la serie modular, infinita, $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$, es convergente, lo será también la serie infinita compleja $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$; porque ni a_h ni b_h superan al módulo ó cantidad v_h (85).

183. Cuando los términos $u_0, u_1, u_2 \ldots$ son *positivos*, y á contar desde el u_k no superan á los de una progresión geométrica decreciente, siendo en consecuencia:

$$u_{k+1} \leqq u_k q;\ u_{k+2} \leqq u_{k+1} q \leqq u_k q^2;\ \ldots \text{ etc.} \quad (q < 1)$$

la serie infinita $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ será convergente; porque

$$u_{k+r} + u_{k+r+1} + \ldots \leqq u_k q^r (1 + q + q^2 + \ldots) \leqq \frac{u_k q^r}{1-q}:$$

(*) Heine J. de Borchardt 71 p. 353. Funciones esféricas 1 p. 65. (Véase Seidel Münchener Acad. 1848. t. 5 p. 381).

cantidad tan pequeña como queramos, creciendo r suficientemente (182).

Cuando ninguno de los términos positivos a_0 $a_1 b$, $a_2 b^2$, ... supere á la cantidad c, la serie infinita *(serie potencial* de x).

$$\text{(I)} \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

será convergente para todos los valores positivos de x, menores que b. Porque entonces los términos de esta serie no superan á los de la progresión geométrica decreciente

$$c, c\frac{x}{b}, c\frac{x^2}{b^2}, \ldots$$

Sujetos los valores de x á la condición antes expresada, las series deducidas de la precedente,

$$\text{(II)} \qquad a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \ldots$$

$$= x\left(a_0 + \frac{1}{2} a_1 x + \frac{1}{3} a_2 x^2 + \ldots\right)$$

y

$$\text{(III)} \qquad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots,$$

son al mismo tiempo convergentes.

Los términos de la serie (III) no superan á los términos

$$\frac{c}{b}, 2\frac{c}{b}\frac{x}{b}, 3\frac{c}{b}\frac{x^2}{b^2}, \ldots$$

los cuales no llegan á su vez, desde uno determinado de entre ellos á los de una progresión geométrica decreciente. Puesto que de la razón

$$(k+1)\frac{c}{b}\frac{x^k}{b^k} : k\frac{c}{b}\frac{x^{k-1}}{b^{k-1}} = \frac{k+1}{k}\frac{x}{b} = q$$

se desprende (43):

$$\frac{k+2}{k+1}\frac{x}{b} < q, \text{ etc.}$$

y $q < 1$, cuando sea $k > \frac{x}{b-x}$.

Si la serie infinita (I) contiene términos complejos, habrá que llevar en cuenta la serie infinita constituída por los módulos de dichos términos (*).

184. Una serie infinita, compuesta de términos positivos y negativos, es *incondicionalmente convergente*, siempre que lo sea la serie constituída por los módulos (valores positivos) de todos sus términos.

Pero, si la serie de los términos positivos, y la de los negativos, son cada una por sí sola divergentes, aun cuando los términos de la una y los de la otra vayan sucesivamente disminuyendo y aproximándose á cero, mediante la sucesiva interpolación de los términos (negativos) de la segunda serie entre los (positivos) de la primera, puede formarse

(*) Cauchy Anal. alg. c. 9. Abel J. de Crelle 1 p. 313 Briot A. Bouquet *Fonct. doubl. period.* 12.

una serie infinita, *condicionalmente convergente*, cuyo valor depende de la colocación de sus términos (*).

Para que la serie infinita, constituída como hemos dicho, exprese el valor arbitrario positivo C, se tomarán de la primera los términos bastantes para que su suma supere á C, y los términos suficientes de la segunda para que su suma baje de C, y así sucesivamente con esta alternativa continua. El error de la suma no excede del valor de su último término, y puede hacerse tan pequeño como queramos por la repetición suficiente del indicado procedimiento.

185. El valor que adquiere la potencia $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, cuando sea m infinitamente grande, depende de x y está expresado por la serie infinita convergente (**)

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

Demostración.—Para un valor entero y positivo de m tenemos (XXIII):

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

(*) Observación de Dirichlet. — (*Abhandl. der Berl. Acad.* 1837 p. 48) explicada por Riemann — 1854 — *Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (Gött. Abh. Bd. 13) véase (200). La particularidad relativa á las series *semi-convergentes* fué notada por Legendre, 1811. Exerc. de Calcul integral I, 1. p. 267, Lacroix *Traité t.* 3 *art.* 1.000.

(**) Euler *Introd.* 1-151.

$$= 1 + m\frac{x}{m} + m\frac{m-1}{2}\frac{x^2}{m^2} + m\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\frac{x^3}{m^3} + \ldots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) + \ldots$$

polinomio de $(1+m)$ términos. Mas los términos de este polinomio no superan á estos otros

$$1,\ x,\ \frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{3!},\ \frac{x^4}{4!} \ldots,$$

Los cuales, á contar desde uno determinado, no llegan, á su vez, á los de una progresión geométrica-decreciente; puesto que

$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{x^k}{k!} = \frac{x}{k+1} = q; \quad \frac{x}{k+2} < q, \ldots \text{ etc.}$$

y $q < 1$, cuando $k + 1 > x$. Luego (183)

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + x + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \ldots \left(1 - \frac{n}{m}\right) + \alpha$$

pudiendo ser el error α tan pequeño como queramos con hacer á n suficientemente grande.

Ahora bien:

$$1 > 1 - \frac{1}{m} > \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) > \ldots$$

$$> \left(1 - \frac{1}{m}\right) \ldots \left(1 - \frac{n}{m}\right) > \left(1 - \frac{n}{m}\right) > 1 - \beta$$

siendo β tan pequeña como queramos, siempre que sea

$$m > \frac{n}{1 - \sqrt[n]{1 - \beta}}$$

Y, por consecuencia, la diferencia $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m - \alpha$, en el supuesto de que n y m sean suficientemente grandes, se halla comprendida entre los valores,

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(1 - \beta)$$

y

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

que, á su vez, difieren entre sí en una cantidad, también arbitrariamente pequeña.

186. De lo dicho se desprende, para m infinitamente grande:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2{,}71828\ldots$$

(104 y 46.—*Arit. vulgar* XVIII).

Esta suma de los $(1+n)$ primeros términos expresa el valor de la serie con un error que no llega á la n^a parte del último término. A contar desde este último término, en efecto, la suma

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{n!}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right\}$$

$$\text{es} < \frac{1}{n!}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right\} < \frac{1}{n!}\,\frac{1}{n}.$$

El valor de la serie infinita que estamos considerando, designado por EULER con la letra e, es irracional (*). En efecto; supongamos que sea e el cociente de los números enteros r y s, multiplicando todos los términos de la serie en cuestión por $s!$ se convertiría ésta en una suma de números enteros y en la suma de los quebrados

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}+\ldots<\frac{1}{s}.$$

Pero multiplicado también por $s!$ el cociente $r{:}s$, cuyo valor hemos atribuído á la serie e, resulta el producto $(r{:}s)s!$ que es un número entero: de lo cual, según patentiza el valor de la suma de quebrados escrita arriba, se deduce que el valor atri-

(*) La irracionalidad de e y de π (191) así como de e^n para x racional, fué demostrada primeramente por LAMBERT (1761). (Beiträge II, 1 p. 159. LEGENDRE Geom. Note 4). La demostración sencilla, aquí adoptada de la irracionalidad de e se debe á FOURIER (STAINVILLE Melanges d'anal. 1815 p. 339).

buído á e, no es exacto: ó que el cociente $r:s$ no expresa por completo el valor e.

187. La serie convergente

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

establecida primeramente por NEWTON (OLDEMBURGO á LEIBNIZ 12 de Abril 1675 y 26 de Julio de 1676) para un valor finito de x, coincide, cuando x es real, con el valor positivo de e^x y define determinadamente la potencia e^x con exponentes complejos. Llamóse *serie exponencial*, porque las potencias consideradas en su dependencia con los exponentes habían recibido antes el nombre de *cantidades exponenciales* (*).

Demostracion.— Mediante la sustitución $m=\mu x$ se halla:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu x}=\left(\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right)^x$$

Suponiendo que sea μ infinitamente grande, lo será también m; y, por consecuencia (185 y 186):

(*) J. BERNOULLI (1697) estudió las potencias en su dependencia con los exponentes, dándoles el nombre que LEIBNIZ le propusiera de *cantidades exponenciales* (Opp. I p. 179). Después de haber sido conocido por J. BERNOULLI el enlace entre las diferenciales de los logaritmos imaginarios y de los arcos de círculo reales (Memoria de París 1702 p. 289-Opp. t. I números 70 y 89) fueron introducidos por EULER (Introd. I párrafo 138. Carta á GOLDBACH de 9 de Diciembre de 1841) los exponentes imaginarios.

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x$$

Al mismo tiempo, de la igualdad.

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \left(1 + \frac{y}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m, z = x + y + \frac{xy}{m}$$

se deduce, á condición de que m sea infinitamente grande, esta otra importantísima:

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

Efectivamente, poniendo por e^x y e^y sus series respectivas (*) tenemos:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\right.$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$+ y + xy + \frac{x^2}{2} y + \ldots$$

$$+ \frac{y^2}{2} + x\frac{y^2}{2} + \ldots$$

$$+ \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$= 1 + (x + y) + \frac{(x + y)^2}{2} + \frac{(x + y)^3}{3!} + \ldots$$

(*) Sstainvilee 1819, *Ann. de Gerg.* 9, p. 229.

Puesto que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$; y por consecuencia:

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\frac{y}{1} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\frac{y^2}{2!} + \dots$$

Designando ahora por $f(x)$ el valor de la serie infinita que corresponde al valor x, será $f(x) f(y) = f(x+y)$: y por consecueucia:

$$[f(x)]^2 = f(2x); [f(x)]^3 = f(2x) f(x) = f(3x);$$
$$[f(x)]^m = f(mx);$$

siempre que sea m un número entero y positivo.

Por otra parte:

$$[f(x)]^{\frac{1}{m}} = f\left(\frac{x}{m}\right); \text{ porque } \left(f\left(\frac{x}{m}\right)\right)^m = f\left(\frac{x}{m}m\right)$$

$$= f(x); [f(x)]^{\frac{2}{m}} = f\left(\frac{2x}{m}\right); \text{ etc., etc.}$$

Si α representa un número real positivo, será

$$[f(x)]^{-\alpha} = 1 : [f(x)]^\alpha = 1 : f(\alpha x) = f(-\alpha x);$$

porque $f(\alpha x) f(-\alpha x) = f(0) = 1$.

Y por último, resulta que

$$f(x) = [f(1)]^x = e^x,$$

cuando x es real, etc., etc.

188. Para elevar el número complejo $\cos x + i \operatorname{sen} x$, cuyo módulo es 1, á la potencia cuyo exponente sea el número real α, se multiplica x por este exponente (*).

Así:

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^\alpha = \cos \alpha x + i \operatorname{sen} \alpha x$$

Demostración.—En el Cap. IV de la *Trigonometría* se demuestra que:

$$\begin{aligned}(\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos y + i \operatorname{sen} y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ &\quad + i(\cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y) \\ &= \cos(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y)\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}(\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos y + i \operatorname{sen} y)(\cos z + i \operatorname{sen} z) \\ = \cos(x+y+z) + i \operatorname{sen}(x+y+z)\end{aligned}$$

etcétera, etc.

Luego cuando m sea entero y positivo,

(*) Euler, *Introd.* I párrafo 132 y sig.

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^m = \cos mx + i \operatorname{sen} mx$$

Por otra parte, cuando sea n entero y positivo, es

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^{\frac{n}{m}} = \cos \frac{nx}{m} + i \operatorname{sen} \frac{nx}{m}$$

Porque

$$\left(\cos \frac{nx}{m} + i \operatorname{sen} \frac{nx}{m}\right)^m = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$$
$$= (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n .$$

Y por último, si β representa un número real positivo, tenemos:

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^{-\beta} = 1 : (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{\beta}$$
$$= 1 : (\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) = \cos (-\beta x) + i \operatorname{sen} (-\beta x)$$

Porque

$$[\cos (-\beta x) + i \operatorname{sen} (-\beta x)] [\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x]$$
$$= \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

Observación.—Del mismo modo

$$(\cos x - i \operatorname{sen} x)^{\alpha} = \cos \alpha x - i \operatorname{sen} \alpha x$$

Y por consecuencia:

$$2 \cos \alpha x = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{\alpha} + (\cos x - i \operatorname{sen} x)^{\alpha}$$

$$2 i \operatorname{sen} \alpha x = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{\alpha} - (\cos x - i \operatorname{sen} x)^{\alpha}$$

El cálculo de *cos mx* y *sen mx* mediante *cos x* y *sen x* fué comenzado por VIETA *(Logist spec)* y completado por SANTIAGO BERNOULLI *(Mem. de París* 1702. *Opp.* II núm. 97). Véase KLÜGEL *Math.* W. 2. p. 613.

Las expresiones aparentemente imaginarias de *cos mx* y *sen mx* son las que se encuentran en MOIVRE *Miscell analit.* 1730 p. 1. Pero la potencia del complejo *cos x + i sen x* mediante la multiplicación del arco por el exponente, ó sea el enunciado de la fórmula ó *teorema* de MOIVRE, no fué estudiado por este matemático.

189.—Cuando x representa el arco de un ángulo, esto es, el arco de la circunferencia descrita alrededor del vértice como centro, con un radio igual á la longitud-unidad, comprendido entre sus lados (la razón del ángulo á la π^a parte de 180° . — *Trig.*) tenemos (*):

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix} \quad \cos x - i \operatorname{sen} x = e^{-ix}$$

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2} i\,(e^{ix} - e^{-ix}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

(*) Las series para cos x y sen x fueron halladas por NEWTON (178) EULER demostró su dependencia con la serie exponencial.

Demostración.—Si por ω designamos el arco de un ángulo agudo, será

$$\operatorname{sen} \omega < \omega < \operatorname{tang} \omega$$

y por consecuencia:

$$\cos \omega < \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} < 1$$

Y de aquí se deduce que

$$\alpha = 1 - \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} < 1 - \cos \omega$$

y

$$\beta = \frac{1 - \cos \omega}{\omega} = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{\omega (1 + \cos \omega)} = \frac{(1 - \alpha)^2 \omega}{1 + \cos \omega}$$

serán tan pequeños como queramos, si hacemos que ω disminuya suficientemente. Ahora bien (188):

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = \left(\cos \frac{x}{m} + i \operatorname{sen} \frac{x}{m}\right)^m$$

Haciendo $\omega = \frac{x}{m}$, según las igualdades antes establecidas tendremos:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{m} = \frac{x}{m} (1 - \alpha) \text{ y } \cos \frac{x}{m} = 1 - \frac{x}{m} \beta$$

Y sustituyendo:

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = \left[1 + \frac{ix}{m}(1 - \alpha + i\beta)\right]^m$$

De esta última igualdad, en virtud de que cuando m sea suficientemente grande, α y β desaparecen por hacerse ω cero, se desprende por fin, que (185):

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{ix}{m}\right)^m = e^{ix}$$

Las expresiones ó series infinitas convergentes para el complejo *cos* x — *i sen* x, y las consiguientes para *cos* x y *sen* x puede el lector deducirlas sin gran cuidado.

190. Mediante las expresiones encontradas (189) para el seno y el coseno de un número real x, pueden también definirse las del seno y el coseno de un número complejo (EULER. *Mém de Berlín* 1749 *p.* 278). Desde luego se desprenden de ellas:

$$\cos 0 = 1; \operatorname{sen} 0 = 0; \cos(-x) = \cos x;$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x; (\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1$$

y también que

$$\frac{1 - \cos x}{x} \text{ y } \frac{x - \operatorname{sen} x}{x}$$

son menores que toda cantidad, por pequeñísima que sea, disminuyendo x suficientemente.

De las identidades

$$(e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\beta}+e^{-\beta})+(e^{\alpha}-e^{-\alpha})(e^{\beta}-e^{-\beta})$$
$$=2(e^{\alpha+\beta}+e^{-\alpha-\beta})$$
$$(e^{\alpha}-e^{-\alpha})(e^{\beta}+e^{-\beta})+(e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\beta}-e^{-\beta})$$
$$=2(e^{\alpha+\beta}-e^{-\alpha-\beta})$$

se deduce que aun cuando sean complejos x é y, se verifican las fórmulas

$$\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x+y)$$

y

$$\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(x+y).$$

Siendo, pues, reales u y v, sustituyendo x por iv en las expresiones antes escritas de *cos* x y *sen* x y recordando que $i \,.\, i = -1$, hallamos:

$$\cos iv = \tfrac{1}{2}(e^{v}+e^{-v}) \text{ y } \operatorname{sen} iv = \tfrac{1}{2}i(e^{v}-e^{-v})$$

Y por consecuencia:

$$\cos(u+iv) = \cos u \cos iv - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} iv$$

$$= \tfrac{1}{2}(e^{v}+e^{-v})\cos u - \tfrac{1}{2}i(e^{v}-e^{-v})\operatorname{sen} u$$

Por elevación á potencias y por división se encuentran desarrollos sencillos para las expresiones de

$$(2 \cos x)^m,\ (2i \operatorname{sen} x)^m$$

$$\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x},\ \frac{\operatorname{sen} 2mx}{\cos x} \text{ y } \frac{\cos (2m+1)x}{\cos x}$$

en el supuesto de que m signifique un número entero y positivo.

Nota. Las expresiones reales *cos iv* y *—i sen iv* bajo la denominación de *coseno* y *seno hiperbólicos* de v que recibieran de RICCATI, fueron estudiadas particularmente por LAMBERT (*Mém de Berlín* 1768 p. 330) y por GUDERMANN (*J. de Crelle t.* 6 y siguientes. *Theorie der Potential functionen*, Berlín 1833). Tablas construídas para estas funciones han sido recientemente publicadas por GRONAU 1863. Véase HOÜEL *Nouv. Ann.* 1864 p. 1).

Por analogía con la descomposición de e^{-x} en el coseno y el seno hiperbólicos de x, á saber:

$$e^{-x} = \cos ix + i \operatorname{sen} ix = \operatorname{coh} x - \operatorname{Seh} x,$$

y en la hipótesis de que α represente una raíz propia m^a de 1, pueden los términos de la serie exponencial distribuirse en m series.

$$e^{\alpha x} = \varphi_0(x) + \alpha \varphi_1(x) + \alpha^2 \varphi_2(x) + \ldots + \alpha^{m-1} \varphi_{m-1}(x)$$

que tienen ciertas propiedades comunes con el coseno y el seno: Véase OLIVIER *J. Crelle* 2 p. 243; HELLWIG *Arch. de Grunert* 21 p. 43; APPELL *Comptes rendus* 1877 p. 540 y 1378.

191: Mientras el arco x recorre el intervalo real desde 1 hasta 2, *sen* x es positivo; pero *cos* x, sin que su continuidad se interrumpa, pasa del valor positivo al negativo. Las expresiones

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!}\left(1 - \frac{1}{5.6}\right) + \ldots > 0$$

$$\cos 2 = -\frac{1}{3} - \frac{2^3}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7.8}\right) - \ldots < 0$$

prueban que existe entre 1 y 2 un valor real de x para el cual se anula *cos* x. Este valor $= 1.570\ldots$ se halla por los métodos ordinarios de aproximación *(Algebra* c. VIII) y fué designado por $\frac{1}{2}\pi$ (EULER *Introd.* I. § 126). En consecuencia:

$$\cos \tfrac{1}{2}\pi = 0; \ \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi = 1$$

$$e^{i\frac{1}{2}\pi} = \cos \tfrac{1}{2}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi = i; \ e^{i.2\pi} = 1$$

$$e^{x+i.2\pi} = e^x \,.\, e^{i.2\pi} = e^x$$

$$\begin{array}{llll}
\cos(x+\frac{1}{2}\pi) = & -\operatorname{sen} x & \operatorname{sen}(x+\frac{1}{2}\pi) = & \cos x \\
\cos(x+\pi) = & -\cos x & \operatorname{sen}(x+\pi) = & -\operatorname{sen} x \\
\cos(x+\frac{3}{2}\pi) = & \operatorname{sen} x & \operatorname{sen}(x+\frac{3}{2}\pi) = & -\cos x \\
\cos(x+2\pi) = & \cos x & \operatorname{sen}(x+2\pi) = & \operatorname{sen} x
\end{array}$$

Colíjese de estas últimas fórmulas que e^x y *cos* x y *sen* x son periódicas: es decir, que permanecen invariables aun cuando en la primera se aumente x en $i.2\pi$, y en la segunda en 2π.

Nota. El ángulo mínimo positivo, cuyo coseno es nulo, es el recto al que corresponde la 4.ª parte de la circunferencia: de lo cual se desprende que $\frac{1}{2}\pi$ es la razón de la 4.ª parte de la circunferencia al radio, y π la razón de la circunferencia al diámetro. (*Número de* LUDOLF, *numerus Ceulenius. Planimetría* c. XIII).

192. Los dos números reales a y b pueden ser representados mediante un número positivo r y el arco φ de un ángulo, por las expresiones

$$a = r\cos\varphi \text{ y } b = r\,\text{sen}\,\varphi$$

bajo las condiciones

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{b}{a},\ r = \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{b}{\text{sen}\,\varphi} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Cuando a y b sean positivos, φ se hallará comprendido entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$; cuando a sea negativo y b positivo, se hallará φ entre $\frac{1}{2}\pi$ y π: por lo cual *cos* φ y *sen* φ podrán ser reemplazados por—*sen* $(\varphi - \frac{1}{2}\pi)$ y *cos* $(\varphi - \frac{1}{2}\pi)$; etc., etc.

Esto dicho, sean O, E y P los puntos del plano (85) cuyos números correspondientes son 0, 1 y $a+ib$. Este número complejo será expresado mediante su *módulo* $r = OP$ y su *arco* φ que corresponde al ángulo EOP, de este modo:

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) = re^{i\varphi}$$

siendo

$$\text{arc}\,(a+ib) = \text{arc tang}\,\frac{b}{a} \text{ y mod } (a+ib) = \sqrt{a^2+b^2}$$

Los números reales positivos tienen el arco 0; los imaginarios positivos, el arco $\frac{1}{2}\pi$; los reales negativos, el arco π; los imaginarios negativos, el arco $\frac{3}{2}\pi$; los arcos de los números conjugados tienen por suma 2π. Un número permanece invariable cuando su arco se aumenta en 2π. El arco de un producto es la suma de los arcos de sus factores (188). El arco de un cociente es la diferencia entre el arco del dividendo y el arco del divisor. El arco de la potencia n^a es el *n-plo* del arco del dignando. Dos números no pueden ser iguales si no lo son sus módulos; y si sus arcos no son iguales ó no difieren uno del otro en un múltiplo de 2π.

193. Si los puntos $A, B\ldots$ representan gráficamente los números $a, b\ldots$ y es $p = b - a$, el cuadrilátero $OA\,BP$ será un paralelógramo, puesto que OP y AB son iguales en magnitud y dirección, como hipotenusas de catetos con igual magnitud y dirección (*). Luego.

$$\text{mod}\,(b-a)=AB \text{ y arc } (b-a)=\text{arc } OE^{\wedge} AB$$

Si $q=a+b$, y por lo tanto $q-a=b$, será AQ de igual magnitud y dirección que OB, y OQ la *suma geométrica* de los segmentos OA y OB (**). El punto Q de la suma se hallará trasportando el segmento OB paralelamente hasta que se coloque en la posición AQ, esto es: confundido su extremo inicial con el final del segundo OA. En general: si $\alpha, \beta\ldots$

(*) Gauss 1831.—Resid. biquadr. II. 38.—Conviene hacer la figura según (85). T.

(**) Möbius. Mechanik des Himmels 1843.

significan números reales, el punto que representa la fórmula

$$\frac{\alpha a+\beta b+\ldots}{\alpha+\beta+\ldots}$$

es el centro de gravedad de los puntos αA, βB,...

La suma de dos números conjugados a y a' es real; su diferencia es imaginaria.

Así:

$$a+a'=2 \operatorname{mod} a. \cos \operatorname{arc} a$$

$$a-a'=2i \operatorname{mod} a. \operatorname{sen} \operatorname{arc} a$$

Cuande $p: 1=b: a$, es $OP: OE=OB: OA$ y $EOP = EOB - EOA = AOB$; y en consecuencia, los triángulos OEP y OAB semejantes y del mismo sentido.

Cuando $q.\ 1=a.\ b$, es $q: a=b: 1$, y los triángulos OAQ y OEB, semejantes.

Cuando $a : b=c : d$, son semejantes OAB y OCD.

Cuando $p=\dfrac{b-a}{c-a}$, son semejantes OEP y ACB

Cuando $\dfrac{q-p}{r-p}=\dfrac{b-a}{c-a}$ son semejantes PQR y ABC.

La fórmula $(a, b, c, d,)=\dfrac{a-c}{b-c}:\dfrac{a-d}{b-d}$ tiene el módulo $\dfrac{AC}{BC}:\dfrac{AD}{BD}$ y por arco el del ángulo $BCA - BDA$.

El módulo y el arco de $\sqrt{a\,b\ldots}$ son respectivamente el medio geométrico de los módulos y el medio aritmético de los arcos de los números a, b,...

Si a y a', b y b' representan números conjugados, será $aa'=OA^2$ y $(a-b)(a'-b')=AB^2$ El producto ab' tiene el módulo $OA.\,OB$ y el arco del ángulo BOA; y por consecuencia:

$$ab'+a'b=2OA.\,OB\cos BOA$$

$$ab'-a'b=2iOA.\,OB\,\mathrm{sen}\,BOA=-4i.\,OAB$$

194. Mediante las transformaciones (192) pueden calcularse las potencias, las raíces, los logaritmos etc., etc. del número complejo $a+ib$ (D' ALEMBERT *sur les vents art.* 78 y *Mém. de Berlín* 1746 p. 192. EULER *Mém. de Berlín* 1749 p. 265 y siguientes).

Siendo n real, entero y positivo, tenemos:

$$(a+ib)^n=r^n(\cos n\varphi+i\,\mathrm{sen}\,n\varphi)=r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{a+ib}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

$$=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

$$\log(a+ib)=\log r+i(\varphi+2k\pi),\ \text{para la base } e.$$

$$\log\frac{z}{\mathrm{mod}\,z}=i\,\mathrm{arc}\,z.$$

En estas fórmulas es $r^{\frac{1}{n}}$ real y positivo; log r es real y $k=0\pm 1, \pm 2, ..$ Si k varía en n la segunda fórmula (191) permanece invariable; y por lo tanto, sólo se obtienen n valores diferentes de la raíz n^a

Los arcos de los números poseen las propiedades de los logaritmos de los mismos.

En particular:

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n}\ \text{y}\ \log 1=i.2k\pi$$

Así, por el ejemplo, la raiz $\sqrt[6]{1}$ tiene los valores

$$1,\ \cos\frac{\pi}{3}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{2\pi}{3}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3},\ \cos\pi\pm i$$
$$\mathrm{sen}\,\pi=-1.$$

La raíz $\sqrt[7]{1}$ tiene los valores:

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{7}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{7},\ \cos\frac{4\pi}{7}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{4\pi}{7},\ \cos\frac{6\pi}{7}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{6\pi}{7}.$$

Para calcular el número cuyo coseno es $a+ib$, se buscan los números reales u y v que satisfacen á la ecuación

$$\cos(u+iv)=a+ib$$

Estos mismos números satisfacen á las ecuaciones (190).

$$\tfrac{1}{2}(e^{-v}+e^{v})\cos u=a \qquad e^{-v}=\frac{a}{\cos u}+\frac{b}{\operatorname{sen} u}$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{-v}-e^{v})\operatorname{sen} u=b \qquad e^{v}=\frac{a}{\cos u}-\frac{b}{\operatorname{sen} u}$$

$$1=\left(\frac{a}{\cos u}\right)^2-\left(\frac{b}{\operatorname{sen} u}\right)^2;\ \text{etc., etc.}$$

XXXII.—La serie binómica y la serie logarítmica.

195.— La serie $1+\binom{x}{1}h+\binom{x}{2}h^2+\ldots$ que en el supuesto de ser x real, entero y positivo, es finita y representa el valor de la potencia $(1+h)^x$ para otros valores de x puede continuarse hasta el infinito y ser convergente siempre que el módulo de h sea un quebrado puro (*).

Demostración.—Sean b_k y α los módulos de $\binom{x}{k}$ y h respectivamente: en este supuesto el cociente

$$b_{k+1}\alpha^{k+1} : b_k\alpha^{k} = b^{k+1}\alpha : b_k$$

será el módulo de este otro:

(*) ABEL J. de Crelle, 1 p. 113 y sig.

$$\binom{x}{k+1}h^{k+1}:\binom{x}{k}h^{k}=\frac{x-k}{k+1}h=\left(\frac{x+1}{k+1}-1\right)h$$

Bajo la condición de que α sea quebrado puro, esto es, $\alpha<1$, el módulo δ del quebrado $\frac{x+1}{k+1}$ creciendo k suficientemente, será menor que $1-\alpha$, y el cociente, cuyo valor buscamos, menor que $(1+\delta)(1-\delta)=1-\delta^2$: luego la serie de los módulos $1+b_1\alpha+b_2\alpha^2+\ldots$ es convergente, etc. (183).

En el límite $h=1$ (-1) la serie es convergente siempre que la parte real de x no baje de -1 (0). Véase: ABEL *l. c.* y HEINE J. *de Crelle*, 55, p. 279.

196. Cualesquiera que sean x é y se verifica la identidad (*)

$$\binom{x}{k}+\binom{x}{k-1}\binom{y}{1}+\binom{x}{k-2}\binom{y}{2}+\ldots+\binom{x}{1}$$

$$\binom{y}{k-1}+\binom{y}{k}=\binom{x+y}{k}$$

Demostración.—La ecuación obtenida (136) en el supuesto de que fueran x é y números reales, enteros y positivos, es de k^o grado respecto de x, y como es satisfecha por más de k valores de x, es una identidad que subsiste, cualesquiera que sean x é y (*Algebra* 73).

Pero también la serie dada es la suma de las dos siguientes:

(*) EULER. Véase el cap. XXIII.

$$\binom{x}{k}+\binom{x}{k-1}\binom{y}{1}\frac{k-1}{k}+\binom{x}{k-2}\binom{y}{2}\frac{k-2}{k}+\ldots$$

$$+\binom{x}{k-1}\binom{y}{1}\frac{1}{k}\quad+\binom{x}{k-2}\binom{y}{2}\frac{2}{k}\quad+\ldots$$

Y esta suma, aplicando sucesivamente á sus términos respectivos la identidad

$$\binom{x}{r}=\binom{x}{r-1}\frac{x-r+1}{r},$$

se convierte en esta otra:

$$\binom{x}{k-1}\frac{x-k+1}{k}+\binom{x}{k-2}\binom{y}{1}\frac{x-k+2}{k-1}\frac{k-1}{k}$$

$$+\binom{k}{k-3}\binom{y}{2}\frac{x-k+3}{k-2}\frac{k-2}{k}+\ldots$$

$$+\binom{x}{k-1}\frac{y}{k}\quad+\binom{x}{k-2}\binom{y}{1}\frac{y-1}{2}.\frac{2}{k}$$

$$+\binom{x}{k-3}\binom{y}{2}\frac{y-2}{3}\frac{3}{k}\quad+\ldots$$

que, separando el factor común, puede expresarse como sigue:

$$\frac{x+y-k+1}{k}\Big\{\binom{x}{k-1}+\binom{x}{k-2}\binom{y}{1}+$$

$$\binom{x}{k-3}\binom{y}{2}+\ldots\Big\}$$

Ahora bien: si por $f(k)$ designamos el valor que adquiere la serie de que tratamos para el número k, evidentemente:

$$f(k)=\frac{x+y-k+1}{k}f(k-1);\ f(k-1)=\frac{x+y-k+2}{k-1}f(k-2)$$

$$\ldots f(1)=\frac{x+y}{1}$$

Luego

$$f(k)=\frac{x+y}{1}\cdot\frac{x+y-1}{2}\cdots\frac{x+y-k+1}{k}=\binom{x+y}{k}$$

197. La serie infinita

$$1+\binom{x}{1}h+\binom{x}{2}h^2+\ldots$$

cuando es convergente, da el valor de $(1+h)^x$ que sirve para hallar los restantes mediante su multiplicación por los valores de 1^x diferentes de 1; y se llama *serie binómica* (*)

Demostración.—Mediante la multiplicación hallamos:

(*) **El teorema general del binomio, uno de los más grandes descubrimientos de NEWTON (Carta á LEIBNIZ de 13 de Junio de 1676). Véase: EULER *Nov. Comm. Petrop.* 19 p. 103 y las citas del cap. XXIII, y ABEL l. c. que estudió esta serie para el valor complejo de x.**

$$\left\{1+\binom{x}{1}h+\binom{x}{2}h^2+\ldots\right\}\times\left\{1+\binom{y}{1}h+\binom{y}{1}h^2+\ldots\right\}$$

$$\begin{array}{llll}
=1+\binom{x}{1}h+\binom{x}{2}h^2 & +\binom{x}{3}h^3 & +\ldots \\
\quad+\binom{y}{1}h+\binom{x}{1}\binom{y}{1}h^2 & +\binom{x}{2}\binom{y}{1}h^3 & +\ldots \\
\quad\quad\quad+\binom{y}{2}h^2 & +\binom{x}{1}\binom{y}{2}h^3 & +\ldots \\
 & +\binom{y}{3}h^3 & +\ldots \\
=1+\binom{x+y}{1}h+\binom{x+y}{2}h^2 & +\binom{x+y}{3}h^3 & +\ldots
\end{array}$$

Si designamos por $\varphi(x)$ el valor de la serie infinita correspondiente al valor x, tendremos la identidad

$$\varphi(x)\,\varphi(y)=\varphi(x+y),$$

de la cual, como antes (187), se concluye:

$$\varphi(x)=[\varphi(1)]^x=(1+h)^x.$$

La serie binómica se usa para calcular la raíz de $1+h$, cuando el módulo de h sea un quebrado puro y x una fracción real (125).

198. El logaritmo natural (respecto de la base *e*) del binomio $1+h$, prescindiendo del término *log* 1 (105 y 194), puede ser expresado por

$$m\left(\sqrt[m]{1+h}-1\right)$$

con un error arbitrariamente pequeño, siendo m suficientemente grande, y siempre que el módulo de h, por consecuencia, sea menor que 1, por la serie infinita *(serie logarítmica)*

$$h-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3}h^3-\frac{1}{4}h^4+\ldots\ (*)$$

Demostración.—Según (185 y 187),

$$\left(1+\frac{\log(1+h)}{m}\right)^m=e^{\log(1+h)}=1+h$$

y, por lo tanto:

$$\log(1+h)=m\left(\sqrt[m]{1+h}-1\right)$$

con un error tan pequeño como queramos, haciendo á m suficientemente grande.

Admitido que el módulo de h sea un quebrado puro y haciendo $1:m=x$, será (197):

$$m\left(\sqrt[m]{1+h}-1\right)=\frac{(1+h)^x-1}{x}$$

(*) Descubierta por N. MERCATOR *(Logarithmotechnia* 1668 pr. 17) y S. GREGORY *(Exercit. geom.* 1668); y hallada también después por NEWTON (carta á Leibniz de 24 de Octubre de 1676). El modo actual de deducirla fué propuesto por HALLEY *(Philos. Trans.* 1695) y más fundadamente explicado por EULER *(Introd.* I., p. 119).

$$=\frac{1}{x}\left\{xh+\frac{1}{2}x(x-1)h^2+\frac{1}{2.3}x(x-1)(x-2)h^3+\ldots\right\}$$

$$=h-\frac{1}{2}h^2(1-x)+\frac{1}{3}h(1-x)(1-\frac{1}{2}x)-\ldots$$

Y como para m infinitamente grande x se hace nulo, resulta por último, sin error:

$$\log(1+h)=h-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3}h^3-\ldots$$

Nota. El logaritmo artificial (vulgar) y el logaritmo natural de un mismo número poseen una razón M que depende exclusivamente de la base (104). Por consecuencia:

$$\operatorname{Log} a=M\log a$$

$$\operatorname{Log}(a+\delta)-\log a=\log\left(1+\frac{\delta}{a}\right)=M\log\left(1+\frac{\delta}{a}\right)$$

$$=M\left(\frac{\delta}{a}-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{a^2}+\ldots\right)$$

Si es bastante pequeño $\delta : a$, puede tomarse el primer término de la serie inclusa en el paréntesis solamente. Lo cual significa que la diferencia de los logaritmos es tanto más próximamente proporcional á la razón entre la diferencia de los números correspondientes y el menor de estos números, cuanto más pequeña sea aquella razón.

(111). De las series (198)

$$\log(1+h) = h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$

$$\log(1-h) = -h - \tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$

por sustracción se deduce la siguiente:

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+h}{1-h} = h + \frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{5}h^5 + \ldots$$

O haciendo $\dfrac{1+h}{1-h} = a$, y por lo tanto, $h = \dfrac{a-1}{a+1}$, y sustituyendo:

$$\frac{1}{2}\log a = \frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \ldots$$

Y en particular:

$$\frac{1}{2}\log\frac{m}{n} = \frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{u+v}{u} = \frac{v}{2u+v} + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{2u+v}\right)^3 + \ldots$$

Así, por ejemplo, haciendo $u=1$, $v=1$, hallamos *log* 2; duplicando se halla *log* 4; para $u=4$, $v=1$ se encuentra *log* 5 — *log* 4 y así conoceremos *log* 5. Y por consecuencia, *log* 10 = *log* 2 + *log* 5, y (104)

$$1 : \log 10 = 0{,}43429\ldots$$

La serie que corresponde á $\frac{1}{2}$ *log* a es convergente cuando el módulo de h es un quebrado puro y para esto es necesario que la parte real de a sea positiva. En efecto, sea $a=p+iq$, el módulo de h será, por consecuencia, la raíz cuadrada positiva de

$$\frac{(p-1)^2+q^2}{(p+1)^2+q^2}$$

la cual será menor que 1, cuando sea $(p+1)^2 > (p-1)^2$, y por lo tanto, $p > 0$.

Si la parte real de a fuese negativa, el número complejo $-a=(-1)a$ tendría una parte real positiva, y entonces $log\ a = log\ (-1) + log\ (-a)$ (194)

200. Para el límite $h=-1$ la serie correspondiente á $log\ (1+h)$ da:

$$\log 0 = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots = \infty$$

En efecto: siendo n real y positivo, (*) evidentemente:

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} < \frac{2}{2^n}$$

$$\frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} < \frac{4}{4^n} \text{etc., etc.}$$

Y también:

(*) Poinsot S. Stainville *Mélanges*, p. 368.

$$\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}>\frac{2}{4^n}$$

$$\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}>\frac{4}{8^n}\text{etc., etc.}$$

Luego la serie

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

Se halla comprendida entre los dos límites

$$1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{4^{n-1}}+\ldots\right)\text{y}\,1+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{4^{n-1}}+\ldots\right)$$

La serie comprendida en el paréntesis es una progresión geométrica, decreciente sólo en el caso de ser $n>1$; y esto prueba que la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$ $+\ldots$ no puede ser finita.

Para el límite $h=1$ se halla para *log* 2 la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

que es convergente; porque

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots>\frac{1}{2}$$

y

$$1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\ldots<1$$

Pero esta serie no es incondicionalmente convergente (184) en virtud de que la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ es divergente; y su valor, en consecuencia, dependiente del orden de sus términos, mediante una colocación determinada de los negativos entre los positivos puede llegar á cualquier número dado; puesto que las series $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots$ y $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots$ son divergentes: valiendo la primera más que la segunda, y ésta, la mitad que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$

Para manifestar la dependencia entre el valor de semejantes series infinitas y *el orden de sus términos*, mediante los términos generales, por ejemplo (*):

$$t_k = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

$$u_k = \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k}$$

$$v_k = \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k}$$

atribuyendo á la letra k los valores 1, 2, 3... formemos las series $t_1+t_2+t_3+\ldots$, $u_1+u_2+u_3+\ldots$ y $v_1+v_2+v_3+\ldots$ Así veremos claramente que las dos primeras no difieren entre sí, mientras que la tercera tiene los mismos términos colocados en otro orden. Pero $v_k - u_k = \frac{1}{2} t_k$ y $t_k = log\ 2 = u_k$: luego la serie $v_1+v_2+v_3+\ldots$ tiene el valor $\frac{3}{2}\ log\ 2$.

(*) Scheibner *über unendliche Reihen*, 1860, p. 10.

201. De las relaciones.

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \text{ y } e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

por división se desprende la siguiente:

$$e^{2ix} = \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{\cos x - i \operatorname{sen} x} = \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x}$$

de la cual:

$$x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x}$$

Siempre que x sea real y positivo y no pase de $\frac{1}{2}\pi$, serán:

$$x \leqq \tfrac{1}{2}\pi - x,\ \operatorname{sen} x \leqq \cos x,\ \operatorname{tang} x \leqq 1$$

Por lo cual, cuando x sea real y se halle comprendido entre $-\frac{1}{4}\pi$ y $+\frac{1}{4}\pi$, tendremos (199):

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x} = i \operatorname{tang} x +$$

$$\frac{1}{3} (i \operatorname{tang} x)^3 + \ldots$$

y por consecuencia:

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{1}{3} (\operatorname{tang} x)^3 + \frac{1}{5} (\operatorname{tang} x)^5 - \ldots \text{ (*)}$$

(*) S. Gregory. Carta de Oldemburgo á Leibniz de 12 de abril de 1675. También Leibniz (carta á Oldemburgo 27 de agosto de 1676) y Newton (carta á Leibniz 24 de octubre de 1678) conocían esta serie.

Para el límite tang $x=1$, en el cual es $x=\frac{1}{4}\pi$, se halla para $\frac{1}{4}\pi$ la serie infinita (LEIBNIZ 1. c.)

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

que en el orden dado de sus términos converge, aunque no rápidamente, hacia el valor $\frac{1}{4}\pi$ comprendido entre los límites $\frac{2}{3}$ y 1.

Débense á NEWTON (1. c.) cálculos más sencillos del número π. En efecto: de principios geométricos y goniométricos se deduce que tang $\frac{1}{6}\pi=\sqrt{\frac{1}{3}}$ y por lo tanto:

$$\frac{1}{6}\pi=\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}^{\,3}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}^{\,5}-\cdots$$

También de otro modo, puede componerse $\frac{1}{4}\pi$ de varias series infinitas y de convergencia muy rápida. Haciendo $\alpha+\beta=\frac{1}{4}\pi$ tendremos:

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}=1$$

que da tang β para tang α, mediante la ecuación consiguiente

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{1-\operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}\alpha}$$

Sustituyendo en la serie anterior para x primeramente α, y luego β, y sumando los resultados hallamos al fin:

$$\tfrac{1}{4}\pi = \tang\alpha - \tfrac{1}{3}(\tang\alpha)^3 + \ldots + \tang\beta - \tfrac{1}{3}(\tang\beta)^3 + \ldots$$

La tabla siguiente contiene para ciertos valores de *tang*α los correspondientes de *tang*β, según las partes de que $\frac{1}{4}\pi$ se considera compuesto (*):

$\frac{1}{4}\pi$	tang α	tang β
$\alpha+\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$2\alpha+\beta$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
$4\alpha-\beta$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{239}$
$5\beta+2\beta$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{79}$

202. Para valores complejos de $h = \alpha e^{i\omega}$ cuyo módulo α sea un quebrado puro, se transforma (**) la serie binómica, haciendo

$$1 - \alpha^{i\omega} = e^{-\rho - i\psi}$$

Lo cual exige (192) que se verifiquen estas otras igualdades:

$$e^{-\rho}\cos\psi = 1 - \alpha\cos\omega \quad \text{y} \quad e^{-\rho}\operatorname{sen}\psi = \alpha\operatorname{sen}\omega$$

y, como *cos*ψ es positivo, ψ tendrá un valor, comprendido entre $-\frac{1}{2}\pi$ y $\frac{1}{2}\pi$, de tal suerte que

$$\tang\psi = \frac{\alpha\operatorname{sen}\omega}{1 - \alpha\cos\omega}$$

(*) Klügel *m. W.* I. p. 657. Gauss.—Obras t. II p. 501.
(**) Cauchy *Anal. algébr.* c. 9. Abel l. c.

El módulo $e^{-\rho}$ del número $1 - \alpha e^{i\omega}$ es la raíz cuadrada positiva del producto de los dos complejos conjugados

$$(1 - \alpha e^{i\omega})(1 - \alpha e^{-i\omega}) = 1 - 2\alpha \cos\omega + \alpha^2$$

á saber:

$$e^{-\rho} = (1 - 2\alpha \cos\omega + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$$

Esto sentado, tendremos (198):

$$\rho + i\psi = -\log(1 - \alpha e^{i\omega}) = \alpha e^{i\omega} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} + \ldots$$

$$\rho + i\psi = -\log(1 - \alpha e^{i\omega}) = \alpha e^{i\omega} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} + \ldots$$

Y por adición y sustracción (189)

$$\rho = \alpha \cos\omega + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \cos 2\omega + \ldots$$

$$\psi = \alpha \operatorname{sen}\omega + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \operatorname{sen} 2\omega + \ldots$$

Bajo las mismas hipótesis será (197):

$$1 - \binom{x}{1}\alpha e^{i\omega} + \binom{x}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} - \ldots = (1 - \alpha e^{i\omega})^x$$

O cambiando x en $-x$ y desarrollando los coeficientes simbólicos:

$$1 + \frac{x}{1}\alpha e^{i\omega} + \frac{x}{1}\frac{x+1}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} + \ldots = e^{x(\rho + i\psi)}$$

Sustituyendo ahora por $\alpha e^{i\omega}$, $\alpha^2 e^{2i\omega} \ldots e^{xi\psi}$ sus expresiones equivalentes $\alpha(\cos\omega + i \operatorname{sen} \omega)$ etc., etc. (189), hállanse, en el supuesto de ser x real, las relaciones:

$$1 + \frac{x}{1}\alpha \cos\omega + \frac{x}{1}\frac{x+1}{2}\alpha^2 \cos 2\omega + \ldots = e^{\rho x} \cos x\psi$$

$$\frac{x}{1}\alpha \operatorname{sen} \omega + \frac{x}{1}\frac{x+1}{2}\alpha^2 \operatorname{sen} 2\omega + \ldots = e^{\rho x} \operatorname{sen} x\psi$$

203. Si los números $a_0, a_1, a_2 \ldots$ son reales y positivos, y desde el a_k forman una serie decreciente hasta 0; y, por otra parte, x tiene el módulo 1 y un arco diferente de 0, la serie infinita

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

será convergente (*).

En efecto, siendo n suficientemente grande, la serie

$$(a_n - a_{n+1})x^{n+1} + (a_{n+1} - a_{n+2})x^{n+2} + \ldots$$

es convergente y tan pequeña como se quiera; puesto que la serie de los módulos

$$(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots$$

(*) ABEL *J. de Crelle* 1 p. 332. SCHEIBNER *über unendliche Reihen*, p. 9. DIRICHLET *J. de Liuville*, 1862 p. 253.

difiere de a_n en una cantidad arbitrariamente diminuta. Y, por lo tanto, la diferencia

$$a_n x^n - (a_n - a_{n+1}) \alpha^{n+1} - (a_{n+1} - a^{n+2}) \alpha^{n+2} - \ldots$$

$$= (1 - x)(a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots)$$

es también arbitrariamente pequeña.

Esta ley enseña que las series para ρ y ψ (202) convergen también aun en el límite $\alpha = 1$, siempre que ω no sea cero.

Baltzer

Aritmetica Universal