ARCHIMEDIS OPERA:

APOLLONII PERGÆI CONICORUM LIBRI IIII.

THEODOSII SPHÆRICA:

METHODO NOVA

ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.

PER

Is. BARROW, Exprofessorem *Lucasianum* CANTAB.
& Societatis Regiæ Soc.

ACCEDUNT EJUSDEM

LECTIONES

OPTICÆ, & GEOMETRICÆ.

LONDINI,
...dbid, vœneunt apud *Rob. Scott*, in vico
...ttle Britain. 1675.

APOLLONII CONICA:

Methodo Nova Illustrata, & Succinctè DEMONSTRATA.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-professorem Lucasianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI,

Excudebat *Guil. Godbid,* vœneunt apud *Robertum Scott*, in vico **Little-Britain.** 1675.

De Apollonio Pergæo, ex Vossio de Scriptoribus Mathematicis:

Proximæ post *Euclidem* antiquitatis, ex iis qui extant est Apollonius Pergæus, Claruit enim sub Ptolomæo Evergete.

NAtus est Pergæ, civitate Pamphiliæ. De ætate autem ejus, Pag. 54.
quod dixi auctor est Heraclius *in* Archimedis *vita, & exinde* Eutocius Ascalonita *initio commentariorum in Conica* Apollonii. *Ubi ex* Gemini *Mathematicarum præceptionum libro sexto refert, ut ob conicam hanc scientiam à suæ ætatis hominibus nuncupatus sit* magnus Geometra, Euclidis *discipulos, quod & ipsum ætatem indicat,* Alexandriæ *audivit, à quibus cum multa accepisset; non difficile adeò fuit quatuor conicorum* Euclidis *libros commentario illustrare, ac totidem alios adjungere: ut in universum conicorum essent libri viij: sicut auctor est Pappus* Alexandrinus *libro vij Mathematicæ Collectionis.*

Atque eodem libro alia quoque ejusdem Apollonii *memorat, videlicet libros duos* περὶ λόγου ἀποτομῆς, de proportionis sectione: *totidem* περὶ χωρίου ἀποτομῆς, de spatii sectione: *etiam duos* διωρισμένης τομῆς, determinatæ sectionis: *ac totidem* ἐπαφῶν, tactionum: *duos quoque* νεύσεων, inclinationum: *ac similiter duos* τόπων ἐπιπέδων, planorum locorum. *Quorum* Pappus *alios vocat* ἐφεκτικούς, in se solis consistentes: *alios* διεξοδικούς, extra sese tendentes. Pag. 55.

Cæterùm fuere olim, qui Conica non esse Apollonii Pergæi, *sed* Archimedis *putarent. Existimavit hoc* Heraclius *ille, qui* Archimedis *vitam retulit. Ejus verba inde adducit* Eutocius, *quibus ait* Archimedem *primum omnium consignasse* Elementa Conica: Apollonium *autem, cùm ea sciret necdum edita esse ab auctore, involâsse in illa, proque suis edidisse. Ac videtur id posse ipsius* Archimedis *verbis comprobari. Nam ipse operis de Conicis Elementis meminit partim libro* περὶ κωνοειδέων, καὶ σφαιροειδέων, *ante propositionem quartam. Utrobique enim ait, id, de quo loquitur demonstratum esse in libris Conicis. Nisi quis censeat, respici* Euclidis *quatuor Conicorum libros: quorum* Pappus *mentionem facit in septimo Mathematicarum Collectionum libro. Verum, si alienum opus signaret* Archimedes *non sic loqueretur. Solet enim tum dicere, priores id demonstrasse. Et sanè* Archimedi *non fuisse ignotum conos secari posse planis, quæ ad latus Coni habeant inclinationem differentem, satis comprobat contra* Eutocium, *& alios,* Guido Ubaldus *initio Commentarii in secundum* ἰσορροπικῶν Archimedis. *Quæ cùm considero, nolim de auctore multùm contendere. Et fortasse rudiores* Archimedis *chartas nactus fuit* Apollonius, *atque eas perfecit. Utcunque est, ante hæc de Conicis edita ab* Apollonio, *imperfecta erat eorum notitia: ut tradit* Eutocius Ascalonita Pag. 434.

initio

initio Commentarii sui in Conica Apollonii. *Atque*, Ariſtæi *judicio*, Pappi *eadem mens fuit.*

Quatuor priores libros primus transtulit Joan. Baptiſta Memmius; *sed infeliciter, eò quòd Argumentum operis non intelligeret: unde, non vidit ſat manifeſtas Græci codicis mendas, ac ſæpe pueriliter hallucinatur: ſicut monitum* Franciſco Maurolyco, *præfatione in Coſmographiam ſuam. Operæ igitur fecit* Federicus Commandinus; *qui denuo Latinè vertit, Bononiæque edidit anno* 1566. *Nec tamen omnia in eo vertendo potuit* Commandinus. *Uſque adeo corruptus erat Græcus codex, quare in Latinis vitioſum ſequi codicem eſt coactus; ut ipſe agnoſcit.*

Alia quoque Apollonii *hujus citant* Proclus *in* Euclidem, *ubi laudatur* Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ Ὠκυτοβόῳ. *Fortaſſe reſcribendum* τῇ Ὠκυβόῃ. *Quæ vox fuerat à* βοῇ *ſignificante pugnam: ut ſæpe apud* Homerum: ὠκυβόαι, ταχυμάχαι. *Et quædam recenſet* Eutocius Aſcalonita *libro de dimenſione Circuli*, Eutocius *hic etiam in* Conica Apollonii *commentatus fuit. Eum quoque commentarium Latinè vertit* Commandinus. *Utcunque verò nunc * quatuor duntaxat Conicorum libros habeamus, Arabicè tamen tres præterea ex Oriente eſt nactus Clariſſimus* Jacobus Golius, *antehac, in Academia Leidenſi, collega conjunctiſſimus. Cui multum Arabicæ debent literæ ac Matheſis univerſa: plura verò propediem debebunt; preſertim ubi tres illi Conicorum libri viderint lucem. Quærat aliquis quid factum ſit de libro octavo, Cognoſcimus de hoc ex Codice Goliano: ubi ad Calcem erat adſcriptum eò non fuiſſe Arabicè tranſlatum; quia etiam liber ille deſideraretur in Codicibus Græcis, unde Arabes cætera tranſtuliſſent. Sed doctiſſimus* Merſennius, *præfatione in* Apollonii *Conica; quæ ſunt in ejus* Συνόψει *Mathematica; Arabicè illum extare ait: imò omnes* Apollonii *libros eâ linguâ legi; ſane plures etiam, quam enumerarit* Pappus. *Atque horum teſtem citat* Aben Nedin; *qui librum contexuit de Philoſophis Arabibus, omniumque eorum ſcripta memoravit, qui fuere à quadringenteſimo poſt* Muhammedem *anno. Interim (ut idem* Merſennius *addit)* Claudii Mydorgii, *patricii Pariſini, ea eſt ſuſpicio tres illos Conicorum libros, qui ab Arabibus* Apollonii *creduntur non eſſe genuinos, verùm ab aliquo ſuppoſitos, qui ſub* Apollonii *nomine facere voluerit fucum. Atque hoc inde colligit; quod libro quinto prima Propoſit. in vj.* Apollonii *non tantummodo in Cono recto, ſed in Scaleno etiam quolibet, & portionibus quibuſvis, demonſtret poſſibilia quæque. Meminit auctoris quoque* Vitruvius, *lib.* I. *cap.* I. Cardanus *in* 16 *de Subtilitate ei ſeptimum inter ſubtilia orbis ingenia tribuit locum.*

*Anno 1650. antequuam tres poſteriores à Borellio ederentur.

APOL-

APOLLONII
CONICORUM
LIB. I.

DEFINITIONES.

I.

SI ab aliquo puncto (A) ad circumferentiam Circuli (B H C,) qui non sit in eodem plano, in quo punctum, conjuncta recta linea (A B) in utramque partem producatur, & manente puncto (A) convertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moveri; superficiem (D A E F G) à recta linea descriptam, constantémq; ex duabus superficiebus (D A G, E A F) ad verticem (A) inter se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea (E A B D) quæ eam describit in infinitum aucta, voco *Conicam superficiem.* Fig. 1

II.

Verticem ipsius, manens punctum (A).

III & VI.

Axem, rectam lineam (A G), quæ per punctum (A), & circuli centrum (G) ducitur.

IV.

Conum autem voco figuram (A B C), contentam circulo (B H C), & conicâ superficie (B A C), quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interjicitur.

V & VII.

Basim, circulum ipsum (B H G).

VIII.

Conorum rectos voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

IX.

Scalenos, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

X.

Fig. 2. Omnis curvæ lineæ (A B C) in uno plano existentis *Diametrum* voco, rectam lineam (B D,) quæ quidem ducta à linea curva, omnes lineas (A C), quæ in ipsa ducuntur cuidam lineæ (A C) æquidistantes, bifariam dividit.

XI.

Verticem lineæ rectæ terminum (A,) qui est in ipsa linea (A B C.)

XII.

Ordinatim ad diametrum *applicari* dicitur, unaquæque æquidistantium linearum (A C.)

XIII.

Fig. 3. Similiter, & duarum curvarum linearum (C A D, E B F) in uno plano existentium, *diametrum* quidem *transversam* voco, rectam lineam (A B), quæ omnes (C D, E F) in utraque ipsarum ductas, rectæ cuidam (C D, vel E F) æquidistantes bifariam dividit (in X.)

XIV.

Vertices, diametri terminos (A, B) qui sunt in ipsis lineis (C A D, E B F.)

XV.

Rectam verò *diametrum* (Z Y) voco, quæ inter duas lineas (C A D, E B F)

E B F) poſita, lineas omnes (C E, D F) ductas rectæ cuidam (A B) æquidiſtantes, & inter ipſas interjectas, biſariam ſecat (in Z vel Y.)

XVI.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur unaquæque linearum æquidiſtantium (C D, vel E F ad A B; & C E, vel D F ad Z Y.)

XVII.

Conjugatas diametros voco curvæ lineæ (A Z B Y), & duarum curvarum (C A D, E B F) rectas lineas (A B, Z Y), quarum utraque diameter eſt, & rectas lineas (C D, C E) biſariam dividit. Fig. 4.

XVIII.

Axem verò curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectam lineam, quæ cùm ſit diameter curvæ lineæ, vel duarum curvarum, æquidiſtantes ad rectos ſecat angulos.

XIX.

Axes conjugatos curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectas lineas, quæ cùm ſint diametri conjugatæ, ipſis æquidiſtantes ad rectos angulos ſecant.

Nihilo differunt axes à diametris, niſi quòd indifferenter illæ, hi ad rectos tantùm ſecent.

Apollonius Eudemo.

S. D.

SI & corpore vales, & aliæ tuæ res ex animi tui ſententia ſe habent, bene eſt; nos quidem ſatis bellè habemus. Quo tempore tecum *Pergami* fui, animadverti te cupidum intelligendi Conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad Te primum librum emendatum, reliquos deinceps miſſurus, cùm animo ero tranquilliori; non enim arbitror te oblitum quod à me accepiſti, quid ſcilicet cauſæ fuerit cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim; rogatus à *Naucrate* Geometrâ, quo tempore *Alexandriam* veniens apud nos fuit; & cur nos, cùm de illis octo libris egiſſemus, majorem ſtatim in his diligentiam adhibuimus. Nam cùm ipſe *Naucrates* quamprimum eſſet navigaturus, nos ea non emendavimus, ſed quæcunque ſeſe nobis obtulerunt conſcripſimus, utpote qui ea poſtremò eſſemus percurſuri. Quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam accidit nonnullos alios ex iis, qui nobiſcum fuerant, habuiſſe primum & ſecundum librum antequam emendaretur, noli mirari, ſi in quædam incidas, quæ aliter ſe habeant. Ex octo autem libris, quatuor primi hujus diſciplinæ continent Elementa: quorum primus complectitur generationes trium Coni ſectionum, & earum quæ oppoſitæ dicuntur, itemq; principalia ipſarum accidentia, à nobis & uberiùs & univerſaliùs, quàm ab iis qui de ea re ſcripſerunt elaborata. Secundus Liber tractat ea quæ attinet ad Diametros, & ad Axes Sectionum, & ad illas lineas *quæ cum ſectione non conveniunt; tum de aliis diſſerit, quæ & generalem & neceſſariam utilitatem ad determinationes afferunt. * Tertius liber continet multa & admirabilia Theo-

*ἀσυμπτῶτοι.

Theoremata, quæ utilia erunt & ad ſolidorum locorum compoſitiones, & ad determinationes; quorum complura & pulcherrima, & nova ſunt. Hæc nos perpendentes animadvertimus, non poſitam eſſe ab *Euclide* rationem componendi loci ad tres & quatuor lineas, verùm ipſius tantummodo particulam quandam, atque hanc non ſatis feliciter. Neque enim fieri poterat, ut ea compoſitio rectè perficeretur abſque iis, quæ à nobis inventa ſunt. Quartus liber tradit quot modis Conorum ſectiones inter ſeſe, & circuli circumferentiæ occurrere poſſint, & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum eſt; coni ſectio, & circuli circumferentia, & oppoſitæ ſectiones ad quot puncta oppoſitis ſectionibus occurrant. Reliqui autem 4 Libri ad abundantiorem ſcientiam pertinent. Etenim Quintus de Minimis & Maximis magna ex parte agit. Sextus de Æqualibus, & ſimilibus Coni ſectionibus. Septimus continet Theoremata, quæ determinandi vim habent. Octavus Problemata Conica determinata. At verò omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi ſui ſententia judicare. Vale.

LIB. I.

Prop. I.

Rectæ lineæ (A G) quæ à vertice (A) ſuperficiei Conicæ ad puncta (G) quæ in ſuperficie ſunt, ducuntur, in ipſa ſuperficie erunt. Fig. 5.

Cùm enim puncta A G ſint in ſuperficie conica, (*a*) recta ipſam deſcribens per puncta A, G tranſibit. Itaque liquet tunc rectam A G in ſuperficie conica exiſtere. a 1. *def.* 1 *hujus.*

Coroll. 1. Hinc conſtat, ſi à vertice ad aliquod punctum eorum quæ ſunt intra ſuperficiem, recta linea ducatur, intra, & ſi ad aliquod eorum quæ ſunt extra, extra ſuperficiem cadere.

Cor.

Coroll. 2. Rectæ à vertice ad puncta, quæ in superficie, ductæ, basis circumferentiæ occurrent, si opus est, protractæ.

Prop. II.

Fig. 6. Si in alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, sumantur duo puncta (D,E), & quæ puncta conjungit recta linea (D E) ad verticem non pertineat, intra superficiem cadit, quæ verò est in directam (E F) cadet extrà.

a 2 *Cor.* 1. 2 *hujus.* b 2. 3. c 2. 11. d 10. 3. e 1. *Cor.* 1 *hujus.*

Conjungantur rectæ A D, A E [a] occurrentes basis circumferentiæ punctis B,G, quæ connectat recta B G; hæc [b] intra circulum cadet, ac proinde intra superficiem conicam; ergo [c] planum trianguli A B G est intra superficiem conicam; ergo recta D E in ipso sita [c] est intra eandem. Porro recta A F [d] cadit in B G protractam extra circulum; & [e] proinde extra superficiem conicam; ergo punctum F est etiam extra ipsam.

Prop. III.

Fig. 7. Si conus (A B C) plano per verticem (A) secetur, sectio (A B C) triangulum erit.

a 1. *hujus.* b 3. 11. c 20. *def.* 1.

Nam A B & A C [a] rectæ sunt: item B C [b] est recta. [c] ergo ABC est triangulum.

Prop. IV.

Fig. 8. Si alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, secetur plano (D H E) æquidistante circulo (B K C), per quem fertur recta linea superficiem describens, planum (D H E) quod superficie concluditur, circulus erit, habens centrum (G) in axe (A F); figura verò (ADE) contenta circulo (D H E) & ea parte superficiei conicæ, quæ inter secans planum (D H E), & verticem (A) interjicitur, conus erit.

a 3. *hujus.* b 3. 11. c 2. *Cor.* 1. *hujus.* d *hyp* & 16. 11. e 4. 6. f *hyp* & 15. *def.* 2. g 14. 5.

Planum per axem A F faciat [a] trigonum A B C; communisque sectio ejus cum plano D H E [b] sit recta D F. In sectione D H E sumatur punctum utcunque H, ducaturque recta A H K [c] circumferentiæ basis occurrens in K, & connectantur G H, F K. Atq; ob D E, B C, ac G H, F K [d] parallelas, erit F B. G D [e] :: (A F. A G [e] ::) F K. G H. unde cùm F B F K [f] æquentur. [g] erunt etiam G D, G H æquales. idémque de reliquis à G ad sectionem ductis rectis ostendi poterit. Unde de sectio D H E [h] circulus erit, cujus centrum G, & [k] proinde figura A D E conus. h 15. def. 1. k 4 def. hujus.

Coroll. 1. Recta D E est diameter circuli D H E. l

2. Conus A D E [m] similis est cono A B C (ob A G. G D :: A F. F B.) m 24 def. 11.

Prop. V.

Si conus Scalenus secetur plano (A B C) per axem ad rectos angulos ipsi basi (B C), secetúrque altero plano (G H K) ad triangulum per axem recto, quod ex parte verticis (A) abscindat triangulum (A G K) simile (ei A B C) quod per axem, * subcontrariè vero positam; sectio (G H K) circulus erit. Vocetur autem Sectio subcontraria. Fig. 9.

In sectione G H K accipiatur punctum H utcunque; à quo [a] ducatur H F recta plano A B C, quæ [b] in rectam G K cadet, & quidem [c] perpendiculariter, puta in F. per F ducatur D E ad B C parallela; estque planum per D E, H F [d] parallelum basi B C; [e] efficitque sectionem D H E circulum, in quo F D × F E [f] = F Hq. Quia verò ang. A D E [g] = (ang. A B C [h] =) ang. A K G, & ang. K F E [k] = G F D; æquiangula erunt trigona K F E, D F G: unde E F. F K [l] :: G F. F D. ergo F K × G F [m] = (E F × F D [n] =) H Fq. [o] quare sectio G H K est circulus. Q.E.D.

a 11. 11. b 38. 11. c 3. def. 11. d 15. 11. e 4. hujus. f 35. 3. g 29. 1. h hyp. k 15. 1. l 4. 6. m 16. 6. n prius. o conv. 35. 3.

Prop. VI.

Si conus plano (A B C) per axem secetur, sumatur autem aliquod punctum (D) in superficie coni, quod non sit in latere trianguli per axem; & ab ipso ducatur recta linea (D E) æquidistans cuidam rectæ (M N), quæ perpendicularis est à circumferentia circuli (B M C) ad trianguli basin (B C); triangulo per axem occurret, & ulteriùs producta usque ad alteram superficiei partem, bifariam ab ipso triangulo secabitur. Fig. 10.

Recta A D protracta circumferentiæ basis occurrat puncto K; per quod ducatur K H L ad M N parallela; [a] adeóque ad D E. [b] ergo D E producta occurret rectæ A H, puta in F. Producatur D F ad superficiem G. a 30. 1. b

Liquet rectam A L, (cùm sit in plano A D E, vel A K L, & in superficie coni) ipsi D F occurrere in G. & fore K H. D F :: (A H. A F ::) H L. F G. unde quum sit K H = H L, erit D F = F G. *Q. E. D.*

Propos. VII.

Fig. 11. Si conus plano (A B C) per axem secetur, secetur autem & altero plano (D F E) secanti planum basis coni, secundùm rectam lineam (D E) quæ sit perpendicularis, vel ad (B C) basim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipsi constituitur: lineæ (H K) quæ à sectione (D F E), in superficie coni à plano facta, ducuntur æquidistantes ei (D E), quæ est perpendicularis ad trianguli basim (B C), in communem sectionem (F G) plani secantis, & trianguli per axem, cadent. Et siquidem conus sit rectus linea (D E), quæ est in basi, perpendicularis erit ad (F G) communem sectionem plani secantis, & trianguli per axem, si verò Scalenus, non semper, nisi cùm planum (A B C), quod per axem ducitur ad basim coni (B D C E) rectum fuerit.

Quòd H K plano A B C, & proinde ejus cum plano D F E communi sectioni F G occurrat, inque ipso occursu bisecetur, liquet ex præcedenti. Porro, si conus rectus sit, erit circulus B C plano A B C
a 4. *def.* 11. rectus; [a] ac ideo D E plano A B C recta; & propterea D E ad F G perpendicularis. Idem discursus valet, si trigonum A B C circulo B C utcunque rectum fuerit; sin hoc non fuerit, non erit D E ad F G per-
b 4. 11. pendicularis: Nam si D E utrique B C, F G perpendicularis sit, [b] erit
d 18. 11. eadem D E recta plano A B C; [d] unde circulus B C trigono A B C rectus erit, contra Hypoth.

Coroll. Hinc F G diameter est sectionis D F E, utpote quæ rectas ad D E parallelas bisecat.

Prop. VIII.

Fig. 12. Si conus secetur plano (A B C) per axem, & secetur altero plano (D F E) secanti basim coni (B D C) secundùm rectam lineam (D E), quæ ad (B C) basim trianguli per axem sit perpendicularis; diameter autem (F G) sectionis factæ in superficie, vel æquidistet uni (A C) laterum trianguli, vel cùm ipso extra coni verticem conveniat; & producantur in infinitum tum superficies coni (A B C) tum planum secans (D F E); sectio quoque ipsa (D F E) in infinitum augebitur; & ex diametro (F G) sectionis ad verticem cuilibet lineæ datæ æqualem (CFH) abscindet linea (M N H), quæ quidem à coni sectione (MFN) ei (D E) quæ est in basi, æquidistans ducta fuerit.

Nam

Nam quia diameter F G cum latere A C ad partes X [a] nunquam conveniet, si ipsa ad [b] libitum producatur, puta ad H, & per H ducantur K L ad B C, & M N ad D E parallelæ, [c] planum per K L, M N plano B D C E parallelum erit, inque superficie coni producta [d] circulum efficiet, ad quem si protrahatur planum D F E, liquet [d] augeri conum, & sectionem D F E &c.

a Hypoth.
b 3. 1.
c 15. 11.
d 4. hujus.

Prop. IX.

Si conus (A B C) secetur plano (D K E) convenienti cum utroque latere (A B, A C) trianguli per axem, quod neque basi (B C) æquidistet, nec subcontrariè ponatur, sectio (D K E) circulus non erit. Fig. 13. 14.

Si fieri potest, sit D K E circulus; & ab H basis centro ad F G (communem sectionem basis cum plano secanti) ducatur perpendicularis H G, per quam & axem transeat trigonum A B C. Dein sumatur quodvis punctum K in linea D K E, per quod ducatur K M L ad F G parallela, occurrens rectæ D E G (communi sectioni plani secantis, & trigoni A B C) in M. [a] unde K M = M L.

Porrò, per M ducatur N X ad B G parallela. & quia planum per N X, K L, [b] plano B C parallelum est, [*] ideóque circulum efficit. In quo K L [b] diametro N X [c] est perpendicularis, erit N M × M X [d] = (K Mq ([d] =) D M × M E. ([e] ob D K E circulum). [f] ergo N M. B M :: M E. M X. [g] ergo trigona N M D. E M X similia sunt: & ang. M E X = (ang. D N M [h] =) ang. A B C. Itaque sectio est [k] subcontraria, contra Hyp. ergo sectio D K E non est circulus. *Q. E. D.*

a 6. hujus.
b 15. 11.
* 14. hujus.
c 10. 11. (6.
d cor. 13. & 16.
e hyp.
f 17. 6. g 6. 6.
h 29. 1.
k 5. hujus.

Prop. X.

Si in coni sectione (F E D) sumantur duo puncta (G, H); recta linea (G H), quæ ejusmodi puncta conjungit, intra sectionem cadet, & quæ in directum ipsi constituitur, cadet extra. Fig. 15.

Nam quia puncta G H [a] sunt extra latus trigoni (A B C) per axem ducti, recta G H non pertinget ad verticem A; [b] ergo hæc intra conum cadet, ac proinde intra sectionem; sin producatur extra conum cadet, ac proinde extra sectionem.

a hyp.
b 2. hujus.

Prop. XI.

Si conus plano (A B C) per axem secetur; secetur autem & altero Fig. 16.

plano (DFE), ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam (DE), quæ ad baſim (BC) trianguli per axem ſit perpendicularis, & ſit ſectionis diameter (FG) uni (AC) laterum trianguli per axem æquidiſtans; recta linea (KL) quæ à ſectione ducitur æquidiſtans ſectioni (DE) plani ſecantis, & baſis coni, uſque ad ſectionis diametrum (FG), poterit ſpatium æquale contento, lineâ (FL), quæ ex diametro abſciſſa inter ipſam (KL) & ſectionis verticem (F) interjicitur, & alia quadam (FH) quæ ad lineam (AF) inter coni angulum (A) & ſectionis verticem (F) interjectam, eam proportionem habeat, quam quadratum baſis (BC) trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus trianguli lateribus (AB, AC) continetur. Dicatur autem hujuſmodi ſectio PARABOLE.

a 15. 11. Per L ducatur MN ad BC parallela; éſtque ſectio plani per MN,
b 4. *hujus*. KL ducti (ad BDCE [a] paralleli) [b] circulus; [c] & KL ad MN per-
c 10. 11. pendicularis; [d] unde KLq = ML × LN. Porro FL × HF. FL ×
d *cor*. 13. & 16. 6. e 1. 6. FA [e] :: (HF. FA [f] :: BCq. AC × AB [g] = BC. AC. [h] (ML.
f *hypoth*. FL) + BC. AB [h] (ML. FM, [k] vel LN. FA) = ML. FL +
g 23. 6. LN. FA [g] =) ML × LN. FL × FA. [l] ergo ML × LN ([d] KLq)
h 4. 6. = FL × HF. *Q. E. D.*
k 2. 6. 19. 5.

Propoſ. XII.

Fig. 17. Si conus plano (ABC) per axem ſecetur; ſecetur autem & altero plano (DFE) ſecanti baſim coni ſecundùm rectam lineam (DE) quæ ad baſim (BC) trianguli per axem ſit perpendicularis; & ſectionis diameter (FG) producta, cum uno latere (AC) trianguli per axem extra verticem coni conveniat in (H): recta linea (MN), quæ à ſectione ducitur æquidiſtans communi ſectioni (DE) plani ſecantis, & baſis coni uſque ad ſectionis diametrum, poterit ſpatium (FNXP) adjacens lineæ (FL), ad quam ea (FH), quæ in directum conſtituitur diametro ſectionis, ſubtenditúrque angulo (FAH) extra triangulum, eandem proportionem habet, quam quadratum lineæ (AK) quæ diametro (FG) æquidiſtans, ab vertice (A) ſectionis uſque ad trianguli baſim (BC) ducitur, ad rectangulum baſis partibus (BK, KC), quæ ab ea fiant, contentum, latitudinem habens lineam (FN), quæ ex diametro abſcinditur, inter ipſam (MN), & ſectionis verticem (F) interjectam, excedénſque figurâ (FNOL) ſimili, & ſimiliter poſitâ ei, quæ continetur lineâ (HF) extra angulum ſubtenſâ, & ea (FL), juxta quam poſſunt, quæ ad diametrum (FG) applicantur. Vocetur autem hujuſmodi ſectio *Hyperbole*.

Per

Per N ducatur RS ad BC parallela. Estque FN × HN. FN × NX[a] :: (HN. NX)[b] :: HF. FL[c] :: AKq. BK × KC[d] = AK. BK ([b]FG. GB, [b]vel FN. NR) + AK. KC. ([b]AG. GC. [b]vel HN. NS.) = FN. NR + HN. NS[d] =) FN × HN. NR × NS. ergo FN × NX[e] = (NR × NS[f] =) NMq. *Q. E. D.*

a 1. 6.
b 4. 6.
c *hyp.*
d 23. 6.
e 9. 5.
f 4. *hujus*, & *cor.* 13, *ac* 16. 6.

Prop. XIII.

Fig. 18.

Si conus plano (ABC) per axem secetur, & secetur altero plano (ELD) conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque basi coni æquidistet, nec subcontrariè ponatur; planum autem, in quo est coni basis (BC), & secans planum conveniant secundùm rectam lineam (FG) quæ sit perpendicularis vel ad basim (BC) trianguli per axem, vel ad eam (BCK), quæ in directum ipsi constituitur; recta linea (LM) quæ à coni sectione ducitur, æquidistans planorum communi sectioni (FG) usque ad sectionis diametrum (ED) poterit spatium (EOXM) adjacens lineæ (EH), ad quam sectionis diameter (ED) eam proportionem habeat quam quadratum lineæ (AK) diametro (ED) æquidistantis à coni vertice (A) usque ad trianguli basin (BC) ductæ, habet ad rectangulum contentum basis partibus (BK, CK), quæ inter ipsam (AK) & rectas trianguli lineas (AB, AC) interjiciuntur; latitudinem habens lineam (EM), quæ ex diametro (ED) ab ipsa abscinditur ad sectionis verticem (E): deficiensque figurâ (OHNX) * simili, & similiter positâ ei, quæ diametro (ED) & lineâ (EH) juxta quam possunt, continetur. Dicatur autem hujusmodi sectio *Ellipsis*.

Per M ducatur PMR ad BC parallela. Estque EM ×. DM. EM × MX[a] :: (DM. MX[b] :: DE. EH[c] :: AKq. BK × KC[d] = AK. BK ([b]EG. GB. vel [b]EM. MP) + AK. KC. ([b]DG. GC. [b]vel DM. MR) = EM. MP + DM. MR[d] =) EM × DM. MP × MR. ergo EM × MX[e] = (MP × MR[f] =) MLq. *Q. E. D.*

a 1. 6.
b 4. 6.
c *hyp.*
d 23. 6.
e 9. 5.
f 4. *hujus*. & *cor.* 13. & 16 6.

Prop. XIV.

Fig. 19.

Si superficies (BCAXO), quæ sunt ad verticem (A), plano non per verticem secentur, erit in utraque superficierum sectio (DEF, & GHK) quæ vocatur Hyperbole. Et duarum sectionum eadem erit diameter (ME, HN), lineæ verò (EP, HR), juxta quas possunt ordinatæ ad diametrum, æquidistantes ei, quæ est in basi coni, inter se æquales erunt. Et figuræ transversum latus (E H) utrique commune; quæ scilicet inter sectionum vertices interjicitur. Vocentur autem hujusmodi sectiones *Oppositæ*.

Quòd utraque sectio D E F, G H K, sit Hyperbole, liquet ex 12mâ hujus. Porrò ductâ per A rectâ S A T ad M N parallelâ, est
a 4. 6. A S. B S [a] :: A T. T O. & A S. S C [b] :: A T. T X. Unde A Sq.
b *hyp.* B S. × S C ([b]hoc est H E. E P) :: A Tq. T O × T X ([b]hoc est E H.
c 9. 5. H R), [c] quare E P = H R.

Prop. XV.

Fig. 20. Si in Ellipsi à puncto (C) quod diametrum (A B) bifariam dividit,
Fig. 21. ordinatim ducta linea (D C E) ex utraque parte ad sectionem producatur, & fiat ut producta (D E) ad diametrum (A B), ita diameter (A B) ad aliam lineam (D F): Recta linea (G H) quæ à sectione ducitur ad productam (D E) diametro (A B) æquidistans, poterit spatium (D L) adjacens tertiæ proportionali (D F), latitudinem habens lineam, (D H) quæ inter ipsam & sectionem interjicitur, deficiénsque figurâ (M K) simili ei, quæ continetur lineâ (D E) ad quam ducuntur, & eâ (D F) juxta quam possunt. Quòd si ulterius producatur (G H) ad alteram sectionis partem (V), bifariam secabitur ab ea (D E), ad quam applicata fuerit.

Sit A N linea, juxta quam possunt applicatæ ad A B: junctâque
a 13. *hujus.* B N, per G ducatur G X ad D E parallela, pérque C & X ipsæ X O,
b 4. 6. C P ad A N parallelæ; & per N, O, P ipsi A B parallelæ N R, O S,
c *hyp.* P T. Liquet igitur esse D Cq [a] = rectang. A P. & G Xq [a] = re-
d 1. 6. ctang. A O. Et ob A N. C P. (A T) [b] :: (A B. C B [c] :: 2. 1.) erit
e 2. *ax.* 1. T N = A T. [d] unde rectang. A P = N P. [d] & rectang. X T [d] =
f 43. 1. Y I [e] = N S (ob T O [f] = R O). ergo rectang. A O. ([a] G Xq) +
g 5. 2. O P [e] = (rectang. N P [d] = A P [a] = C Dq [g] =) H Cq (G Xq) +
h 3. *ax.* 1. H E × H D. & proinde rectang. H E × H D [h] = rectang. O P. (P S
k 1. 6. × S O). Item H E × H D. H L × H D [k] :: (H E. H L [l] :: D E. D F [m] ::
l 4. 6. D Eq. A Bq ([n] ob D E, A B, D F ∺) [o] :: C Dq ([a] P C × C A, vel
m *cor.* 20. 6. P C × C B). C Bq [k] :: P C. C B [k] :: P S. S O [p] ::) P S × S O. [h](H E
n *hyp.* × H D). S Oq. ergo H L × H D q = (S O q [r] =) H Gq. Quod erat
o. 15. 5. primum. Porrò, ductis V Q ad G X, & Q Z ad A N parallelis, propter
p 23. 6. A X × X O [a] = (G Xq [r] = V Qq [a] =) A Q × Q Z [s], erit A Q. A X [s] ::
q 9. 5. (X O. Q Z [l] ::) X B. Q B. ergo dividendo X Q. X A :: X Q. Q B.
r 34. 1.
s 14. 6.

quare

quare X A = Q B. item C A [v] = C B. [x] ergo C X = C Q; [t] hoc est H G = H V. Quod erat secundum. — t 9. 5. v hyp. x 3. ax. 1.

Coroll. Itaque D E est diameter altera priori A B conjugata.

Schol.

Breviùs ita Calculum instituemus.

Sint $\begin{cases} BC, \text{ vel } CA = d. \\ AN = r. \\ CX, \text{ vel } HG = a. \end{cases}$ Fig. 22.

Est igitur $\begin{cases} BX = d + a. \\ AX = d - a. \end{cases}$

Est autem $2d.\, r :: d + a.\, \frac{r}{2} + \frac{ra}{2d}$ quare $d - a$ (A X) $\times : \frac{r}{2} + \frac{ra}{2d}$, hoc est $\frac{dr}{2} - \frac{raa}{2d}$ = G Xq vel H Cq. Item quia $2d.\, r$ (B A. AN) :: d. (B C). $\frac{r}{2}$. erit d (B C) $\times \frac{r}{2}$, h. e. $\frac{dr}{2}$ = DCq. Ergo DCq — HCq (h. e. H E $\times$ H D) = $\frac{raa}{2d}$. Porrò quia D Cq. B Cq (hoc est $\frac{dr}{2}$. dd) :: D Eq. A Bq :: D E. D F (ob D E, A B, DF $\div\!\!\div$) :: H E. H L :: H E $\times$ H D. $\left(\frac{raa}{2d}\right)$. H L $\times$ H D :: $\frac{dr}{2}$. dd :: $\frac{r}{2}$. d :: $\frac{raa}{2d}$. aa. Erit H L $\times$ H D = aa = H Gq.

Simili discursu erit H L $\times$ H D = H Vq. unde H G = H V.

Prop. XVI.

Si per punctum (C), quod transversum latus (AB) oppositarum sectionum bifariam dividit, recta quædam linea (C D) ordinatim applicetur, ipsarum diameter erit, priori diametro (A B) conjugata. Fig. 23.

Recta quæpiam G H ad A B parallela sectionibus occurrat punctis G, H, à quibus ordinatim applicentur G K, H L; sintque A E. B F recta sectionum latera; & junctæ A F, B E producantur; ducantúrque K M, L N ad A E, B F parallelæ. Estque A K $\times$ K M [a] = (G Kq [b] = H Lq [a] =) B L $\times$ L N. Item A K $\times$ K M. A K $\times$ K B [c] :: (K M. K B [d] :: A E. A B [e] :: B F. B A [d] :: L N. L A [c] ::) B L $\times$ L N. B L $\times$ L A. ergo (ob A K $\times$ K M [f] = B L $\times$ L N) [g] erit A K $\times$ K B = B L $\times$ L A. [h] quare K B. B L :: L A. A K. & componendo

a 13. hujus.
b 34. 1.
c 1. 6.
d 4. 6.
e 14. hujus. & 7. (5.)
f prius.
g 14. 5.
h 14. 6.

KL

k 9. 5. l *hyp.* & 3. *ax.* m 34. 1. n 12. *def. hujus.*

$KL.BL :: LK.AK.$ [k] ergo $BL = AK$. & [l] proinde $CL = CK$; [m] hoc est $XH = XG$. [n] ergo CD est diameter, quippe quæ ipsam GH, & similiter omnes ad AB parallelas bisecat.

Coroll. 1. Si $GK = HL$, erit $AK = BL$; & $BK = AL$. ac inde $BK \times AK = AL \times BL$.

2. Viciſſim, ſi $AK = BL$, vel $BK = AL$. erit $GK = HL$. & $BK \times AK = AL \times BL$.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

Fig. 24. 25. 1. Punctum (C), quod hyperbolæ, & ellipſis diametrum (AB) biſariam dividit, Centrum ſectionis dicatur.

2. Et quæ à centro (C) ad ſectionem perducitur (CB) vocetur ex centro ſectionis.

3. Similiter & punctum (C) quod tranſverſum latus (AB) oppoſitarum ſectionum biſariam dividit, Centrum vocetur.

4. Quæ autem (DE) à centro ducitur æquidiſtans ei (GK), quæ ordinatim applicata eſt, mediámque proportionem habet inter latera figuræ (AB, BF) & biſariam ſecatur à centro (C), ſecunda diameter appellatur.

Brevitatis cauſâ, Tranſverſum latus, Rectum latus, & ſecundam diametrum elementis T, R, M deſignabimus: unde

* *Cor.* 20. 6. *Coroll.* * $Tq.Mq :: T.R.$ (ob $T, M, R \div\div$.)
& $CDq = \frac{1}{4} DEq = \frac{Mq}{4} = \frac{1}{4} TR$.

Viam jam munit ad ſingularum ſectionum proprietates primas, & præcipuas eliciendas.

Prop. XVII.

Fig. 26. Si in coni ſectione (CAD), ab ipſius vertice (A) ducatur recta linea (AC) æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt, extra ſectionem cadet.

a 7. *hujus.* b 10. *hujus.* Nam ſi dicatur intra cadere, [a] ergo biſecabitur à diametro; quod fieri nequit, [b] cùm producta extra ſectionem cadat.

Prop.

Prop. XVIII.

Si recta linea (A F B) sectioni occurrens (in F), productáque in utramque partem, extra sectionem cadat; sumatur autem aliquod punctum (C) intra sectionem, & per ipsam ei (A B), quæ sectioni occurrit, ducatur æquidistans (C D); ducta linea (C D), & producta, ex utraque parte sectioni occurret. Fig. 27.

Sumatur in sectione punctum quodvis E, & connectatur E F; hæc ipsi C D occurret; & siquidem inter puncta E F, manifestum est ipsam sectioni occurrere; sin extra, tum priùs cum sectione conveniet. Simili discursu ad partes A F sectioni occurret.

Prop. XIX.

In omni sectione coni recta linea (B C) quæ à diametro (A B) ducitur, ordinatim applicatæ æquidistans, cum sectione conveniet. Fig. 28.

Sumatur aliquod punctum D in sectione, jungatúrque A D; hæc occurret ordinatim applicatæ ad A, ergo ad illam parallelæ A C; & siquidem inter puncta A D, tum B C [a] protracta sectioni occurret, [a] 10. *hujus.* sin extra, priùs.

Prop. XX.

Si in Parabola duæ rectæ lineæ C E, D F à sectione ad diametrum (A B) ordinatim applicentur, ut earum quadrata inter se, ita erunt lineæ (A E, A F) quæ ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur. Fig. 29.

Sit A G latus rectum. itaque C Eq [a] = A E * A G. [a] & D Fq = A F * A G. ergo C Eq. D Fq [b] : : (A E * A G. A F * A G [c] : :) A E. A F. *Q. E. D* [a] 11. *hujus.* [b] 7. 5. [c] 3. 6.

Conversim. Si sit C Eq. D Fq : : A E. A F, erunt puncta C, D in parabola.

Coroll. D F ⊏ C E.

Hæc prima & præcipua est parabolæ proprietas, ex ejus definitione emergens.

Prop. XXI.

Si in hyperbola, vel ellipsi vel circuli circumferentia, rectæ lineæ (D E, F G) ordinatim ad diametrum (A B) applicentur, erunt quadrata Fig. 30.

drata earum ad ſpatia contenta lineis (E B, E A, & G B, G A) quæ inter ipſas, & vertices (A, B) tranſverſi lateris figuræ interjiciuntur, ut figuræ rectum latus (A C) ad tranſverſum (A B); inter ſe verò ut ſpatia, quæ interjectis, ut diximus, lineis continentur.

a 4. 6. b 1. 6. c 12. hujus. d 11. 5. Per E, & G ducantur E H, G K ad A C parallelæ, occurrentes productæ B C in H, & K. Eſtque C A. A B [a] : : (H E. E B [b] : :) H E × E A ([c] hoc eſt D Eq). E B × E A. Simili diſcurſu C A. A B : : F Gq. G B × G A. Itaque D Eq. E B × E A [d] : : F Gq. G B × G A. & viciſſim D Eq. F Gq : : E B × E A. G B × G A.

Coroll. In hyperb. F E ⊏ D E. (in ellipſi uſque ad conjugatam ipſi A B diametrum; nam inde incipiunt ordinatim applicatæ decreſcere.) *Sch.*

Converſim; ſi fuerit D Eq. E B × E A : : R T. vel D Eq. F Gq : : E B × E A. G B × G A. erunt puncta D, F in aliqua harum ſectionum.

Hæc prima eſt & præcipua harum ſectionum proprietas, ex ipſarum definitione reſultans.

Coroll. D Eq. E B × B A : : Tq. Mq.

Viam jam ſternit ad ſectionum tangentes indagandas.

Prop. XXII.

Fig. 31. 32. Si Parabolen, vel hyperbolen recta linea (C D) in duobus punctis (C, D) ſecet, non conveniens cum ſectionis diametro (A B) intra ſectionem, producta cum eâdem diametro extra ſectionem conveniet.

a cor. 20. & b cor. 21. hujus. Ordinatim applicentur C E, D B: ſunt hæ inæquales, & [a] minor D B, [b] ergo juncta C D producta cum E A conveniet extra ſectionem ad partes A. *Q. E. D.*

Prop. XXIII.

*id eſt, conjugatas. Si ellipſin ſecet recta linea (E F) inter duas *diametros (A B, C D) producta, producta cum utraque earum conveniet, extra ſectionem.

Fig. 33. a 21. hujus. b 5. 2. c 14. 5. Ordinatim applicentur E G, F H. atque ob E Gq. F Hq [a] : : B G × G A. B H × H A, [b] & B G × G A ⊏ B H × H A (eſt enim punctum G propius centro M, quàm punctum H); [c] erit E Gq ⊏ F Hq. & E G ⊏ F H. ergo E F producta cum diametro B A conveniet, ad partes

partes A. Simili discursu eadem F E diametro D C occurret ad partes C.

Coroll. E G ⊏ F H.

Prop. XXIV.

Si parabolæ, vel hyperbolæ recta linea (C E) in uno puncto (D) occurrens, & producta ex utrâque parte, extra sectionem cadat, cum diametro (A B) conveniet. Fig. 34.

Sumpto quolibet in sectione puncto F, jungatur F D; [a] hæc diametro occurret; puta in A; hanc verò decussat ipsa C D (in D). ergo C D producta diametro occurret; inter A scilicet & sectionem. a 22. hujus.

Prop. XXV.

Si ellipsi recta linea (E F) occurrens (in G), inter duas diametros (A B, C D) & producta ex utrâque parte cadat extra sectionem, cum utrâque diametro conveniet. Fig. 35.

Ordinatim applicetur G K; hæc diametro A B est parallela: ergo E F cum A B conveniet. Simili discursu, F E cum C D conveniet.

Prop. XXVI.

Si in parabola, vel hyperbola ducatur recta linea (C D) sectionis diametro (A B) æquidistans, in uno tantùm puncto (E) cum sectione conveniet. Fig. 36.

Quod conveniet C D cum sectione, patet, (quoniam distantia parallelarum C D, A B est finita, sectio autem in infinitum potest augeri; adeóque ducta aliqua ab A B ordinatim applicata ad sectionem, excedet istam distantiam.) Conveniat in E; & ordinatim applicetur E F: ergo cùm omnes ordinatim applicatæ ad partes D [a] majores sint quàm E F, ad partes verò C minores, liquet C D nusquam convenire cum sectione, præterquam in E. a cor. 20. & cor. 21. hujus.

Prop. XXVII.

Si parabolæ diametrum (A B) secet recta linea (C D), producta in utramque partem cum sectione conveniet. Fig. 37.

Sit A E ordinatim applicatis parallela; si C D huic parallela sit, liquet

D

a 19. *hujus.* [a] liquet ipſam utrinque ſectioni occurrere; ſin minùs, producta con-
b 17. *hujus.* veniet cum A E, puta in E, [b] ergò priùs cum ſectione, puta in G; or-
c 11. 6. dinatim igitur applicetur G F; [c] fiátque A F. A D :: AD. AB. [d] un-
d 19. 5. de F D. D B :: A D. A B. ductâ igitur B C ad G F parallela erit,
e 4. & 22. 6. F Dq. D Bq. ([e] hoc eſt G Fq. B Cq) [f] :: A Dq. A Bq [g] :: A F.
f 22. 6. A B. ergo cùm ſit G Fq. B C q :: A F. A B, [h] erit punctum C in ſe-
g *conſt. & cor.* 20. 6. ctione: quare C D utrinque ſectioni ocurrit.
h *conv.* 20. *hujus.*

Prop. XXVIII

Fig. 38. Si recta linea (C D) unam (A) oppoſitarum ſectionum contingat, ſumatur autem punctum (E) intra alteram ſectionem (B), & per ipſum linea (E F) contingenti æquidiſtans ducatur, producta ad utramque partem cum ſectione (B) conveniet.

Nam quia C D diametro occurrit, eidem occurret E F, puta in G.
Sit A H = B G, & per H ducatur H K ad C D vel E F parallela,
a 4. 6. ſectioni occurrens in K, & ordinatim applicetur K L, ſumatúrque
b *conſtr.* G M = H L; denique ducatur M N ad K L parallela. Eſtque H L.
c 14. 5. L K :: [a] G M. M N. ergo (ob H L [b] = G M) [c] erit L K = M N.
d *conſtr. & Sch.* 48. 1. [d] Item B L × A L = A M × B M. quare B L × A L. L Kq [e] :: A M
e 7. 5. × B M. M Nq. [f] unde punctum N erit in ſectione B. Simili argumen-
f 21. *hujus.* to ex altera parte occurret ipſa E F ſectioni.

Prop. XXIX.

Fig. 39. Si in oppoſitis ſectionibus recta linea (C D) per centrum (C) ducta occurrat uni ſectioni (A), ulteriùs producta alteram quoque (B) ſecabit.

a 21. *hujus.* Ad diametrum A B ordinatim applicetur D F, fiátque B G = AF,
b *conſtr & ſch.* 48. 1. & ordinatim ducatur G E, jungatúrque C E. éſtque B F × A F.
c 14. 5. D Fq [a] :: T. R [a] :: A G × B G. G Eq. ergo cùm [b] ſit B F × A F = A G
d *conſtr.* × B G. [c] erit D Fq = G Eq. & D F = G E. [d] Item C F = C G.
e 29. 1. & ang. F [e] = ang. G. [f] ergo ang. F C D = G C E: [g] quare linea
f 4. 1. D C E eſt una recta, ſectioni B occurrens in E.
g *Sch.* 15. 1.

Coroll. 1. D F = E G.
2. C D = C E; (ob trigona C F D, C G E ſimilia, & latera C F, C G æqualia.)

Prop.

Prop. XXX.

Si in ellipsi vel oppositis sectionibus ducatur recta linea D E, ad utrasque partes centri (C) sectioni occurrens, ad centrum (C) bifariam secabit. Fig. 40.

In oppositis sectionibus patet * ex præcedenti. In ellipsi verò ad diametrum A B ordinatim applicentur D F, E G. Et quoniam B F × F A. A G × G B [a] :: (D Fq. G Eq [b] ::) F Cq. G Cq. & permutando B F × F A. F Cq :: A G × G B. G Cq. & componendo A Cq. (B F [c] × F A + C Fq). F Cq :: B Cq. [c] (A G × G B + G Cq) G Cq. sitque A C [d] = B C. [e] erit F C = G C; & propterea C D [f] = C E.

Coroll. C G = C F, & G E [f] = D F; & G B [g] = F A. & B F [g] = A G. & B F × F A [h] = A G × G B.

* *cor. 2. præc.*
a 21. *hujus.*
b 4. 6. & 22. 6.
c 5. 2.
d *constr.* & 10. *def. hujus.*
e 14. 5.
f 4. 6.
g 3. *ax.* 1.
h *Sch.* 48. 1.

Prop. XXXI.

Si in transverso figuræ latere (A B) hyperbolæ, sumatur aliquod punctum (C) non minorem (C B) abscindens ad verticem sectionis, quàm sit dimidia transversi lateris (A B) figuræ, & ab ipso (C) recta linea (C D) sectioni occurrat, si producatur, intra sectionem ad sequentes ipsius partes (E) cadet. Fig. 41.

Sit primò A C = C B. & ordinatim applicentur D H, * F E G. Et quia C Gq. C Bq [a] $\sqsubset$ C Hq. C Bq. erit per conversam rationem C Gq. C Gq — C Bq $\sqsupset$ C Hq. C Hq — C Bq. & inversè C Gq — C Bq. C Gq $\sqsubset$ C Hq — C Bq. C Hq. & permutatim, C Gq — C Bq. [b] (A G × G B.) C Hq — C Bq [b] (A H × H B) $\sqsubset$ (C Gq. C Hq [c] ::) G Eq. H Dq). ergo cùm A G × G B. A H × H B [d] :: G Fq. H Dq. erit G Fq. H Dq [e] $\sqsubset$ G Eq. H Dq. [f] ergo G F $\sqsubset$ G E. ergo C D E intra sectionem cadit.

* utcunque hæc ad partes E.
a 8. 5.
b 6. 2.
c 4. & 22. 6.
d 21 *hujus.*
e 13. 5.
f 10. 5.

Quòd si ab aliquo puncto in A C (posito C centro) ad punctum D ducatur recta, hæc ipsam C D decussabit in D, adeóque magis intra sectionem cadet.

Coroll. Hinc, linea hyperbolem contingens, diametrum secat inter verticem, & centrum sectionis: unde multò magis

Linea quæ duobus punctis secat (vel quæ tangenti parallela esse poterit) diametro occurret inter verticem & centrum.

Prop. XXXII.

Fig. 42. Si per coni sectionis verticem (A) ducatur recta linea (A C) ordinatim applicatis æquidistans, sectionem continget, & in locum (CAG), qui inter coni sectionem & rectam lineam (A C) interjicitur, altera recta linea non cadat.

Fig. 43. 44. Si fieri potest, cadat A D, & à puncto D (utcunque sumpto in A D) ordinatim applicetur D G E. Sintque A F, B A latera figurarum. Jam in parabola fiat AF. AH :: D Eq. A Eq. & ducatur H K ad E D parallela, sectioni occurrens in L. Estque A F × A H [a] (L Hq). AHq [b] :: (A F. AH [c] :: D Eq. A Eq. [d] ::) K Hq. A Hq. [e] ergo L H = KH. [f] *Q. E. A.*

a 11. *hujus.*
b 1. 6.
c *constr.*
d 4. & 22. 6.
e 9. 5.
f 9. *ax.* 1.

In reliquis sectionibus, præter hæc, connexa B F producatur; & per E ducatur E M N ad A F parallela, fiatque A E × E N = D Eq; & juncta A N secet B M in X; ducantur X H ad A F, & H K ad A C parallelæ. Estque X H × A H [g] (L Hq). A Hq [b] :: (X H. A H [h] :: N E. E A [b] :: N E × E A [g] (D Eq). E Aq [d] ::) K H q. A Hq. ergo L Hq [f] = KHq. & L H = K H, pars toti æqualis. [f] *Q. E. A.*

g 12. *hujus.*
h 4. 6.

Cor. Si duæ sectiones sese contingant, quæ harum unam contingit recta, alteram quoque continget.

Prop. XXXIII.

Fig. 45. Si in parabola, sumatur aliquod punctum (C), à quo recta linea (CD) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur; & ei (E D) quæ ab ipsa ex diametro abscinditur ad verticem, æqualis (A E) ponatur in directum ab ejus extremitate (E): recta linea (A C), quæ à facto puncto (A) ducitur ad illud (C) qood sumptum fuerat, sectionem continget.

Sumpto uteunque puncto F in A C, ordinatim applicetur F B, sectioni occurrens in G. Et quoniam 2 A E × E B [a] ⊐ A Eq + E Bq; erit 4 A E × E B [b] ⊐ (A Eq + E Bq + 2 A E × EB [c] =) A Bq; [c] atqui 4 A E × E D. = A Dq. ergo 4 A E × E B. A Bq [d] ⊐ 4 A E × E D. A Dq. & permutando 4 A E × E B. 4 A E × E D ([e] hoc est, E B. E D, [f] vel GBq. C D q) ⊐ A Bq. A Dq. ([g] vel F Bq. C Dq) [h] ergo G B. C D ⊐ F B. C D. [k] quare G B ⊐ C D. unde punctum F est extra sectionem; idémque de reliquis rectæ

a *Not. infra.*
b 4. *ax.* 1.
c 4. 6.
d 13. 5.
e 1. 6.
f 20. *hujus.*
g 4. & 22. 6.
h 22. 6.
k 10. 5.

rectæ A C punctis simili discursu ostendetur. ergo recta A C F sectionem contingit. *Q. E. D.*

Not. 2 A E × E B ⊐ A Eq + E Bq. Nam A Eq + E Bq = 2 A E × E B + Quad: A E — E B ([z] hoc est + A Eq + E Bq — 2 A E × E B). *z cor. 7. 2.*

Prop. XXXIV.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum (C), ab eoque recta linea (C D) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur, & quam proportionem habent lineæ (BD, AD), interjectæ inter ordinatim applicatam (C D) & (A, B) terminos transversi lateris (A B) figuræ; eandem habeant inter se (B E, E A) partes lateris transversi, ita ut quæ sunt ad verticem partes sibi ipsis respondeant (B D. D A : : B E. E A); recta linea (E C) conjungens punctum (E) quod in transverso latere sumitur, & punctum (C) quod est in sectione, sectionem ipsam continget. Fig. 46. 47.

Sumpto utcunque puncto F in E F ordinatim applicetur F G, sectioni occurrens in H. & per A, B puncta ducantur A L, B K ad E F parallelæ, & protrahantur D C K, B C X, G C M. Estque B K. A N [a] :: (B D. D A [b] :: B E. E A [a] :: B C. C X [a] ::) B K. N X. [c] ergo N X = A N. quare N X × A N [d] ⊏ A O × O X. [e] ideóque N X. O X [f] (hoc est K B. M B) [e] ⊏ A O. A N unde K B × A N ⊏ M B × A O. [g] ergo K B × A N. C Eq ([h] hoc est B D × D A. D Eq.) ⊏ B M × A O. C Eq [h] (hoc est B G × G A. G E q.) & permutando B D × D A. B G × G A [k] (hoc est C Dq. H Gq) ⊏ D Eq. G Eq. [l] (C Dq. F Gq) [m] ergo C D. H G ⊏ C D. F G. [n] ergo H G ⊐ F G. quare punctum F extra sectionem existit. Quare E F sectionem contingit.

a 4. 6.
b hyp.
c 9. 5.
d 5. 2.
e Not. 2. infra.
f Not. 1.
g 8. 5.
h 3. Not.
k 21. hujus.
l 4, & 22. 6.
m 22. 6.
n 10. 5.

Notæ.

1. Quòd sit N X. O X :: K B. M B, sic patet: quoniam N O. K M [o] :: (O C. C M [o] ::) O X. M B, & permutatim N O. O X :: K M. M B. erit componendo N X. O X :: K B. M B. o 4. 6.

2. Quòd sit N X. O X ⊏ A O., A N, sic ostenditur. Sit R × S ⊏ X × Y. Dico R. X ⊏ Y. S. Sit enim R S = X Z. [p] ergo Z ⊏ Y. [q] ergo Z. S [r] (hoc est R. X) ⊏ Y. S. p *sch.* 43. 1. q 8. 5. r 17. 6.

3. Quòd sit K B × A N. C Eq :: B D × D A. D Eq, ita constabit: quoniam A N. C E [s] :: A D. D E. & C E. K B [s] :: D E. D B erit ex s 4. 6.

æquo

t 1. 6. æquo AN. KB t (ANq. AN × KB) :: AD. DB t (ADq. AD ×
u 4. & 22. 6. DB). u Item C Eq. ANq :: D Eq. ADq. ergo rursus ex æquo C Eq. AN × KB :: D Eq. AD × DB, ac inversè.

Coroll.

Hinc si $\frac{T \times AD}{T + 2AD} = AE$ in hyperbola, vel $\frac{T \times AD}{T - 2AD}$ in ellipse, erit EC tangens.

Prop. XXXV.

Fig. 48. Si parabolen recta linea (AC) contingat, conveniens cum diametro (AB) extra sectionem (in A), quæ (CB) à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abscindet ex diametro ad verticem sectionis lineam (BG) æqualem ei (GA), quæ inter ipsam & contingentem interjicitur; & inter locum, qui est inter contingentem, & sectionem, alia recta linea non cadet.

a 33. hujus. b 14. ax. 1. Si fieri potest, sint AG, GB inæquales; ipsique AG æqualis ponatur GE; & ordinatim applicetur EF. [a] ergo ducta AF sectionem continget, & rursus occurret ipsi AC. [b] *Q. E. A.*

Porro dic aliquam DC sectionem inter & AC cadere; fiátque GE = GD. & ordinatim applicetur EF. [a] ergo ducta DF tanget sectionem, ipsámque DC iterum decussabit. [b] *Q. E. A.*

Prop. XXXVI.

Fig. 49. 50. Si hyperbolen vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea (CD) conveniens cum transverso figuræ latere (BA), & à tactu recta linea (CE) ad diametrum (AB) ordinatim applicetur; erit ut linea (BD) quæ interjicitur inter contingentem, & terminum (B) transversi lateris ad (DA) interjectam inter eandem, & alterum lateris terminum (A), ita linea (BE), quæ est inter ordinatim applicatam (CE) & lateris terminum (B) ad eam (EA), quæ est inter eandem (CE) & alterum terminum (A), adeo ut continuatæ inter se sint, quæ sibi ipsis respondent (BD. DA :: BE. EA). Et in locum, qui inter contingentem, & sectionem coni interjicitur, altera recta linea non cadet.

a 34. hujus. b 14. ax. 1. Si enim non sit BD. BA :: BE. EA; sit BD. DA :: DG. GA. & ordinatim applicetur GF; [a] ergo ducta DF sectionem continget, iterúmque conveniet cum recta [b] DC. *Q. E. A.*

Quin-

Quinetiam si aliqua H C intercedat, fiat B H. H A :: B G. G A. & applicetur G F ordinatim: [a] itaque juncta H F sectionem continget, [b] ipsámq; D G bis decussabit. *Q. E. A.*

Cor. Hinc si C D tangat, erit in hyperbola $AG = \frac{T \times AD}{T - 2AD}$; in ellipse $AG = \frac{T \times AD}{T + 2AD}$.

Not. In hyperbola A G ⊏ A D: quia T — 2 A D ⊐ T.
In ellipse A G ⊐ A D, quia T + 2 A D ⊏ T.

Prop. XXXVII.

Si hyperbolen vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea (C D) contingens cum diametro (A B) conveniat, & à tactu (C) ad diametrum linea (C E) ordinatim applicetur; quæ (E F) interjicitur inter applicatam (C E) & sectionis centrum (F), unà cum interjecta (D F) inter contingentem (C D) & sectionis centrum (F); continebit rectangulum æquale quadrato lineæ F B, quæ est ex centro sectionis; sed unà cum ea (E D) quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, continebit spatium; quod ad quadratum lineæ applicatæ (C E), eandem proportionem habet, quam transversum figuræ latus ad rectum. Fig. 51, 52.

Nam A E. E B [a] :: A D. D B ergo componendo A E + E B. E B :: A D + D B. D B quare (in hyperbola) bipartiendo antecedentes, F E. E B :: F B. D B. & per conversam rationem, F E. F B :: F B. F D. [b] unde F E × F D = F Bq. *Q. E. D.*

Item, inversè F B [c] (A F) F E :: (F D. F B [d] ::) D B. (F B — F D). E B (F E — F B). ergo componendo. A E. F E :: D E. E B. ergo F E × D E [e] = A E × E B. quare F E × D E. C Eq [f] :: (A E × E B. C Eq [g] ::) T.R. *Q. E. D.*

In Ellipsi verò & circulo, ob A E + E B. E B :: A D + D B. D B. erit quoque (bipartiendo antecedentes,) F B. E B :: F D. D B. & per conversam rationem F B. F E :: F D. F B. unde F E × F D [h] = F Bq. hoc est D E × F E + F Eq [k] = (F Bq =) A E × E B + F Eq [m] ergo D E × F E = A E × E B. & D E × F E. C Eq [n] :: (A E × E B. C Eq [o] ::) T.R.

a 36. hujus.
b 17. 6.
c hyp.
d 19. 5.
e 16. 6.
f 7. 5.
g 21. hujus.
h 17. 6.
k 3. 2.
l 5. 2.
m 3. ax. 1.
n 7. 5.
o 21. hujus.

Coroll. F E, F B, F D sunt ∸∸.

$$\left\{\begin{array}{l} FE.\ EB :: FB.\ DB. \\ FB.\ BE :: FD.\ DB. \\ EB.\ FD :: BE.\ DB. \end{array}\right.$$

Hinc

☞ Hinc methodus ex dato puncto in diametro, vel sectione contingentem ducendi.

Conversim: si FE × FD = FBq: vel si DE × FE. CEq :: T,R. erit recta CD tangens sectionis.

Prop. XXXVIII.

Fig. 53. Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam recta linea
54. (FL) contingens in (E), cum secundâ diametro (CD) conveniat, &
55. à tactu (E) ad diametrum (CD) applicetur linea (EH) æquidistans
56. alteri diametro (AB); quæ (HG) interjicitur inter applicatam (EH) & sectionis centrum (G) unà cum interjecta (FG) inter contingentem, & sectionis centrum, continebit rectangulum, æquale quadrato quod fit ex (GC) dimidia secundæ diametri: sed unà cum ea (HF) quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, spatium continebit, quod ad quadratum applicatæ (EH) eam proportionem habet, quam figuræ rectum latus ad transversum.

a 23. 6. b 34. 1 & 4. 6. c 21. *hujus.* d *cor. def. ad* 16. *hujus.* e *hyp.* d 15. 5. e 37. *hujus.* f 14. 5.

Ordinatim applicetur EM. Estque GM × GL. HG × FG[a] = GM. HG + GL. FG[b] = GM. EM + LM. EM[a] = GM × LM. EMq[c] = T. R[d] :: Tq. Mq ([e] ABq. CDq[d] ::) AGq. CGq. ergo cùm AGq[e] = GM × GL[f]. erit CGq = HG × FG. *Q.E.D.*

Porro, inversè R. T = (HG. GM + FG. GL[b] = HG. HE + FH. HE[a] =) HG × FH. HEq.

Iisdem positis ostendendum est. Ut linea (CF), quæ inter tangentem, & terminum secundæ diametri ad partes applicatæ interjicitur, ad eam (FD), quæ inter tangentem, & alterum terminum secundæ diametri, ita esse lineam (DH), quæ est inter alterum terminum, & applicatam, ad eam (CH) quæ inter alterum terminum & applicatam.

g *priùs.* h *hyp. & sch.* 48. 2. k 14. 6.

Nam ob FG × HG[g] = (CGq[h] =) CG × GD, [k] erit FG. GD :: CG. GH. & per conversam rationem GF. FD :: GC. CH. & duplicando antecedentes, CF + FD. FD :: DC. CH. & dividendo CF. FD :: DH. CH. *Q. E. D.*

Coroll. 1. Si FG × GH = GCq. vel FH × HG. HE :: R. T. erit EF tangens.

2. FG × GH = $\frac{1}{4}$ TR.

Prop.

Prop. XXXIX.

Si hperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (C D) cum diametro (A B) conveniat (in D); & à tactu (C) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (C E); ſumptâ quâvis lineâ ex duabus, quarum altera (E F) interjicitur inter applicatam (C E), & ſectionis centrum (F); altera (E D) inter applicatam, & contingentem (C D); habebit ad eam applicata (C E) proportionem compoſitam ex proportione, quam habet altera dictarum linearum (E F, E D) ad applicatam (C E), & ex proportione, quam rectum figuræ latus habet ad tranſverſum. Fig. 57. 58.

Sit $EF.\,CE :: G.\,ED.$ [a] vel $EF \times ED = CE \times G.$ ergo $CEq.$ a 16. 6.
$CE \times G$ [b] $(CE.\,G)$ [c] $:: (CEq.\,EF \times ED ::$ [d]$)\ R.\,T.$ atqui $CE.$ b 1. 6.
ED [c] $= CE.\,G + G.\,ED$ ([f] $+ EF.\,CE.$) ergo $CE.\,ED =$ c 7. 5.
$R.\,T. + EF.\,CE.$ *Q. E. D.* d 37. *hujus.*
e 5. *def.* 6.
f *conſtr.*

Prop. XL.

Si hyperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam recta linea (A H) contingens (in A) conveniat cum ſecunda diametro (D E), & à tactu (A) ad eandem diametrum (D E) applicetur linea (A G) æquidiſtans alteri diametro (B C); ſumptâ quâlibet lineâ ex duabus; quarum una (G F) inter applicatam (A G) & ſectionis centrum (F) interjicitur, altera (G H) inter applicatam, & contingentem: habebit ad ipſam applicata (A G) proportionem compoſitam ex proportione, quam habet tranſverſum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum linearum (G F, G H) habet ad applicatam (A G). Fig. 59. 60.

Sit $GH.\,AG :: K.\,GF.$ [a] vel $GH \times GF = AG \times K.$ ergo $AGq.$ a 16. 6.
$GH \times GF$ [b] $(T.\,R.)$ [c] $:: (AGq.\,AG \times K$ [d] $::)\ AG.\,K.$ atqui $AG.$ b 38. *hujus.*
GF [c] $= AG.\,K + K.\,GF$ [f] $(+ GH.\,AG).$ ergo $AG.\,GF =$ c 7. 5.
$T.\,R. + GH.\,AG.$ *Q. E. D.* d 1. 6.
e 5. *def.* 6.
f *conſtr.*

Prop. XLI.

Si in hyperbola, vel Ellipſi, vel circuli circumferentia ordinatim applicetur recta linea (CD) ad diametrum (AB); & ab applicata (C D), & ea (E A) quæ ex centro, deſcribantur parallelogramma æquian- Fig. 61. 62.

augula (D G, A F); habeat autem applicata (C D) ad reliquum latus (C G) parallelogrammi (D G) proportionem compositam ex proportione, quam habet ea quæ ex centro (E A) ad reliquum latus (E F), & ex proportione, quam rectum figuræ sectionis latus (R) habet ad transversum (T); parallelogrammum factum à lineâ (E D) quæ inter centrum (E) & applicatam (C D) interjicitur, simile parallelogrammo (A F), quod fit ab ea (E A) quæ ex centro, in hyperbola quidem majus est, quàm parallelogrammum (D G) ab applicata (D C), parallelogrammo (A F) ab ea (E A) quæ ex centro; In ellipsi verò, & circuli circumferentia, unà cum parallelogrammo (D G) quod fit ab applicata, æquale est parallelogrammo (A F) ab ea, quæ ex centro.

a 21. *hujus.* Fiat R. T [a] (hoc est D Cq. B D × D A) :: D C. C H [b] (hoc est
b 1. 6. D Cq. D C × C H). [c] ergo B D × D A = D C × CH. item D C.
c 9. 5. C H + A E. E F [d] = (R. T + A E. E F [e] = D C. C G [f] =) D C.
d *constr.* C H + C H. C G. quare A E. E F [b] (hoc est A Eq. A E × E F) ::
e *hyp.* (C H. C G [g] :: C H × D C. C G × D C [h] ::) B D × D A. C G ×
f 5. *def.* 6. D C. permutandóq; B D × D A. A Eq :: (C G × D C. A E × E F [k] ::)
g 1. 6. *pgr.* D G. F A. ergo in hyperbola componendo *pgr.* D G + F A.
h *priùs* & 7. 5. *pgr.* F A :: D Eq. [l] (B D × D A + A Eq). A Eq.
k 22. 6.
l 6. 2.
m 19. 5. In Ellipsi verò & circulo, permutando A Eq *pgr.* F A :: (B D ×
n 5. 2. D A. *pgr.* D G [m] ::) D Eq [n] (A Eq — B D × D A). *pgr.* F A — D G & permutando D Eq. A Eq :: *pgr.* F A — D G. *pgr.* F A.
o 22. 6. quare si fiat ex D E parallelogrammum simile ipsi A F [o]; liquet propositum.

Coroll. Quæ de parallelogrammis ostensa sunt, eadem valent in trigonis horum dimidiis.

Prop. XLII.

Fig. 63. Si parabolen contingens recta liuea (C A) cum diametro (A B) conveniat in A; & à tactu (C) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (C H); sumpto autem quovis puncto (D) in sectione, applicentur ad diametrum duæ lineæ (D E, D F), altera quidem (D E) æquidistans contingenti (C A); altera verò (D F) æquidistans ei (C H), quæ à tactu (C) ordinatim est appplicata; triangulum (E D F) quod ab ipsis constituitur, æquale erit parallelogrammo (F G) contento linea (C H) à tactu applicata, & ea (F B), quæ interjicitur inter æquidistantem (D F) & sectionis verticem (B.)

a 35. *hujus.* Nam ob A H [a] = 2 H B, [b] erit triang. C H A = *pgr.* H G. quare
b ex 41. 1.

pgr.

pgr. H G. triang. D F E[c] ::(triang. C H A. D F E[d] :: C Hq. D F q[e] :: H B. F B[f] ::) *pgr.* H G. *pgr.* F G. [g] ergo triang, D F E = *pgr.* F G. *Q. E. D.* c 7.5. d 22.6. e 20. *hujus.* f 1.6. g 9.5.

Prop. XLIII.

Si hperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) connveniat cum diametro (A B); & à tactu (E) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (E F); huic verò per sectionis verticem (B) ducatur æquidistans (B L), quæ cum linea (E C) per tactum (E) & centrum (C) conveniat in (L); & sumpto in sectione aliquo puncto (G), ab eo ad diametrum ducantur duæ lineæ (G H, G K) una quidem (G H) æquidistans contingenti (E D), altera vero (G K) æquidistans ei (E F), quæ à tactu applicata est: triangulum (G K H) ab ipsis factum in hyperbola minus erit, quàm triangulum (C K M) quod abscindit linea (C E) per centrum & tactum ducta, triangulo (C B L) ab ea (C B) quæ ex centro simili abscisso: in ellipsi verò, & circuli circumferentia una cum triangulo (C K M) abscisso ad centrum æquale erit triangulo (C B L), simili abscisso, quod describitur ab ea (C B) quæ ex centro. Fig. 64. 65. 66.

Nam G K KH[a] = (EF. F D[b] = C F. F E + R. T[c] =) C B. B L + R. T. unde triang. G H K, æquatur excessui triangulorum C K M, B C L. *Q. E. D.* a 4.6. b 39. *hujus.* c 4. 6. d *cor.* 41. *hujus.*

Coroll. Triang. G K H = 4 laterum K B L M.

Schol.

Triang. C B L = triang. C D E. *Vid. Eut.*

Prop. XLIV.

Si unam oppositarum sectionum contingens recta linea (F G) contingens cum diametro (A B) conveniat (in G); à tactu verò (F) ad diametrum ordinatim applicetur linea (F O); atque huic per alterius sectionis verticem (B) ducatur æquidistans (B L), ut conveniat cum linea (F C) per tactum (F) & centrum (C) ductâ; sumpto autem quovis in sectione puncto (N), applicentur ad diametrum duæ lineæ (N K, N H), quarum altera (N K) æquidistet contingenti (F G), altera æquidistet ei (F O) quæ à tactu ordinatim applicata est; triangulum (N H K), ab ipsis factum, minus est, quàm triangulum (CMH) quod abscindit applicata ad centrum sectionis, triangulo simili (CBL), abscisso ab ea (C B) quæ ex centro. Fig. 67.

a 31. *hujus.* b *hyp.* c *cor.* 29. *hujus.* d 15. 1. e 4. 1. f 27. 1. g 30. 1. h 43. *hujus.*

Productâ F C, ut occurrat sectioni B in E, per E ducatur tangens E D, & ordinatim applicetur E X. Estque O C × C G[a] = (A C q [b] = B C q[a] =) X C × C D. ergo cùm sit O C[c] = X C, erit C G = C D. item F C[c] = E G. & verticales anguli ad C[d] pares sunt. [e] ergo ang. C G F = ang. C D E. [f] unde D E ad F G, & [g] proinde ad N K parallela est. [h] ergo triang. C M H — C B L = triang. N H K.

Coroll. C D = C G.

Coroll. Tangens E D tangenti F G æqualis & parallela est: & conversim; si E D tangenti F D æqualis vel parallela sit, etiam E D tanget oppositam sectionem.

Prop. XLV.

Fig. 68. 69. 70. 71.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (C M L) cum secunda diametro (H D) conveniat (in L); & à tactu (C) ad eandem diametrum applicetur linea (C D), æquidistans alteri diametro (A H); & per tactum (C) & centrum (H) ducta linea (C H) producatur; sumpto autem in sectione quovis puncto (B), ad secundam diametrum (H D) ducantur duæ lineæ (B E, B F), quarum una (B E) contingenti (C L), altera (B F) applicatæ (C D) æquidistet; triangulum (B F E) quod ab ipsis constituitur, in hyperbola quidem majus est, quàm triangulum (G F H) abscissum ab applicata ad centrum, triangulo (L C H), cujus basis est linea contingens (C L), & vertex sectionis centrum (H): in ellipsi verò & circuli circumferentia, unà cum triangulo abscisso (G F H) æquale est triangulo (L C H), cujus basis est linea contingens (C L) & vertex sectionis centrum (H).

a 39. *hujus.* b 4. 6. c *cor.* 41. *hujus.* d 34. 1. & 1. *ax.* e 3. *ax.* f 7. 1. g 4. 1. h *priùs.* l 4. 6. m 2. *ax.* 1.

Ducantur C K, B N ad D H parallelæ. & trigonum ad A H, (simile trigono (C D L) appelletur P. estque C K. K H[a] = (M K. K C + R. T[b] =) C D. D L. + R. T. quare in hyperb. triang. C D L (C D H + C L H)[c] = (triang. C K H + P[d] =) triang. C D H + P. [e] unde P = triang. C L H. Cæterum ob B N. F G[f] = (F H. F G. [g] = D H. D C[f] = C K. K H[h] = C D. D L + R. T[l] =) B F. (N H) F E + R. T. [c] Erit triang. B F E = triang. G H F + P. [m] ergo triang. B F E = triang. G H F + triang. C L H.

Simili discursu, in ellipsi erit triang. B F E + G H F = triang. C L H.

Prop.

Prop. XLVI.

Si parabolen contingens recta linea (C A) cum diametro (A B) conveniat (in A); quæ per tactum (C) duciur diametro æquidistans (H C M), ad easdem partes sectioni lineas (L F) in sectione ductas, quæ æquidistant contingenti (C A), bifariam secabit (in N.) Fig. 72.

Ordinatim applicentur B H, F G K, L M D. Estque triang. E L D [a] = *pgr*. B M. & triang. E F G [a] = *pgr*. B K. [b] ergo 4 lat. F L D G = *pgr*. G M. auferatur commune N M D G F; [b] manéntque trigona N M L, F K N æqualia. [c] eadémque similia sunt. ergo homologa latera N L, N F æquantur. *Q. E. D.*

a 42. *hujus.*
b 3. *ax.* 1.
c 29. 1. & 4. 6.

Coroll. 1.

In parabola omnes lineæ parallelæ diametro sunt * etiam diametri: & vicissim, omnes diametri sunt parallelæ.

* *def.* 10. *hujus.*

Coroll. 2.

Omnes contingenti æquidistantes sunt ordinatim applicatæ ad diametrum per tactum ductam.

Prop. XLVII.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) cum diametro (A B) conveniat (in D); per tactum (E) & centrum (C) ducta linea (E C) ad easdem partes sectioni, quæ in sectione ducuntur contingenti (E D) æquidistantes (G N) bifariam secabit (in O.) Fig. 73. 74.

Ordinatim applicentur N F X, B L, G M K. Estque triang. H N F [a] = 4 lat. L B F X. & triang. G H K [a] = quadrilat. L B K M. [b] ergo 4 lat. N G K F = M K F X. commune auferatur O N F K M, [b] manent trigona O M G, O X N æqualia. [c] eadem vero similia sunt. ergo N O = G O. *Q. E. D.*

a *cor.* 43. *hujus.*
b 3. *ax.* 1.
c 29. 1. & 4. 6.

Coroll. C E est diameter sectionis cujuslibet ex his.

Prop. XLVIII.

Si unam oppositarum sectionum contingens recta linea (L K) cum diametro (A B) conveniat (in K); & per tactum (L), & centrum (C) linea (L C) producta alteram sectionem secet (in E); quæ in altera sectione Fig. 75.

ſectione ducta fuerit contingenti (L X) æquidiſtans (G N) à lineâ (L C) productâ biſecabitur (in O.)

a cor. 44. hujus. b 30. 1. c 47. hujus.

Ducatur tangens E D; [a] eſtque E D ad L K parallela; [b] ac ideò ad N G. [c] ergo O N = O G. *Q. E. D.*

Lemma.

Fig. 76. 77.

Sit triangulum N L K æquale parallelogrammo L C, & ang. K L N = D L P: erit K L × L N = 2 D C × L D.

a 6. ax. 1. b 14. 6. c 16. 6.

Compleatur enim *pgr.* L R. & productâ L P, fiat P T = L P. & compleatur *pgr.* D T. eritque *pgr.* L R [a] = *pgr.* D T. [b] unde K L. L D :: L T (2 D C). L N. [c] quare K L × L N = 2 D C × L D.

Item, ſi D P fuerit trapezium trigono K L N æquale, erit K L × L N = L D × : C D + L P. Nam fiat P T = D C; & compleatur *pgr.* D T. eritque *pgr.* D T = (2 D P = 2 triang. K L N =) *pgr.* L R. unde K L . L T . (L P + D C) :: L D . L N. quare K L × L N = L D × : D C + L P. *Q. E. D.*

Schol. Hinc K Nq. K Lq :: R. G (hoc eſt ut parameter axis ad parametrum diametri D N).

Fig. 78. a 4. & 22.6. b 11. hujus. c prius in 49. d 7. 5. (b. e 1. 6. f ſt. 2. 7mi Apollonii.

Nam K Nq. K Lq [a] :: X Dq. D C q: & eſt X Dq [b] = R × B X. [c] & D Cq = G × B X. [d] ergo K Nq. K Lq :: (R × B X. G × BX [e] ::) R. G.

Schol.

Not. Si R ſit parameter axis B X; erit G = R + 4 B X.

Nam ſit B K ad D C parallela. ergo C B = D L = B X. | B T = 2 D L.

$$G \times \left| \begin{matrix} DL = BLq = \\ BX. \end{matrix} \right| \begin{matrix} DXq + BTq = R \times BX + 4BXq. \\ LTq. \end{matrix}$$

ergo G = R + 4 B X.

Prop. XLIX.

Fig. 79.

Si parabolen contingens recta linea (D C) cum diametro (B C) conveniat in (C); & per tactum (D) ducatur linea (F N) æquidiſtans diametro (C B); à vertice verò (B) ducatur æquidiſtans (B F) ei (D X), quæ ordinatim applicata eſt; & fiat ut contingentis portio (E D) inter applicatam (B F) & tactum (D) interjecta ad æquidiſtantis portionem (D F), quæ itidem inter tactum (D) & applicatam (B F) interjicitur; ita quædam recta linea (G) ad duplam contingentis (D C;)

quæ

quæ (KL) à ſectione ducta fuerit contingenti (DC) æquidiſtans, ad lineam (FN), quæ per tactum ducitur diametro æquidiſtans, poterit rectangulum contentum inventâ lineâ (G), & eâ (LD), quæ inter ipſam (KL), & tactum (D) interjicitur. DE. | DF :: G. | 2 DE. BX.

Ordinatim applicentur D X & K N M. Eſtque C B [a] = (BX [b] = a 35. *hujus.*
F D); [c] unde triang E B C = E F D. additóque communi DEBMN, b 34. 1.
erit D C M N [d] = (*pgr.* F M [e] =) triang. K P M. ablatóque com- c *ex.* 20.6.
muni L P M N, erit *pgr.* L C [f] = triang. N L K. [g] unde KL × L N d 2. *ax.*
= 2 D C × L D. e 42. *hujus.*
Itaq; G × L D. K L × L N [h] :: (G × L D. 2 D C × L D [k] :: G. 2 D C f 3. *ax.*
[l] :: E D. D F [m] :: K L. L N [n] ::) K Lq. K L × L N. [o] ergo G × L D g *lemma præc.*
= K Lq. h 7. 5.

k 1. 6.

l *hyp.*

Cor. Hinc D L eſt diameter, & G rectum latus ſectionis, cujus m 4. 6.
vertex D. $\frac{4 DEq}{BX} = \frac{2 DE \times DC}{BX}$ eſt rectum latus ſectionis, cujus n 1. 6.
vertex B. o 9. 5.

Prop. L.

Si hyperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) cum diametro (A B) conveniat, pérque tactum (E) & centrum (C) linea (E C) producatur; à vertice autem (B) ordinatim applicata (B G) conveniat cum ea (E C), quæ ducitur per tactum, & centrum; fiátque ut contingentis portio (E F) inter tactum (E) & applicatam B G ad portionem (E G) lineæ (E C) ductæ per tactum & centrum; quæ itidem inter tactum (E) & applicatam (BG) interjicitur, ita quædam recta linea (E H) ad duplam contingentis (E D); quæ (L M) à ſectione ducitur contingenti (E D) æquidiſtans ad lineam (E C) per tactum, & centrum ductam, poterit ſpatium rectangulum, quod adjacet inventæ lineæ (B H), latitudinem habens interjectam (E M) inter ipſam (L M) & tactum (E); in hyperbola quidem excedens figurâ ſimili contentæ lineâ (E K) dupla ejus (C E), quæ eſt inter centrum & tactum, & inventâ lineâ (E H), in ellipſi verò, & circulo deficiens eâdem. Fig. 80. 81. EF. EG :: EH. 2 ED.

Ducatur L R N ad B G, & C S O ad K P parallelæ. Et ob E K a *hyp.*
[a] = 2 E C, [b] erit E H = 2 E S. ergo 2 E S. 2 E D [c] :: (E H. 2 ED [d] :: b 4. 6.
F E. E G [b] ::) L M. M R. porro ob triang. R N C [e] = C D E [f] c 7. 5.
(C G B) + L N X (in hyperbola), [e] vel triang. R N C + L N X d *hyp.*
= C D E (in ellipſi & circulo) erit trapezium M E D X [g] = triang. e 43. *hujus.*
L M R. f *ſch.* 43. *hujus.*

g 3. *ax.* 1.

h lem.ante 49. L M R. [h] ergo L M * M R = E M * : E D + M X. Denique quia
k 4. 6. M O. E S [k] :: (M C. C E [k] ::) M X. E D. componendóque M O +
l 1. 6. E S. E S :: M X + E D. E D. erit permutando M O + E S. M X +
m priùs et 7. 1. E D ([l] hoc est E M * : M O + E S. E M * : M X + E D [m] vel E M
n 15. 5. * : M O + E S. L M * M R) :: E S. E D [n] :: 2 E S. 2 E D [o] :: L M.
o priùs. M R. [l] :: L Mq. L M * M R. [p] ergo E M * : M O + E S = L Mq.
p 9. 5. atqui E S [q] = (S H [r] =) O P. ergo E M * M P = L M q. *Q. E. D.*
q priùs.
r 34. 1.

Cor. E K est diameter, & E H latus rectum sectionis, cujus vertex E.

Prop. LI.

Fig. 82. Si quamlibet oppositarum sectionum contingens recta linea (C D) cum diametro (A B) conveniat; pérque tactum (C) & centrum (E) linea (C E) producatur usque ad alteram sectionem; à vertice verò (B) ducatur linea (B G) æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est, conveniénsque cum linea (C E) per tactum & centrum ducta; & fiat ut contingentis portio (L C) inter applicatam & tactum ad portionem (C G) lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ inter tactum & applicatam interjicitur, ita quædam recta linea (K) ad duplam contingentis (C D), quæ in altera sectione ducitur, æquidistans contingenti (F M) ad lineam (F E) per tactum, & centrum ductam, poterit rectangulum, quod adjacet inventæ lineæ (K) latitudinem habens lineam, quæ est inter ipsam, & tactum (F), excedénsq; figurâ simili ei, quæ lineâ (C F) inter oppositas sectiones interjectâ, & inventâ (K) continetur.

a cor. 44. hujus. Ordinatim applicetur A X N. [a] Suntque F M, C D æquales & pa-
b constr. rallelæ: [b] itémque A N, B G parallelæ sunt. ergo F X. F N [c] :: (L C.
c 4. 6. C G :: [d] K. 2 C D [e] ::) K. 2 F M; unde quæcunque à sectione A F ad
d hypoth. productam E F contingenti F M ducuntur parallelæ, [f] poterunt re-
e 7. 5. ctangulum contentum ipsâ K, & interjecta inter istas; & punctum
f 50. hujus. F, excedéntque figurâ simili ei, quæ rectâ C F, & ipsâ K continetur.

Coroll.

a 46. hujus. Itaque his demonstratis, liquet in [a] parabola unamquamque recta-
b 47. rum linearum, quæ diametro ex generatione ducuntur æquidistantes,
c 48. diametrum esse; In [b] hyperbola verò & ellipsi & [c] oppositis sectionibus, unamquamque earum, quæ per centrum ducuntur.

d 49. Et in [d] parabola quidem applicatas ad unamquamque diametrum,
e 50. æquidistantes contingentibus posse rectangula ipsi adjacentia: in [e] Hyperbola,

perbola, & [f] oppositis rectangula adjacentia ipsi, quæ excedunt eâdem figurâ, in ellipsi autem, quæ eâdem deficiunt. Postremò quæcunque circa sectiones, adhibitis principalibus diametris demonstrata sunt, & aliis diametris assumptis eadem contingere. *f 51. hujus.*

Prop. LII. Probl. 1.

Datâ in plano rectâ lineâ (A B) ad unum punctum (A) terminatâ, invenire in plano coni sectionem, quæ Parabole appellatur, ita ut ejus diameter sit data linea (A B), vertex lineæ terminus (A); quæ verò à sectione ad diametrum (A B) in dato angulo applicatur, possit rectangulum contentum lineâ, quæ est inter ipsam & sectionis verticem (A), & alterâ quâdam datâ lineâ (Z). Fig. 83.

Datus angulus primò rectus sit. Producatur A B ad E, ita ut A E *1. Cas.*
$\sqsubset \frac{1}{4}$ Z. Sitque Z. Y [a] :: Y. A E. unde Z. A E [b] :: Yq. A Eq. ergo *a 13. 6.*
cum Z [c] $\sqsupset$ 4 A E, [d] erit Yq $\sqsupset$ 4 A Eq, & proinde Y [*] $\sqsupset$ 2 A E. *b cor. 20. 6.*
[e] ergo ex Y, & duabus AE constitui poterit triangulum. Fiat ergo EAF, *c constr.*
rectum subjecto plano, ita ut AF = AE, & E F = Y; ducantúrque *d 14. 5.* ** 4. 2.*
A K ad E F, & F K ad E A parallelæ ([f] unde A K [f] = E F = [g] = Y; *e 22. 1.*
& F K [f] = E A [g] = F A). Tum concipiatur conus, cui vertex F, *f 34. 1.*
basis circulus super diametrum A K, rectus plano A F K; erit is co- *g constr.*
nus rectus (ob F K = F A). Secetur conus plano ad circulum A K
parallelo, [h] facientíque proinde sectionem M X N circulum, plano *h 4. hujus.*
M F N (vel F A K) rectum; horúmque communis sectio sit recta
M N, [h] diameter nempe circuli M X N; communis autem sectio subjecti plani, & circuli sit recta X L. Quum igitur tam circulus M X N,
quàm subjectum planum recta sint triangulo M F N, [k] erit istorum *k 19. 11.*
communis sectio X L recta trigono M F N, [l] ideóque rectis (quæ in *l 3. def. 11.*
eo) M N, A B perpendicularis. Ex quibus constat planum per A B, X L ductum facere in cono sectionem, quæ parabole dicitur (juxta conditiones in 11ª hujus præscriptas) cujus diameter A B, lineæque
ad hanc à sectione ordinatim ductæ ad rectos angulos applicentur, ut- *m priùs.*
pote ad X L parallelæ. Porro ob Z, Y; A E [m] (hoc est Z, A K, A F) *n constr.*
[n] $\div\!\!\div$, [o] erit Z. A F :: A Kq. A Fq (A F × F K). [p] unde Z est rectum *o cor. 20. 6.*
latus. Ergo factum. *p 11. hujus.*

Sed datus angulus non sit rectus, sitque ei æqualis H A E; & fiat *2. Cas.*
A H = $\frac{1}{2}$ Z; & per H ducatur H E ad A E perpendicularis, & per Fig. 84.
E ad H B parallela E L, & per A ad E L perpendicularis A L; tum bisectâ E L in K, per K ducatur ipsi E L perpendicularis M K F G; sitque
F

a 11.6. sitque A Lq [a] = L K × K M. Datis igitur rectâ K L positione, & rectâ K M magnitudine, & recto angulo, describatur (ut modò ostensum) parabole, cujus diameter K L, vertex K, & rectum latus K M. Transi-
b 11. *hujus.* bit hæc per A ([b] ob A Lq = K L × K M) & A E [c] continget ipsam,
c 33. *hujus.* (ob L K = K E) & H A est diameter [d] (quia ad E L parallela), [e] &
d *cor.* 46. *huj.* quæ ad A E parallelæ, bisecantur ab A B, [f] inque angulo H A E appli-
e 45. *hujus.* cantur: & ob trigona A G F, A E H [g] similia (quia anguli A E H,
f *constr.* A G F recti, & H A E communis), est F A. A G [g] :: (H A. A E [h] ::)
g 4. 6. 2 H A. 2 A E, [k] hoc est F A. A G :: Z. 2 A E. [l] unde Z rectum erit la-
h 15.5. tus sectionis. *Quæ E. F.*
k *constr.*
l 49. *hujus.*

Prop. LIII. *Probl.* 2.

Fig. 85. Datis duabus rectis lineis (A B, B C) terminatis, quæ ad rectos inter se angulos constituantur; & alterâ (A B) productâ ad * easdem partes angulo recto, invenire coni sectionem, quæ hyperbole dicitur; in eodem plano, in quo sunt datæ lineæ (A B, B C), ita ut producta (A B) sit diameter sectionis, & vertex punctum (B), quod ad angulum (A B C) consistit; quæ verò à sectione ad diametrum ordinatim applicatur, angulum faciens, æqualem dato, possit rectangulum, quod adjacet alteri lineæ (B C), latitudinem habens lineam interjectam inter applicatam, & sectionis verticem (B), excedénsque figurâ simili, & similiter positâ ei, quæ datis â principio lineis (A B, B C) continetur.

* *hoc est versùs D.*

1. *Cas.* Sit datus angulus primò rectus; & super lineam A B planum attollatur, rectum subjecto plano, in quo circa A B describatur circulus,
* *vid. not.* 1. * ita ut ductâ diametro E K L ad A B perpendiculari, non sit ratio E K ad K L major eâ, quam habet A B ad B C. Fiat igitur E K. K M
a 12.6. [a] :: A B. B C. & per M ducatur M F ad A B parallela; junctisque
b 29. 1. A F, E F, B F, per B ducatur B X ad E F parallela. Itaque ob ang.
c 27.3. A X B [b] = (A F E [c] = E F B [b] =) F B X, [d] erit F B = F X. Con-
d 6. 1. cipiatur jam conus, cujus vertex F, basis circulus super diametrum B X, rectus trigono F B X Erit is conus rectus (ob F B = F X). Producantur F B, F X, M F, & secetur conus plano, ad circulum B X parallelo, [e] facienti proinde circulum G P H R rectum plano F X B, cujúsq;
e 4. *hujus.* diameter G H communis sit istorum planorum sectio. Sit verò P D R communis sectio circuli G R H, & subjecti plani. Et quoniam tam circulus G R H, quàm subjectum planum recta sunt trigono F G H,
f 19. 11. [f] erit horum communis sectio P D R eidem trigono F G H recta;
g 3. *def.* 11. [g] ideóque rectis, quæ in eo, G H, D B perpendicularis. Ex quibus liquet

liquet coni ſectionem P B R (juxta conditiones in 12[ma] hujus præſti- h *conſtr.*
tutas) eſſe hyperbolen, cujus vertex B, & ordinatæ ad diametrum A B k *2. 6.*
in angulo recto applicentur, quippe omnes ad ipſam P R parallelæ. l *1. 6.*
Porro ob A B. B C [h] :: (E K. K M [k] :: N E. N F [l] :: N E × N F m *35. 3.*
[m] (N A × N B). N Fq [n] = N A. N F [o] (O F. F G) + N B. N F n *23. 6.*
([o] O F. F H) [n] =) O Fq. O G × G H [p] :: A B. B C. [q] erit A B tranſ- o *4. 6.*
verſum latus, & B C rectum. p *11. 5.*
q *12. hujus.*

Sin datus angulus non ſit rectus. Datæ ſint rectæ A B, A C, & *2. Caſ.*
angulus B A H per dato. Biſecetur A B in D, & deſcripto ſuper AD Fig. 86.
ſemicirculo, occurrat G F ad A H parallela, * faciens G Fq. D G × **vid. not. 2.*
G A :: A C. 2 A D; junctaq; F D, [a] fiat F D. D L :: D L. D H; & ſum- a *13. 6.*
ptâ D K = D L, [b] fiat L F. A F :: A F. F M; & connectatur K M, b *11. 6.*
& per L ducatur N L X ad K F perpendicularis. Deſcribatur tunc c *12. hujus.*
Hyperbole (juxta modò oſtenſa), cujus vertex L, tranſverſus axis K L, d *conſtr. & 17.*
rectum latus L N; [c] tranſibit hæc per A [d] (ob L F × F M = A Fq.) e *37. hujus. (6.*
& A H ſectionem [e] continget (ob F D × D H = D Lq) [f] & proin- f *cor. 47. hujus.*
de A B eſt diameter ſectionis. Porro, quum ſit A C. 2 A H + F G. g *4. 6.*
G D [g] = (A C. 2 A H. + A H. A D [h] = A C. 2 A H + 2 A H. h *15. 5.*
2 A D [k] = A C. 2 A D [l] = F Gq. G A × G D [m] =) F G. G A + k *5. def. 6.*
F G. G D. Erit A C. 2 A H :: (F G. G A [n] ::) O A. A X. [o] unde l *conſtr.*
A C eſt rectum latus. Ergo factum. m *23. 6.*
n *4. 6.*
o *50. hujus.*

Notæ.

1. Deſcribitur circulus circa A B, ita ut E K. K L :: A B. B C, Fig. 87.
hoc pacto.

Fiat utcunque Z K. K Y [a] :: A B. B C. & biſectâ Z Y in V, centro a *12. 6.*
V, per Z, & Y deſcribatur circulus, ſecans ipſam A B (ſi opus eſt,
productam) in S, & T; connexíſque S Y, S Z, per A ducantur ad b *29. 1. et 2. ax.*
has parallelæ A L, A E. ergo quum angulus Y S Z rectus ſit; [b] erit c *conv. 31. 3.*
quoque angulus L A E rectus. [c] ergo ſuper diametrum L E deſcrip- d *cor. 1. 3.*
tus circulus tranſibit per A, [d] ideóque per B, [e] quia K B = K A. éſtq; e *hyp.*
E K. Z K [f] :: (A K. S K [f] ::) L K. Y K. & permutando E K. L K :: f *4. 6.*
(Z K. Y K [g] ::) A B. B C. g *conſtr.*

2. Quomodo autem ducatur G F ad A H parallela, faciens GFq ad Fig. 88.
D G × G A in data ratione (puta R ad S), ita conſtabit. Sumpto Z
centro circuli, ducatur Z Y ad A H T perpendicularis, & ab occurſu
Y, ducatur Y Q ad A H parallela, [a] quare Y Q tangit circulum. Fiat a *cor. 16. 3.*
verò Q V. V Y [b] :: S. $\frac{R-S}{2}$. & productâ Q Y, ſumatur Y K = Y V; b *12. 6.*

connectantúrque Z K, Z V circulum secantes in P, & F; conjunctaq; P F protrahatur ad G. dico factum.

c 4. 1. Nam ob V Y = K Y, & angulos ad Y rectos, [c] erit Z V = Z K.
d 2. 6. item Z F = Z P, [d] ergo F P ad V K, [e] hoc est ad A H, est parallela. Et
e 30. 1. quoniam S. $\frac{R-S}{2}$ [f] :: Q V.V Y, erit duplando consequentes, S. R—S
f *constr.* :: Q V. V K. & invertendo R—S. S :: V K. Q V. & componendo R. S
* :: (Q K. Q V *:: G P. G F [g] :: G P × G F. G Fq [h] ::) D G × G A.
g 1. 6. G Fq. ac inversè S. R :: G F q. D G × G A. *Q. E. F.*
h 36. 3. & 7. 5

Prop. LIV. Probl. 3.

Fig. 89. Datis duabus rectis terminatis (A B, A C), atque ad rectos inter se angulos, invenire circa diametrum ipsarum alteram (A B) coni sectionem, quæ Ellipsis appellatur, in eodem plano, in quo sunt datæ lineæ (A B, A C), ita ut vertex sit punctum (A) ad rectum angulum (B A C); & à sectione ad diametrum (A B) applicatæ in angulo dato possint rectangula adjacentia alteri lineæ (A C), quæ latitudinem habeant lineam inter ipsas, & verticem (A) sectionis interjectam, deficiántque figurâ simili, & similiter positâ ei, quæ datis rectis lineis (A B, A C) continetur.

1. *Cas.* Sit datus angulus primò rectus, & ex A B planum attollatur, rectum subjecto plano, in quo circa A B descriptum sit circuli segmentum A D B; & bisecetur arcus A D B in D, unde connectantur D A, D B; & fiat A X = A C; & per X ducatur X O ad B D parallela, & per O ipsa O F ad A B parallela, & juncta D F occurrat protractæ B A in E. Junganturr F A, F B, & producantur, pérque punctum G (utcunque sumptum in F A) productâ) ducatur ipsi E D parallela G H, productæ A B occurrens in K, productæque F O in L. Estque ideò
a 29. 1. ang. H G F [a] = (ang. E F A [b] = F A D [c] (F B D) + F D A [d] (F B A)
b 32. 1. = F B D + F B A [c] = A B D [c] = D F B [a] =) G H F [f] = H G F.
c 26. 3. [g] unde F G = F H. Itaque super G H describatur circulus G H N
d 21. 3. rectus trigono H F G, sitque basis coni recti, habentis verticem F. Et
e 19. *ax.* 1. quia tam circulus G H N, quàm subjectum planum recta sunt plano
f 1. *ax.* H F G, [h] erit ipsorum communis sectio (K M) plano eidem, [k] rectísque
g 6. 1. idcirco G K, A K perpendicularis.
h 19. 11. Liquet igitur planum per A K M [l] facere in cono ellipsin, cui dia-
k 3. *def.* 11. meter A B, ad quam ordinatæ omnes perpendiculariter applicentur,
l 13. *hujus.* quippe ipsi K M parallelæ: porro, ob F Lq. G L × L H [m] = (F L.
m 23. 6. G L.

GL[n] (AK. KG, [n] vel AE. EF) + FL. LH ([n] BK. KH, [n] vel n 4. 6.
BE. EF) = AE. EF + BE. EF[m] = AE × BE. EFq [o] = DE o 36.3. & 7.5.
× EF. EFq [p] = DE. EFq = DA. AO :: [q] BA. AX[r] ::) BA. p 1.6. q 4.6. r *constr. et* 7.5.
AC[s] :: FLq. GL × LH. erit AC rectum latus. s 11. 5.

Sin diameter AB minor ponatur dato recto latere AC; bisectâ 2. *Cas.*
AB in D, ducatur FE bisecta quoque in D, ita ut sit AC. FE [a] :: FE. Fig. 90.
AB. & ductâ FG ad AB parallela, sit FE. FG [b] :: AC. AB ([c] hoc a 13. 6.
est) :: FEq. ABq :: FDq. [d] (FD × DE). ADq [e] :: FE. FG. Du- b 12. 6. c *cor.* 20. 6.
catur itaque (ut modò ostensum) ellipsis, cujus axis EF (& rectum d *constr.*
latus FG; transibit hæc per A, (ob FD × DE. ADq [f] :: FE. FG) e 11. 5.
[g] ideóque per B ([d] ob AD = DB). item propter AC. CB :: FDq. f 21. *hujus.*
AD × DB (ADq). [f] erit AC rectum latus. g 30. *hujus.*

Sed datus angulus non sit rectus; sitque ei æqualis angulus BAD; 3. *Cas.*
bisectâque AB in E, circa AE describatur semicirculus, in quo ad Fig. 91.
AD *ducatur parallela FG, faciens FGq. AG × GE :: CA. AB; * *vid. Not.*
& junctæ AF, EF producantur; [a] & sit DE. EH :: EH. EF & a 13.6. b 11.6.
sumptâ EK = EH, factóque HF. FA [b] :: FA. FL, conjungatur c 13. *hujus.*
KL, occurrens ductæ NM (per H ad AL) parallelæ. Tum (ex mo- d *constr.*
dò præostensis) describatur ellipsis, cujus axis transversus sit KH, & e 30. *hujus.*
rectum latus HM. [c] transibit hæc utique per A [d] (ob HF × FL = f *conv.* 38 *huj.*
FAq); & [e] idcirco per B (ob AE [c] = EB) ac ipsam [f] continget g *constr.* & 17. (6.
DA [g] (ob DE × EF = EHq). Item propter CA. 2DA. + FG. h 4. 6.
GE [h] = (CA. 2DA + DA. AE [k] = CA. 2DA + 2DA. AB k 15. 5.
[l] = CA. AB [m] = FGq. AG × GE [n] =) FG. AG + FG. GE. l 5. *def.* 6.
erit CA. 2DA *:: (FG. AG [p] ::) XA. AN. [q] ergo AC est re- m *constr.* n 23. 6. *
ctum latus. p 4. 6. q 50. *hujus.*

Notæ.

Quomodo verò duci poterit GF ad AD parallela, ita ut sit GFq Fig. 92.
ad AG × GE in data ratione S ad R, ita constabit.

Sumpto Z centro circuli, ducatur ad AD perpendicularis ZY, circulo occurrens in Y. & per Y ducatur QY ad AD parallela; [a] & a *cor.* 16. 3.
proinde tangens circulum in Y, occurrénsque productæ ZA in Q.

[b] Fiat autem $\frac{R-S}{2}$. S :: YQ. QV. productâque VY sumatur YK = b 12. 6.
YV; & junctæ YZ, KZ producantur, adeò ut completo circulo occurrant punctis F, P, & connectatur FP, secans AE in G. Dico factum.

c *constr.* & 4. 1. d 2. 6. e 30. 1. f *constr.* — Nam ob ZV [c] = ZK, & ZP = ZF, [d] erit PF ad VK, [e] hoc est ad AD parallela. [f] item (ob $\frac{R-S}{2}$ S [f] :: YQ. QV,) erit componendo $\frac{R+S}{2}$. S. :: YV, QV. & duplando antecedentes, R+S. S :: KV.

g * h 1. 6. k 35. 3. & 7. 5. — QV. & dividendo R. S :: (KQ. QV [g] :: PG. GF [h] :: PG × GF. GFq [k] ::) AG × GE. GFq. & inversè S. R :: GFq. AG × GE. *Q. E. F.*

Prop. LV. Probl. 4.

Fig. 93. — Datis duabus rectis terminatis (EB, BH), atque ad rectos inter se angulos, invenire oppositas sectiones, quarum diameter sit una (EB) datarum linearum; & vertices lineæ termini (E, B); applicatæ verò ab utraque sectione possint spatia adjacentia alteri lineæ (BH), excedentiáque figurâ simili ei, quæ datis lineis (EB, BH) continentur.

a 53. *hujus.* — [a] Describatur hyperbole ABC, cujus diameter transversa sit BE, & rectum latus BH; & ordinatæ ad BE in dato angulo (G) applicentur. Ducatur quoque EK ad rectos ipsi BE, æqualisque ipsi BH, & [a] describatur itidem alia hyperbole DEF, cujus diameter sit EB, rectum latus EK; ductæque ordinatim applicentur in angulo, qui deinceps ipsi G. Liquet igitur descriptas hyperbolas ABC, DEF fore sectiones oppositas, habentes diametrum communem BE, & recta latera BH, EK inter se æqualia. *Q. E. F.*

Prop. LVI. Probl. 5.

Fig. 49. — Datis duabus rectis lineis (AC, DE) sese bifariam secantibus (in B), circa utramque ipsarum oppositas sectiones describere, ita ut rectæ lineæ (AC, DE) sint conjugatæ diametri; & quarumlibet oppositarum sectionum diameter possit figuram aliarum oppositarum.

a 11. 6 et 17. 6. b 55. *hujus.* c *def. ad* 16. *hujus.* d *constr.* — Sit AC × CL [a] = DEq; (vel AC, DE, CL $\div\!\div$) [b] describantúrque sectiones oppositæ FAG, HCK, quarum transversa diameter sit AC, rectum latus CL; & ordinatim ductæ ad CA in dato angulo applicentur. [c] Erit harum secunda diameter ipsa DE; quiâ AC. DE [d] :: DE. CL; [d] & DE ordinatim applicatis parallela bisecatur in B. [a] Sit pariter DE × DR = ACq. & [b] describantur sectiones oppositæ MDN, OEX, quarum transversa diameter DE, & DR rectum latus; ductæque ordinatim ad DE in dato angulo applicentur; [c] eritque harum secunda diameter AC, ob DE. AC [d] :: AC. DR, & AC bisectam in B. Ergo factum.

Definitio. — Vocentur autem hujusmodi sectiones *Conjugatæ*.

APOLLONII
CONICORUM
LIB. II.

Prop. I.

SI hyperbolen contingat recta linea (D E) ad verticem (B); & ab ipso ex utraque parte sumatur (B D, B E) æqualis ei, quæ potest quartam figuræ partem, lineæ (C D, C E) quæ è sectionis centrò (C) ad sumptos contingentis terminos (D, E) ducuntur, cum sectione non convenient. Fig. 95.

Sumpto utcunque in C D puncto H, ordinatim applicetur H G F. Estque A F × F B. F Gq [a] :: (T. R [b] :: Tq. T R [c] :: $\frac{Tq}{4}$. $\frac{TR}{4}$ [d] :: C Bq. B Dq [e] ::) C Fq. F Hq. ergo cùm A F × F B. [f] ⊐ C Fq. [g] erit F Gq ⊐ F Hq. ergo punctum H est extra sectionem. Idémque de reliquis rectæ C D punctis ostendetur, ergo tota C H est extra sectionem. *Q. E. D.*

a 21.1. *hujus.*
b 1. 6.
c 15. 5.
d *hyp.*
e 4.6. et 22.6.
f 6. 2.
g 14. 5.

Coroll. C Bq. B Dq :: T. R :: A F × F B. F Gq.

Prop. II.

Iisdem manentibus, ostendendum est, non esse alteram asymptoton G K, quæ angulum D C E dividat. Fig. 96.

Per B ducatur BK ad C D parallela, occurrens ipsi C K in K; & per K ducatur H G K F L ad D E parallela. Estque H K [a] = D B, [b] & K L ⊏ B E. [c] unde H K × K L ⊏ D B × B E vel B Dq. atqui ob C Bq. B Dq ([d] A F × F B. G Fq) [e] :: (C Fq. F Hq [f] ::) C Fq — A F × F B.

a 34. 1.
b 5. *ax.* 1.
c *sch.* 48. 1.
d *cor.* 1. *hujus.*
e 4.6. *et cor.* 22.6.
f 19.5.

g 65. & 3. *ax.* × F B. F Hq—G Fq [g] (hoc eſt C Bq. H G × G L.), [h] eſt B Dq =
h 95. (1. H G × G L. ergo H K × K L ⊏ H G × G L. [k] unde punctum K eſt
k *ſch.* 5. 2. intra ſectionem. & proinde C K ſectionem intrat. *Q. E. D.*

Coroll. H G × G L = D Bq = $\frac{1}{4}$ T R.

Prop. III

Fig. 97. Si hyperbolen contingat recta linea (H K), cum utraque aſymptoton (E F, E G) conveniet; & ad tactum (B) bifariam ſecabitur; quadratum vero utriuſque ejus portionis (BF, BG) æquale erit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum (B D) per tactum ducitur.

a 1. *hujus.* Ducatur diameter B E D, & quartæ parti figuræ ad hanc æquentur ſingula B Hq, B Kq. erunt ductæ E H, E K aſymptoti. [a] ergo hæ non differunt ab ipſis E F, E G.

Prop. IV. *Probl.* I.

Fig. 98. Datis duabus rectis lineis (A B, AC) angulum (BAC) continentibus, & dato intra angulum (BAC) puncto (D), deſcribere per punctum (D) coni ſectionem (quæ hyperbole dicitur, ita ut datæ lineæ (A B, AC) ipſius aſymptoti ſint.

a 31. 1. b 4. 6. [a] Duc D F ad A B parallelam, & fac F C = F A, & produc CDB.
c *conſtr.* Eſtque B C. C D [b] :: (C A. C F [c] :: 2. 1). ergo B Cq [d] = 4C Dq
d *cor.* 4. 2. = 4B Dq. duc D A E, ita ut A E = D A. & fiat E D × G [e] =
e 11. 6 *et* 17. 6. B Cq [f] = 4B Dq. [g] Habes igitur diametrum E D, & rectum latus G
f *priùs.* hyperbolæ, cujus vertex D, [h] aſymptoti A B, A C. ergo factum.
g 53. *hujus.*
h 1. *hujus.*

Prop. V.

Fig. 99. Si parabolæ, vel hyperbolæ diameter (D B E) lineam quandam (A C) bifariam ſecet (in E), quæ (F G) ad diametri terminum (B) contingit ſectionem, æquidiſtans eſt lineæ (A C) bifariam ſectæ.

a 46. & 47. 1. *hujus.* Si negas A C eſſe parallelam ipſi F G, ſit ei parallela C H. [a] ergo
b *hyp.* C K = K H. unde cùm ſit quoque C E [b] = E A, [c] erunt A H, E K
c 2. 6. parallelæ, contra 22. 1. hujus.

Prop.

Prop. VI.

Si ellipsis, vel circuli circumferentiæ diameter (A B) lineam quandam (C D) non per centrum transeuntem bifariam secet (in E), quæ ad diametri terminum (A) contingit sectionem, æquidistans erit bisectæ lineæ (C D). Fig. 100.

Demonstratur, ut præcedens.

Prop. VII.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingat recta linea (F G); & huic æquidistans (A C) ducatur in sectione; & bifariam dividatur (in E); quæ à tactu (B) ad punctum (E) lineam bifariam dividens jungitur (B E), sectionis diameter erit. Fig. 101.

Nam altera [a] nulla B H bisecabit A C; ergo non erit alia [b] diameter quàm B H.

a 9. ax. 1.
b 46. & 47. 1. hujus.

Prop. VIII.

Si hyperbolæ occurrat recta linea (A C) in duobus punctis (A, C); producta ex utraque parte conveniet cum asymptotis (D E, D F); & lineæ (A E, C F), quæ ex ipsa abscissæ inter sectionem & asymptotos interjiciuntur, æquales erunt. Fig. 102.

Bisecetur A C in G, ducatúrque D G. [a] hæc diameter est. [b] ergo tangens per B (nempe H K) est ad A C parallela; ergo cùm H K *asymptotis occurrat, [c] sitque B H = B K,* etiam A C eisdem occurret, [d] erítque G E = G F; [e] unde manent A E, C F æquales. *Q. E. D.*

a 7. hujus.
b 5. hujus.
c 3. hujus.
*
d 4. 6.
e 3. ax.

Prop. IX.

Si recta linea (C D) occurrens asymptotis (A C, A D) ab hyperbolæ bifariam secetur, (in B) in uno tantum puncto sectionem contingit. Fig. 103.

Occurrat alibi, si fieri potest, in E. ergo E C [a] = (B D [b] = $\frac{1}{2}$ D C [b] =) B C. [c] *Q. E. A.*

a 8. hujus.
b hyp.
c 9. ax. 1.

Prop. X.

Si recta linea (D F) sectionem secans (in A, C) conveniat cum utraque asymptoton (E D, E F), rectangulum contentum rectis lineis Fig. 104.

G (D A,

(D A, A F) quæ inter aſymptotos, & ſectionem interjiciuntur, æquale eſt quartæ parti figuræ factæ ad diametrum (H G), quam æquidiſtantes ipſi ductæ lineæ (A C) bifariam dividit.

Patet ex corollario 2dæ hujus.

a 1. ax. 1. *Cor.* $AD \times AF \,{}^{a}\!= CD \times CF$.

Prop. XI.

Fig. 105. Si utramque linearum (A E, A C) continentium angulum (E A C), qui deinceps eſt angulo (D A C) hyperbolen continenti, ſecet recta linea (E F), in uno tantùm puncto cum ſectione conveniet; & rectangulum conſtans ex iis (E G, F G), quæ interjiciuntur inter lineas (A E, A C) angulum continentes, & ſectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro (A B), quæ ſecanti lineæ (E F) æquidiſtans ducitur.

a cor. 47. 1. hujus.
b 26. 1. hujus.
c 5. hujus.
d 3. hujus.
e 23. 6.
f 4. 6.
g 10. hujus.
h 14. 5.

Ducatur A L ad E F parallela. [a] hæc diameter eſt ſectionis. [b] ergo E F in unico puncto (G) occurrit ſectioni. Per G ordinatim applicetur H G L K; [c] hæc tangenti C D (per verticem B ductæ) eſt parallela. $CBq \,{}^{d}(CB \times BD)$. $BAq \,{}^{e} = (CB.\, BA \,{}^{f}(HG.\, GF) + BD.\, BA \,{}^{f}(GK.\, GE) \,{}^{e}=) HG \times GK.\, GF \times GE$. ergo cùm $CBq \,{}^{g} = HG \times KG$, [h] erit $BAq = EG \times GF$. *Q. E. D.*

Prop. XII.

Fig. 106. Si ab aliquo puncto (D) eorum, quæ ſunt in ſectione, ad aſymptotos (B A, B C) duæ rectæ lineæ (D E, D F) in quibuſlibet angulis ducantur; & ab altero puncto (G) in ſectione ſumpto ducantur aliæ lineæ (G H, G K) his ipſis (D E, D F) æquidiſtantes, rectangulum conſtans ex æquidiſtantibus (G H, G K) æquale eſt ei, quod fit ex iis (D E, D F), quibus illæ æquidiſtantes ductæ fuerant.

a cor. 10. hujus.
b 14. 6.
c 4. 6.
d 11. 5.
e 16. 6.

Connexa G D protrahatur utrinque in A, & C. Eſtque $DA \times DC \,{}^{a}= GA \times GC$: [b] unde $GA.\, DA \,{}^{c}(GH.\, DE) \,{}^{b} :: (DC.\, GC \,{}^{c} ::) DF.\, GK \,{}^{d} :: GH.\, DE$. [e] ergo $GH \times GK = DF \times DE$. *Q. E. D.*

Prop. XIII.

Fig. 107. Si in loco aſymptotis (A B, A C) & ſectione terminato, quædam recta linea (E F) ducatur, æquidiſtans aſymptoton alteri (A B), in uno tantùm puncto cum ſectione conveniet.

Si

Si primò negas E F ſectioni occurrere, per G (punctum utcunque a 12.6. et 16.6.
ſumptum in ſectione) ducantur G C, G H ad A B, A C parallelæ. b 2. *hujus.*
Sitque A E × E F [a] = G C × G H; connexa A F [b] ſectioni occurret, c 12. *hujus.*
puta in K. Ex quo ducantur K L, K D ipſis A B, A C itidem parallelæ. d *conſtr.*
ergo K L × (A L) K D [c] = (G H × G C [d] =) A E × E F. [e] *Q. E. A.* e 9. *ax.* f 12. *hujus.*
Proinde E F ſectioni occurret, nempe in M. Dic alibi occurrere, g 34. 1. & *ſch.*
puta in N. ducantúrque M X, N B ad A C parallelæ. ergo E M × h 9. *ax.* (48. 1.
M X [f] = (E N × N B [g] =) E N × M X. [h] *Q. E. A.*

Prop. XIV.

Aſymptoti (A B, A C), & ſectio in infinitum productæ ad ſeipſas Fig. 108.
propiùs accedunt; & ad intervallum perveniunt minus quolibet dato
intervallo (K).

Ducantur E H F, C G D tangenti utcunque parallelæ; pérque A, a 10. *hujus.* & 1. *ax.*
& occurſum H jungatur A H X. Eſtque C G × G D [a] = E H × H F.
[b] quare G D. H F :: E H. C G. ergo cùm G D ⊏ (X D ⊏) H F, b 14. 6. c 14. 5.
[c] erit E H ⊏ C G; paritérque omnes decreſcunt versùs partes C G. d 13. *hujus.*
Sumatur E L ⊐ K, ducatúrque L N ad A C parallelæ; [d] hæc ſectio- e 34. 1.
ni occurret, puta in N, per quod ducatur M N B ad E F parallela. f *conſtr.*
Eſtque M N [e] (= E L) [f] ⊐ K, *Q. E. D.*

Cor.

Ex hoc manifeſtum eſt lineas A B, A C ad ſectionem accedere propiùs, quàm omnes aliæ aſymptoti (quales A Y, A Z); & angulum B A C minorem eſſe quolibet angulo, qui aliis ejuſmodi lineis continetur.

Prop. XV.

Oppoſitarum ſectionum (A, B) aſymptoti communes ſunt. Fig. 109.

Sint A B diameter, C centrum, ac D E, F G coutingant ſectiones
in A, B; è quibus utrinque abſcindantur AD, A E, B F, B G, ut ſin- a 14. 1. *hujus.*
gularum quadrata æquentur quartæ parti [a] figuræ ad A B: itaque jun- b 1. *hujus.*
ctæ C D, C E ſectionis A, & C F, C G, ſectionis B [b] aſymptoti e- c 30. 1.
runt. quoniam verò utraque D E, F G ordinatim applicatis ad A B d 29. 1.
eſt parallela; & [c] proinde ſibi invicem iſtæ parallelæ ſunt, [d] erit ang. e *hyp.*
B A C = G B C; paréſque [e] ſunt A C, B C; [f] & A D, B G. [g] ergo f *conſtr.*
ang. A C D = ang. B C G. [h] ergo D C G eſt recta linea. Simili- g 4. 1. h *cor.* 15. 1.

 terque

terque E C F recta est. Unde patet propositum.

Coroll. Tangentes D E, F G parallelæ sunt sibi invicem.

Prop. XVI.

Fig. 110. Si in oppositis sectionibus (A, B), ducatur quædam recta linea (H K), secans utramque linearum (C D, C F) continentium angulum (D C F), qui deinceps est angulo (D C E, vel G C F) sectiones continenti; cum utraque oppositarum in uno tantùm puncto conveniet, & lineæ (H L, K M), quæ ex ipsa abscissæ inter asymptotos (C D, C F), & sectiones interjiciuntur, æquales erunt.

a 11. *hujus.* Quod H K sectionibus occurrat, [a] manifestum est; occurrat punctis L, M; pérque centrum C ducatur A B ad L M parallela. Estque
b 29.1. *hujus.* K L × L H [a] = (A Cq [b] = B Cq [a] =) H M × M K. [c] ergo K L.
c 16. 6. M K :: H M. L H. & componendo L M. M K :: M L. LH. [d] unde
d 9. 5. M K = L H, *Q. E. D.*

Prop. XVII.

Fig. 111. Oppositarum sectionum (A, B; C, D) quæ conjugatæ appellantur, asymptoti communes sunt.

a cor. 15. *hujus.* Sint A B, C D conjugatæ diametri sectionum; pérque vertices A,
b def. ad 16. & B, C, D ducantur tangentes F G, K H, F K, G H; [a] Liquet, F G H K
17. 6. esse parallelogrammum, & diagonales F H, G K esse asymptotos; nam
c cor. 4. 2. figuris ad A, B [b] æquatur C Dq, [c] hujúsque quartæ parti singula A Fq,
d 1. & 16. A Gq, B Hq, B Kq æquantur. [d] unde F H, G H sunt asymptoti se-
hujus. ctionum A, B. pariterque hæ asymptoti sunt sectionum C, D. quare constat propositum.

Prop. XVIII.

Fig. 112. Si uni (C) oppositarum sectionum, (A, B; C, D) quæ conjugatæ dicuntur, occurrat recta linea (E F), & producta ad utrasque partes extra sectionem cadat; cum utraque (A, B) sectionum, quæ deinceps sunt, in uno tantùm puncto conveniet.

a 13. *hujus.* Sint G H, L K asymptoti, [a] his occurrit E F. [b] ergo liquet pro-
b 16. *hujus.* positum.

Prop. XIX.

Si in oppoſitis ſectionibus (A, B, C, D) quæ conjugatæ appellantur, ducatur recta linea (E F), ipſarum quamvis (C) contingens cum ſectionibus (A, B), quæ deinceps ſunt, * conveniet (in G, H); & ad tactum (C) biſariam ſecabitur. — Fig. 113. * *per præced.*

Sint K L. M N aſymptoti. Et ob C E [a] = C F, & E G [b] = F H, [c] erit C G = C H. *Q. E. D.*

a 3. *hujus.* b 16. *hujus.* c 3. *ax.* 1.

Prop. XX.

Si oppoſitarum ſectionum (A,B,C,D) quæ conjugatæ appellantur, unam (A) contingat recta linea (E F); & per ipſarum centrum (X) ducantur duæ lineæ; una quidem (E X) per tactum, altera verò (XG) contingenti (E F) æquidiſtans; quouſque occurrat (in G) uni (C) earum ſectionum, quæ deinceps ſunt; recta linea (G H) quæ in occurſu (G) ſectionem contingit, æquidiſtans erit lineæ (E X) per tactum, & centrum ductæ; quæ verò (E Z, G O) per tactus, & centrum ducentur, oppoſitarum ſectionum conjugatæ diametri erunt. — Fig. 114.

Sint A M, C N [a] recta ſectionum latera, & per puncta E, G, C ordinatim applicentur E K, G L, C R P. Eſtque X K. K E. + F K. K E [b] = (X K × F K. K Eq [c] = B A. A M [d] :: N C. C D :: [c] G Lq. L X × L H [b] =) G L. L X + G L. L H. atqui (ob L X ad E K, & L G ad X K, & G X ad E F parallelas) [c] eſt F K. K E :: G L. L X. ergo manet X K. K E :: G L. L H. [f] ergo trigona E K X, H L G ſimilia ſunt. [f] & ang. E X K = H G L. itemque totus ang. G X K [g] = X G L. [h] ergo manet ang. E X G = H G X. [k] quare rectæ E X, G H parallelæ ſunt.

a 14. 1. *hujus.* b 23. 6. c 37. 1. *hujus.* d *vid. Not.* e 4. 6. f 6. 6. g 29. 1. h 3. *ax* 1. k 27. 1.

Porro, fiat P G. G R [l] :: H G. S. [m] eſt ergo 2 S, juxta quam poſſunt ordinatæ ad diametrum G O. item T X × K E (× X V) [n] = C Xq; ([o] vel T X, C X, K E ÷÷) [p] quare T X. K E ([c] hoc eſt T F. F E, [q] vel triang. T X F. F X E) :: (T Xq. C Xq. [p] ::) triang. T X F. X C P. ergo triang. F X E [r] = (X C P [s] =) H X G. item ang. X E F [g] = X G H. ergo reciprocè G H. E X [t] :: E F. G X. [u] unde G H × G X = E X × E F. ergo S × G X. E X × E F [x] :: (S. × G X. G H × G X [y] :: S. G H [z] :: G R. G P [a] :: E X. E F [y] ::) E Xq. E X × E F. ergo E Xq

l 12. 6. m 51. 1. *hujus.* n 38. 1 *hujus.* o 17. 6. p *cor.* 20. 6. q 1. 6. r 9. 5. s *ſch.* 43. *huj.* t 15. 6. u 16. 6. x 7. 5. y 2. 6. z *conſtr. et inverſè.* a 4. 6.

[b] =

b 5.5. c *priùs.* d *cor.* 4.2. e 6. *ax.* 1. f *def. ad* 16.1. *hujus.*

[b] $= (S \times GX$ [c] $=)\ \frac{1}{4}$ fig. ad G O. quare E Zq [d] (4E Xq) [e] $=$ fig. ad G O. Simili discursu erit G Oq figuræ ad E Z æquale. quare E Z, G O [f] sunt conjugatæ diametri. *Q. E. D.*

Not. Quòd B A. A M :: N C. C D, sic patet. Quoniam [f] NC. B A :: BA.CD.& BA.CD :: C D. A M. erit ex æquali N C. C D :: (BA. A M.

Cor. B A. A M :: N C. C D.

Prop. XXI.

Fig. 115.

Iisdem positis, ostendendum est, punctum (E), in quo contingentes lineæ (A E, C E) conveniunt, ad unam asymptoton esse.

a 34. 1. b 3. *hujus.* c *hyp.* d 1. *hujus.*

Nam quia C Xq ([a] vel A Eq) [b] æquatur $\frac{1}{4}$ C Dq, [c] hoc est quartæ parti figuræ ad A B, [d] erit X E asymptotos.

Prop. XXII.

Fig. 116.

Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D) quæ Conjugatæ appellantur, ex centro (X) ad quamvis sectionem (C) ducatur recta linea (XC) & huic æquidistans ducatur altera (E K L H) quæ cum una (A) ex sectionibus, quæ deinceps sunt, & cum asymptotis (X E, X F) conveniat; rectangulum constans ex portionibus (E K, K H) lineæ ductæ inter sectionem, & asymptotos interjectis, quadrato lineæ (X C) quæ ex centro ducitur, æquale erit.

a 5. *hujus.* b 48.1. *hujus.* c 20. *hujus.* d 10. *hujus.* e *cor.* 4. 2.

Bisecetur K L in M, ducatúrque (per M, & X) recta M A X B; Igitur tangenti ad A [a] parallela est E H; eadémque proinde ad A B diametrum [b] ordinatim applicatur; & A B, C D [c] sunt conjugatæ diametri; quare E K $\times$ K H [d] $= (\frac{1}{4}$ T R [c] $=)$ C Xq.

Cor. E K $\times$ K H $=$ C Xq.

Prop. XXIII.

Fig. 117.

Si in oppositis sectionibus A, B, C, D) quæ conjugatæ appellantur, ex centro (X) ducatur quædam recta linea (X C) ad quamvis sectionem (C); & huic æquidistans (K L) ducatur, quæ cum tribus, quæ deinceps sunt, sectionibus (C, A, D) conveniat, rectangulum constans ex portionibus (K M, M L) lineæ ductæ (K L) inter tres sectiones interjectis, duplum erit quadrati ejus lineæ (X C), quæ ex centro ducitur.

a *cor.* 22. *huj.* b 11. *hujus.* c 1. *ax.* 1.

Sint E F, G H sectionum asymptoti. ergo H M $\times$ M E [a] $=$ (C Xq [b] $=$) H K $\times$ K E. [c] quare 2 C Xq $=$ (H M $\times$ M E $+$ H K $\times$ K E. $=$) L M,

$LM \times MK$. (Nam $LM \times MK$ [d] $= LH \times MK$ [e] $(KE \times MK) +$ d 1. 6.
$HM \times MK$ [d] $= KE \times MK + HM \times ME + KE \times HM$ [e] $= KE \times$ e 16. *hujus.*
$HK + HM \times ME$.)

Prop. XXIV.

Si parabolæ occurrant duæ rectæ (A B, D C), utraque in duobus punctis, & nullius ipsarum occursus, alterius occursibus contineatur, convenient inter se extra sectionem. Fig. 118.

Per B, C puncta ductæ sint diametri E F, G H. [a] Hæ parallelæ sunt, a cor. 46. 1. *huj.*
[b] nec alibi occurrunt sectioni. unde junctâ B C, erunt anguli A B C, b 26. 1. *hujus.*
D C B simul duobus rectis majores. [c] ergo A B, D C extra sectionem c 13. *ax.* 1.
concurrent ad partes E G.

Prop. XXV.

Si hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ (E F, G H), utraque in duobus punctis, nullius autem ipsarum occursus alterius occursibus contineatur, convenient quidem inter sese extra sectionem, sed tamen intra angulum (B A C) qui hyperbolen continet. Fig. 119.

Ducantur A F, A H, & connectatur F H. & quoniam E F, G H secant angulos A F H, A H F, concurrent intra angulum F A H, & propterea magis intra angulum B A C. Idem discursus valet, si utraq; E F, G H sectionem contingunt; aut si una contingat, altera duobus punctis secet. *vid. cor.* 31. 1. *hujus.*

Prop. XXVI.

Si in ellipsi, vel circuli circumferentia, duæ rectæ lineæ (C D, E F) non transeuntes per centrum (H), se invicem secent (in G), bifariam sese non secabunt. Fig. 120.

Per G ducatur diameter A B; súntque omnes, quas A B bisecat, tangenti ad A [a] parallelæ, & proinde sibi invicem parallelæ. Ergo C D, a 6. *hujus.*
E F non bisecantur in G. *Q. E. D.*

Prop. XXVII.

Si ellipsim, vel circuli circumferentiam contingant duæ rectæ lineæ Fig. 121.
(C D, E F; & siquidem ea (A B), quæ tactus (A, B) conjungit, per 122.
centrum

centrum transeat sectionis, contingentes lineæ (C D, E F) sibi ipsis æquidistabunt; sin minùs, convenient inter sese ad easdem partes centri.

a 6. *hujus.* Si A B per centrum transit, [a] erit utraque C D, E F ordinatim ap-
b 30. 1. plicatis parallela, [b] ergo sibi invicem. Sin A B non transeat, per centrum, ducatur diameter A H, & per H tangat K L. [c] ergo C D, K L
c *ex priore parte hujus.* parallelæ sunt: [d] quare anguli B A H, K H A duobus rectis mino-
d 29. 1. res sunt. [e] ergo E F, H K convenient ad partes B H: & proinde E F,
e 13. *ax.* 1. A C convenient ad partes A B. *Q. E. D.*

Conversè; si C D, K H æquidistent, transibit recta quæ tactus connectit per centrum.

Prop. XXVIII.

Fig. 123. Si in coni sectione, vel circuli circumferentia duas lineas æquidistantes (A B, C D) bifariam secet recta linea (F E) diameter erit sectionis.

Sola enim F E bisecat parallelas ad A B.

a 5. & 6. *huj.* Si fieri potest, sit alia F G diameter. [a] ergo quæ tangit sectionem
b 46. *et* 47. 1. *hujus.* in G, est ubique A B, C D parallela. unde C H [b]= ($\frac{1}{2}$ C D =) C E. *Q. E. A.*

Prop. XXIX.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ
Fig. 124. 125. rectæ lineæ (B A, C A). in idem punctum (A) conveniant; & ab eo, ad punctum (D), quod lineam (B C) tactus (B, C) conjungentem bifariam secat. ducatur alia linea (A D), sectionis erit diameter.

*
a 5. *hujus.* & 47. 1. *huj.* Si fieri potest, sit alia D E diameter; jungatúrque C E, * sectioni
occurrens in F, per quod ducatur F H K G ad C B parallela. ergo F H
b *hypoth.* [a] = H K. item (ob C D [b]= D B) [c] est F H = H G. [d] ergo H K=
c *
d 1. *ax.* H G.* *Q. E. A.*
e 9. *ax.*

Prop. XXX.

Fig. 126. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (B A, C A) in unum punctum (A) conveniant, diameter (A D), quæ ab eo puncto ducitur lineam (B C) tactus (B, C) conjungentem bifariam secabit.

a 29. *hujus.* Si fieri potest sit B E = E C; ducatúrque A E. [a] ergo A E est
b *cor.* 46. 1. *huj.* quoque diameter sectionis. [b] ergo in parabola A E, A D sunt parallelæ;

læ; in reliquis sectionibus A [c] est centrum. Quæ sunt absurda. c *vid.* 47. 1. *hujus.*

Prop. XXXI.

Si utramque oppositarum sectionum (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C D, E F), siquidem ea (A B), quæ tactus (A, B) conjungit, per centrum transeat, contingentes lineæ (C D, E F), æquidistantes erunt; sin minus, convenient inter sese ad easdem partes centri. Fig. 127. 128.

Probatur, ut 27ma hujus.

Prop. XXXII.

Si utrique oppositarum sectionum occurrant rectæ lineæ (A B, C D), ipsas vel in uno puncto contingentes, vel in duobus secantes, & productæ inter se conveniant; punctum in quo conveniunt, erit in angulo (K L G), qui deinceps est angulo (G L H, vel F L K) sectiones continenti. Fig. 129.

Sint F G, H K sectionum asymptoti; hisce [a] occurret utraque A B, C D. productæ igitur occurrent sibi invicem sub angulo H L F, vel G L K, prout inclinantur ad has, aut illas partes. a 8. *hujus.*

Prop. XXXIII.

Si oppositarum sectionum (A, B) uni (A) occurrens recta linea (C D) ex utrâque parte extra sectionem cadat; cum altera sectione (B) non conveniet; sed transibit per tres locos, quorum unus quidem est sub angulo sectionem continente, duo verò sub iis angulis, qui deinceps sunt. Fig. 130.

Liquet C D [a] occurrere asymptotis duobus punctis; ergo non alibi; ergo non alteri sectioni, quam semper complectuntur asymptoti. a 8. *hujus.*

Prop. XXXIV.

Si oppositarum sectionum unam (A) contingat recta linea (CD); & huic ducatur æquidistans (E F) in altera sectione (B); quæ à tactu (A) ad (G) medium lineæ æquidistantis (E F) ducitur (A G), oppositarum sectionum diameter erit. Fig. 131.

Si fieri potest, sit altera A K diameter. [a] ergo tangens per occursum H parallela est ad C D, ideóque ad E F. [b] quare E K [b] = (K F = $\frac{1}{2}$ EF [c] =) E G. [d] *Q. E. A.*

a 5 *hujus.*
b 47. 1. *hujus.*
c *hyp.*
d 9. *ax.* 1.

H *Prop.*

Prop. XXXV.

Fig. 132. Si diameter (A B) in oppositarum sectionum una (B) rectam lineam (C D) bifariam secet (in E); quæ in diametri termino (A) contingit alteram sectionem (A), lineæ bisectæ (C D) erit æquidistans.

a 48. 1. *hujus.*
b *hyp.*
c 2. 6.
d 22. 1. *huj.*

Si fieri potest, sit altera D F tangenti parallela. ergo D G[a] = G F. Item D E[b] = E C. [c] ergo C F ad E G est parallela. [d] *Q. E. A.*

Prop. XXXVI.

Fig. 133. Si in utraque oppositarum sectionum (A, B) ducantur rectæ lineæ (C D, E F) inter se æquidistantes, quæ (G H) ipsarum medium conjungit, oppositarum sectionum diameter erit.

a 5. *hujus.*
b 30. 1.
c 48. 1. *hujus.*
d *hyp.*
e 9. *ax.* 1.

Si fieri potest, sit altera G K diameter: [a] ergo tangens per A ad C D parallela est; [b] adeóque ad E F. unde E K ([c] = K F = $\frac{1}{2}$ E F [d] =) E H. [e] *Q. E. A.*

Prop. XXXVII.

Fig. 134. Si oppositas sectiones (A, B) secet recta linea (C D), non transiens per centrum X; quæ (E X) ab ipsius medio (E) ad centrum ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta appellatur: transversa verò diameter, ipsi conjugata, est ea (A B), quæ per centrum ducitur æquidistans lineæ bisectæ (C D).

a 30. 1. *hujus.*
b *hyp.*
c 2. 6.
d 4. 6.
e 34. 1.
f 6. *hujus.*
g 16. 1. *hujus.*

Ducatur D X sectioni [a] occurrens in F, & connectatur F C, & producatur B A G. Atque ob C E [b] = E D; & F X [a] = X D [c] erit F C ad X E parallela, & F G [d] = (X E [e] =) G C. [f] quare F C tangenti ad A parallela est. [g] ergo A B, & E X sunt conjugatæ diametri. *Q. E. D.*

Prop. XXXVIII.

Fig. 135. Si oppositas sectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C X, D X), convenientes in uno puncto (X); quæ (X E) ab eo puncto ad medium (E) lineæ (C D) tactus (C, D) conjungentis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta vocatur, transversa verò ipsi conjugata (A B), quæ per centrum ducitur, æquidistans lineæ (C D) tactus conjungenti.

Si

Si fieri poteſt, ſit altera E F recta diameter, cui occurrat D X (pro- a 32. 1 *hujus.*
ducta in F; & connectatur C F,[a] ſectioni occurrens in A; per quod *b 12. *def.* 1 *hu-*
ducatur A B ad C D parallela. ergo A G[b] = G B. item (ob C E[c] = c *hyp.* (*jus.*
E D) eſt A G[d] = G K. [e] unde G B = G K. [f] *Q. E. A.* d *cor.* 2. 6. e 1. *ax.* f. 9. *ax.*

Prop. XXXIX.

Si oppoſitas ſectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C E, D E) in unum punctum (E) convenientes; quæ (E F) per punctum illud (E), & centrum ducitur, lineam tactus (C, D) conjungentem bifariam ſecabit. Fig. 136.

Si fieri poteſt, ſit CG = GD. [a] ergo ducta GE erit diameter: [b]atqui a 38. *hujus.*
F E eſt diameter. ergo interſectio E eſt centrum ſectionis. [c] *Q. E. A.* b *hyp.* c 32. *hujus.*

Prop. XL.

Si oppoſitas ſectiones (A, B) contingentes duæ rectæ lineæ (C E, E D) in unum conveniant; & per punctum (E), in quo conveniunt, ducatur linea (F G) æquidiſtans tactus conjungenti (C D), & ſectionibus occurrens (in F, G); quæ (F H, G H) ab occurſibus ad medium (H) lineæ (C D) tactus conjungenti ducuntur, ſectiones ipſas contingunt. Fig. 137.

Ducatur E H,[a] erit hæc recta diameter; & tranſverſa A B, ducta a 37. *hujus.*
per centrum X ad C D parallela: unde E X × X H [b] æquatur quartæ b 38. 1 *hujus.*
parti figuræ ad A B. Hinc, cùm F E [c] ſit ordinatim applicata, [d]liquet c 38. *hujus.*
F H tangere ſectionem A. Pari modo G H ſectionem B continget. d 38. 1. *hujus.*
Q. E. D.

Prop. XLI.

Si in oppoſitis ſectionibus duæ rectæ lineæ (A D, C B), ſe invicem ſecent, (in E) non tranſeuntes per centrum (X), ſeſe bifariam non ſecabunt. Fig. 138.

Ducatur E X; ergo ſi A D, C B ſe mutuò biſecent in E,[a] erit E X a 37. *hujus.*
diameter conjugata illi X F, quæ per X ducitur ad C B parallela; eritq; * *vid.* 37. *huj.*
E X * tangenti ad F parallela. Pariterque (ductâ X H ad D A paral- c 31. *hujus.*
lelâ) erit E X tangenti ad H parallela. [c] Ergo tangentes ad F, H ſibi
invicem parallelæ ſunt. [c] *Q. E. A.*

Prop. XLII.

Fig. 139. Si in oppoſitis ſectionibus (A, B ; C, D) quæ conjugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ (E F, GH) ſe invicem ſecent, non tranſeuntes per centrum (X) ; bifariam ſeſe non ſecabunt.

a 37. *hujus.* * 5. *hujus.* b 21. *hujus.*

Per centrum X ducantur A B ad E F, & C D ad G H parallelæ, & connectatur X K : poſito igitur ipſas E F, G H ſe mutuò biſecare, [a] erunt X K, A B, & X K, C D conjugatæ diametri, unde tangens per A tangenti per C erit parallela (utpote utraque ipſi X K) quod fieri nequit : [b] conveniunt enim hæ ad unam aſymptoton. Ergo E F, G H ſe mutuò non biſecant.

Prop. XLIII.

Fig. 140. Si unam (A) oppoſitarum ſectionum (A, B ; C D) quæ conjugatæ appellantur, ſecet recta linea (E F) in duobus punctis (E, F) ; & à centro (X) ducantur duæ lineæ (X G, X C), una quidem (X G) ad medium (G) lineæ ſecantis (E F), altera verò (X C) ipſi (E F) æquidiſtans, erunt hæ (X G, X C) oppoſitarum ſectionum conjugatæ diametri.

a 5. *hujus.* b *hyp.* & 30. I. c 20. *hujus.*

Nam quia tangens in A ad E F [a] parallela eſt ; & [b] proinde ad C X, [c] erunt A X, C X conjugatæ diametri.

Prop. XLIV. Probl. 2.

Fig. 141. Datâ coni ſectione (A C E), diametrum invenire.

Analyſis. Factum ſit ; & ſit C H diameter ; & ad hanc ordinatim applicentur A E, B D : biſecat has diameter C H in H, & F.

a 28. *hujus.*

Compoſitio. Ducatur utcunque recta A E ſectionem ſecans punctis A, B ; & huic parallela fiat BD ; biſecentur hæ in H & F ; & connectatur H F C. [a] Erit H C diameter ſectionis. Eodem licet modo infinitas diametros invenire.

Prop. XLV. Probl. 3.

Fig. 142. 143.

Datâ ellipſi, vel hyperbola centrum invenire.

a 44. *hujus.*

[a] Duæ ducantur utcunque ſectionis diametri A B, C D ; erit harum interſectio centrum ſectionis.

Prop.

Prop. XLVI. *Probl.* 4.

Datæ parabolæ (F C E) axem invenire. Fig. 144.

Analysis. Sit C D axis, eique perpendicularis F E; est ergo FD = D E. Quòd si ducatur utcunque diameter AB, [a] erit hæc ipsi CD parallela; atque idcirco ipsi F E perpendicularis. Hinc a 46. 1. *hujus.*

Componitur sic. [a] Ducatur utcunque diameter A B, eique [b] statuatur perpendicularis E F; bisectaque E F in D, [b] erigatur perpendicularis D C; erit hæc axis parabolæ: est enim D C diameter, [a] quia parallela diametro A B; & bisecat ipsi perpendiculares E F, (neque enim ulla alia ipsas bisecabit) [c] ergo est axis. a 44. *hujus.* b 11. 1. c 18. *def.* 1. *hujus.*

Prop. XLVII. *Probl.* 5.

Datæ hyperbolæ, vel ellipsis (A B C) axes invenire. Fig. 145. 146.

Analysis.

Esto K D axis; ergo [a] bisecat hæc sibi perpendiculares utcunque ductas A C, in D. Itaque si è K [b] centro sectionis connectantur K A, KC, [c] erunt K A, K C æquales. Hinc a 18. *def.* 1. *hujus.* b 45. *hujus.* c 4. 1.

Compositio.

[d] Sume K centrum sectionis, & centro K duc utcunque circulum A E C, sectioni occurrentem punctis A, C, quæ connectat recta AC; bisecetur autem A C in D, & connectatur DK. Erit DK axis. d 45. *hujus.* Fig. 147. 148.

Nam ductis K A, K C, [e] liquet trigona K D A, K D C sibi mutuò esse æquilatera, & [f] proinde æquari angulos K D A, K D G; ac idcirco rectos esse: [g] unde K D est axis. e *constr.* f 8. 1. g 18. *def.* 1. *huj.*

Quòd si per K ducatur MN ipsi AC parallela, [h] erit M N axis conjugatus ipsi K D. h 16. 1. *hujus.* & 19. *def.* 1. *h.*

Prop. XLVIII.

His autem demonstratis, superest ut ostendamus non esse alios axes ipsarum sectionum.

Si fieri potest, sit alius axis K G. ergo ductâ ad hanc perpendiculari A H, [a] erit L H = A H; adeóque (junctâ K L) K L [b] = (K A [c] =) K C: ideóque circulus A E C etiam transit per L, quod in hyperbola manifestè absurdum; in ellipsi verò, ducantur C R, L S ad M N perpendiculares. Et propter L Sq + S Kq [d] = (L Kq [e] = C Kq [d] =) C Rq + R Kq. & M S × S N + S Kq [f] = (K Mq [f] =) M R × R N, + R. a 18. *def.* 1. *huj.* b 4. 1. c *constr.* d 47. 1. e *prius.* f 5. 2.

h 3. *ax.* 1. + R Kq. erit L[l]Sq — C Rq[g] = (R Kq — S Kq[g] =) M S × S N —
k 2. *ax.* 1. M R × R N. & [k] proinde L Sq + M R × R N = C Rq + M S × S N. Verùm (ob ordinatim applicatas L S, C R) est L Sq . M S × S N[l] :: C Rq . M R × R N. ergo L Sq = M S × S N. & C R q = M R × R N. (Nam si L Sq $\sqsubset$ vel $\sqsupset$ M S × S N, [m] esset hinc L S q + M R × R N. $\sqsubset$ vel $\sqsupset$ C Rq + M S × S N, contra modò ostensa). [n] Unde sectio A B C circulus esset (non verò Ellipsis) contra hypothesin.

l 21.1. *hujus.*
m 25.5.
n *conv.* 35.3.

Prop. XLIX. Probl. 6.

Fig. 149. Datâ coni sectione, & puncto (A), non intra sectionem, dato, ab eo ducere rectam lineam (A D), quæ sectionem contingat.

* 47. *hujus.* Sectio data primò sit Parabola, cujus * axis B E punctum datum A
1. *Cas.* sit in ipsa sectione.

Analysis. Tangat A D, axi B C occurrens in D, ductâque A E
a 35. *hujus.* ad B C perpendiculari, [a] erit B E = B D. Itaque

Compos. Si ex dato puncto A ducatur AE perpendicularis axi BC,
b 33. 1. *hujus.* & in axe producto sumatur B D = B E, jungatúrque D A, liquet [b] hanc parabolen tangere.

2. *Cas.* Punctum A sit in ipso axe.

Fig. 150. *Analysis.* Tangat A D; ductâque sit D E axi B C perpendicu-
c 35.1. *hujus.* laris: itaque rursus est A B [c] = B E.

Compos. Sumatur B E = A B; & ab E ducatur E D axi perpen-
d 33.1. *hujus.* dicularis; sectioni occurrens in D, & connectatur D A; [d] continget hæc sectionem.

3. *Cas.* Sin datum punctum coincidat vertici B, [e] liquet ductam per B axi
e 17.1. *huj.* perpendicularem esse contingentem.

4. *Cas.* Punctum A datum sit alibi extra axem.

Fig. 151. *Analysis.* Tangat A D. itaque ductâ A E ad axem B C parallelâ,
f *cor.*46.& 35. & ordinatim applicatâ D E, erit rursus G E [f] = A G.
1. *hujus.* *Compos.* Per A ducatur A E axi parallela, factóque G E = A G,
g 46.& 33. 1. per E ordinatim applicetur E D, sectioni occurrens in D, & conjun-
hujus. gatur D A: [g] liquet hanc sectionem contingere.

h 47. *hujus.*
k 45. *hujus.* Sectio data sit secundò Hyperbola; cujus [h] axis transversus K B, [k] centrum F, asymptoti F L, F M.

1. *Cas.* Punctum datum A sit in sectione.

Fig. 152. *Anal.* Tangat A D; & sit A E perpendicularis axi B C; est igi-
m 36.1. *hujus.* tur K E. E B [m] :: K D. D B.

Com-

Compos. E puncto A ducatur A E axi perpendicularis,[n] secetúrque KB in D, ut sit KD.DB :: KE.EB; jungatúrque DA. [o] Continget hæc sectionem. n 16. 6. o 34.1. *hujus*.

Punctum A sit in axe. 2 *Cas.*

Anal. Tangat AD, & sit DE axi perpendicularis: itaque rursus KE.EB :: [m] KA.AB. Fig. 153.

Compos. * Fiat KE.EB :: KA.AB. & per E ducatur axi perpendicularis ED, sectioni occurrens in D; & connectatur DA; [o] hæc sectionem continget. * *Not.* 1.

Sit datum punctum A alicubi intra angulum LFM. 3 *Cas.*

Anal. Tangat AD, junctáque FA producatur, & fiat FO = FN; & *ordinatim applicetur DE. Est ergo OE.EN [p] :: OA.AN. Fig. 154. * p 36. 1. *hujus*.

Compos. Juncta FA producatur, & sumatur FO = FN. fiátque OE.EN [q] :: OA.AN. & ordinatim applicetur ED; jungaturq; DA. [r] Tanget hæc sectionem. q *Not.* 1. r 34. 1. *huj.*

Sit punctum A in FM unâ asymptoton. 4 *Cas.*

Anal. Tangat AD sectionem, asymptoto FL occurrens in P; sitque DQ ad LF parallela: atque ob AD [s] = DP, [t] erit AQ = QF. Hinc Fig. 155. s 3. *hujus*. t 2. 6.

Compos. Bisecetur AF in Q, & per Q ducatur QD ad FL parallela, sectioni occurrens in D, jungatúrque DA. Continget hæc sectionem. Nam productâ AD in p, ob AQ [u] = QF, [x] erit AD = DP. [y] quare AD tangit sectionem. u *constr.* x 2. 6. y 9. *hujus.*

Punctum A sit in loco, qui deinceps est angulo LFM sectionem continenti. 5. *Cas.*

Anal. Tangat AD; junctáque AF producatur, cui parallela utcunque in sectione sumatur RS; & bisectâ RS in E, connectatur EF, & fiat FO = FN; est igitur EO diameter [z] ipsi AF conjugata; & per D ductâ DT ad EO parallelâ, erit [a] AF × FT quarta pars figuræ ad ON. Hinc Fig. 156. z 2. 37. *hujus*. a *cor.* 38. 1. *huj.*

Compositio. Juncta AF producatur, eíque parallela utcunque ducatur RS (sectioni occurrens punctis R, & S); bisecetur RS in E; junctâque EF producatur, & fiat FO = FN, [z] ergo ON est transversa diameter, ipsi AF conjugata. * Fiat AF × FT æqualis quartæ parti figuræ ad ON, & per T ducatur TD ad ON parallela, sectioni occurrens in D, & jungatur DA. [b] Tanget hæc sectionem. * *Not.* 2. b *conv.* 38. 1. *h.*

Sit

6. *Cas.* Sin assignetur punctum A intra angulum Y F Z, nulla inde tangens

c 31.1. *hujus.* duci poterit; ducta enim linea [c] utramque Y F, Z F secabit: ergo non tanget.

Sit tertiò, sectio data ellipsis, cujus axis B C, centrum F.

1 *Cas.* Datum punctum A sit in sectione.

Anal. Tangat A D, & A E ordinatim applicetur ad axem. Estq;

d 36. 1.*hujus.* C E. E B :: [d] C D. D B.

Compos. Ducatur A E perpendicularis axi C B; & producatur

Fig. 157. C B, ut sic C E. E B [e] :: C D. D B. & connectatur D A. [f] Tanget

e *Not.* 2.
f 34. 1.*hujus.* hæc Ellipsin.

2 *Cas.* Punctum A sit extra sectionem.

Anal. Tangat A D; & juncta A F producatur, & ordinatim ap-

g 36.1. *hujus.* plicata sit D E. Est itidem O A. A N [g] :: O E E N.

Fig. 158. *Compos.* Connectatur A F sectioni occurens in N, O; fiatque O A.

h 10. 6. A N [h] :: O E. E N. & per E ad A O ordinatim applicetur E D, secti-

k 34.1. *hujus* oni occurrens in D; & connectatur D A: [k] tanget hæc sectionem.

Fig. 159. *Not.* 1. Datur recta K B secta in A; oportet producere hanc ad E, ita ut sit K E. B E :: K A. A B.

a 12. 6. [a] Fiat K A—A B. A B :: K B. B E. ergo componendo erit K A. A B :: K E. B E. *Q. E. F.*

Prop. L. Probl. 7.

Fig. 160. Datâ coni sectione, lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad partes sectionis angulum faciat, dato angulo acuto æqualem.

Sit sectio primùm parabole, cujus axis A B.

Fig. 161. *Analysis.* Tangat D C sectionem, faciens angulum D parem dato

a 40. *dat.* F. Itaque ductâ C B ad A B perpendiculari, [a] datur ratio D B ad

b 33. 1 *hujus.* B C; ergo datur ratio A B [b] ($\frac{1}{2}$ D B) ad B C. [c] ergo datur angulus

c 41. *dat.* B A C. [d] quare datur positio rectæ A C, & inde punctum C, &

d 29. *dat.* hinc tangentis C D positio.

Compos. Sumpto E puncto utcunque in latere dati anguli ducatur E G ad alterum latus F G perpendicularis, & bisectà F G in H, jungatur H E, fiatque ang. B A C = ang. G H E: & ab occursu C ducatur C B ad A B perpendicularis; productâque A B, sumatur A D

f 35.1. *hujus.* = A B; & connectatur D C, [f] liquet hanc tangere sectionem. Et

g *constr.* et 15. (5. quoniam F G. H G [g] :: D B. A B. & H G. G E [h] :: A B. B C (ob

h 4. 6.
k *constr.* ang. G H E [k] = B A C, & [k] rectos ad G & B) erit ex æquo, F G. G E.

GE :: DB. BC. [l] ergo pares sunt anguli F, D. *Q. E. F.* — l 6. 6.

Sit secundò Hyperbole, cujus axis A B, centrum X. — Fig. 162. 163.

Anal. Tangat D C, faciens angulum parem dato K H G; jungatúrque X C, & statuatur C E axi perpendicularis; est igitur data ratio X E × E D ad E Cq [m] (eadem quæ T ad R); item [n] datur ratio E C ad E D (ob datos angulos E D C, & rectum E). [o] ergo datur ratio X E × E D ad E Dq; [p] hoc est ratio X E ad E D. Proinde [q] datur ratio X E ad E C. [r] ergo datur angulus E X C, & [s] hinc positio rectæ X C, & hinc punctum C, & hinc tangens C D. — m 37.1. *hujus.* n 40. *dat.* o 50.& 8. *dat.* p 1.6. q 8. *dat.* r 41. *dat.* s 29. *dat.*

Quòd si ducatur asymptotos X F; [t] liquet angulum E D C majorem esse angulo A X F, quoniam D C [v] producta ipsam X F secabit. Itaque datus angulus non debet esse minor illo, qui sectionem continet. — t 16. 1. v 3. *hujus.*

Compos. Sumatur G punctum utcunque in latere H G dati anguli; & à G ducatur ad H K perpendicularis G K. [y] Fiat autem T. R :: M K × K H. K Gq. & connectatur M G: dein fiat ang. A X C = [z] ang. K M G; & ab occursu C [z] ducatur tangens C D. Dico factum. — y *Not.* z 49. *hujus.*

Ducatur enim C E axi perpendicularis: & propter X E. E C [a] :: M K. K G. ac [b] ideò X Eq. E Cq :: M Kq. K Gq. & E Cq. X E × E D [c] :: (R. T :: [d]) K Gq. M K × K H; erit ex æquo X Eq. X E × E D. :: M Kq. M K × K H. [e] hoc est X E. E D :: M K. K H. Verùm E C. X E [f] :: K G. M K. Ergo rursus ex æquo E C. E D :: K G. K H. ergo quum anguli E, K recti sint, [g] erit ang. E D C = K H G. ergo factum. — a *constr.* & 4.6. b 22.6. c 37.1. *hujus.* d *constr.* e 1.6. & 11.5. f *priùs & inversè.* g 6. 6.

Quòd verò X C sectioni occurrit, sic ostenditur: Ducatur A F ad X A perpendicularis, angulóque A X F fiat æqualis K H L. Cùm igitur sit M K × K H. K Gq (:: [h] T. R [k] ::) X Aq. A Fq [l] :: H Kq. K L q) [m] ⊏ H Kq. K Gq. [n] erit M K × H K ⊏ H Kq & proinde M Kq ⊏ M K × H K. & M Kq. K Gq [o] ⊏ (M K × H K. K Gq [p] ::) X Aq. A Fq. quare X Eq. E Cq ⊏ X Aq. F Aq. & X E. E C [q] (hoc est X A. A N) ⊏ X A. A F. [r] ergo A N ⊐ A F. quare X C secat angulum E X F; & [s] propterea sectioni occurrit. — h *constr.* k 1. *hujus.* l 4. & 22. 6. m *constr.* et 8.5. n 10. 5. o 8. 5. p *priùs.* q 4. 6. r 10. 5. s 3. *hujus.*

Sit tertiò sectio ellipsis, cujus axis A B, centrum X. — Fig. 164. 165.

Analysis. Tangat C D, faciens angulum D parem dato G; jungatúrque X C, & sit C E axi perpendicularis. Est itaque data ratio C Eq ad E D × E X [a] (eadem quæ R ad T). Item ratio C Eq ad E Dq [b] datur (ob datos angulos D, & E); [c] ergo datur ratio E Dq ad E D × E X. [d] hoc est ratio E D ad E X. [c] ergo ratio E X ad C E datur. [e] quare datur angulus E X C, & hinc [f] positio rectæ X C, & inde punctum C, adeóq; [g] positio tangentis C D. — a 37.1. *hujus.* b 40. *dat.* c 8. *dat.* d 1.6. e 41. *dat.* f 29. *dat.* g 49. *hujus.*

h *Not.* k 49. *hujus.* l *constr.* & 4. & 22. 6. m 37. 1. *hujus.* n *constr.* o 1. 6. p *constr. et* 4. 6. q 6. 6.

Compos. Sumpto utcunque puncto F in latere dati anguli, ducatur F H ad G H perpendicularis; & fiat R. T :: [h] F Hq. G H × H K; junctâque K F, fiat ang. A X C = H K F; & ab occursu C [k] ducatur tangens C D. Dico factum. Nam ductâ C E ad A B perpendiculari, propter X Eq. E Cq [l] :: K Hq. H Fq. & E Cq. E D × X E :: [m] R. T :: [n] H Fq. H G × K H. erit ex æquo X Eq. E D × X E :: K Hq. H G × K H. [o] hoc est X E. E D :: K H. H G. Item E C. X E :: [p] H F. H K. ergo rursus ex æquo E D. E C :: H G. H F. Unde cùm ang. E [n] = H, [q] erit quoque ang. D = G. Ergo factum.

Not. Fieri debet R. T :: F Hq. G H × H K. Itaque $\frac{T \times F Hq}{R \times G H} =$ H K.

Compos. Fiat R. T :: F H. $Q = \frac{T \times F H}{R}$; tum G H. Q :: F H. $HK = \frac{Q \times FH}{GH} = \frac{T \times FH \times FH}{R \times GH}$

Prop. LI. Probl. 8.

Fig. 166.

Datâ coni sectione lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto (Z) æqualem.

a 50. *hujus.* b *cor.* 46. 1. *h.* c *constr.* d 29. 1.

In parabola facilè conficitur. [a] Tangat enim hanc utcunque C D faciens cum axe A B angulum D parem dato Z; & per tactum C ducatur C E ad A B parallela: [b] Liquet C E esse diametrum, & angulum D C E alterno C D A, [c] (hoc est dato Z) [d] æquari. *Q. E. F.*

Fig. 167. 168.

In hyperbola verò, cujus axis A B, centrum E.

e 1. 6. f 36. 3. & 7. 5. g 37. 1. *hujus.* h 3. 3. k 34. 1.

Analysis. Tangat C D faciens angulum E C D parem dato; Trigono autem C D E circumscribatur circulus; & ductâ per C ad axem perpendiculari G C Z, per V centrum circuli ducantur V Q ad Z G, & V Y ad E G parallelæ, & sit C S ad G E parallela. Estque Z G. C G [e] :: (Z G × G C. C Gq [f] :: E G × G D. C Gq [g] ::) T. R. ergo dividendo M C. C G :: T—R. R. & bipartiendo antecedentes [h] Y C. C G. [k] (hoc est V S. S Q) :: $\frac{T—R}{2}$. R. Hinc

l 33. 3. m 30. 6.

Compos. Exponatur utcunque recta F H, super quâ [l] describatur segmentum circuli capiens angulum (ut F K H) parem dato Z. A circuli autem centro N ducatur N O ad F H perpendicularis, [m] secetúrque

túrque N O in P, ut sit NP. PO :: $\frac{T-R}{2}$ R. ducatúrque P K ad FH parallela, circulum secans in K, & per K ducatur K L ad protractam F H perpendicularis; & producatur L K M, & perpendicularis huic ducatur N X. Junctâ denique K F, fiat ang. AEC = ang. LFK; & per occursum C [n] ducatur sectionem contingens C D. Dico factum. n 49 *hujus.*

Ducatur axi perpendicularis C G; & quoniam $\frac{T-R}{2}$. R.[o] :: NP. o *constr.* p 1. 6.
PO (X K. K L) erit (duplando antecedentes) T—R. R :: M K . K L. q 36. 3. r 37. 1. *hujus.*
& componendo T. R :: M L . K L :: [p] M L × K L . q (F L × H L). s 23. 6.
K Lq :: T. R :: [r] E G × D G. C Gq. Est ergo F L. K L + H L. K L t *constr.* u 4. 6.
[s] (F L × H L. K Lq) = E G. C G + D G. C G (E G × D G. CGq).
atqui (ob [t] similia trigona F L K, E G C) [v] est F L. K L = E G. CG.
ergo H L . K L :: D G . C G . [x] ergo anguli H K L, D C G pares x 6. 6.
sunt, & [y] proinde reliqui F K H, E C D etiam pares sunt. *Q.E.D.* y 3. *ax.* 1. z 1. *hujus.*

Quòd verò E C sectioni occurrat, sic ostenditur; sit E T asymptotos, & axi A B ducatur perpendicularis A T. Estque E A q. A T q a *constr.*
[z] :: (T. R :: [a] F L × L H. L Kq) [b] $\sqsupset$ F Lq. K Lq, [c] vel E Gq. C Gq. b 8. 5.
ergo ang. A E T $\sqsubset$ ang. A E C; [d] & proinde E C sectionem secat. c *prius.* d 2. *hujus.*

Coroll. Si sit F L × H L. K Lq :: E G × D G. C Gq. erunt trigona H L K, D G C similia.

Prop. LII.

Si ellipsim (cujus Axes A B, C D, & Centrum E) recta linea (GL) contingat; angulus (L F E), quem facit cum diametro (E F) per tactum (F) ducta, non est minor angulo (LCA) deinceps ei (A C B), qui lineis (A C, B C) ad mediam sectionem (C) inclinatis continetur. Fig. 169. 170. 171.

Sit primò E F ad B C parallela: ergo cùm sit A E [a] = E B, [b] erit A H = H C ergo, cùm E F [c] sit diameter, [d] erit A C tangenti G L parallela: unde ang. L F H [e] = (C H E [e] =) L C H. a *hyp.* b 2. 6. c *cor.* 47. 1. *huj.*

Sed non sit E F ad B C parallela. ergo ductâ F K ad A B perpendiculari [f] erunt anguli L B E, F E K inæquales, & trigona C B E, F E K dissimilia. Non igitur est E Kq. K Fq :: (B E q. (A E × E B). E Cq, [f] hoc est T. R; [g] hoc est) G K × K E. K Fq. ergo E Kq, & G K × K E sunt inæqualia, & proinde G K, K E inæquales sunt. [h] Capiat circuli segmentum M Y N angulum parem angulo A C B: [k] ergo id semicirculo majus est (nam ob A E, vel B E [l] $\sqsubset$ E C, [m] est uterque angulus A C E, d 5. *hujus.* e 29. 1. f *cor. ad def. ad* 16. 1. *huj.* g 37. 1. *hujus.* h 33. 3. k 31. 3. l *hyp.* m 18. 1. *et* 32. (1.

n 10. 6. A C E, B C E semirecto major, ideóque ang. A C B obtusus). [n] Fiat N X. X M :: G K. K E & per X ducatur ipsi M N perpendicularis Y X, & connectantur M Y, N Y; bisectâque M N in T, erigatur ei perpendicularis O T P, in qua sumpto circuli centro R, ducatur R S ad Y X perpendicularis; jungantúrque M O, N O: liquet ang. N O T[o]
o 4. 1. ($\frac{1}{2}$ N O M) angulo B C E [o] ($\frac{1}{2}$ B C A) æquari; ideóque esse T Nq.
p 4. & 22. 6. T Oq [p]:: E Bq. E Cq. Est verò Y S. Γ R q (X S) [r] $\sqsupset$ O R. T R. &
q 34. 1. conversè S Y. X Y $\sqsubset$ R O. T O. & duplando antecedentes Z Y. X Y.
r 8. 5. $\sqsubset$ P O. T O. & dividendo Z X. X Y. ([o] hoc est Z X $\times$ X Y [p] (vel
o 1. 6. N X $\times$ X M). X Y q) $\sqsubset$ (P Γ. T O q :: T Nq. T Oq [r] :: E Bq. E Cq
p 35. 3. (6. r ::) G K $\times$ K E. K Fq. Itaque si fiat N X $\times$ X M. X Vq :: G K $\times$ K E.
q cor. 13. & 20. K Fq, [s] erit X V $\sqsubset$ X Y. Et quoniam N Xq. N X $\times$ X M [t] :: (N X.
r prius. X M [v] :: G K. K E [t] ::) G Kq. G K $\times$ K E. erit ex æquo N Xq. X Vq
s 10. 5. :: G Kq. K Fq. [x] & N X. X V :: G K. K F; connexâ igitur N V, [y] e-
t 1. 6. rit ang. N V X = ang. G F K. & simili discursu ang. M V X =
u constr. E F K [z] unde totus ang. N V M = G F E. atqui ang. N V M [a] $\sqsupset$
x 22. 6. N Y M (A C B). ergo ang. G F E $\sqsupset$ A C B, & qui deinceps ang.
y 6. 6. E F L $\sqsubset$ L C A. *Q. E. D.*

z 2. ax. 1.

a 21. 1.

Prop. LIII. Probl. 9.

Fig. 172. Datâ ellipsi (A B C D) contingentem lineam ducere, quæ cum
173. diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo
174. * juxta præcedentem. acuto (Y) æqualem. * Oportet autem acutum angulum
175. datum non esse minorem angulo (A C G) deinceps ei (A C B), qui lineis (A C, B C) ad mediam sectionem inclinatis continetur.

Sit primò datus ang. Y = A C G per centrum E ducatur E K ad B C parallela; & per occursum K sectionem contingens G H. Dico factum.

a hyp. Nam ob A E [a] = E B, [b] erit A F = F C: ergo cùm K E sit diameter,
b 2. 6. [c] erit A C tangenti H G parallela. ergo ang. E K G [d] = (E F C [d] =
c 5. hujus. A C G = [e]) Y. *Q. E. F.*
d 29. 1. Sin. ang. Y $\sqsubset$ A C G, erit qui deinceps Z $\sqsupset$ A C B. Exponatur
e hyp. utcunque circulus, [f] in quo segmentum M N P capiat angulum parem
f 33. 3. angulo Z; bisectâque M P in O, ducatur per O ipsi M P perpendi-
g cor. 1. 3. cularis N R [g] (in quo circuli centrum V), & connectantur M N, P N.
h 4. 1. Itaque ang. A C E [h] ($\frac{1}{2}$ A C B) $\sqsubset$ ang. M N O [h] ($\frac{1}{2}$ M N P, [k] vel $\frac{1}{2}$ Z). quare
k constr. A E. E C $\sqsubset$ M O. O N. & A Eq. E Cq. [p] (T. R) $\sqsubset$ (M Oq. q (N O $\times$ O R).
l cor. ad defin. O Nq [r] ::) O R. O N. ergo componendo T + R. R $\sqsubset$ R N. O N. & biparti-
ad 16. 1. huj. endo

q 35. 3.

r 1. 6.

endo antecedentes $\frac{T+R}{2}$. R $\sqsubset$ V N . O N. dividendóque $\frac{T-R}{2}$.
R $\sqsubset$ V O. O N. Sit $\frac{T-R}{2}$. R :: V O . O I [s] ($\sqsupset$ O N). & per I [s] 10. 5.
ducatur I *X* ad M P parallela, & per *X* ipsa *X* S T ad N R parallela,
& V Q ad M P parallela. ergo cùm $\frac{T-R}{2}$. R [t] :: (V O . O I [u] ::) [t] *constr.* (5.
[v] 34. 1. & 11.
Q S. S *X*. erit componendo $\frac{T+R}{2}$. R :: Q *X*, S *X*. & duplando
antecedentes, T + R. R :: T *X*. S *X*. & dividendo T . R :: T S. S *X*.
Connectantur igitur M *X*. P *X*, & fiat ang. A E K = ang. M P *X*. &
per occursum K ducatur G H tangens sectionem. Dico factum. Nam [x] 21. 3.
ordinatim applicetur K L. éstque H L × L E. K Lq [x] :: (T. R [y] :: T S. [y] *priùs.*
S *X* [z] ::) T S × S *X* [a] (M S × S P). S *X* q. [b] ergo H L . K L + L E. [z] 1. 6.
K L [b] (H L × L E. K Lq $\sqsupset$ M S × S P. S *X* q [c] =) M S. S *X* + S P. [a] 35. 3.
S *X*. atqui ([d] ob ang. A E K = M P *X*, & rectos ad L, & S) [e] est L E. [b] 23. 3. [c] 23. 6.
K L :: S P. *X* S. ergo manet H L. K L :: M S. *X* S. ergo ang. H K L = [d] *constr.*
M *X* S. ergo totus ang. H K E [f] = (ang. M *X* P [g] =) ang. Z. & qui [e] 4. 6.
deinceps ang. E K G = ang. Y. Ergo factum. [f] 2. *ax.* 1. [g] *constr.*

Coroll. Si H L × L E. K Lq :: M S × S P. *X* S q. Erit trigonum H L K simile trigono M S *X*.

Problema.

Linea E F coni sectionem secet, oportet huic parallelam ducere, Fig. 176.
quæ sectionem contingat. Bisecetur E F in C; & per C ducatur diameter sectioni occurrens in T; & per T ducatur T S ad E F parallela, hæc sectionem continget. Res liquidò patet.

APOLLONII
CONICORUM
LIB. III.

Prop. I.

Fig. 177. 178. 179. 180. SI coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes rectæ lineæ (A C, B D) inter se conveniant (in E), pérque tactus (A, B) ducantur diametri (A D, B C), quæ contingentibus occurrant (in D, C); triangula (A E D, B E C) ad verticem facta, sibi ipsis æqualia erunt.

Per A ducatur A F ad B D parallela. Estque (in parabola) *pgr.* A D B F [a] = triang. A C F: ablatóque communi trapezio A E B F, restat triang. A E D = triang. B E C. *Q. E. D.*

In aliis verò sectionibus (ob G F . G B [b] :: G B. G C) [d] est G F. G C. ([c] hoc est triang. G F A. G C A) [d] :: (G Fq. G Bq [e] ::) triang. G F A. G B D. [f] quare triang. G C A = G B D. & proinde (ablato vel addito communi quadrilatero) remanet triang. A E D = triang. BEC. *Q.E.D.* *Coroll.* Triang. G C A = triang. G B D.

a 42. 1. *hujus.*
b 37. 1. *hujus.*
c 1. 6.
d *cor.* 20. 6.
e 1, & 22. 6.
f 9. 5.

Prop. II.

Fig. 181. 182. 183. 184. 185. 186. Iisdem positis, si in coni sectione, vel circuli circumferentia, sumatur aliquod punctum (G), & per ipsum ducantur (K G L, F G M) æquidistantes contingentibus usque ad diametros; quadrilaterum (G L G I) factum ad (A C) unam contingentium, & ad (B C) unam diametrorum, æquale erit triangulo (A I M), quod ad eandem contingentem (A C) & ad alteram diametrum (AD) constituitur.

Nam

Nam ob triangulum GKM [a] æquale quadrilatero AKLC, liquet (addito vel ablato communi AIGK) tota, vel residua AIM, GICL æquari. a 42, *vel* 43. 1. *hujus.*

Prop. III.

Iisdem positis, si in coni sectione, vel circuli circumferentia, sumantur duo puncta (F, G) & per ipsa ducantur (FHKL, NFIM, & GHPR, NGXO) æquidistantes contingentibus, usque ad diametros, quadrilatera ((LG, RF, & LN, RN) quæ ab ipsis fiunt, in diametris constituta, inter se æqualia erunt. Fig. 187. 188. 189.

Nam quadrilat. GOLH + 4lat. HLCP [a] = 4lat. GOCP [b] = triang. ARP = [a] 4lat. MIPR + triang. AIM [c] (hoc est = 4lat. MIPR + 4lat. FLCI [d] =) 4lat. MFHR + 4lat. HLCP. [e] ergo 4lat. GOLH = 4lat. MFHR. & [f] proinde etiam quadrilat. NOLF = quadrilat. NMRG. *Q. E. D.*

a 19. *ax.* 1.
b 2. 3. *hujus.*
c 2. *ax.* 1. & 2. 3. *hujus.*
d 2, & 3. *ax.* 1.
e 3. *ax.* 1.
f 2. *ax.* 1.

Prop. IV.

Si quæ oppositas sectiones contingunt duæ rectæ lineæ (AC, BC) inter se conveniant (in C), & per tactus (A, B) ducantur diametri (ADH, BDG) contingentibus occurrentes (in F, G); triangula (ACF, BCG); quæ ad contingentes constituuntur, sibi ipsis æqualia erunt. Fig. 190.

Per H ducatur tangens HL. [a] Hæc tangenti AG parallela erit; [b] & AD = HD. quare triang. AGD. [c] = (triang. HLD [d] =) triang. BFD. Proinde (addito communi GDFC) erit triang. ACF = triang. BCG. *Q. E. D.*

a *cor.* 44. *hujus.*
b 30. 1. *hujus.*
c 4. 6. & 8. 1.
d 1. 3. *hujus.*

Prop. V.

Si, quæ oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ (ED, FD) sibi ipsis occurrant (in D), & in sectionum quavis (B) sumatur aliquod punctum (G), à quo ducantur duæ lineæ, una quidem GM æquidistans contingenti (FD), altera verò (GKHL) æquidistans ei (FE), quæ tactus (E, F) conjungit, triangulum (GHM), quod ab ipsis constituitur ad diametrum (CD) per occursum ductæ, à triangulo (KHD), quod est ad occursum contingentium, differt triangulo (FKL) facto ad contingentes, & ad diametrum (FC), quæ per tactum (F) ducta fuerit. Fig. 191.

Nam

a 29. & 38. 1. h. b hyp. c 45. 1. hujus. Nam ob [a] diametrum C D, & ordinatim applicatam F E, [b] atque G L, G M ipsis F E, F D parallelas, [c] liquet esse triang. M G H = triang. C H L + C D F = triang. K H D + F K L.

Coroll. Triang. K F L = quadrilat. M G K D.

Prop. VI.

Fig. 192. 193. Iisdem positis, si in una oppositarum sectionum sumatur aliquod punctum (K), & ab eo ducantur rectæ lineæ (K L M, K N X) contingentibus (A F, B G) æquidistantes, quæ & contingentibus (A F, B G), & diametris (A E C, B E D) occurrant; quadrilaterum (K F) ab ipsis factum ad unam contingentium (A F), & ad unam diametrorum (B D) æquale erit triangulo (A I N) quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum (A C) constituitur.

a 1. 3. hujus. b 1. 3. hujus. c 4. 3. hujus. d 1. 3. hujus. e 2. ax. 1. Nam (in 1. fig.) triang. K O N [a] = 4lat. A O M F. unde (addito communi A I K O) triang. A I N = 4lat. K F. Item (in 2 fig.) ductâ contingente C O P; [b] erit triang. C O N = 4lat. K P. additóque communi O E, triang. C P E ([c] hoc est triang. B G E, [d] hoc est triang. A F E) [c] = 4lat. K E. quare itidem addito communi E I, [e] erit triang. A I N = 4lat. K F. *Q. E. D.*

Cor. Triang. A F E = 4lat. K E.

Prop. VII.

Fig. 194. Iisdem positis, si in utraque sectione (A B, C D) sumantur aliqua puncta (K, L), & ab ipsis ducantur contingentibus æquidistantes (M K P R X, N S T L W), quæ & contingentibus & diametris occurrant, quadrilatera (K T, L E, & K Y, L R) à lineis ductis constituta ad diametros, inter se æqualia erunt.

a 2. hujus. b 2. ax. 1. c cor. 6. hujus. Nam ob quadrilat. K R F O [a] = triang. A O I, erit 4lat. K R E I [b] = (triang. A E F [c] =) 4lat. L E. [b] unde 4lat. K R T N = 4lat. L I; [b] & 4lat. K X Y O = L R. Quæ *E. D.*

Prop. VIII.

Fig. 195. Iisdem positis, pro punctis K, L sumantur C, D, in quibus diametri (A C, B D) cum sectionibus conveniant, & per ipsa ducantur contingentibus æquidistantes (D X, C T); dico quadrilaterum D C quadrilatero

drilatero F C, & quadrilaterum X I quadrilatero T O æquale esse.

Nam ob trigona A E F, B E G [a] æqualia, [b] erit AE. EG :: B E. E F; & [c] conversè, A E. A G :: B E. B F. item A C. A E :: ([d] 2. 1[d] ::) B D. B E. ergo ex æquali A C. AG :: BD. B F. ergo [e] triang. ACT. A G H :: triang. B D X. B F H. atqui triang. A G H [f] = B F H. ergo triang. A C T [g] = B D X : [h] quare 4lat. C H = 4lat. D H. & 4lat. C F = 4lat. D G. Adhæc triang. C E O [k] = triang A E F [l] = triang. B E G [k] = triang. D E I. [m] ergo 4lat X I = T O. *Quæ E. D.*

a 1. *hujus.*
b 15. 6.
c *cor.* 19. 5.
d 30. 1.
e 22. 6.
f 1. *hujus.*
g 14. 5.
h 3. *ax.* 1.
k 8. 1.
l *cor.* 1. *hujus.*
m 2. *ax.* 1.

Prop. IX.

Iisdem positis, si alterum quidem punctum, ut K, sit inter diametros, alterum verò sit idem quod unum punctorum C, D, ut C; & ducantur æquidistantes; dico triangulum C E O æquale esse quadrilatero K E, & quadrilaterum L O ipsi L M æquale esse. Fig. 196.

Nam triang. C E O [a] = (triang. A E F [b] =) 4lat K E. [c] ergo triang C R M = 4lat. K O. & 4lat. L M = 4lat. L O.

a 4. *hujus.*
b *cor.* 6. *huj.*
c 3. *ax.* 1.

Prop. X.

Iisdem positis sumantur K, L, non tamen in punctis, in quibus diametri sectionibus occurrunt, demonstrandum est quadrilaterum L T R X quadrilatero ω X K I æquale esse. Fig. 197.

Nam triang. T Y E — Y ω L [a] = (triang. B E G [b] = triang. A E F [a] =) triang X E I — X R K. [c] ergo triang. T Y E + X R K = triang. X E I + Y ω L. additóque utrinque spatio K X E Y L χ, [c] erit 4lat. L T R χ = ω χ K I. *Q. E. D.*

a 43. 1. *hujus.*
b 1. *hujus.*
c 1. *ax.* 1.

Prop. XI.

Iisdem positis, si in quavis sectione (A B) sumatur punctum B, & ab ipso lineæ æquidistantes ducantur; una quidem (B M) contingenti (A E) æquidistans, altera verò (B L) æquidistans ei (A D) quæ tactus conjungit; triangulum (B F M) quod ab ipsis fit ad diametrum (G M) per occursum (E) contingentium ductam, à triangulo (AKL) contento lineâ contingente (A K) & diametro (A H L) per tactum, differt triangulo (K E F), quod ad contingentium occursum constituitur. Fig. 198.

K Nam

a 45. 1 *hujus.* Nam triang. B M F [a] = (triang. L H F + triang. H A E [b] =)
b 19. *ax.* 1. triang. A K L + triang. K F E.
c 3. *ax.* 1. *Cor.* 4 lat. B K E M [c] = triang. A K L.

Prop. XII.

Fig. 199. Iisdem positis, si in una sectione (AB) sumantur duo puncta (B,K), & ab utrisque similiter ducantur æquidistantes (B L M N, K O X P ad A D; & B X K, K L S ad B E); quadrilatera (B P, K R) ab ipsis constituta, æqualia erunt.

a cor. 11. *huj.* Nam quia triang. A O P [a] = 4lat K O E S; & triang. A M N [a] = 4lat B M E R; [b] erit 4 lat. M O P N (= triang A O P — triang.
b 3. *ax.* 1. A M N) [b] = (4lat K O E S — 4lat B M E R [b] =) 4lat K X R S
c 2. *ax.* 1. — 4lat B M O X. [c] unde 4lat K X R S = (4lat M O P N + 4lat B M O X =) 4lat B X P N. *Q. E. D.*

Prop. XIII.

Fig. 200. Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D), quæ conjugatæ appellantur, rectæ lineæ (A F, B E) contingentes sectiones (A, B), quæ deinceps sunt, in unum punctum (E) conveniant, & per tactus (A, B) ducantur diametri (A H C, B H D); triangulâ (B F H, A G H), quorum communis vertex est sectionum centrum (H), inter se æquales erunt.

a 20. 2. *hujus.* Per puncta A, & H ducantur A K, L H M ad B E parallelæ; [a] li-
b 4. 6. quétque esse L M, D B diametros conjugatas. Itaque K H. H B [b] (hoc
c 38. 1. *hujus.* est A H. H F) [c] :: H B. H G. [d] ergo triang. A G H [d] = triang. BHF.
d *Not.* *Q. E. D.*
e 12. 6. *Not.* [a] Sit H X. H F :: (H B. H G [f] :: A H. H F) [g] ergo H X =
f 11. 5. A H. & ideo triang. A E H [h] = triang. H G X [k] = triang. B H F.
g 9. 5.
h 1. 6.
k 15. 6.

Prop. XIV.

Fig. 201. Iisdem positis, si in quavis sectione (B) sumatur punctum (X), & ab ipso ducantur lineæ (X R S, X O T) æquidistantes contingentibus usque ad diametros (B H D, A H C); triangulum (O H T), quod ad centrum (H) constituitur, à triangulo (X T S) circa eundem angulum (T) differt triangulo (H B F, vel A G H) basin habenti lineam contingentem (B F, vel A G) & verticem sectionum centrum (H).

ducatur

Ducatur A Y ad B F parallela; & propter [a] conjugatas diametros a 20. 2 *hujus.*
L M, D B; & huic ordinatim applicatam A Y, [b] erit A Y. Y G [c](hoc b 40. 1 *hujus.*
est X T. T S) = H Y. Y A [c] (H B. B F) + T. R. [d] quare triang. c 4. 6. d 41. 1. *hujus.*
O H T = (triang. X T S + triang. B F H. [e] =) triang. X T S + e 13. *hujus.* &
triang. A G H. *Q. E. D.* 1. *ax.*

Prop. XV.

Si oppositarum sectionum (A B, G S, T, X) quæ conjugatæ appellantur, unam (A B) contingentes rectæ lineæ (A D E, B D C) conveniant (in D), & per tactus (A, B) ducantur diametri (A H F, B H T); sumatur autem punctum (S) in quavis (G S) sectionum conjugatarum, & ab ipso ducantur contingentibus æquidistantes (S L, S Y) usque ad diametros (B T, A F) triangulum (S L Y), quod ab ipsis ad sectionem constituitur, majus est quàm triangulum (H L F), quod ad centrum (H), triangulo (H C B) basin habenti lineam contingentem (B C) & verticem (H) centrum sectionum. Fig. 202. 203.

Ducantur X H G ad B C, & G I K ad A E, & S O ad B T pa- a 12. 6. b 15. 5. c 11. 6.
rallelæ. Fiántque D B. B E [a] :: M N. 2 B C [b] :: M P ($\frac{1}{2}$ M N). B C. d 20. 2. *hujus.*
[c] atque X G. T B :: T B. R. Liquet X G, B T [d] fore conjugatas di- e 47. 1. *hujus.*
ametros; & S O (vel L H) [e] ordinatim applicari ad X G, & [f] M N f 51. 1. *hujus.* g 4. *def.* ad 16.
fore rectum latus figuræ ad B T, [g] & R rectum latus figuræ ad X G. 1. *hujus.*
Porro D Bq. D B × B E [b] :: (D B. B E [k] :: M P. B C [h] ::) M P × h 1. 6.
B H. [l] (H Gq). B C × B H. permutandóque D Bq. H Gq [m](hoc est k *constr.* (6.
triang. D B E. triang. G H I) :: D B × B E. B C × B H [n] :: triang. D B E. l *priùs.* & 17.
triang. C B H. unde triang. G H I [o] = triang. C B H. Atqui H L. m 22. 6.
L F. [p] :: (H B. B C [q] :: H B. M P [r] (R. X G) + M P. B C [s] (D B. n *Not.*
B E vel G H. H I) =) R. X G + G H. H I [t] = H L. L F. [v] unde o 9. 5.
triang. S L Y = (triang. H L F + triang. H G I [x] =) triang. H L F p 4. 6. q 5. *def.* 6.
+ triang. C B H. *Q. E. D.* r *cor.* 20 2 *hujus.* & 15. 5.

Not. D B × B E. B C × B H :: triang. D B E. triang. C B H. s *constr.*
Nam ducantur C V, D Q ad B H perpendiculares. Estque D Q × t 11. 5.
B E. D B × B E [a] :: (D Q. D B [b] :: C V. C B [a] ::) C V × B H. C B × u 41. 1. *hujus.*
B H. & permutando D Q × B E [c] (hoc est 2 triang. D B E). C V × x 2. *ax.*
B H [c] (2 triang. C B H) :: D B × B E. C B × B H [d] :: triang. D B E. a 1. 6. b 4. 6.
triang. C B H. c 41. 1.

 Prop. d 11. & 15. 5.

Prop. XVI.

Fig. 204. 205. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (AC, BC) in unum conveniant (in C); & ab aliquo puncto (D) eorum, quæ sunt in sectione, ducatur linea (DF) uni (BC) contingentium æquidistans, quæ & sectionem, & alteram (AC) contingentium secet (in E, & F); ut quadrata contingentium (BC, AC) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (FE, ED) quæ interjiciuntur inter sectionem & contingentem, ad quadratum lineæ (AE) inter æquidistantem (FE) & tactum (A) interjectæ.

a 46. & 47. 1. b 6. 2. (huj. c 1. hujus. d 16. 5. & 22. 6. e 19. 5. f prius. g 2. hujus. h 22. 6.

Per A, B ducantur diametri AGH, KBL; & DN ad AC parallela. [a] Liquet esse FK = KD. [b] unde FE × ED + DKq = EKq. Item CBq. triang CBL [c] (triang CAH) [d] :: EKq triang. EKL [d] :: DKq. triang DKN [e] :: EKq — DKq. triang EKL — triang DKN (hoc est [f] ::) FE × ED. 4lat DL ([g] = triang AEG). ergo permutatim CBq. FE × ED :: (triang CAH. triang AEG [h] ::) CAq AEq. vel iterum permutando CBq. CAq :: FE × ED. AEq. *Q. E. D.*

Coroll. 1. FE × ED. CBq :: AEq. ACq.

2. $\left.\begin{array}{l}\text{DBq. triang. DKN ::}\\ \text{CBq triang. CBL ::}\end{array}\right\}$ FE × ED. 4lat. DL.

Prop. XVII.

Fig. 207. 208. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (AC, BC) in unum conveniant (in C); sumantur autem in sectione duo quævis puncta (D, E), & ab iis ducantur lineæ (EFIK, DFGH) contingentibus æquidistantes), quæ & sibi ipsis, & * lineæ occurrant; ut quadrata contingentium (AC, BC) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (KF, FE), quæ interjiciuntur inter sectionem, & linearum occursum (F), ad rectangulum quod lineis (HF, FD) similiter sumptis continetur.

* sectionis

* Cor. 2. præc. a 3. hujus. b 16. 5. & 22. 6. c 1. hujus.

Per A, B ducantur diametri AMLN, BXOP, & DX, EM tangentibus parallelæ. Estque KF × FE. 4lat FM [a] (vel 4lat. FX) * :: (EIq triang EIM [b] ::) ACq. triang ACN [c] (vel triang BCP). Similique discursu, HF × FE. 4lat FX :: CBq. triang BCP. & inversè 4lat FX. HF × FE :: triang. BCP. CBq. ergo

ergo ex æquali KF × FE. HF × FE :: ACq. CBq. *Q. E. D.* Fig. 209.

Si punctum F intra sectionem cadat, similis est discursus, nisi quòd *pro.* 6. 2. adhiberi debeat 5. 2 *Elem.* (in præcedenti.)

Prop. XVIII.

Si oppositas sectiones (AB, MN) contingentes duæ rectæ lineæ (ACLE, BCH) inter se conveniant (in C); sumatur autem in quavis sectione (MN) aliquod punctum (D), & ab eo ducatur linea (DFGE) uni contingentium (BC) æquidistans, quæ & sectionem, & alteram contingentium secet in (F, & E): ut quadrata contingentium (BC, CA) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (FE, ED), quæ interjiciuntur inter sectionem & contingentem (AE) ad quadratum lineæ (AE) inter æquidistantem (FE), & tactum (A) interjectæ. Fig. 210.

Ducatur DX ad AE parallela. Estque FE × ED + DOq[a] = OEq. ac BCq. triang BCL[c] (vel triang ACH)[b] :: (OEq. triang, OEL[b] :: DOq. triang DOX[d] :: FE × ED. 4lat. DL[c] (vel triang. AEG). itemque triang. ACH. ACq[b] :: triang. AEG. AEq. Ergo ex æquali BCq. ACq :: FE × ED. AEq. *Q. E. D.*

a 48. 1. *huj.* & 6. 2.
b 16. 5. *et* 22. 6
c 1. *hujus.*
d 19. 5.
e 6. *hujus.*

Prop. XIX.

Si quæ oppositas sectiones contingunt duæ rectæ (AF, DF) in unum conveniant (in F), & ducantur contingentibus æquidistantes, (GHIKL, MNXOL) quæ & sibi ipsis & sectioni occurrant; ut quadrata contingentium (AF, FD) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (GI, LI) quæ interjiciuntur inter sectionem, & linearum occursum, ad rectangulum, quod lineis (ML, LX) similiter sumptis continetur. Fig. 211.

Sint HAEC, NDEB diametri, & XR, IP tangentibus AF, DF parallelæ. Estque AFq. triang AFS[a] (vel triang DFT)[b] :: (HLq. triang HLO[b] :: HIq. triang HIP[c] ::) GL × LI. 4lat TO[d] (vel 4lat KX). itemque triang DFT. DFq[c] :: 4lat KX. ML × LX. ergo ex æquo AFq. DFq :: GL × LI. ML × LX. *Q. E. D.*

a 4. *hujus.*
b 16. 5. *et* 22. 6
c 2 *cor.* 16. *huj.*
d 7. *hujus.*

Prop. XX.

Si quæ oppositas sectiones (AB, CD) contingunt duæ rectæ lineæ (AF, CF) sibi invicem occurrant; & per occursum (F) ducatur linea Fig. 212.

nea

nea (B F H D) tactus conjungenti (A C) æquidistans, quæ secet utramque sectionem (in B D); ducatur autem alia linea (G L S M N X) æquidistans eidem, sectionésque & contingentes secans: erit ut rectangulum contentum lineis (B F, F D), quæ inter occursum sectionum, & sectones interjiciuntur, ad quadratum lineæ contingentis (A F), ita rectangulum, quod continetur lineis (G L, L X) intersectiones, & contingentem interjectis, ad quadratum lineæ (A L) ad tactum abscissæ.

a 38. et 39 2. *hujus.* Sint A E H, E F diametri; ducantúrque G P, B R ad A E parallelæ. Estque B Fq. [a] (B F × F D). triang B F R [b] (triang A F H)
b 45. 1. *hujus.* [c] :: L Sq. triang L S H [d] :: G L × L X. 4lat G L F P [e] (triang A L N).
c 16. 3. & 22. Item triang A F H. A Fq [c] :: triang A L N. A Lq. ergo ex æquo
d 19. 5. (6. B F × F D. A Fq :: G L × L X. A Lq. *Q. E. D.*
e 5. *hujus.*

Coroll. Triang. B F R. B F × F D :: 4lat G L F P. G L × L X.

Prop. XXI.

Fig. 213. Iisdem positis, si in sectione sumantur duo puncta (G, K), & per ipsa ducantur rectæ lineæ; una quidem (N X G O P, vel K S T) contingenti (A F) æquidistans; altera verò (G L M, vel K O V χ Ψ ω) lineæ (A C) tactus conjungenti æquidistans; quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant: Erit ut rectangulum contentum lineis (B F, F D), quæ interjiciuntur inter occursum contingentium, & sectiones, ad quadratum contingentis (A F); ita rectangulum contentum lineis (K O, O ω) inter sectiones, & linearum occursum interjectis, ad rectangulum, quod lineis (N O, O G) similiter sumptis continetur.

a 41. 1. *huj.* Nam A F q. triang A F H [a] (triang B Y F) [b] :: X O q. triang.
b 46. 5. *et* 22. 6 X O Ψ [b] :: X G q triang X G M [c] :: N O × O G. 4lat G O Ψ M
c *cor.* 16. *huj.* [d] (4lat K O R T). [e] Item triang. B Y F. B F × F D :: [e] 4lat K O R T.
d 12. *hujus.* K O × O ω. ergo ex æquali A F q. B F × F D :: N O × O G. K O ×
e *cor. præced.* O ω. atque inversè.

Prop. XXII.

Fig. 214. Si oppositas sectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (A C, B D) inter se æquidistantes; ducantur autem aliæ lineæ, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant (una quidem K E M) contingentibus æquidistans, altera verò (G X E) æquidistans ei (A B), quæ tactus conjungit: erit ut transversum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam (A B) tactus conjungentem constituitur; ita rectangulum contentum

lineis

lineis (G E, X E) inter sectionem, & linearum occursum interjectis, ad rectangulum, quod lineis (K E, E M) similiter sumptis continetur.

Ducantur G F, X N ad A C parallelæ: hæ (& parallela his K M) ad [a] diametrum A B ordinatim applicantur: quare B L × L A. K L q [b] :: (A B. R [b] :: B N × N A [c] (F A × N A). X N q. [d] :: B L × L A — F A × N A. K L q — X N q (— E L q) (hoc est) [e] :: F L × L N. [f] K E × E M. atqui F L × L N [g] = G E × E X. [h] ergo A B. R :: G E × E X. K E × E M. *Q. E. D.* a 31. 2. *hujus.* b 21. 1. *hujus.* c *cor.* 16. 1. *huj.* d 19. 5. e *Not.* f 5. 2. g 34. & *sch.* 48. 1.

Not. [e] Quod F L × L N = B L × L A — F A × N A sic patet. Bisecetur B A, vel F N in Z. Estque B L × L A + Z A q [k] = (Z L q [k] = F L × L N + Z N q [l] =) F L × L N + F A × A N + Z A q (nam Z N q [k] = B N × A N + Z A q). ergo B L × L A = F L × L N + F A × A N. h 7, & 11. 5. k 2. 6. l 2. *ax.* 1.

Prop. XXIII.

Si in oppositis sectionibus (A B, C D, E F, G H), quæ conjugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ (A L, E L), contingentes oppositas sectiones (A B, E F) conveniant in quavis sectione (in L); ducantur autem aliquæ lineæ (G O, H S) æquidistantes contingentibus (A L, E L); quæ & sibi ipsis, & aliis sectionibus (C D, G H) occurrant: ut quadrata contingentium (A L, E L) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (G X, X O) quæ inter sectiones, & occursum (X) interjiciuntur ad rectangulum, quod lineis (H X, X S) similiter sumptis continetur. Fig. 215.

Ducantur S T ad A L, & O Y ad E L parallelæ. Estque H P * = P S, & G M * = M O; ac E L q. triang. E V L. [a] (triang. A L χ) [b] :: P X q. triang P N X [c] :: H X × H S. 4lat T N X S [d] (X R Y O). Item triang. A L χ. A L q [c] :: 4lat. X R Y O. G X × X O. ex æquo igitur E L q. A L q :: H X × X S. G X × X O. Quod *E. D.* a 4 *hujus.* b 16. 5. *et* 22. c *ut sæpe pius.*

Prop. XXIV.

Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D) quas conjugatas appellamus, à centro (E) ad sectiones ducantur duæ lineæ (A C, D B) quarum una quidem (A C) sit transversa diameter, altera verò (D B) recta; & ducantur aliæ lineæ (F L, M R) his diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant, ita ut occursus (*X*) sit in loco inter quatuor sectiones intermedio: rectangulum contentum portionibus (F X, X L) lineæ diametro transversæ æquidistantis, unà Fig. 216. 217.

cum

cum eo, ad quod rectangulum ex portionibus (M X, X R) lineæ æquidistantis rectæ diametro proportionem habet eandem, quam diametri rectæ (D B) quadratum ad quadratum transversæ (A C); æquale erit duplo quadrati, quod à dimidia (A E) transversæ diametri constituitur.

1 *Not.* RN × MN + NX × PX = RX × XM. Nam NX × PX + o 5. 2. OXq [o] = O Nq. [p] ergo NX × PX + OXq + RN × NM = p 2. ax. 1. (O Nq + RN × NM [o] = O Mq =) RX × XM + OXq. unde q 3. ax. 1. (auferendo O X q utrinque) [q] erit NX × PX + RN × NM = RX × XM.

2 *Not.* LX × XF + XH × XK = FK × HF (vel LH × HF) r 6. 2. Nam KX × XH + I Hq [r] = I Xq. [s] quare KX + XH + I Hq + s 2. ax. 1. LX × XF = (I Xq + LX × XF [t] = I Fq [t] =) LH × HF + I Hq. t 5. 2. & (auferendo commune I Hq) [u] erit KX × XH + LX × XF = u 3. ax. 1. LH × HF.

a 15. 5. Sint S E T, V E Y asymptoti; sitque occursus primò in angulo b 56. 1. & 1. 2 *hujus.* S E V, vel S E Y. Per A ducatur tangens S A V. Estque D Bq. A Cq [a] :: (D Eq. A Eq [b] (hoc est) :: S A × A V. A Eq [c] = S A. A E + c 23. 6. A V. A E (hoc est) [d] :: N X. X H + P X. X K [c] =) N X × P X. X H d 4. 6. × X K [e] :: D Eq + N X × P X. A E q + X H × X K [f] (hoc est ::) e 12. 5. P M × M N [g] (vel R N × M N) + N X × P X. [f] L H × H F [g] (vel f 11. 2. *hujus.* F K × H F) + X H × X K (hoc est) [h] ::) R X × X M. F K × H F + g 8. 2. *hujus.* X H × X K [k] ::) D Bq. A Cq. atqui L X × X F + X H × X K [l] = F K h 1 *Not.* × H F [f] = A Eq. ergo L X × X F + L H × H F + X H × X K = k 11. 5. 2 A Eq. *Q. E. D.* Sin occursus H sit in asymptoto, erit F H × H L l 2 *Not.* [f] = A Eq. [f] & M H × H R = D Eq. unde D E q. A Eq [n] :: M H × m 2. ax. 1. H R. F H × H L. & 2 F H × H L [m] = 2 A Eq. n 7. 5.

Prop. XXV.

Fig. 219. Iisdem positis, sit linearum ipsis A C, B D æquidistantium occursus in una sectionum (D B) atque in puncto X, ut positum est: Dico rectangulum (O X N) contentum portionibus lineæ, quæ transversæ diametro (A C) æquidistat, majus esse, majus est quàm illud, ad quod rectangulum (R X M), ex portionibus lineæ æquidistantis rectæ diametro (D B), eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transversæ, duplo quadrati ejus, quod à dimidia transversæ diametri constituitur.

a 11. 2 *hujus.* * 10. 2. *hujus.* b *supr. in præc.* Nam D Eq [a] (id est P M × M H). E Aq* (L K × K S) :: [b] P X × X H.

XH. SX × XL [c] :: RX × XM. TX × XK :: DEq. EAq; [d] atqui OT × TN = 2AEq. [c] ideóque OX × XN [e] (hoc est TX × XK + OT × TN) = TX × XK + 2AEq. *Q. E. D.*

c 19.5. Not. 1.
d 23. 2 hujus.
e 2. ax. 1.
f Not.

Not. * PX × XH — PM × MH = RX × XM. & × SX × XL — LK × KS = TX × XK.
Not. OX × XN [z] = TX × XK + OT × TN.

* vid. Not. ad 22. hujus.
x v. not. ad 24 h.
z v. not. ad 24 h.

Prop. XXVI.

Fig. 220.

Quòd si æquidistantium occursus ad punctum X sit in una sectionum AC, ut positum est; rectangulum (LXF), quod continetur portionibus lineæ æquidistantis transversæ diametro (AC), minus erit quàm illud, ad quod rectangulum (RXG), portionibus alterius lineæ contentum, eandem proportionem habet quàm rectæ diametri quadratum, ad quadratum transversæ, duplo quadrati ejus, quod à dimidia transversæ diametri constituitur.

Nam (simili ratione) DEq. [a] (hoc est VG × GS, [b] vel RS × SG). AEq :: VX × XS. KX × XH [c] :: RS × SG + VX × XS. AEq + KX × XS [d] (hoc est) :: RX × XG. AEq + KX × XH. Atqui AEq [e] = (LH × HF =) KX × XH — LX × XF. & [f] proinde 2AEq + LX × XF = KX × XH + AEq.

a 11. 2 hujus.
b 8. 2. hujus.
c 12. 5.
d Not.
e 11. 2. huj.
f 2. ax. 1. huj.

Not. 1. * RS × SG + VX × XS = RX × XG.
2. [g] LH × HF = KX × XH — LX × XF.

* vid. Not. 2. ad 24. hujus.
g v not. ad 22. hujus.

Prop. XXVII.

Fig. 221.

Si in Ellipsi vel circuli circumferentia ducantur conjugatæ diametri (AC, BD), quarum altera quidem (AC) sit recta, altera verò (BD) transversa: & ducantur duæ rectæ lineæ (KM, NH) diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant: quadrata ex portionibus (NF, FH) lineæ æquidistantis transversæ diametro, quæ inter sectionem, & linearum occursum interjiciuntur, assumentia figuras (KF × Z, & FM × Y) ex portionibus (KF, FM) lineæ, quæ rectæ diametro æquidistat, inter linearum occursum (F), & sectionem interjectis, similes & similiter descriptas ei, quæ ad rectam diametrum constituitur, quadrato transversæ diametri æqualia erunt.

Ducatur NX ad AE parallela. Sintque R, S recta latera pro diametris

a 12. 6. metris BD, AC; [a]fiantque NX. V :: AC. S :: KL. X. Et propter
b 16. 5. R, AC, BD, S ∺ [b] erit R. BD [c] hoc est NXq. DX × XB) :: AC.
c 21. 1. *hujus.* S [e] :: NX. V [f] :: NXq. NX × V. Unde NX × V [g] = (DX × XB
e *constr.* [h] =) BEq − XEq (− NGq). Simili discursu KL × X = BEq −
f 1. 6. FGq. [k] ergo NX × V + KL × X + NGq + FGq = 2BEq.
g 9. 5. [l]atqui 2NGq + 2FGq = HFq + FNq. & 2NX × V + 2KL
h 5. 2. × X (hoc est 2FL × V + 2KL × X) [m] = FM × Y + KF × Z. [n]er-
k 2. *ax.* 1. go HFq + FNq + FM × Y + KF × Z = 4BEq [o] = BDq.
l 9. 2. *Q. E. D.*
m *ex.* 9. 2.
n 2 *ax.* 1.
o 4. 2.

Prop. XXVIII.

Fig. 222. Si in oppositis sectionibus (A, BC, D), quas conjugatas appellamus, ducantur diametri conjugatæ (AC, BD), ut earum altera (AC) recta sit, altera (BD) transversa; & ducantur duæ rectæ lineæ (FK, LN) diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant: Quadrata ex portionibus (LG, GN) lineæ æquidistantis rectæ diametro (AC), quæ inter linearum occursum, & sectiones interjiciuntur, ad quadrata ex portionibus (FG, GK) alterius lineæ, quæ transversæ diametro (BD) æquidistant, inter sectiones, & occursum linearum interjectis, eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transversæ.

* 15. 5. Ordinatim applicentur FO, & LX. Estque AFq. EBq :: * ACq.
a *cor.* 19. 6. BDq [a] :: R.BD :: FOq (EHq). DO × OB [b] :: CX × XA. LXq (EMq)
b 21. 1. *hujus.* [c] :: AEq. CX × XA + EHq. EBq + DO × OB + FMq
c 12. 5. [d] (hoc est) :: XEq + EHq. OEq + EMq. [e] (hoc est) :: LMq.
d 6. 2. + GMq. FHq + GHq [e] :: 2LMq + 2GMq. 2FHq + 2GHq
e 15. 5. [f](hoc est) :: LGq + GNq. FGq + GKq [g] :: ACq. BDq. *Q. E. D.*
f 9. 2.
g 11. 5.

Lemma pro seq.

Fig. 223. Sit linea recta composita $a + b + c + a$. Erit Quad. $a + b +$ Quad. $c + a = bb + cc + 2a \times : b + c + a$. hoc est $aa + bb + 2ba + cc + aa + 2ca = bb + cc + 2ba + 2ca + 2aa$.

Prop. XXIX.

Fig. 224. Iisdem positis, si linea (LN) rectæ diametro æquidistans, secet asymptotos; quadrata ex ipsius portionibus (XG, GO), quæ inter linearum occursum, & asymptotos interjiciuntur, assumentia dimidium quadrati facti à recta diametro, ad quadrata ex portionibus (FG, GK,)

G K) lineæ (F K) quæ tranſverſæ diametro æquidiſtat, inter occurſum linearum, & ſectiones interjectis, eandem proportionem habent, quàm rectæ diametri quadratum, ad quadratum tranſverſæ.

Nam ob L X [a] = O N, erit L Gq + G Nq [b] = X G q + G Oq a 16.2. *hujus.*
+ 2 L X × X N [c] (+ 2 A Eq). ergo X G q + G Oq + 2 A Eq b *lemm. præc.*
(+ ½ A Cq). F Gq + G Kq [d] :: L Gq + G Nq. F Gq + G Kq [e] :: c 10.2. *hujus.*
A Cq. B Dq. *Q. E. D.* d 7.5.
e 28. *hujus.*

Prop. XXX.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ (A D, C D) ſibi ipſis occurrant; & per tactus (A, C) producatur linea (A C); per occurſum verò (D) ducatur linea (DL) æquidiſtans uni (F E), aſymptoton (F E, FG), ſectionémque & lineam tactus conjungentem ſecans, bifariam dividetur (in K). Fig. 225.

Jungatur F D B M; ſitque F H = F B: ducantúrque B E, K N a 4. & 22. 6.
ad A C parallelæ. Eſtque D Nq . N Kq [a] :: (F Bq. B Eq [b] :: H B. R b *cor.* 1. 2. *huj.*
[c] ::) H N × N B. N Kq. [d] unde H N × N B = D N q. [e] item M F × c 21. 1. *hujus.*
F D = F Bq. Ergo D N q + M F × F D [f] = (H N × N B + d 9. 5.
F Bq. [g] =) F Nq ergo D N = N M. [k] quare D K = KL. *Q. E. D.* e 37. 1. *hujus.*
f 2. *ax.* 1.
g 6. 2.
h *conv.* 6. 2.
k 2. 6.

Coroll. F Bq. B Eq :: H N × N B. N Kq.

Prop. XXXI.

Si quæ oppoſitas ſectiones contingunt duæ rectæ lineæ (A C, B C) ſibi ipſis occurrant; & per tactus (A, B) linea (A B) producatur; per occurſum verò (C) ducatur linea (C H) æquidiſtans aſymptoto (EF); quæ ſectionem, & lineam tactus conjungentem ſecet; linea (C H) inter occurſum, & eam quæ tactus conjungit interjecta à ſectione bifariam dividetur (in G). Fig. 226. *Not.* E *eſt centrum.*

Ducantur rectæ C E D, & tam E K M N & G X ad A B, quàm a *cor. præc.*
K F, G L ad C D parallelæ. Eſtque N L × L K. L Gq [a] :: (E Kq. KFq b 4. & 22. 6.
[b] ::) M Lq. L Gq. [c] unde N L × L K = M Lq. [d] quare M Lq + c 9. 5.
K Eq = (N L × L K + K Eq [e] = L Eq [f] =) G X q. ergo cùm d 2. *ax.* 1.
G X q. M Lq + K E q :: X C q. L G q + K Fq; [h] erit X C q = e 6. 2.
(L Gq + K Fq =) [f] (E Xq) [k] C E × E D. [l] ergo C X = X D; f 34. 1. & c.
[m] adeóque C G = G H. h 14. 5.
k 38. 1. *huj.*
l *conv.* 5. 2.
m 2. 6.

Prop. XXXII.

Fig. 227.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ (A F, C F) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A C) producatur linea (A C); per contingentium verò occursum (C) ducatur linea (F K) tactus conjungenti (A C) æquidistans; & per punctum (H), quod conjungentem tactus (A C) bifariam secat, ducatur linea (H K) æquidistans asymptoton alteri (D E): quæ (H K) inter dictum punctum (H), & lineam æquidistantem (F K) incerjicitur, à sectione bifariam dividetur (in L).

a *cor. 30. huj.*
b 4 & 22. 6.
c 9. 5.
d 37. 1. *hujus.*
e 2. *ax.* 1.
f 6. 2.
g *Not.*
h 2. 6.
k 1. 2.
l 2. *ax.* 1.
m *priùs.*
n 2. 2.
o 3. *ax.* 1.
p *constr.*
q 3. 2.
r 1. *ax.* 1.
s 16. 6.
t 9. 5.
u *constr.*

Ducantur B E, L M ad A C parallelæ. Estque G M × M B. MLq. [a] :: (D B q. B Eq [b] ::) H M q. M Lq. [c] unde G M × M B = H Mq. [d] Item H D × D F = D Bq. [e] ergo H Mq + H D × D F = (DBq + GM × MB [f] =) DMq. [g] ergo FM = MH. [h] & propterea KL = LH.

Not. Fiat D Z = M H. Estque M D × D F + M H × DF [k] = H D × D F. [l] ideóque (addendo utrique ipsum M H q) M D × D F + M H × D F + M H q = (H D × D F + M H q [m] = D Mq [n] =) M D × D F + M D × F M. ergo (ablato communi M D × D F) MD × F M [o] = M H × D F + M Hq [p] = D Z × D F + D Z q q = FZ × Z D [r] = M D × F M. [s] quare F Z. F M :: M D. Z D. & componendo Z M. F M :: Z M. Z D. unde F M [t] = (Z D [v] =) H M.

Prop. XXXIII.

Fig. 228.

Si, quæ oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (A G, D G), sibi ipsis occurrant, & per tactus (A, D) linea (A D) producatur; per contingentium verò occursum (G) ducatur linea (C F) æquidistans tactus conjungenti (A D); & per punctum (L), quod conjungentem tactus (A D) bifariam secat, ducatur linea (L N) æquidistans asymptoton alteri (H K), conveniénsque cum sectione, & cum linea æquidistante (F C) per occursum (G) ducta: quæ (L N) inter dictum punctum (L) & lineam æquidistantem (F N) interjicitur, à sectione bifariam dividetur (in M).

a 4. & 22. 6.
b *cor. 30. huj.*
c 12. 5.
d 2. 6.
e 38. 1. *huj.*
f 34. 1. &c.
g 9. 5.
h *conv.* 5. 2.
k 2. 6.

Ducantur M P ad A D; & E K, M X ad G H parallelæ. Estque M Pq. P Lq [a] :: (H Eq. E Kq [b] :: E X × X B. X Mq [c] :: + H E q + E X × X B. E Kq + X Mq (hoc est) :: [d] H Xq (vel P Mq) [e] G H × H L + X Mq (vel) ::) [f] P Mq. G H × H L + H Pq. ergo P Lq [g] = G H × H L + H Pq. [h] quare L P = P G. & [k] consequenter L M = M N.

Prop. XXXIV.

Si in una (D C) asymptoton (D C, D E) hpperbolæ, sumatur aliquod punctum (C); ab eóque recta linea (C E) sectionem contingat; & per tactum (B) ducatur æquidistans (F G) asymptoto (D C); quæ (C G) per dictum punctum (C) transit, alteri (D E) asymptoton æquidistans, à sectione bifariam dividetur (in A.) Fig. 229.

Ducantur AH ad CD, & BK ad DE parallelæ; éstque CB [a] = a 3. 2 *hujus.*
BE; [b] ideóque CK = KD. Item KB × KD [c] = CA × CD, b 2, 6.
[d] hoc est CG × CK = CA × CD. [e] quare CG. CA :: (CD. c 12. 2 *hujus.*
CK [f] ::) 2. 1. *Q. E. D.* d *Sch.* 48. 1.
e 15. 6.
f *prius.*

Prop. XXXV.

Iisdem positis, si à sumpto puncto (C) ducatur recta linea (C F) sectionem secans in duobus punctis (A, F); erit ut tota (F C) ad eam (C A), quæ extra sumitur, ita inter sese portiones (F L, L A) illius (F A), quæ intra sectionem continetur. Fig. 230.

Ducantur C N X, K A V M, O P B R, Y F parallelæ ad D E; & a 8. 2 *hujus.*
A P S, T F R M X ad C D parallelæ. Estque A C [a] = F G; ac id- b 4. 6. & 14. 5.
circo T G [b] = (K A [c] =) D S. & C K [b] = (T F [c] =) D Y. unde D K c 34. 1.
[d] = C Y. Item rectang H K. rectang K N [e] :: (D K. K C [f] :: C Y. K C d 2 *ax.* 1.
[g] :: E C. C A [g] :: M K. K A :: [e] rectang M D. rectang A D (hoc e 1. 6.
est) [h] ::) rectang M D. rectang D B [k] (vel rectang O N) [l] :: rect. f 7. 5.
M D — rectang H K, rectang O N — rectang K N (hoc est) :: rect. g 4. 6.
M H. rectang K B :: [m] rectang M H. rect. A H (ob rectang K S [h] = h 12. 2 *hujus.*
rectang H O; & A B commune :: M V. V A [g] :: F L. L A [n] :: F C. k 3. 2 *hujus.*
C A. *Q. E. D.* l 19. 5. (et 4. 6.
m 2 & 3. *ax.* 1.
n 11. 5.

Prop. XXXVI.

Iisdem positis, si à puncto (G) ducta linea (H G) neque sectionem in duobus punctis secet, neque æquidistans sit asymptoto (C E), sed cum opposita sectione conveniat (in A); erit ut tota (A K) ad lineam (K H), quæ inter sectionem (H), & æquidistantem (K L) per tactum (B) interjicitur; ita quæ (A G) est inter oppositam sectionem (A) & asymptoton (C G) ad eam (G H), quæ inter asymptoton (C G), & alteram sectionem (H). Fig. 231.

Ducantur

a 1.6. Ducantur HM, AN ad CG parallelæ; & BX, GP, RHSN
b 4.6. parallelæ ad DE. Estque rectang NC. rectang CH [a]:: (NS. SH
c 7.5. :: [b]AG. GH [c]:: DH. GH. (ob AD = [d]GH) [b]:: CS. SG [a] :: rect
d 16.2. hujus. CR. rectang RG [e]:: rectang NC + rectang CR. rectang CH
e 12.6. [f](vel rectang LX [g] vel rectang BG) + rectang RG (hoc est) ::
f 12.2 hujus. rectang. NL. rectang RX (hoc est [h]::) rectang NL. rectang LH
g 3.2 hujus. & 4.6. :: [a]NR. RH :: [b]AK. KH :: [k] AG. GH. *Q.E.D.*
h Not. & 7.5.
k 11.5. *Not.* Rectang RX = rectang LH. ob rectang XH[l] = rectang.
l 12.2 hujus. MB. & commune rectang BH.

Prop. XXXVII.

Fig. 232. 233. 234. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam, vel sectiones oppositas, contingentes duæ rectæ lineæ (AC, BC) sibi ipsis occurrant, & per tactus (A, B) producatur linea (AB); à contingentium verò occursu (C) ducatur linea (CF) sectionem secans in duobus punctis (D, F); erit ut tota (FC) ad eam (CD) quæ extra sumitur, ita portiones (FE, ED) inter sese, quæ a linea (AB) tactus conjungente fiunt.

Ducantur diametri CH, AK; & rectæ DP, FR ad AC parallelæ, & LFM, NDO parallelæ ad AB.

a 4. & 22.6. Estque triang LMC. triang XOC :: [a] LMq. XOq [a]:: LCq
b 49 & 51.1. huj. et 1.ax.1 CXq [a]:: FCq. CDq [a]:: FMq. DOq [a]:: triang FRM. triang DPO
c 2. & 22.6. [a]:: triang LAK ([b]hoc est 4lat. LCRF). triang XAN ([b]hoc est
d 11.5. 4lat. XCPD) [a]:: LAq. AXq [c]:: FEq. EDq [d]:: FCq. CDq. [e]qua-
e 22.6. re FE. ED :: FC. CD. *Q.E.D.*

Coroll. LM. XO :: FE. ED.

Prop. XXXVIII.

Fig. 235. 236. Iisdem positis, Si per contingentium occursum (C) ducatur recta linea (CO) æquidistans tactus conjungenti (AB); & per punctum (E), quod conjungentem tactus bifariam dividit, ducatur linea (FO) secans, & sectionem ipsam in duobus punctis (F, D), & lineam æquidistantem (CO) per occursum ductam: erit ut tota (FO) ad eam (OD), quæ extra sumitur inter sectionem, & lineam æquidistantem; ita portiones (FE, ED) inter sese, quæ à linea (AB) tactus conjungente efficiuntur.

a cor. præc. Ducantur LFKM, DHGXN parallelæ ad AB; ac FR, GP
b 4.6. ad FC parallelæ. Estque FE. ED [a] :: LM. XH [b]:: LC. CX [c]:: FO.
c 2.6. d 11.5. OD [d] :: FE. ED. *Q.E.D.*

Prop.

Prop. XXXIX.

Si, quæ oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (AD, BD) sibi ipsis occurrant, & per tactus (A, B) linea (A B) producatur; à contingentium verò occursu (D) ducta linea (E G) & utramque sectionem (E, F) & lineam (A B) tactus conjungentem secet (in G): erit ut tota (E G) ad eam (F G), quæ extra sumitur inter sectionem & conjungentem tactus; ita portiones (E D, D F) inter sese, quæ inter sectiones (E, F), & contingentium occursum (D) interjiciuntur. Fig. 237.

Per centrum C ducatur A C K; & fiant E H S K, F N M X O ad A B parallelæ, ac E P F R ad A B parallelæ. Estque E H. H D [a]:: F M. M D. & H D. H S [a]:: M D. M X. unde ex æquo E H. H S :: F M. M X. [b] quare E Hq. F Mq [c] (id est triang E H P. triang F M R) :: H Sq. M Xq [c] (hoc est triang D H S. D M X.) atqui triang E H P [d] = triang A S K + triang H D S. & triang F M R [d] = triang. A X N + triang D M X. [e]quare triang H D S. triang DMX ([c]hoc est H Dq. D Mq [c] vel E Dq. D Fq) :: triang A S K. triang A X N [f] :: K Aq. A Nq. Est autem K A. A N :: E G. G F (Nam KA. A Q. [c]:: E G. G Q. & A Q. A N [c]:: G Q. G F; adeóque ex æquo K A. A N :: E G. G F). [g] ergo demum est E G. G F :: ED. DF. *Q. E. D.*

a 4. 6.
b 16. 5. & 22. 6.
c 4. 6. & 22. 6.
d 11. *hujus.*
e 19. 5.
f 22. 6.
g 11. 5.

Not. K A. A N :: E G. G F.

Prop. XL.

Iisdem positis, si per contingentium occursum (D) ducatur recta linea (F G) tactus conjungenti (A B) æquidistans; & à puncto (E), quod conjungentem tactus bifariam dividit, ducatur linea (H L) secans utramque sectionem (in H, K) & æquidistantem (F G in L) ei, quæ tactus conjungit: erit ut tota (H L) ad eam (L K), quæ extra sumitur, inter æquidistantem, & sectionem, ita portiones (H E, E K) inter sese, quæ inter sectiones, & conjungentem tactus interjiciuntur. Fig. 238.

Ducantur A C X T; & parallelæ H N M X, K O B ad A B; & H R, K S ad A D. Estque triang H R N. [a] (triang X M A + triang M N D). triang K S O [a](triang A Y P + triang P O D) [b] :: [b] H Nq. K Oq :: M Aq. A Pq (nam H N. K O [c] :: H E. E K [d] :: X A. A Y :: [c] M A. A P) [b] :: triang X M A. triang YAP [e]:: triang M N D. triang

a 11. *hujus.*
b 4 & 22. 6.
c 4. 6.
d 34. 1. & 7. 5.
e 19. 5.

f Not. triang POD[b] :: MNq. POq[b] :: NDq. DOq[f] :: HLq. LKq[g] ::
g supra, et 11.5 HEq. EKq. [h] quare HL. LK :: HE. EK. Q. E. D.
h 22.6.
k 4.6. *Not.* ND. DO :: HL. LK. Nam ND. DO[k] :: (MD. DP
l 34.7. & 7.5. [l] :: HV. VK[k] ::) HL. LK.

Prop. XLI.

Fig. 239. 240. Si parabolen contingentes tres rectæ lineæ (AE, CE, DF) inter se conveniant, in eandem proportionem secabuntur. (ED. DA :: CF. FE :: FB. BD).

a 29 2. hujus. b 35. 1. huj. c 5. 2. hujus. d 4. 6. e 4. 6. Ducatur AC, quam bisecet EG. Si hæc per tactum B transit, parallela, & [a] erit diameter. & [b] EB = BG. & DF ad AC [c] parallela. [d] Unde ED = DA. & EF = FG. [e] & DB = BF, quare liquet propositum.

* 46. 1. huj. f 35. 1. huj. g 2. 6. h 7. 5. k 15. 5. l constr. m prius. n 2. 6. o 4. 6. p 15. 5. q prius & 4. 6. Sin per aliud punctum H transeat; per H ducatur tangens KHL ad AC parallela, & diameter MBX (per B) ad EG * parallela; & ordinatim applicentur AO, CP (ab A, & C). Eritque MB [f] = BP. ideóque MF [g] = FC. & EL [g] = LC (ob EH [f] = HG). unde FC. LC [h] :: (MF. EL [k] :: MC. EC) XC. GC. item LC. CE :: (1.2 ::) GC. [l] CA. ergo ex æquali FC. CE :: XC. CA. quare inversè dividendo FC. FE :: (CX. XA ::) ED. DA (nam KA. EA [m] :: 1.2 :: BO. ON [n] :: DA. AN, & permutando KA. AD :: (EA. AN [o] ::) GA. AX. & EA. KA :: CA. GA. unde ex æquali EA. AD :: CA. AX. dividendóque ED. AD :: CX. XA). Porro, CX. XA [o] :: CP. AO [p] :: $\frac{1}{2}$CP. $\frac{1}{2}$AO (hoc est) q :: BF. DB. ergo ED. AD :: BF. DB.

Prop. XLII.

Fig. 241. 242. 243. Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus; ab extremo diametri (AB) ducantur lineæ (AC, BD) æquidistantes ei, quæ ordinatim applicata est; & ducatur alia quæpiam linea (CE) quomodocunque contingens; abscindet ex ipsis lineas (AC, BD) continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ, quæ ad eandem diametrum (AB) constituitur.

a 16. 1. huj. Per centrum F ducatur FGH ad AC vel BD parallela. In hac est [a] diameter (puta FG) ipsi AB conjugata. Item per tactum E ducatur EL ad AC parallela; & EM parallela ad AB. Estque KF. AF

AF[b] :: AF. FL. unde (in hyperbole) KF. AF. [c] (KF + AF. AF + FL (hoc est) :: KA. AL. vel (in ellipsi) per conversam rationem, & permutando KF. AF (vel FB) :: KA. AL. [d] quare KB. (FB − KF. vel FB + KF) KF :: KL. (AL − KA vel AL + KA). KA. [e] hoc est BD. FH :: LE. AC. unde BD × AC [f] = (FH × LE [g] = FH × FM = [h] FGq [k] =) $\frac{1}{4}$ TR [l] = BD × AC. *Q. E. D.* b *cor. 37. 1. h.* c 12. 5. d *inversè & conversè. vel componendo.* e 4. 6. f 16. 6.

g 34. 1. h 38. 1. *huj.* k *cor. def. ad* 16 1. *hujus.* l 1. *ax.*

Prop. XLIII.

Si hyperbolen contingat recta linea (CH), abscindet ex asymptotis (DC, DE) ad sectionis centrum (D) lineas (DC, DH) continentes rectangulum æquale ei, quod continetur lineis (DF, DG) abscissis ab altera contingente (FG), ad sectionis verticem (B), qui est ad axem (BD). Fig. 244.

Ducantur AK, BL ad DG; & AM, BN ad CD parallelæ. Estque CH [a] = 2AH; & ideò CD [b] = 2AM. & DH [b] = 2AK. unde CD × DH [c] = (4AK × AM [d] =) 4BL × BN. Simili discursu 4BL × BN = FD × DG. [e] unde CD × DH = FD × DG. *Q. E. D.* a 3. 2 *hujus.* b 4. 6. c *Sch.* 48. 1. d 12. 2 *hujus.* e 1. *ax.* 1.

Non aliter argumentabimur, etsi DB non sit axis, sed alia quæpiam diameter.

Prop. XLIV.

Si quæ hyperbolen, vel oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (CF, EG) occurrant asymptotis (DC, DE); quæ (CE, GF) ad occursus ducuntur, lineæ (AB) tactus (A, B) conjungenti æquidistantes erunt. Fig. 245. 246.

Nam ob CD × DF [a] = ED × DG, [b] erit CD. ED :: DG. DF. [c] quare CE, GF parallelæ sunt. ergo HG. GE :: HF. FC. item GE. GB :: [d] 2. 1 :: FC. CA. ergo ex æquo HG. GB :: HF. FA. inverséque GB. HG :: FA. HF. & divisè HB. HG :: HA. HF. [c] quare GF, & AB parallelæ sunt. *Q. E. D.* a 43. *hujus.* b 15. 6. c 6. 6. *&c.* d 3. 2. *hujus.*

Prop. XLV.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus, ab extremo axis (AB) lineæ (AC, BD) ad rectos angulos ducantur, & quartæ parti figuræ æquale rectangulum (AFB, AGB) comparetur ad axem ex utraque parte; quod in hyperbola quidem, & sectionibus oppositis excedat figurâ quadratâ, in ellipsi ve- Fig. 247. 248.

rò deficiat; & ducatur linea (E C) sectionem contingens, occurrénsque eis (A C, B D) quæ sunt ad rectos angulos; lineæ (CF, DG), quæ ab occursibus (C, D) ducuntur ad puncta (F, G) ex eo comparatione factâ, angulos rectos (C F D, D G C) ad ea (F, G) efficient.

a 42. *hujus.* Nam A C × B D [a] = ($\frac{1}{4}$ TR [b] =) A F × F B. unde A C. A F [c] ::
b *hyp.* F B. B D. item anguli C A F, F B D [b] recti sunt. [d] ergo ang. A C F
c 15. 6. = ang B F D. [d] & ang. A F C = ang. F D B. ergò cùm anguli
d 6. 6. A C F, A F C [e] conficiant unum rectum, etiam anguli B F D, A F C
e 32. 1. uni recto æquabuntur. unde (in ellipsi) reliquus D F C [f] rectus erit.
f 2 cor. 13. 1. Simili discursu angulus C G D rectus ostendetur.

Prop. XLVI.

Fig. 249. 250. Iisdem positis, lineæ conjunctæ æquales facient angulos (A C F, D C G, & C D F, B D G) ad contingentes (C D, B D).

a *præc. et* 31. 3. Circulus enim diametro D C descriptus [a] per puncta F, G transi-
b 21. 3. bit. unde ang. D C G [b] angulo D F G, [c] hoc est angulo A C F, æqua-
c *in præced.* tur. Similiter ang. C D F = ang. B D G. *Q. E. D.*

Prop. XLVII.

Fig. 251. 252. Iisdem positis, linea (H E) ab occursu (H) conjunctarum (C G, F D) perpendicularis est ad contingentem (C D).

Si negas, estò H L ad E C perpendicularis; & ordinatim applice-
a 46. *hujus.* tur E M (ad B D parallela). Atque ob ang. G D B [a] = (ang. C D F
b 15. 1. [b] =) ang. L D H. & [c] rectos D B G, D L H, erunt trigona G D B,
c *hyp.* D H L similia. quare B D. D L [d] :: (G D. D H [d] :: F C. C H (ob si-
d 4. 6. milia trigona G D H, F C H; nam anguli [e] C F H, D G H recti
e 45. *hujus.* sunt, & qui ad H æquales, vel communes) :: [d] A C. C L. (ob similia trigona C A F. C L H); nam & hîc ang. A C F [a] = ang. L C H. & anguli F A C, C L H [c] recti sunt). ergo permutando D L. C L ::
f 4. 6. (B D. A C [f] :: B K. A K [g] :: B M. A M [h] ::) D E. E C. ergo inver-
g 36. 1. *huj.* sè C L. D L :: E C. D E. & divisè C D. D L :: C D. D E. quare
h 2. & 4. 6. D L [k] = D E. [l] *Q. E. A.* Ergo H E potiùs est perpendicularis ad
k 9. 5.
l 9. *ax.* 1. E C. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. XLVIII.

Iisdem positis, ostendendum est lineas (E F, E G), quæ à tactu ducuntur ad puncta (F, G) ex comparatione facta, æquales continere angulos (C E F, G E D) ad contingentem (C D). Fig. 253. 254.

Circulus enim diametro D H descriptus [a] transit per puncta E G [b](ob angulos D G H, DEH rectos) unde ang. D E G [c]= (ang DHG [d]=ang. C H F [c]=) ang. C E F.
a 31. 3. b 45. et 47. h. c 21. 3. d 15. 1.

Not. In hyperbole anguli D H G, C HF sunt idem angulus.

Prop. XLIX.

Iisdem positis, si à punctorum aliquo (G) ad contingentem (C D) agatur perpendicularis (G H); quæ à facto puncto (H) ducuntur ad axis extrema (A, B) angulos rectos (A H B) continebunt. Fig. 255. 256.

Nam (ob angulos D B G, D H G [a] rectos) circulus super diametro D G descriptus [b] transit per puncta B, H. unde ang. G H B [c] = ang. B D G [d]= ang A G C [e]= ang A H C [f]= ang G H B. ergo (addito communi angulo B H C, vel A H G) [g] erit ang. A H B=ang. C H G [h]= rect. *Q. E. D.*
a *hyp.* b 31. 3. c 21. 3. d 45. *hujus.* e *Not.* f 1. *ax.* 1. g 2 *ax.* 1. h *hyp.*

Not. ang. A G C=ang. A H C. Nam (ob [h]rectos angulos CAG, CHG) circulus, diametro C G descriptus, [b]per puncta A, H transibit, in quo anguli A G C, A H C eidem arcui A C insistent, & proinde [c]æquales erunt.

Prop. L.

Iisdem positis, si à sectionis centro (H) ducatur linea (H L) contingenti occurrens, æquidistánsque lineæ (F E) per tactum (E) & per unum (F) punctorum ductæ; erit (H L) æqualis dimidio (H B) axis (A B). Fig. 257. 258.

Jungantur EG, AL, LG, LB, ducatúrq; GM ad EF parallela. Estque (ob FH [a]= HG) EN [b]= N G; ideóq; E L [b] = LM. Item (ob ang. DEG [c]= (ang C E F [d]=) ang E M G.) [e] Erit E G = G M. quare ang. G L E [f]= ang G L M. ergo G L ad E M est perpendicularis. [g] ergo ang A L B est rectus. [h] ergo circulus diametro A B descriptus transibit per L; & radius H L radio H A æquabitur. *Q. E. D.*
a *hyp.* b 2. 6. c 48. *hujus.* d 29. 1. e 6. 1. f 8. 1. g 49. *hujus.* h 31. 3.

Prop. LI.

Fig. 259. Si in hyperbola, vel oppositis sectionibus ad axem (A B) comparetur rectangulum (A D B, A E B) æquale quartæ parti figuræ, excedénsque figura quadrata; & à punctis (D, E) ex comparatione factis ad quamlibet sectionem inclinentur rectæ lineæ (D F, E F); major (E F) minorem (D F) quantitate axis (A B) superabit.

a 29. 1. Recta F K H tangat sectionem in F, & per centrum C ducatur
b 48. *hujus.* G C H ad F D parallela. Estque ang. K H G [a] = (ang K F D [b] =)
c 6. 1. ang G F H. unde G H [c] = (G F [d] =) G E (ob C D = C E). Item
d 2. 6. F D [e] = 2 G C. & C H [f] = C B (ideóque 2 C H = A B). [g] ergo
e 4. 6. E F (hoc est 2 G H) = (2 G C + 2 C H =) F D + A B. *Q. E. D.*
f 50. *hujus.*
g 1. *ax.* 1.

Prop. LII.

Fig. 260. Si in ellipsi ad majorem axem (A B) ex utraque parte comparetur rectangulum (A C B, A D B) æquale quartæ parti figuræ, deficiénsq; figurâ quadratâ; & à punctis (C, D) ex comparatione factis ad sectionem inclinentur rectæ lineæ (C E, D E), ipsi axi (A B) æquales erunt.

a 48. *hujus.* Recta F E H tangat sectionem, & per centrum G ducatur G K H
b 29. 1. ad C E parallela. Estque ang H E K [a] = (ang F E C [b] =) ang E H G.
c 6. 1. unde K H [c] = (K E [d] =) K D (ob G C [e] = G D). [g] ergo C E [h] (2 G K)
d 2. 6. + E D (2 K H) = 2 G H. [k] = 2 A G [e] = A B [g] = C E + E D.
e *hyp.*
g 1. *ax.* 1.
h 4.
k 50. *hujus.*

Prop. LIII.

Fig. 261. 262. Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus ab extremo diametri (A C) ducantur lineæ (A D, C E) ordinatim applicatis æquidistantes; & à dictis terminis (A, C) ad idem sectionis punctum (B) ductæ lineæ (A B, C B) secent æquidistantes (A D, C E); rectangulum ex abscissis (A D, C E) factum, æquale erit figuræ, quæ ad eandem diametrum (A C) constituitur.

a 4. 6. Ordinatim applicetur B F. Estque A F. F B [a] (hoc est A C. C E)
b 23. 6. + C F. F B [a] (hoc est A C. A D) [b] = A F × C F. F Bq [c] :: T. R. [d] ::
c 21. 1. *huj.* Tq. (A Cq). T R [e] = A C. C E + A C. A D [b] = A Cq. C E × A D.
d 1. 6. [f] ergo C E × A D = T R. *Q. E. D.*
e 11. 5.
f 9. 5.

Prop. LIV.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (A D, C D) sibi ipsis occurrant; & per tactus (C, A) ducantur contingentibus æquidistantes (C G, A F); à tactibus verò ad idem sectionis punctum (H) ductæ lineæ (A H, C H) æquidistantes secent (in G, & F); rectangulum constans ex abscissis (A F, C G) ad quadratum lineæ (A C) tactus conjungentis, proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis (E B) lineæ (D E) ab occursu (D) contingentium ad punctum (E) medium conjungentis tactus ductæ, quæ est intra sectionem ad quadratum reliquæ (B D), & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus (A D, C D) factum, ad quartam partem quadrati lineæ (AC) tactus conjungentis. Fig. 263.

Per H, B ducantur K H O X L, M B N ad A C parallelæ. Liquet M N sectionem [a] tangere, & fore M B [b] = B N & K O [b] = O L. (nam A E [c] = E C) item H O [d] = O X; [e] quare H K = X L. & [f] X K = L H. Hinc A Mq. M B × B N (M Bq) [g] :: A Kq. X K × K H (L H × K H). & permutando A Mq. A Kq :: M B × B N. L H × K H. [h] item N C × A M. A Mq :: L C × A K. A Kq ergo ex æquali N C × A M. M B × B N :: L C × A K. L H × K H [l] = L C. L H [m] (F A. A C) + A K. K H. [m] (G C. A C) [l] = F A × G C. A Cq [n] :: N C × A M. M B × B N [o] = N C × A M. N D × D M [p] (E Bq. B Dq) + N D × D M. M B × B N [q] (C D × D A. A E × E C) [n] ergo F A × G C. A Cq = E Bq. B Dq + C D × D A. A E × E C. *Q. E. D.*

a 32. 1.
b ex. 4. 6.
c hyp.
d 46, & 47 1. hujus.
e 3. ax. 1.
f 2. ax. 1.
g 16. hujus.
h Not. 1.
l 23. 6.
m 4. 6.
n 11. 5.
o 5. def. 6.
p Not. 2.
q Not. 3.

Not. 1. N C × A M. A Mq :: L C × A K. A Kq. Nam (propter parallelas A C, K L, M N) est A M. A K [a] :: N C. L C. & permutando A M. N C :: A K. L C. [b] hoc est A Mq. A M × N C :: A Kq. A K × L C. & inversè.

a 2. 6.
b 1. 6.

Not. 2. N C × A M. N D × D M :: E Bq. B Dq. Nam A M × C N. N D × D M [c] = (A M. D M [d] (E B. B D) + C N. N D [d] (E B. B D) = E B. B D + E B. B D [d] =) E Bq. B Dq.

c 23. 6.
d 2. 6.

Not. 3. N D × D M. M B × B N :: C D × D A. A E × E C. Nam N D × D M. M B × B N [e] = (N D. B N [f] (hoc est C D. E C) + D M. M B [f] (hoc est D A. A E) = C D. E C + D A. A E [e] =) C D × D A. E C × A E.

e 23. 6.
f 4. 6.

Prop.

Prop. LV.

Fig. 264. Si quæ oppositas sectiones contingunt, rectæ lineæ (A G, DG) sibi ipsis occurrant; & per occursum (G) ducatur linea (C E) conjungenti tactus (A D) æquidistans; per tactus verò ducantur contingentibus æquidistantes (A M, D M); & à tactibus ad idem alterius sectionis punctum (F) ducantur lineæ (A F, F A), quæ secent æquidistantes (DM, A M), rectangulum constans ex abscissis (A H, D N) ad quadratum lineæ (A D) tactus conjungentis, eandem proportionem habebit, quam rectangulum ex contingentibus (AG, D G) factum ad quadratum lineæ (C G) ab occursu (G) ad sectionem ducta, quæ quidem (C G) conjungenti tactus (D A) æquidistet.

* Not. 1. Per F ducatur F L K B ad A D parallela Estque EGq. *(vel CGq)
a 20. hujus. G Dq [a] :: B L × L F *(vel KF × L F). L Dq. item G Dq. G D ×
b Not. 2. G A :: L Dq. L D × A K. ex æquali igitur C Gq. G D × G A :: K F
c 23. 6. × L F. L D × A K [c] = K F. A K [d] (A D. D N) + L F. LD [d] (AD.
d 4. 6. A H) = A D. D N + A D. A H [d] = A Dq. D N × A H. ac inversè G D × G A. C Gq :: D N × A H. A Dq. *Q. E. D.*

Not. 1. E G = C G. & L F = K B, vel K F = L B. Nam bi-
e 38. 2 hujus. sectâ A D in O, [e] erit G O recta diameter, cui conjugata quæ ad AD
f ex. 4. 6. parallela. ergo C G = G E. & B P = P F. [f] item K P = P L. [g] er-
g 3. ax. 1. go K B = LF &c.

Not. 2. G Dq. G D × G A :: L Dq. L D × A K. Nam propter
h 4. 6 & conversè. parallelas A D, K L, erit G D. L D [h] :: GA. KA. & permutando G D. G A. [k] (hoc est G Dq. G D × GA) :: L D. K A [k] (hoc est) :: L Dq.
k 1. 6. L D × K A.

Prop. LVI.

Fig. 265. Si quæ unam oppositarum sectionum contingunt, rectæ lineæ (AE, B E) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A, B) ducantur contingentibus æquidistantes (B N, A M); à tactibus verò ad idem alterius sectionis punctum (C) ducantur lineæ (A C, BC), quæ æquidistantes (B N, A M) secent (in N, M): rectangulum constans ex abscissis (BN, A M) ad quadratum lineæ (A B) tactus conjungentis proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis (L D) lineæ, ad punctum L medium conjungentis tactus (A B) ductæ, quæ est inter dictum punctum (L), & alteram sectionem (D) ad qua-

quadratum ejus (DE), quæ inter sectionem (D), & occursum (E) interjicitur; & ex proportione, quam habet rectangulum, ex contingentibus (AE, BE) factum ad quartam partem quadrati lineæ (AB) tactus conjungentis.

Ducantur CGK, DHF ad AB parallelæ. Estque BHq. HDq a *Not.* 1.
[a](HD × DF) [b] :: BKq. PK × KC [a] (CG × KC). item FA × BH. b 18. *hujus.*
BHq [c] :: GA × BK. BKq. ergo ex æquali FA × BH. HD × DF c *Not.* 2.
:: GA × BK. CG × KC. atqui FA × BH. HD × DF [d] = FA × d 5. *def.* 6.
BH. HE × EF [e] (LDq. DEq) + HE × EF. HD × DF [f] (AE × e *Not.* 3.
EB. AL × LB). [g] ergo LDq × DEq + AE × EB. AL × LB = f *Not.* 4.
GA × BK. CG × KC [h] = BK. KC [k] (AM. AB) + GA. CG g 11. 5.
[k] (NB. AB) = AM. AB + NB. AB [h] = AM × NB. ABq [g] = h 23. 6.
LDq DEq + AE × EB. AL × LB. *Q. E. D.* k 4. 6.

Not. 1. HD = DF. & PK = CG. Nam ob AL [l] = LB l *hyp.*
[m] est HD = DF. [m] & KX = XG. item XC [n] = XP. [o] ergo PK = m *ex.* 4. 6.
CG. n 47. 1. *huj.*
o 2. *ax.* 1.

Not. 2. FA × BH. BHq :: GA × BK. BKq. Nam propter
parallelas BA, FH, GK; [p] erit FA. AG :: HB. BK. & permu- p *ex.* 2. *vel* 4. 8
tando FA. HB [q] (hoc est FA × HB. HBq) :: AG. BK (hoc est q 1. 6.
AG × BK. BKq).

Not. 3. FA × BH. HE × EF :: LDq. DEq. Nam FA × BH. r 23. 6.
HE × EF [r] = FA. EF [s] (LD. DE) + BH. HE [s] (LD. DE) s *ex.* 4. 6.
= LD. DE + LD. DE [r] = LDq. DEq.

Not. 4. HE × EF. HD × DF :: AE × EB. AL × LB. Nam t 23. 6.
HE × EF. HD × DF [t] = HE. HD [v] (EB. BL) + EF. DF [u] (EA. u 4. 6.
AL) = EB. BL + EA. AL [t] = EB × EA. BL × AL.

APOL-

APOLLONII
CONICORUM
LIB. IV.

Prop. I.

Fig. 266. SI in coni sectione, vel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum (D) extrà; atque ab eo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ (D B, D C); una quidem (D B) contingens, altera verò (D C) in duobus punctis (E, C) secans; & quam proportionem habet tota linea secans (C D) ad partem sui ipsius (D C), quæ extra sumitur, inter punctum (D) & sectionem interjecta; in eandem dividatur, quæ (C E) est intra, ita ut rectæ lineæ ejusdem rationis ad unum punctum conveniant (C D. D E :: C F. F E); quæ à tactu (B) ad divisionem (F) ducitur, occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum (D) extra sumptum, sectionem continget.

Est quasi conversa 37æ 3ii.

a 49. 2. huj. b 37. 3. hujus. c hyp. d 9. 5.

Ex D [a] ducatur tangens D A, & connectatur A B, secans D C in G. ergo C G. G E [b] :: (C D. D E [c] ::) C F. F E. ergo componendo C E. G E [d] :: C E. F E. ergo G E = F E. ergo puncta G, F coincidunt. *Q.E.D.*

Coroll. B A secat D C in F.

Prop. II.

Hæc quidem communiter in omnibus sectionibus demonstrata sunt; at in sola hyperbola si linea D B sectionem contingat, & D C in punctis E, C secet, puncta verò E, C contineant tactum ad B, & punctum D sit extra angulum asymptotis comprehensum, similiter fiet de-

demonstratio. * Possumus enim à puncto D aliam ducere contingentem D A, & quæ reliquæ sunt ad demonstrationem, perficere. * 49. 2. *huj.*

Prop. III.

Iisdem existentibus puncta E, C punctum B non contineant, sitque punctum D intra angulum asymptotis comprehensum, poterimus à puncto D alteram contingentem ducere, quæ sit D A, & reliqua similiter demonstrare. Fig. 267.

Prop. IV.

Iisdem positis, si occursus E, C contineant tactum ad B; & punctum D sit in angulo (L X N), qui deinceps est angulo (K X N) asymptotis (K L, M N) comprehenso; linea quæ à tactu (B) ad divisionem (F) ducitur, occurret oppositæ sectioni; & quæ ab occursu ducitur eandem sectionem continget. Fig. 268.

Ex D [a]ducatur DH tangens oppositam sectionem, & connectatur HB, secans C E in G. [b] ergo C G. G E :: (C D. D E [c] ::) C F. F E. & componendo C E. GE :: C E. F E. [d] ergo puncta G, F coincidunt. *Q.E.D.*

a 49. 2. *huj.* b 37. 3. *huj.* c *hyp.* d 9. 5.

Coroll. H B secat D C in F.

Prop. V.

Iisdem positis, si punctum D sit in una (X N) asymptoton; quæ à puncto B ad F ducitur, eidem asymptoto (X N) æquidistabit. Fig. 269.

Nam per B ductâ B G ad X N parallelâ, erit rursus C G. G E [a] :: (C D. D E [b] ::) C F. F E. ergo componendo, C E. G E :: C E. F E. [c] unde G, & F coincidunt.

a 35. 3. *huj.* b *hyp.* c 9. 5.

Prop. VI.

Si in hyperbola extra sumatur aliquod punctum (D), à quo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ (D B, D F); altera quidem (D B) contingens, altera verò (D F) æquidistans uni asymptototon; & æquidistantis portio (E D) inter sectionem & punctum (D) interjecta, æqualis sit ei (E F), quæ intra sectionem continetur: linea, quæ à tactu (B) ducitur ad factum punctum (F), occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum extra sumptum (D) sectionem continget. Fig. 270.

N Ponaa 49.2. *hujus.* b 30. 3. *hujus.* c *hyp.* Ponatur D intra angulum asymptotis comprehensum; ex D [a] ducatur tangens D A, conjungatur B A, secans D F in G. ergo E G [b] = E D [c] = E F, quare puncta E, F coincidunt. *Q. E. D.*

Coroll. A B secat D E in F.

Prop. VII.

Fig. 271. Iisdem positis, sit punctum D in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur. Dico etiam sic eadem evenire.

a 31. 3. *huj.* b *hypoth.* Iterum, ex D ducatur tangens D H, & connectatur H B secans DF in G. ergo E G [a] = E D [b] = E F. ergo non differunt puncta F, G. *Q. E. D.*

Prop. VIII.

Fig. 272. Iisdem positis, sit punctum D in asymptoton unâ (M N), & reliqua eadem fiant: dico lineam, quæ à tactu (B) ad extremam partem (F) sumptæ (D F) ducitur, æquidistantem esse asymptoto (M N), in qua est punctum D.

a 34. 3. *huj.* b *hyp.* Nam ducatur B G ad M N parallela, ergo rursus E G [a] = (E D) [b] = E F. & puncta G, F coincidunt. *Q. E. D.*

Prop. IX.

Fig. 273. Si ab eodem puncto (D) ducantur duæ rectæ lineæ (D E, D F), quarum utraque coni sectionem, vel circuli circumferentiam in duobus punctis secet; & quam proportionem habent totæ lineæ (E D, F D) ad portiones (D H, D G), quæ extra sumuntur, in eam dividantur, quæ sunt intra (E H, F G); ita ut partes ejusdem rationis ad idem punctum conveniant (E D. D H :: E K. K H. & F D. D G :: F L. L G), quæ per divisiones (L, K) ducitur linea, sectioni in duobus punctis occurret; & quam ab occursu ad punctum (D) extra sumptum ducuntur, sectionem contingent.

a 49. 2. *huj.* b cor. 1. 4. *h.* A puncto D [a] ducantur contingentes D A, D B; & conjungatur A B. hæc [b] secat D E in K; [b] & D F in L. unde liquet propositum.

Prop.

Prop. X.

Hæc quidem communiter in omnibus, at in sola hyperbola, si alia quidem eadem sint, unius autem rectæ lineæ occursus contineant occursus alterius; & punctum D sit intra angulum asymptotis comprehensum, eadem prorsus evenient, quæ dicta sunt, ut in secundo theoremate tradidimus.

Prop. XI.

Iisdem positis, si unius lineæ occursus occursus alterius non contineant, & punctum D sit intra angulum asymptotis comprehensum, & figura, & demonstratio eadem erit, quæ in tertio theoremate.

Prop. XII.

Iisdem positis, si unius lineæ (D F) occursus (F, G) alterius (D E) occursus (E, H) contineant; & sumptum punctum (D) sit in angulo (P R X) deinceps ei, qui asymptotis (P O, N X) comprehenditur; linea per divisiones (K L) ducta, si producatur, occurret oppositæ sectioni; & quæ ab occursibus ducuntur ad punctum D, oppositas sectiones contingent. Fig. 274.

Ex D ducantur contingentes D M, D S; & connectatur M S: hæc [a] secat ipsam D E in K, ipsámque D F in L. unde liquet propositum. a cor. 4. 4. huj.

Prop. XIII.

Iisdem positis, si punctum D sit in una asymptoton, & reliqua eadem existant; quæ per divisiones (K L) transit linea, asymptoto (OP) in qua est punctum, æquidistabit; & producta occurret sectioni; quæ verò ab occursu ad punctum (D) ducitur, sectionem continget. Fig. 275.

Itidem liquet ex 5ª hujus.

Prop. XIV.

Iisdem positis, si punctum D sit in una (P O) asymptoton; & linea quidem D E sectionem in duobus punctis secet; D G verò alteri asymptoto (N X) æquidistans, secet in uno tantùm, quod sit G; fiátq; ut E D ad D H, ita E K ad K H; & ipsi D G ponatur æqualis G L; quæ per puncta K, L transit linea & asymptoto (O P) æquidistabit, Fig. 276.

 &

& sectioni occurret: quæ verò ab occursu (B) ducitur ad D, sectionem continget.

a cor. 1. 4. huj. b cor. 6. 4. huj. Nam ductâ contingente D B, & per tactum B ductâ ad asymptoton O P parallelâ; secabit hæc [a] ipsam D E in K, [b] ipsámque D G in L, unde liquet propositum.

Prop. XV.

Fig. 277. Si in sectionibus oppositis (A, B) inter duas sectiones sumatur aliquod punctum (D), & ab ipso duæ lineæ ducantur; altera quidem (DF) contingens unam oppositarum, altera verò (A B) utramque secans; & quam proportionem habet linea (A D) inter sectionem (A) quam non contingit, & punctum (D) interjecta ad lineam (D B), quæ est inter punctum & alteram sectionem (B), eandem habeat linea quædam (A C) major eâ (A B), quæ inter sectiones interjicitur, ad excessum ipsius (C B) in eadem recta, & ad eundem terminum (B) cum linea ejusdem rationis; quæ à termino (C) majoris lineæ (A C) ad tactum (F) ducitur, occurret sectioni, & quæ ab occursu ducitur ad sumptum punctum (D), sectionem continget.

a 49. 2 huj. b 36. 1 huj. c hypoth. d 7. 5. Ex D [a] ducatur tangens altera D E; & connectatur F E. Hæc secat A C in C; si negas, secet alibi in G. ergo erit A G. G B [b] :: (A D. D B [c] ::) A C. C B. & dividendo A B. G B :: A B. C B. [d] unde G B = C B. ergo G, & C sunt idem punctum.

Prop. XVI.

Fig. 278. Iisdem positis sit punctum D in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur, & reliqua eadem fiant: dico lineam à puncto F ad C productam occurrere oppositæ sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad D, eandem sectionem contingere.

a 49. 2 huj. b 39. 3. huj. c hyp. d 7. 5. Ducatur ex D tangens altera D E; & connectatur E F, secans A B in G. ergo A G. G B [b] :: (A D. D B [c] ::) A C. C B. unde dividendo A B. G B :: A B. C B. ergo G B [d] = C B. ergo puncta C, G coincidunt. *Q. E D.*

Prop. XVII.

Fig. 279. Iisdem positis sit punctum D in una asymptoton: dico lineam, quæ ab F ad C ducitur, asymptoto, in qua est punctum (D) æquidistare

Sit

Sit F G asymptoto parallela. ergo rursus A G. G B [a]:: (AD. DB [b]::) A C. C B. & dividendo A B. G B :: A B. C B. ergo G, & C sunt idem punctum. [c] *Q. E. D.* — a 36. 3 *huj.* b *hyp.* c *ut in præc.*

Prop. XVIII.

Si in sectionibus oppositis sumatur aliquod punctum (D) inter duas sectiones, & ab ipso ducantur duæ lineæ (A B, C H), utramque sectionem secantes; & quam proportionem habent interjectæ (A D, C D) inter unam sectionem, & punctum (D) ad eas, (D B, D H), quæ inter idem punctum (D) & alteram sectionem interjiciuntur, eandem habent lineæ (A K, C G) majores iis (A B, C H), quæ sunt inter sectiones oppositas, ad excessus ipsarum (K B, G H); quæ per terminos (K, G) majorum linearum transeunt, occurrent sectionibus; & quæ ab occursibus ad sumptum punctum (D) ducuntur, sectiones contingent. Ponatur D inter asymptotos. — Fig. 280.

Per D [a] ducantur contingentes D E, D F, & connectatur E F; secat hæc [b] ipsam A B in K, [b] ipsamque C H in G. ergo liquet propositum. — a 49. 2 *huj.* b 15. 4. *huj.*

Prop. XIX.

Sumatur punctum D in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur, ducantúrque rectæ lineæ (A B, C H) sectiones secantes, & ut dictum est dividantur (in K, G): dico eam, quæ per K G producitur, occurrere utrique sectionum, & quæ ab occursibus ducuntur ad D, sectiones contingere. — Fig 281

Rursus enim per D [a] ducantur contingentes D E, D F; [b] secabit juncta F E ipsam A B in K, ipsamque C H in G. unde constat propositum. — a 49. 2. *huj.* b 16. 4. *huj.*

Prop. XX.

Si sumptum punctum (D) sit in una asymptoton, & reliqua eadem fiant; linea (KG), quæ transit per terminos (K, G) excessuum, asymptoto, in qua est punctum (D) æquidistabit; & quæ a puncto (D) ducitur ad occursum sectionis, & lineæ (K G) per terminos transeuntis, sectionem continget. — Fig. 282.

Nam pariter [a] ductâ tangente D F, ducta per tactum F ad asymptoton parallela [b] secabit A B in K, & C H in G. ergo res constat. — a 49. 2 *huj.* b 17. *hujus.*

Prop.

Prop. XXI.

Fig. 283. Sint rurſus oppoſitæ ſectiones A, B, ſitque punctum D in una aſymptoton, & linea quidem D B K in uno tantùm puncto occurrat ſectioni B, alteri aſymptoto æquidiſtans, linea verò C D H G utrique ſectioni occurrat; & ut C D ad D H, ita C G ad G H, & ipſi D B æqualis ſit B K. Dico lineam, quæ per puncta K, G tranſit, occurrere ſectioni, aſymptotóque, in qua & punctum D, æquidiſtare; & quæ ab occurſu ad punctum D ducitur, ſectionem contingere.

a *6. 4. hujus.* b *15. hujus.* Ductâ enim tangente D F, & F G parallelâ aſymptoto (in qua D); ſecabit F G [a] ipſam D B in K, [b] ipſámque C H in G. unde conſtat.

Prop. XXII.

Fig. 284. Sint ſimiliter oppoſitæ ſectiones, aſymptotique, & punctum D ſumatur in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur; linea verò C D H ſecet utraſque ſectiones, & D B alteri aſymptoto æquidiſtat; ſitque ut C D ad D H, ita C G ad G H, & ipſi D B æqualis ponatur D K: dico lineam quæ per puncta K, G tranſit, occurrere utrique oppoſitarum ſectionum; & quæ ab occurſibus ducuntur ad D ſectiones eaſdem contingere.

Itidem patet ut in 6ta, & 16ta hujus libri.

Prop. XXIII.

Fig. 285. Sint itidem oppoſitæ ſectiones A B; punctúmque D ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur; & linea quidem B D ſectionem B in uno puncto tantùm ſecet, alteri aſymptoto æquidiſtans; linea verò D A ſimiliter ſecet ſectionem A, ſitque D B ipſi B G æqualis, & DA ipſi A K; dico lineam, quæ tranſit per K G occurrere ſectionibus; & quæ ab occurſibus ad D ducuntur, ſectiones contingere.

Patet ut in ſexta.

Prop. XXIV.

Fig. 286. Coni ſectio (D A B C) coni ſectioni vel circuli circumferentiæ (E A B C) non occurrit, ita ut pars quidem eadem ſit, pars verò non communis.

Si

Si affirmas, in parte communi ABC sumatur punctum H utcunque, & connectatur A H; & huic parallela ducatur D C; ipsámque A H bisecet diameter B G F. Itaque (ob sectionem E B C) [a] erit E F = F C. & (propter sectionem D B C) D F [a] = F C. [b] proinde E F = D F. *Q. E. A.* a 46. & 47. 1. b 1 ax. (huj.

Prop. XXV.

Coni sectio coni sectionem, vel circuli circumferentiam in pluribus punctis, quàm quatuor non secat. Fig. 287.

Si fieri potest, secet quinque punctis A, B, C, D, E proximis: conjungantur rectæ A B, D C, quæ primò occurrant, (ut semper [a] fit in parabola & hyperbola) in L. [b] fiátque A L. L B :: A O. O B. [b] & DL. L C :: D P. P C. jungatúrque O P, sectionibus occurrens punctis R, H. [c] ergo ductæ L R, L H sectiones contingent: ducatur EL, sectionibus occurrens in M, G. erítque E N. N M ([d] :: E L. L M) [e] ⊏ (E L. L G [d] ::) E N. N G. [f] unde N M ⊐ NG. [g] *Q. E. A.* a 24. & 15. 2. hujus. b 10. 6. c 9. 4 hujus. d 37. 3 h. e 8. 9. f 10. 5. g 9. ax.

Sin parallelæ sint A B, D C (ut fieri potest in ellipsi & circulo), bisecentur ipsæ in O, & P; & connexa O P sectionibus occurrat in R, H. [h] quare R H est diameter, ad quam ordinatim applicantur A B, D C; eísque parallela E G (per E ducta). [k] unde erit utraque E G, E M bisecta in N. ac propterea N G = N M. *Q. E. A.* Fig 288. h 28. 1. huj. k 10. def. 1. h. l 9. ax.

Prop. XXVI.

Si dictarum linearum aliquæ in uno puncto (A) sese contingant, non occurrant sibi ipsis ad alia puncta plura quàm duo. Fig. 289.

Si fieri potest, occurrant tribus punctis B, C, D proximè sitis; [a] ducatúrque tangens A L, occurrens ductæ B C in L; [b] fiat autem B L. C L :: B P. P C; & connexa A P sectionibus occurrat in H, & R. [c] ergo ductæ L H, L R contingent sectiones: itaque ducta D L, absurditatem incurremus, pariter ac in præcedenti. Sin B C, A L non conveniant, (in ellipsi nempe, & circulo) similiter consequetur absurdum. a 49. 2. huj. b 10. 6. c 9 hujus.

Prop. XXVII.

Si prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis (A, B) sese contingant, in alio puncto sibi ipsis non occurrent. Fig. 290. 291.

Occurrant, si fieri potest, in C; primò extra contactus. 292.

Du-

Ducantur tangentes A L, B L, quæ si occurrant in L, ductâ C L,
a 27. 2 hujus. incurritur absurditas, ut in 25ma. Sin tangentes parallelæ sint, [a] erit
b 10. def. 1. b. quoque A B utriusque sectionis diameter, ac [b] idcirco N M [b]= (NC
c 9. ax. [b]=) N G. [c] *Q. E. A.*

Sin punctum C sit intra contactus, rursus ducantur tangentes A L,
d 29. 2. huj. B L, & connexa A B bisecetur in F, [d] eritque F L diameter; unde si ducatur C G M ad A B parallela, [b] erit utraque C G, C M bisecta in K; unde K G = K M. [c] *Q. E. A.*

Prop. XXVIII.

Fig. 293. Parabole (A G B) parabolen (A M B) non contingit, præterquam in uno puncto.

Si fieri potest, contingant se parabolæ punctis (A, B), à quibus ducantur tangentes A L, B L, concurrentes in L. junctámque A B bi-
a 29. 2 huj. secet recta L F. [a] hæc diameter erit utriusque sectionis; [b] unde L F
b 35. 1 huj. bisecta est in G, & M. [c] *Q. E. A.*
c 9. ax.

Prop. XXIX.

Fig. 293. Parabole (A G B) hyperbolen (A M B) non contingit in duobus punctis, extra ipsam cadens.

a 29. 2 huj. Tangat, si fieri potest, punctis A, B, à quibus ducantur tangentes
b 37. 1. huj. A L, B L; junctámque A B bisecet recta L F; [a] hæc utriusque secti-
c 19. 5. onis erit diameter. Sit D centrum hyperbolæ; eritque F D. D M [b]::
d 14. 5. (D M. D L [c]::) F M. M L. quare, cùm F D ⊏ D M, [d] erit F M
e 35. 1. huj. ⊏ M L. ergo F M ⊏ G L. atqui F G [e] = G L. ergo F M ⊏ F G.
f 9. ax. [f] *Q. E. A.*

Prop. XXX.

Fig. 293. Parabola (A M B) ellipsim vel circuli circumferentiam (A G B) non contingit in duobus punctis (A, B) intra ipsam cadens.

a 37. 1 huj. Si affirmas, ducantur tangentes A L, B L, & rectam A B iterum
b 19. 5. bisecet diameter F G, in qua sit D centrum ellipsis, vel circuli. Estque
c. 14. 5. L D. D G [a]:: (D G. D F [b]::) L G. G F. [c] ergo L G ⊏ G F. atqui F G
d 9. ax. = G L. quæ [d] repugnant.

Prop.

Prop. XXXI.

Hyperbole (A G B) hyperbolen (A M B), idem centrum (D) habens, in duobus punctis (A, B) non continget. Fig. 293.

Si dicas contingere, ducantur contingentes A L, B L; & juncta DL producatur: [a] bisecabit utique hæc tactus conjungentem A B, in F; éstque (propter hyperbolen A G B) DGq [b] $= FD \times DL$. & (ob hyperbolen A M B) DMq [b] $= FD \times DL$. [c] quare $DGq = DMq$. [d] *Q. E. A.*

a 30. 2. *huj.*
b 37. 1. *h.*
c 1. *ax.*
d 9. *ax.*

Prop. XXXII.

Si ellipsis (A M B) ellipsin, vel circuli circumferentiam, (A G B), habens idem centrum (D), in duobus punctis (A, B) contingat, linea (A B) conjungens tactus, per centrum (D) transibit. Fig. 294.

Nam ductis contingentibus A L, B L, siquidem A B per centrum [a] non transit, [b] hæ convenient, puta in L. eritque juncta L D [c] diameter utriusque sectionis; & proinde in una, DGq [d] $= DL \times LF$; in altera, DMq [d] $= DL \times LF$. [e] unde $DGq = DMq$. [f] *Q. E. A.*

a *hyp.*
b 27. 2 *huj.*
c *cor.* 51. 1. *h.*
d 37. 1 *huj.*
e 1. *ax.*
f 9. *ax.*

Prop. XXXIII.

Coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) coni sectioni, vel circuli circumferentiæ (A D B E C), quæ non ad easdem partes connexa habeat, ad plura puncta quàm duo non occurret. Fig. 295. 296.

Si fieri potest, occurrant tribus punctis A, B, C; liquétque rectas A B, C B continere angulum, ad partes in quibus sunt concava lineæ (A B C). paritérque eædem angulum continent ad partes, in quibus concava lineæ A D B E C. ergo lineæ A B C, A D B E C concava habent ad easdem partes, contra hypothesin.

Prop. XXXIV.

Si coni sectio, vel circuli circumferentia (ABF) occurrat uni (ACF) oppositarum sectionum in duobus punctis (A, F); & lineæ (A B F, A C F) quæ inter occursum interjiciuntur ad easdem partes concava habeant; producta linea (A B F) ad occursus, alteri (D) oppositarum sectionum non occurret. Fig. 297.

O Nam

a 33. 2 huj. Nam recta A F sectioni D [a] non occurret, ergo nec sectio A B F.

Prop. XXXV.

Fig. 298. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) occurrat uni (A) oppositarum sectionum (A, B); non occurret ipsarum reliquæ (B) ad plura puncta, quàm duo (B, C).

Nam ut occurrat pluribus, repugnat 33æ hujus.

Prop. XXXVI.

Coni sectio, vel circuli circumferentia oppositis sectionibus ad plura puncta, quàm quatuor non occurret.

a 35. 4. huj. Etenim si uni occurrat, reliquæ ad plura puncta [a] non occurret, quàm duo.

Prop. XXXVII.

Fig. 299. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (C A D) unam oppositarum sectionum (A) concavâ sui parte contingat, alteri oppositarum (B) non occurret.

a 49. 2. b cor. 32. 1. h. c 33. 2. h. Per contactum A [a] ducatur recta E F tangens, [b] utramque sectionem. [c] hæc sectioni B non occurret, ergo nec linea C A D.

Prop. XXXVIII.

Fig. 300. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) utramque oppositarum sectionum (A, B) contingat in uno puncto (A & B); oppositis sectionibus in alio puncto non occurret.

a cor 32. 1. h. b 33. 2. Ducantur rectæ A D, B E contingentes sectiones A, B; [a] hæ lineam A B C etiam contingunt. [b] ergo (inclusa his) linea A B C non occurret sectionibus A, B.

Prop. XXXIX.

Fig. 301. Si hyperbole (A B C) oppositarum sectionum uni (A B D) in duobus punctis occurrat, convexa habens è regione sita, quæ ipsi (A B C) opponitur sectio (E), oppositarum alteri (F) non occurret.

Con-

Conjungatur A B; [a] hæc neutri ſectionum E, F occurret. ergo nec ipſæ E, F (quibus illa interjacet) ſibi occurrent. a 33. 2 *huj.*

Prop. XL.

Si hyperbole (A C B) utrique oppoſitarum ſectionum (A, B) occurrat; quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum in duobus punctis occurret. Fig. 302.

Si fieri poteſt, occurrat ſectioni A punctis D, E. [a] ergo recta D E neutri ſectionum C, B occurret. Quare nec ipſæ ſectiones C, B convenient, contra hypotheſin. a 33. 2 *huj.*

Similiter, ſectio E non continget utramque A, B. Nam ducta tangens H E [a] neutri C, B occurret; ergo nec ipſæ, itidem contra hypoth.

Prop. X L I.

Si hyperbola (C A B D) utramque oppoſitarum ſectionum (A, B) duobus punctis (C, A; D, B) ſecet, convexa habens è regione ſita; quæ ipſi opponitur ſectio (E F) nulli oppoſitarum (A, B) occurret. Fig. 303.

Sint K G L, M N G aſymptoti ſectionum A B, E F. liquet rectam C A [a] occurrere aſymptoto L G ad partes K, (non ad L); & rectam D B ad partes M, (non ad partes N,) [a] occurrere aſymptoto N G, adeóque [b] angulum P H R continere angulum N G L, & propterea ſectionem E F. Atqui C A [c] non occurrit ſectioni D B O, nec D B ſectioni C A X. ergo rectæ C A R, D B P ſectionibus C A X, & E F; ſectionibúſque D B O, & E F interjacent; & proinde ſectio E F neutri C A X, D B O occurret. *Q. E. D.*

a 8. 2 *huj.*
b 25. 2 *huj.*
c 33. 2 *huj.*

prop. X L I I.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum in quatuor punctis (A, B, C, D) ſecet, quæ ipſi opponitur ſectio (K), non occurret alteri oppoſitarum (E). Fig. 304.

Occurrat, ſi fieri poteſt, in K; junctæque A B, D C [a] conveniant productæ in L; & [b] fiat AL. L B :: A P. P B. & D L. L C :: D R. R C. [c] ergo connexa P R ſectionibus occurret, [c] & quæ ab L ad occurſus ducuntur, ſectiones contingent; [d] eritque proinde (ob ſectionem A F D) F L. N L :: N K. K L; [d] & (propter ſectionem A M D) N F. F L :: N M. M L. [e] quare N K. K L :: N M. M L. *Q. E. A.*

a 25. 2 *huj.*
b 10. 6.
c 9. *huj.*
d 36. 1. *huj.* & 16. 5.
e 11. 5.

Prop. XLIII.

Fig. 305. Si hyperbole (ACB) oppositarum sectionum (A B, C) alteri (AB) in duobus punctis (A, B) occurrat, concava habens ad easdem partes; alteri verò (C) occurrat in uno puncto (C); quæ ipsi (A C B) opponitur sectio (D), nulli oppositarum (AB, C) occurret.

a 33.2 huj. b 34.4 huj. Conjungantur (AC, BC; [a] hæ non occurrent sectioni D; & quoniam sectioni A B occurrunt, [b] non secabunt alibi sectionem C; ergo sectionem D continet sectio C; unde liquet propositum.

Prop. XLIV.

Fig. 306. Si hyperbole (A M B C) uni (A B C) oppositarum sectionum (A B C), D E F) occurrat in tribus punctis (A, B, C); quæ ipsi opponitur (D E K) alteri oppositarum (D E F) præterquam in uno puncto non occurret.

a 36.2 huj. b 48.1 huj. c 9. ax. Si fieri potest, occurat punctis D, E; jungantúrque A B, D E; sintque hæ primò parallelæ, & bisecentur rectâ G H; [a] eritque GH sectionum diameter; ductâ igitur per C ipsi B A parallelâ C X, productâque H G ad N, [b] erit utraque C X, C O bisecta in N. [c] *Q.E.A.*

Fig. 307. a 5.2 hujus. b 19.3. huj. c 9.5. d 9. ax. Sin A B, D E conveniant in P, per C ducatur O C R ad A P parallela, & protrahatur D P R. Bisecentur autem A B, D E punctis H, G; per quæ ducantur diametri G S, H S; & rectæ I T, L T, MY sectiones contingant; [a] unde I T ad D P, & [a] L T ad A P, [a] & M Y ad O R (vel A P) erunt parallelæ. quare O R × R C. D R × R E [b] :: (L Tq. T Iq [b] :: A P × P B. D P × P E [b] :: M Y q. Y Iq [b] ::) X R × R C. D R × R E. [c] unde O R × R C = X R × R C. [d] *Q. E. A.*

Prop. XLV.

Fig. 308. Si hyperbole (ABD) unam (D) oppositarum sectionum (ABC, D) contingat, alteram verò (A B C) secet in duobus punctis (A, B); quæ ipsi opponitur sectio (C E) nulli oppositarum (A B C, D) occurret.

a in 25.2 huj. c 33 huj. Occurrant, si fieri potest, in C; jungatúrque A B F, cui occurrat tangens DF; [a] erit occursus F intra asymptotos sectionis ABD. ergo ducta CF cadit intra angulum B F D. atqui tangens D F [c] non occurrit sectioni A B C. ergo C F extra ang. B F D cadit, quæ repugnant.

Prop.

Prop. XLVI.

Si hyperbole (A G C) unam (A B C) oppositarum sectionum (A B C, D) in uno puncto (A) contingat, & secet in duobus punctis (B, C), quæ ipsi opponitur sectio (E) alteri oppositarum (D) non occurret. Fig. 309.

Si fieri potest, occurat in D; jungatúrque C B, cui occurrat tangens A F. [a] erit F intra asymptotos: ducatur D F sectiones secans in G, K. [b] sitque C F. F B :: C L. L B; & connectatur A L M N. ergo ductæ F M, F N [c] sectiones contingent; erítque [d] proinde X G. G F :: X D. DF (ob sectionem A G M); & X K. K F :: X D. D F. (propter sectionem A K N). [e] quare X G. G F :: XK.K F. *Q. E. A.*

a 25. 2.
b 10. 6.
c 1 *hujus.*
d 36. 1 *hujus.* & 16. 5.
e 11. 5.

Prop. XLVII.

Si hyperbole (D A C) unam (A B C) oppositarum sectionum (A B C, E F G) contingens, in alio puncto (C) secet; quæ ipsi DAC opponitur sectio (E F H) alteri oppositarum (E F G) non occurret præterquam in uno puncto. Fig. 310.

Occurrat punctis E, F; jungatúrque E F. Sitque primò E F tangenti A K parallela; ergo quæ bisecat ipsam E F, [a] diameter per A transit; sit hæc A L; pérque C ducatur C B ad A K parallela; [b] bisecta est igitur utraque B C, D C in L. [c] *Q. E. A.*

a 34. 2 *huj.*
b 48. 1. *huj.*
c 9. *ax.*

Sin E F, A K conveniant (in K); ideóque E F, B C (in N); bisecet diameter A M ipsam E F, sectiones secans punctis X, O; per quæ ducantur contingentes X P, O R, [d] rectæ E F, ac proinde invicem parallelæ; erítque D N × N C. E N × N F [e] :: (A Pq. P Xq [f] :: A Rq. R Oq. [e] ::) B N × N C. E N × N F: [g] quare D N × N C = B N × N C. [h] *Q. E. A.* Fig. 311.

d 34. 2 *huj.*
e 19. 3 *huj.*
f 4. & 22. 6.
g 9. 5.
h 9. *ax.*

Prop. XLVIII.

Si hyperbole (A C) unam (A B) oppositarum sectionum (A B, D E G) in uno puncto (A) contingat; quæ ipsi (A C) opponitur sectio (D E F) oppositarum alteri (D E G) non occurret ad plura puncta, quàm duo. Fig. 312. 313.

Si fieri potest, occurrat quoque in H; ducatúrque A K utramque sectionem A B, A C contingens, & conjungatur D E, quæ primò parallela sit ipsi A K. Bisecetur D E in L, & connectatur A L: [a] est hæc oppositarum diameter: ductâque H X G F ad D E parallelâ, erit X G [b] = (X H [b] =) X F. *Q. E. A.*

a 34. 2 *huj.*
b 10 *def.* 1 *h.*
c 9. *ax.*

Sin

Sin D E non sit ad A K parallela, occurrat ei in K, reliquisque perfectis ut priùs, producta F H ipsi A K occurrat in R. quare G R × RH.
d 19.3. *huj.* R Aq [d]:: (D K × K E. A Kq ::) F R × R H. R Aq. [e] ideóque G R ×
e 9.5. R H = F R × R H. [c] *Q. E. A.*

Prop. XLIX.

Fig. 314. Si hyperbole (A B) utramque oppositarum sectionum (A,B) contingat, quæ ipsi opponitur sectio (E), nulli oppositarum (A, B) occurret.

Ducantur enim A D, B G, quæ contingant sectiones; [a] liquet has
a 25. 2. *huj.* intra asymptotos sectionis A B convenire. [b] ideóque asymptotis secti-
b 33. 2. *huj.* onis E non occurrere, sed eas continere, & multò magis sectionem E. Cùm igitur tangens A C [b] non occurrat sectioni B G, nec tangens B C [b] sectioni A D, neutri harum occurret sectio E. *Q. E. D.*

Prop. L.

Fig. 315. Si utraque oppositarum sectionum (A, D) in uno puncto (A & D) contingant, ad easdem partes concava habens, in alio puncto non occurrent.

a 47.4. *huj.* Si fieri potest, sectiones D occurrant in E; ergo sectiones A [a] non
b 39.2. *huj.* occurrent præterquam in uno puncto A. ducantur contingentes A H,
c 10. *def.* 1. *h.* D H, junctæque A D sit parallela E B C; & per H ducatur H K diameter secunda sectionum oppositarum; [a] bisecabit hæc ipsam A D in K, [c] ideóque utramque E B, E C in L. *Q. E. A.*

Prop. LI.

[Fig. 316. Si hyperbole (A C B) oppositarum sectionum unam (A D B) contingat in duobus punctis (A, B); quæ ipsi opponitur sectio (F) oppositarum alteri (E) non occurret.

Si fieri potest, occurrat in E, ducantúrque sectionum contingentes A G, B G; & connectantur A B, E G, & producta E G sectionibus
a 36. 1. *huj.* occurrat in C, D, rectæque A B in H. Erit igitur H D. D G [a]::(H E.
b 14. 5. E G [a]::) H C. C G. ergo quum H D ⊐ H C, [b] erit D G ⊐ C G.
c 9 *ax.* [c] *Q. E. A.*

Prop.

Prop. LII.

Si hyperbole (A D) oppositarum sectionum unam (A) contingat (in A), convexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio (F) oppositarum alteri (B) non occurret. Fig. 317.

Ducatur enim A C tangens sectiones; [a] hæc neutri sectionum B, F occurret; sed inter ipsas cadet; ergo nec ipsæ sectiones occurrent. Q. E. D. [a] 33. 2 hujus.

Prop. LIII.

Oppositæ sectiones (A B C D, E F) oppositas (A B, C D) non secant in pluribus punctis, quàm quatuor.

Nam quum sectiones convexa habent sibi obversa, si 1°, sectio A B C D * secet utramque A B, C D in quatuor punctis (A, B, C, D), [a] liquet E F neutri reliquarum A B, C D occurrere. *1. Fig. 318. [a] 41. hujus.

Sin 2dò, sectio A B C sectionem A B* secet in duobus punctis (A, B,) ipsásque C D in uno E; non occurret ergo E F [b] ipsi C D; nec ipsi A B præterquam uno puncto; (si enim duobus, [c] ergo ei opposita A B C non omnino occurret alteri C D, contra hypoth.) *2. Fig. 319. [b] 39. hujus. [c] 41. hujus.

Sin 3°, Sectio A B C sectionem A B E secet punctis duobus A, B; [d] non occurret sectio E F sectioni D, nec sectioni A B E, præterquam duobus punctis. 3. Fig. 320. [d] 35. hujus.

Sin 4°, Sectio A B C D utramque A B, E F unico puncto secet, [e] nulli ipsarum occurret ipsa E F duobus punctis. 4. Fig. 321. [e] 40 hujus.

Sin Sectiones ad easdem partes concava habeant; & 5°, altera alteram in quatuor punctis (A, B, C, D) secet, [f] sectio EF neutri A B, C D occurret. Sin 6°, Sectio A B C alteri occurrat tribus punctis, [g] ipsa E F alteri in uno tantùm puncto occurret, idémque in reliquis. Nullo igitur modo oppositæ sectiones oppositis ad plura puncta convenient, quàm quatuor. 5. Fig. 322. 323. [f] 36. hujus. 6. Fig. 324. [g] 44. hujus.

Prop. LIV.

Si oppositæ sectiones (B C, E F) oppositas (A B, D) in uno puncto (B) contingant, non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura quàm duo. Fig. 325.

Habeant Sectiones convexa sibi invicem obversa, occurrátque primò Sectio B C ipsi D duobus punctis, C, D. [a] ergo Sectio E F neutri [a] AB, [b] C D occurret. [a] 39. hujus. [b] 52 hujus.

Sin 2ò, Sectio B C secet ipsam D semel in C, [c] ergo E F sectioni D, nusquam occurret, nec ipsi A B nisi in uno puncto (si enim duobus, [d] non Fig. 326. [c] 52 hujus.

d 39 *hujus.* [d] non occurret B C ipsi D) contra hypothesin).

Fig. 327. Sin 3ò, Sectio B C non occurrat sectioni D, [e] nec E F ipsi D occurret, [f] ipsique A B occurret duobus tantùm punctis.

e 52 *hujus.*

f 35. *hujus.*

Sin Sectiones ad easdem partes concava habeant, similis erit discursus; constabitque omninò propositum.

Prop. LV.

Fig. 328. Si Sectiones oppositæ (A B, C D) oppositas (A C, E F) contingant in duobus punctis, in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

a 49. *hujus.* Contingant primò in A C. [a] ergo Sectio E F nulli ipsarum occurret.

b 51. *hujus.* Secundò, contingant in A, B; [b] itaque rursus C D non occurret

Fig. 329. ipsi E F.

Fig. 330. Tertiò, contingat Sectio A C ipsam A B in A, & Sectio D ipsam

c 52. *hujus.* E F in F. [c] ergo nec Sectio EF Sectioni A B, nec Sectio C A ipsi D F occurret.

Fig. 331. Quartò, contingat A C ipsam A B in A, & E F ipsam D in E, ha-

d 50 *hujus.* bentes concava ad easdem partes, liquet ipsas neutiquam iu alio puncto occurrere: quare omnino constat propositum.

LAUS DEO.

Lemmatum ARCHIMEDIS, *quæ vocantur, Editio Nova.*

PRÆFATIO.

Hæc مَأخُوذَات *Machudát*, ſive *Lemmata Archimedis*, quorum pars magna uſum habet atque elegantiam, nè penitùs interirent inter *Motawaſſetát* مُتَوَسِّطَات i.e. libellos inter Elementa *Euclidæana* grandémque *Ptolemæi* Syntaxin medios, (quos *Alexandrini* jam olim μικρὸν Ἀστρονόμον appellitabant,) adſervare maluerunt *Arabum* Mathematici: quod præter præfationem *Abi'lHaſan*, duo Codices Bibliothecæ *Bodleianæ* nimio ſatis comprobant. De *Græcis* tamen minùs emendatis quingentis penè abhinc annis *Arabica* fecit Vir Cl. *Thabetus Corraides*. Poſtea Notis ſuis nè vix adornavit is quem dixi, *Abu'lHaſan* (vel *Abu'lHonein*, ut aliqui volunt proclivi errore) *Ali Ebn Ahmed Naſvæus* ابو الحسن علي بن احمد النسوي. Quinetiam Latinè nunc ea leguntur ex duplici verſione, alterâ quidem Celeberr. V. D. *Johannis Gravii*, quæ cum animadverſionibus pauculis *Sam. Foſteri* Prælectoris *Greſhamenſis* ſæculi hujuſce devergentis anno LIX. *Londini* prodiit, mox alterâ *Abrahami Ecchelenſis*

lensis, quam ſuis adnotatis illuſtravit, atque adeò *Florentiæ* edidit egregius Mathematicus *Alf. Borellus*. Valdè autem miror virum præclarum alterumq; planè *Siciliæ* decus, de iſtorum Lemmatum Authore tam anxiè diſputare: dummodo conſtat, ut nihil certius, Lemma omnium primum illud eſſe quod ad Tactiones *Apollonianas* ſuo ex ingenio poſuit *Pappus*: tum quartum quintúmve nè vix ab eis differre, quibus Theorematum Floridorum Conditor Propoſitionem ἀρχαίων ſed nulli certo Authori redditam (hanc in Lemmatum horunce ſextum ita conjectam hodiéq; legis) illuſtratam voluit, nim. *Prop.* XIV. & XVII. *Arabes* autem, quibus *Archimedis* nomen in Matheſi præ cæteris clarius fuit notiúſque, vocabula ipſa ἄρβηλον & σελήνιον (*Lem.* 4. & 15.) ſummo viro retulere; quanquam *Pappus*, cujus fortean de ſcriptis *Eutocius* (ſic amat) pleraque hæc Lemmata carpſerat, ſimpliciùs paulò dixerat, χωρίον ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρβηλον: de voce alterâ certa eſt fides diu ante *Archimedem* natum apud Geometras valuiſſe. *Opus potius eſſe mixtum reor, atque ab uno vel altero Theoremate ſive *Archimedis* ſive *Apollonii*, (talia enim ultrò inducit Doctrina Tactionum,) certè perantiquo, cæteris omnibus, ut audent ſcioli, hominis pænè Divini nomen additum inſcriptúmque. Lemmatum verò ſuorum libellum ſcripſiſſe olim *Archimedem* nullus putem aut voluiſſe. Iſthæc ita præcipuæ modò Propoſitioni præmittere ſolet, modò ἐπὶ τέλει ſubjicere. Quod ad quartum alterius libelli περὶ σφ. καὶ κυλ. conqueritur *Eutocius*, minus innuit quàm viro docto perplaceat: pleriſque puta Exemplaribus Operum *Archimedis* binorum Lemmatum tam ἀνάλυσιν quàm σύνθεσιν, quas ad *Prop. IV.* pollicitus erat, malè excidiſſe; tum duo illa Theoremata (plura nè cogites) quæ fortè repererat *Eutocius* adeò fuiſſe propter Scribam malehabita, corrupta & defor-

**Ii homines huic etiam tribuerunt libellum, qui erat* Zenodori *de Iſoperimetris, imò fragmentum de Statica, atque alia.*

deformia, ut pro *Archimedéis* accipere quæ erant *Archimedis*, omninò ſubvereretur. Sed præfari multis haud decet. Breviculus enim ex ſe liber iſte eſt, & hoc compendio adhuc brevior.

Id verò ſubmonendum puto, Schemata quæ heic vides ab Autographis Præſtantiſſimi viri D. *Jac. Golii* fuiſſe expreſſa; ſive in meliores codd. incidit ille, quàm *Abr. Ecchellenſis* atque ego vidimus, ſive potiùs ingenio ac eruditione ſuis plus maximo potuit. Verùm de tanto viro, déque filii ejus erga me meritis tum dicam quæ ſentio ipſe, & omnes ſcire oportet, quando adhuc alia quàm ſtricturas ſcripſero & Epitomas.

ARCHIMEDIS LEMMATA.

Lemma I.

B*Inorum circulorum* A B C, D B E, *sese intra extrave tangentium in* B *diametri* AC,DE *invicem parallelæ sint ; recta linea est quæ per* A D B *transit.* Fig. 260. 261.

Adjunctæ rectæ [a]F G B æquidistet [b]D H. Jam propter æquales H F[c], D G[d], G B, necnon [d]F A, F B ; erit H A = [c]F G = [c]DH, & [f]A D H = A. Atque ob pares [g] B G D, B F A, D H A, erunt [h] B D G + B = A + A D H = 2 A, & B D G[k] = A. Unde [l]A D G + A [g] = 2 rect = A D G + G D B. Recta igitur [m] linea est A D B. Aut in fig. alterâ, Unde [l]A B G + A (= [n] F B D + H D B) [g] = 2 rect = A B G + (B D G[f]) G B D, & A B D[m] recta est.

a 11, 12, 3.
b 31. 1.
c 34. 1.
d 15. *def.*
e *ax.* 3, 2.
f 5. 1.
g 29. 1.
h *cor.* 32. 1.
k *ax.* 7.
l *ax.* 2, 1.
m 14. 1.
n 15, 29. 1.

Notæ.

Hoc lemmate *Prop.* XXIV[am] Operis *Apollonii* περὶ ἐπαφῶν jam olim illustrabat *Pappus*, ut videre est *Prop.* CX. LVII[mi] Συναγωγῶν. Commonstrat verò (connexis radiis G B, F B , & ipsis G D, F C invicem parallelis) tam F B G quàm A B D rectas esse, apodixi probâ quidem (contra quam putat Vir doctus,) & eleganti. Ecce illam !

Est enim ductâ tangente O P, G B O [o] = recto [o] = O B F, atque [n] G B F recta. Et, quia [p] D G. G B :: B F. F A, & D G B [g] = B F A, erit [r] G B D = F B A. Recta autem est G F, ergo [s]A B D etiam recta.

o 18. 3.
p *def.* 15. et 7. 5.
r 6. 6.
s *sch.* 15. 1.

Consimile autem Lemmation Cl. *Comandinus* Propositioni XIV. Libri Quarti Collect. *Pappi* ~~addidit,~~ ut opus fuit, quod vide. Verùm id jam obiter monitum velim, Propositionem illam XIV *Pappi* eandem omninò fuisse (sic reor) cum XXIV[ta] Geometræ *Pergæi* de Tactio-

Tactionibus, atque adeò utramque minimè differre abs horum Lemmatum Quinto ; omnes equidem ipsas eadem Lemmatia, Illustrationes easdem, ut probè constent, exposcere.

Casum duntaxat facillimum exposuit *Abu'lHasan*, parùm quidem peritè, ubi A D B, F G B diametris A C, E D rectè insistant, nempe (H—A) A D H + recto H D G + G D B (G—B) = 2 rectis. recta igitur ipsa A D B.

Lemma II.

Fig. 262. *Si semicirculum* A B C *à puncto* D *tangant rectæ* A D, D B, *& deducatur* B E ⊥ A C *: connexa* C D *ipsam* BE *bifariam secabit in* F.

a 31.3.& 13.1

b 18.3. & 28. Occurrant invicem [b] C B, A D protractæ in G, & jungatur A B.
c *cor.* 36. 3. Quia (ob pares [c] A D, D B ,) A B D sive [d] B A D + D B G
d 5.1. = recto G B A[a](A B C) = [g] B A D + G, erit G B D [k] = G, &
e 29.1. *et* 4.6. [l] G D = (D B [h] =) A D. Atqui propter parallelas A D, E B , erit
f 14.5. DA . FE [e] :: (DC.CF ::) GD. BF. Quare [f] E F = F B.
g *cor.* 32. 1.
h *ut modò.*
k *ax.* 3.
l 6.1.

Notæ.

1. Paria heic peccavit Adnotator *Nasvæus* atque in præcedente Theoremate ; scil. è casubus summè obvium adduxit , quando Cathetus B E ad centrum circuli A B C pertineat.

2. Hinc, ut bene monet Cl. *Borellus*, investigare licet duo polygona ordinata & similia, quorum circumscriptum inscriptum excessu quidem minori dato quovis superet , tum etiam rationem diametri ad circuli peripheriam compendio egregio eruere. Nam C E. C A :: B E. (A G) A D + D B ; hoc est, perimeter polygoni circulo A B C ex semilatere B E inscripti, ad perimetrum duplo laterum numero ex latere ipso A D + D B circumscripti. Chordas verò per seq. Lemma, atque etiam proportionem licet inter A C & C E magis semper magisque minuere, eóque rationem diametri A C ad semichordam B E elicere. Quippe hinc datur B Eq, & huic par A E × E C, imò datur per Lemma, quod sequitur, ipsa A E. quare E C datur, atque etiam recta A D + D B. Idcirco ad peripheriam circuli (quæ quidem inter adscriptorum polygonorum ambitus mediat,) ratio diametri illicò emicat.

3. Horum Lemmatum Compilator, quisquis fuerit *Græcorum*, aut Scholiastes fortè *Arabs*, rectas A D, D G pares esse jubet, suo quasi fretus opusculo de Rectangulis, quod jam pridem periit. Istud tamen ex Elementis facillimè constat.

Lemma

Lemma III.

In circuli segmento A B C, *à quovis curvæ puncto* B *ad basin* A C *agatur perpendicularis* B D, *fiantque* D E = D C, *& arcus* B F = B C: *annexa* F A *erit æqualis ipsi* A E. Fig. 263. 264. 265.

Jungantur C B, B F, F E, E B. Est igitur E F B [c] = F E B, propter æquales rectas F B[a], (B C) [b]B E. Sed A F B + (A C B[b]) C E B [d] = 2 rectis [e] = A E B + C E B. Quare [f] A F B = A E B, & (A F B — F E B) A F E = A E F. Unde [g] A E = A F. a 29. 3. b hyp. & 4. 1. c 5. 1. d 22. 3. e 13. 1. f ax. 3. g 6. 1.

Schol.

1. Hujus egregii Theorematis Casus secundus, ubi A B C est semicirculus, *Cl. Ptolemæo* rectas olim circulo applicanti pernecessarius erat. Lemma tamen, quod τὸ κτ διχοτομίαν appellatur, cap. IX. Libri Primi Μεγ. Συντ. hâc occasione non constat modò, sed & generale evadit.

Datis scil. tam chordis quàm arcubus C A, A F, F C, adeóque semiarcu B C, quæritur ipsa B C chorda. Demissâ B D ⊥ A C, habes, ut priùs, $DC = \frac{EC}{2} \left(\frac{AC - AF}{2}\right)$. D verò rectus est, & B C D ex dato arcu (A C — C B) B A, etiam datus. Quare specie datur (per 40. Dat.) triang B D C. Dantur igitur ratione (3 def. Dat.) sed & magnitudine (2. Dat.) rectæ B C, C D. Fig. 264.

2. Rursum socors esse mavult *Abu'lHasan*; (istum enim λέξεως pravatæ insimulandum reor) & præter Authoris *Græci* ingenium, omissis reliquis casum medium ostentare.

Lemma IV.

Super A C *ejusque segmenta* A D, D C *describantur tres semicirculi* A B C, A E D, D F C, *& fiat* D B ⊥ A C: *erit figura* (A B C F D E A) *trium semicirculorum peripheriis interclusa, quam* Ἄρβηλον *vocat Archimedes, circulo circa* B D *æqualis.* Fig. 266.

Nam A Dq + D Cq + (A D × D C bis [a]) 2 D Bq [b] = A Cq. Súntque [c]circuli inter se, ut quadrata diametrorum. Quocirca [d] semicirculus A B C æquatur circulo circa diametrum B D, una cum binis a cor. 13, 17. 6. b 4. 2. c 2. 12. d ax. 7.

c ax. 3. binis semicirculis A E D, D F C: unde [c] Arbelon *Archimedêum*, hoc est, semicirculus A B C minus semicirculis A E D, D F C par omninò erit circulo circa B D describendo.

Notæ.

1. Cl. *Borellus* ista verbis suis adnotat.

" Hæc forsan est una earum propositionum quas *Pappus* legit in " libro antiquo de mensura *Arbeli*, seu spatii à tribus semicircumfe- " rentiis circulorum comprehensi, ut ait *Proclus*: quæ quidem ele- " gantissima est, ejusque inventionis Lunulæ *Hippocratis Chii* origi- " nem extitisse puto. Est enim *Hippocratis* Lunula superficies plana " à quadrante peripheriæ circuli majoris, & semisse peripheriæ cir- " culi subdupli comprehensa. Arbelus verò recentiorum est spatium à " triente & à duobus sextantibus circumferentiarum trium circulo- " rum æqualium comprehensum; & hisce duobus spatiis facilè qua- " drata æqualia reperiri possunt. At Arbeli *Archimedis* & *Procli* huc- " usque reperta non est quadratura; sed potest quidem assignari cir- " culus prædicto spatio æqualis. *Vide jam Viëtam in Responsis.*

2. Huic figuræ nomen dedit, ut par erat, cultellus seu scalprum Sutoris, quâ formâ semper fuit. Unde pervetus Glossa, Ἄρβηλον, Sicila: & Etymorum Græcanicorum consarcinator, Ἄρβηλον, σμιλίον σκυτικὸν περιφερές· ἔστι δὲ καὶ ὅπλον. Imò ante istos Scholiastes *Nicandri* paulò disertiùs, Ἄρβηλοι δὲ λέγονται κυκλοτερῆ σιδήρεια, οἷς οἱ σκυτοτόμοι τέμνουσι καὶ ξέουσι τὰ δέρματα. Hæc tamen obiter; alia jam me Mathesis distinet. Interpreti autem Arabi اربلوس *Arbelus* dicitur tanquam de virilis generis voce *Græcâ*.

3. Hoc quartum Theorema ex *Pappi* inventis fuisse existimo, quo ad propositionem sequentem, quæ subtilissima est & Sene *Siculo* digna, via certior ampliórque pateret: nec adeò *Hippocrati Chio* Meniscos quadrandi causam dedisse aliquam, quin ipsum potiùs abs antiquissimo illo Tetragonismo quàm opportunè ortum fuisse. Ait enim *Pappus*, quamprimùm exposuerat Antiquam illam Propositionem, quæ proximum Lemmatum *Archimedæorum* facit, & quidem paulò ante decimum quartum Floridorum Theorematum Libri sui Quarti, (quod minimè discrepat ab hoc Lemmatio,) —Δειχθήσεται δὲ τὰ πρότερον λαμβανόμενα.

Lemma

Lemma V.

Super A C *ejusque segmenta quævis contigua* A D, D C *describantur tres semicirculi* A B C, A E D, D F C, *sitque* D G $\perp$ A C: *pares invicem erunt circuli* B H E, L F N, *qui Arbelo* A B C D *inscripti, tam perpendicularem* G D *quàm semicirculos contingant in punctis* H E B, L F N. Fig. 267.

Duc diametrum H I: hæc autem [a]æquidistet A C, ob [b]rectam D H I [c]= A D H, atque connexa B I + I A [d]recta est. Tum conveniant A B, D G in G, conveniunt etenim [e]propter B A D + ADH < 2 rectis: adjuncta B H + H C, & recta est, & ad [f]A G perpendicularis, atque [d] I E + E D, & A E + E K etiam rectæ. Est autem [c]G D $\perp$ D A, & juncta C K $\perp$ K A, quare producta C K G recta erit. Quoniam verò E D || C G, propter rectos [f]A E D, AKC, erit [g]A D. I H :: (A G. G I ::) A C. C D. adeóque [k] A D × D C = A C × I H, & argumento pari A D × D C = A B × L M. Æquantur igitur inter se diametri I H, L M, & [h]circuli ipsi I E H, L F M. *Q. E. D.*

a 28. 1.
b 19. 3.
c *hyp.*
d *lem.* 1.
e 29, 32. 1.
f 31. 3.
g 2. 6.
h 2. 12. *ult.* 1.
k 16. 6.
l *v. schol.* 1.
n 27. 3.
o 32. 1.
p 14. 1.

Scholia.

1. Sive *Græcus* ille, qui hæc Lemmata primus collegit, sive potiùs *Arabum* aliquis, quo C G rectam lineam esse ostenderet, citat Opusculum suum de Trigonis Rectangulis. Inde verò *Ali Abu'lHasan* hoc adjumenti accepit. *v. fig.* 271. (*sive schema primum Borelli, ad paginam.* 393.)

B C $\perp$ A G, quod in triang A B C per F occursum perpendicularium B E, C D transit. Junge D E. Circulus A D F [f]ibit per E, ob rectum [c] A E F. Æquantur autem [n]D A F, D E F, atque [n] D E B, D C B, hoc est, B A G, D C B. & B communis est. Unde [o]AGB (C D B), [c]= recto A G C. Recta [p]igitur est C B, sive in schemate *Archimedeo* C G.

2. Deinde Adnotator *Nasvæus* cæteros casus hujusce quinti Theorematis ad mentem *Abi Sahl Cûhensis*, percelebris Mathematici, hoc ferè modo exponit. Fig. 268.

Casus secundus. Vel semicirculi A P N, O P C se mutuò secent in P. Sitque D P $\perp$ A C: æquales invicem erunt circuli H E B, MFL, qui semicirculos & perpendicularem contingunt.

Fig. 268. Æquidiſtant H I, A C, & agantur A B, A H K [a] tranſeuntes per
a *lem.* 1. I, E. atque conveniant A G & D P in G. Dein jungatur recta [b] C K
b ⊥ K G, & I N ⊥ C B [a] tranſeuntes per E, H.
c 31.3 : 28.1. Propter parallelas [c] C K N I, eſt [d] C A . C N :: (A G . G I ::) A D.
d 2.6. H I. adeóque [e] C N × A D = C A × H I. Verùm C D × D O =
e 16.6. [f] D Pq = A D × D N, atque [c] C N. D A :: (N D. D O ::) [g] C N.
f *cor.* 13.17.6. O A. Quare [c] C D × O A = D A × C N [h] = C A × H I. Pariterq;
g 19.5. C A × L M = C D × O A. Unde æquantur & diametri L M, H I,
h *ut priùs.* & circuli [k] M F L, H E I.
k *ult.* 1 : 2.12.

Caſus tertius. Vel ſemicirculos jam disjunctos A E N, O F C tangant partes rectæ D F, D P : æquantur circuli H E B, M F L, qui tam ſemicirculos quàm perpendicularem à tangentium occurſu (D) erectam contingunt in punctis E, B, H, & F, R, L.

Æquidiſtent A C, H I, L M diametri, & jungantur C B, I N, rectæque A H K, C G tranſeuntes per H, E, & K; quia [c] C G ∥ C N, erit [d] A D. H I :: (A G. G I ::) A C. C N, adeóque A D × C N = A C
l 36.3. × H I. Ac pariter C D × A O = A C × L M. Eſt autem [l] C D × D O = (D Qq = D Pq) A D × D N, atque C D. A D :: (D N.
m 18.5. D O ::) [m] C N. A O. Quocirca A D × C N [c] = (C D × O A) [h] = A C × H I = A C × L M = C D × O A. Pares igitur invicem ſunt diametri L M, H I, circulique [k] L F M, H E I.

Lemma VI.

Fig. 270. *Circuli* E F B, *qui tres ſemicirculos ſuper* A C, A D $= \frac{r}{s}$ D C, & *ipſam* D C *deſcriptos contingit, diameter* G H *diametro* A C *æquidiſtet; quæratur autem proportio diametrorum ad invicem.*

Ductis rectis A G, G B, C H, H B, H E, E A, G F, F C, item D G, D H, D I, D K, G L O, H M P, erit G O ⊥ A O, & H P ⊥ A C.

Et (propter H G, D K, D I ∥ A C, A B, C B) erit O P. P C :: G M. M C :: A D. D C :: A L. L H :: A O. O P :: O P. P C, hoc eſt, $\frac{r}{s}$ P C. P C.

Unde aggregatum ex 3 continuè proportionalibus,

$$\frac{r^2 PC^2}{s^2 PC} + \frac{rPC}{s} + PC. \frac{rPC}{s} :: AC. PO = GH.$$

Ex.

Ex. gr. (sic enim vult Arabs) sit P C = 4. Erit O P = 6, O A = 9, adeóque diam. A C . G H :: 19 . 6.

Adnotata in Lemma V & VI.

§ 1. Lemmatum *Archimedis* quod putant, quintum ex *Pappi* inventis assumptisque transcriptum est, quâ arte illustrius esset id quod sequitur.

Præmonet adeò, priusquam ostenderet principem illam veteremque propter quam appellitat ex vett. membranis, Libro *IV.* Floridorum *Prop. XIV.* eisdem positis quæ in Schemate nostro 270, &ab α deductâ $\alpha\,\mu\ \perp$ A C & = G O, esse μ D . $\frac{1}{2}$ H G :: A D — D C . A D + D C.

Rectæ etenim sunt [a] A E H, G E D, C F G, D F H; similiáque trig. [b] D E A, D O G, itemque D H P, D F C, quare A D . D E :: G D . D O, & A D O = E D G: pariter D C . D E :: H D . D P, & C D P (= HDE = EDG) = ADO. a Lemma 1. b 31, 3 32, 1. & 4. 6.

Unde AD . DC :: PD . DO. & componendo convertendoque AC . AD—DC :: PO = GH . PD—DO :: Pμ = $\frac{1}{2}$ G H . $\frac{1}{2}$ PD — DO. *Q. E. D.*

Syntheorema 1. Tum propter sim. trigona D O G, (DEA,) HPA, erit D O . O G :: H P . P A, & D O * P A = G O * P H = HPq = Q. $\alpha\,\mu$.

2. Imò, quia C D . D A :: O D . D P. erit componendo tam AD . AC :: PD . PO & diam. AD * (PO) GH = PD * AC. quàm CD . AC :: OD . PO. & diam. CD * (PO) GH = DO * AC.

§ 2. Deinde *prop. XVII. l. 4.* quæ decimam sextam ejusdem adjuvat, ut D H q . H I q :: A C . C D. Ponantur eadem quæ in Figurâ 267. fiatque I O $\perp$ A C, Rectæ gr. sunt [n] H E A, I E D, & propter ea C A * A O = [a] (coeuntibus D, P.) A D q. [b] A C . (A C — A D) D C :: A D . (A D — A O) D O = H I :: (ob sim. trigona [e] A E D, H E I) DE . E I :: [h] D E q . E H q :: [f] D H q . H I q. a per preced. b 17. 6 : 19. 5. c 34. 1. est. d 4. 6. e 31. 3 : 29. 1. f 22. 6.

Est etenim propter I H D [i] rectum, & [k] H E $\perp$ D I; [g] D E . E H :: H E . E I :: D H . H I. g 8. 6. h 20. 6.

Hinc statim constat horum Lemmatum quintum, viz. [l] AC . DC :: ⊙ circa D H . ⊙ circa H I pariter, A C . A D :: ⊙ circa D H . ⊙ circa L M. Æquanturque [m] circuli ad H I, L M. Quod ex *Pappo* comprobatum volui. i 18. 3. k 31. 3. l 12. 2. m 19. 5. n Lem. 1.

§ 3. Propositio autem illa Antiqua & *Archimedea*, quam vocant, talis erat referente *Pappo lib.* 4. *prop. XVI.*

Tres semicirculos in spatio *Arbelico* tangat circulus G F H, ipsum verò binósque semicirculos alter circa N etiam tangat, atque ita porro. Erit $\alpha\mu = GH$, & $QN = 2RI$, &c. juxta naturalem numerorum seriem. (Ponantur ea quæ in Schem. 270.)

a § 1. *sch.* 1° Æquantur [a]C A O, P A D, atque A C P, O C D, unde [b]AD.
b 16. 6. A C :: A O. A P, necnon A C. C D :: O C. C P. Quare, [d]A O.
c 17. 5. (P A—A O) O P :: A D. D C [c] :: O P. P C, & [e]$OPq = AO *$
d 19. 5. PC [a] $= Q{:}\alpha\mu$. Ergo [f] $\alpha\mu = (OP)$ [g] $= GH$.
e 17. 6.
f *ult.* 1. 2. Et, quia [h] $\frac{2}{1} = \frac{\alpha\mu + GH}{GH} = \frac{NQ}{RI}$, erit $QN = 2RI$.
g 34. 1.
h 15. *Papp. l.* 4. Et sic deinceps.

3. Quinimò si fuerint A C, D C in fig. 267. inter se sicut numeri
9. 10. quadrati, [i] erit D H commensurabilis diametro H I, aliàs non. Nam per § 2 universè, $\frac{AC}{CD} = \frac{DFq}{HIq}$. Sit igitur $\frac{AC}{CD} = \frac{4}{1}$, erit $DF = 2HI$: pariter $QN = 3RI$, &c. juxta vulgatissimam numerorum consequentiam.

4. Quæ est *Pappi* propositio *XVIII.* Manifestum etiam est, si circuli *f*, *g*, *h*, & semicirculos A D E, A B C, séque invicem tetigerint, fuerítque Cathetus fn æqualis radio, fore $go = 3gi$, & $hp = 5hq$, &c. juxta numeros deinceps impares. Nam per § 3. $\frac{fn + 2fn}{\text{diam.}} = \frac{go}{2gi} = \frac{3}{2}$, & $go = 3gi$, &c. (vide fig. 282. sive illam *Pappi* ad *XVIII. pr. lib.* 4.)

Lemma VII.

Fig. 272. *Circulus* A B C *quadrato* A C *circumscriptus duplus est inscripti circuli* E F G.

a 34. & *ult.* 1. Ductâ [a]etenim diametro E G || B C, erit diam. B Dq [b]$=$(2 BCq)
b 47. 1. 2 E Gq, & circulus circuli duplus.
c 2. 12.

Adnotat *Abûl Hasan Nasvæus*, tanquam ex libello quem de Circulo fecit, tritum illud,

Vis $\frac{r}{s}$ polygoni sive circuli dati E H G. Habes latus aut diametrum

trum E G, & $\frac{r}{s}$ E G, necnon (per 13. 6.) quadratum par rectangulo $\frac{EG^2 r}{s}$. unde, $EG. \frac{EGr}{s} :: EG^2. \frac{EG^2 r}{s}$ :: [c] circulus datus quæsito :: per 20. 6.

Lemma VIII.

In circuli secante A C *statuatur* B C *par radio, & per circuli centrum* D *agatur* C E: *arcus* A E *triplus est ipsius* B F. Fig. 273.

Ductis enim E G || A B, radiisque D G, D B: erit D G E [a] = D E G $\left(\frac{GDF}{2}\right)$ [c] = C [a] = F D B [d] = $\frac{2}{3}$ G D B, & arcus B F [e] = ($\frac{1}{3}$ B G) [f] $\frac{1}{3}$ A E, ob A G E [c] = G A B. unde constat propositum.

Alf. Borell. hoc fermè modo. Adjunctâ E B, erit (B D C) [a] C = 2 D E B [a] (E + E B D): unde A B E [b] = C + E [g] = 3E, & arcus A E [e] = 3B F.

Quod in hoc theoremate ponitur, datæ peripheriæ τειχοτομίαν, quod vides, inducit, atque ita Geometriam planam, ut ritè construatur, omninò superat. Id tamen facili opere præstat *Solida*, multóque adhuc plura *Linearis* quam vocant.

Lemma IX.

In circulo binæ quævis chordæ A B, C D *sese ad angulos rectos secantes, intercludunt arcus* A D + C B, *pares arcubus* A C + D B. Fig. 274.

Agatur diameter E F || A B, est igitur G D [a] = G C, A E [b] = B F, & A E + A D [c] = E C. unde semicirculus C F + E A + A D = C F + F B + A D [e] = A C + D B.

a 3. 3.
b *cor.* 26, 3. & *constr.*
c *cor.* 28. 3.
d *ax.* 1. *def.* 17.
e *ax.* 7.

Lemma X.

Circulum A E B *tangant rectæ* C A, C B, *secent verò* C D, *& huic parallela* B E, *& connexa* A E *secanti* C D *conveniat in* F: *Cathetus* F G *bisecabit ipsam* E B. Fig. 275.

Junge A B, est igitur C A B [a] = (A E B) [b] A F C, & D communis utrique triang [b] C A F, A H C; unde [c] F C. C A :: C A. C H, &

a 32. 3.
b *constr.* 29. 1.
c 32. 1: 4. 6.

d 17.6. e cor. 36. 3. f cor. 17. 6. g 6. 6. h 5. 1. k ax. 1. l 26. 1.

& [d] $FC \times CH = CAq$ [e] $= CBq$. Quia [f] verò $FC . CB :: CB$, & $<$ [g] D communis, erit $<$ [g] $CFB =$ [g] $(CBH$ [h] $= GAB$ [k]$)$ AFC. Sed $(CFA) FEB$ [k] $= FBE$ [b] (CFB), angulíque [l] ad G recti, atque latus GF commune; quare EG [l] $= GB$.

Lemma XI.

Fig. 276.

Circuli diameter AF *potest quadrata ex segmentis binarum chordarum* AB, CD, *sese ad angulos rectos secantium in* E.

a ax. 12 31.3. b 27.3. c cor. 32. 1. d 26, 29. 3. e ult. 1. f 47. 1. g cor. ult. 6.

Jungantur AC, AD, CF, DB. Propter AED [a] $= ACF$, & ADC [b] $= AFC$, erit CAF [c] $= DAE$, & tam curva quàm recta CF [d] $= DB$. Unde AFq [f] $= CFq$ [e] $(DBq) + ACq$, hoc est, [f] $DEq + EBq + AEq + ECq$.

Schol.

Ali Nasvæus hoc modo: annexis AD, DB, BC. In triangulo DEB, $E =$ recto [c] $= B + D$, & arcus $DA + BC$ [g] $=$ semicirculo. Potest ideò diameter utraque [d] $DAq + BCq$, hoc est, quadrata ex AE, ED, EB, EG.

Lemma XII.

Fig. 277.

Semicirculum tangant CD, DE, *rectaque* CG *transeat per* F *intersectionem subtensarum* DB, EA, *qui tactus* D, E, *&* *diametri terminos* A, B *connectant. Erit* $CG \perp AB$.

a 31.3. b cor. 32. 1. c 2 ax. d hyp. & 32.3. e ax. 1. f schol. g 5. 1.

Junge DA, EB. Erit ang. [a] rectus ADB [b] $= DAB + DBA$ [a] $= BEF$. Et (CDB) [d] $DAB + ABF + FBE = DAB + (CEF)$ [d] ABE [c] $= BEF + FBE$ [b] $= DFE$ [c] $= CDB + CEF$. Unde CF [f] $= CD$: atque est DAG [d] $(CDF$ [g] $= CFD) + DFG = 2$ rectis $=$ [a] recto $(ADF) + FGA$. Quare [k] $CG \perp AB$.

Schol.

1. In Demonstratione ut pares sint CF, DC, provocatum est ad opusculum, quod hodie nusquam est, *de Tetrapleuris*: supplet tamen τὸ ἐλλιπὲς *Abu'lHasan* Adnotator hunc in modum.

h 13. 1. k 10 def. 1. l 16. 1.

Vis $CF > DC - CH$. Est igitur (connexis DH, HE,) CDH [e] seu DHC [l] $> DFC$, & CEH sive CHE [l] $> CFE$: quare

DHE

$DHE = CDH + CEH$ majore $CDF + CEF$, pars toto: Rursum ais $CF < DC = CG$. Erit pariter (jungenti DG, GE,) DGE, hoc est, $CDG + CEG$ minor $CDF + CEF$, totum parte. Ergo $CF = CD$.

2. *Cl. Borellus* Methodo idem directâ commonstrat, hâc puta.

Fac $CN = CE$, & adjunge NE. Anguli igitur [m] plani $NDFE$ valent quatuor rectos, atque anguli [n] oppositi EFD $(CDF + CEF)$ $+ N$ [g] $(CEN) = FDN + FEN = 2$ rectis. Quare circulus ex centro C (ob [o] $CN = CE = CD$) plano $NEFD$ circumscriptilis [p] auferet [q] $CF = CD$.

m *sch.* 32. 1.
n *ax.* 3.
o 19. 3.
p 22. 3.
q *def.* 15.

Lemma XIII.

Catheti AE, BF, *à diametri circularis extremis* A, B *cadentes*, *exsecante à diametro* CD *segmenta* CE, FD *invicem æqualia auferunt*. Fig. 278.

Junge EB, & per centrum G adige $GI \parallel AE$, quæ bisecat [a] CD & æquidistat ipsi BF. Erit (ob $AG = GB$) EI [b] $= IB$, & EH [b] $= HF$. Et HD (HC) minus HE æquales ipsi FD [c] $= FE$.

a 3. 3: 30. 1.
b 2. 6.
c *ax.* 3.

Lemma XIV.

Super AB *ejusque paria segmenta* AC, DB, *atque sub intersegmento* CD *describantur quatuor semicirculi*, & *per* E *centrum circulorum* AFB, DGC *pertrahatur*, $FG \perp AB$: *Circulus circa* FG *æqualis est figuræ curvilineæ* $AFBDGCA$, *quam Salinon appellat Archimedes*. Fig. 280.

Sunt enim diam. FGq [d] $(DAq) + CAq$ [a] $= 2\,DEq$ [b] (CEq) $+ EAq$ [c] $= \frac{1}{2} ABq + DCq$. Panterque [e] ipsi circuli Quare [f] semicirculi super AB, DC, æquantur circulis ad FG, CA. Et [g] Circulus ad FG minus illo ad AC, hoc est minus paribus semicirculis super AC, DB æqualis est Salino, sive figuræ à quatuor semicirculis AB, BD, DC, CA conclusæ.

a 10. 2.
b *hyp.* & *ult* 1.
c *hyp.* & 4. 2.
d 15. *dif.*
e 2. 12.
f *ax.* 7
g *ax.* 3.

Nota.

(Salinon) sive σελίνιον Luna est, quatenus vultu planissimè suo appartet, hoc est, μηνοειδής. Unde nomen antiquitùs erat puerorum amuletis.

Lemma

Lemma XV.

Fig. 281. *In semicirculo* A C B, *sit* C B *chorda Pentagoni & recta* C D *per arcus* C A *punctum medium* D *transiens diametro* A B *productæ occurrat in* E, *atque connectatur* D A *Cathetus* F G *auferet* G F *semidiametro circuli parem.*

Jungantur CA, GD, DB, & è centro HD. Est igitur (ob [a] CAB $= \frac{2}{5}$ recti) CAD [b] = DAB $= \frac{1}{5}$ recti : utque (2 DAH) [d] DHB $= \frac{2}{5}$ recti. Sed rectus C [c] = G, & F A commune, quare (in trigonis A C F, G A F) A C = [f] A G : necnon (in trigonis A C D, A G D) ob pares angulos ad A, A D commune, & A E = A G, erit [f] A C D = A G D = [g] $\frac{3}{5}$ 2 rect. $= \frac{6}{5}$ recti. atque A C D = [h] D B E, & D B A [k] = D G B. Unde D B = [l] D G.

Item quia D H G $= \frac{2}{5}$ recti, & D G H $= \frac{6}{5}$ recti, erit H D G [k] $= \frac{2}{5}$ recti, & D G [l] = G H.

Postremò quoniam (in triang. E D B, H D G) B D E [h] = (C A B [a] $= \frac{2}{5}$ recti) G D H, & utprius D G H = E B D, & DB=DG, erit E B [f] = G H, & E G [m] = radio B H.

a Cor. 10. 4.
b 17. 3.
c 9. 5.
d 5, 32. 1.
e 31. 3.
f 26. 1.
g *sch.* 22. 3.
h *cor.* 22. 3.
k 32. 1.
l 6. 1.
m *ax.* 2.

Coroll. I.

Annexis C H, C G, erunt A C E, H D E, & H C G, G D B trigona isoscelia & similia, similiterque posita & ad bases secta. Nam duas quintas recti æquant hinc H C B, H C G, G C E; inde E D B, B D G, G D H.

Coroll. II.

Liquet insup. E C (= C A, chordæ $\frac{3}{10}$ totius circuli) divisam esse in D mediâ ac extremâ ratione, cujus segmentum majus E D (= radio D H, ob D B E = D G H,) est latus hexagoni ordinat circulo A C B inscribendi, minusque D C decagoni, per 9, *e.* 13. pariterque juxta mediam extremamque rationem sectas esse E G in B, B H in G, & E H tam in B quàm G, E A denique in centro H. Deinde æquantur cùm E C B tum $\frac{1}{2}$ G C E parti quintæ recti.

Binæ prop. quæ sequuntur in editione Florentinâ ad indubium æternumque opus *Archimedis* de Spherâ prorsus pertinent. Codices etenim Arabici in 15. Lemma omnes desinunt.

Archi-

ARCHIMEDIS ΨΑΜΜΙ΄ΤΗΣ

SIVE

Liber de Arenæ numero.

ARbitrantur nonnulli, rex *Gelo*! arenæ numerum infinitum esse. Dico autem non solùm ejus, quæ est circa *Syracusas* reliquamque *Siciliam*, sed etiam quæ in omni regione habitabili pariter atque inhabitabili continetur. Sunt Autem alii, qui non illum quidem infinitum putent, sed nullum dari denominatum numerum posse credant qui illius multitudinem exuperet.

Itaque eos qui ita opinantur, si ejusmodi arenæ molem animo comprehenderent, cujusmodi esset, si universa terra, repleto in eâ mari & cavitatibus omnibus, altissimorum montium vertices exæquaret; atque hujus ipsius rursus alterum multiplicem excogitarent, nonimè dubium est existimaturos illius multitudinem numeros longe omnes, multúmque superare. Ego verò id ostendere conabor demonstrationibus Geometricis quas tu ipse assequeris: eorum videlicet numerorum, qui à nobis expressi traditíque sunt in iis, quæ ad *Zeuxippum* Scripsimus, nonnullos non solùm arenæ multitudinem superare, quæ terræ undique repletæ ut diximus æqualis esset, sed etiam quæ ipsi mundo parem haberet magnitudinem. Non enim ignoras mundum à compluribus Astrologis appellari Sphæram, cujus centrum quidem est terræ centrum, semidiameter autem est æqualis lineæ inter centrum solis & centrum terræ interjectæ. Hæc igitur in iis, quæ ab Astrologis scripta sunt, redarquens *Aristarchus Samius* positiones quasdam edidit, ex quibus sequitur Mundum proximè dicti mundi multiplicem esse. Ponit enim stellas inerrantes atque solem immobiles permanere, terram ipsam circumferri circa solem secundùm circumferentiam circuli, qui est in medio cursu constitutus; sphæram autem inerrantium stellarum circa idem centrum cum sole sitam, tantâ esse magnitudine, ut circulus secundum quem ponit terram circumferri, eam habeat proportionem ad distantiam stellarum fixarum, quam centrum Sphæræ habet ad superficiem. (Vide *Copernic*. revol. *l*. 3. *c*. 15.) Id verò manifestò constat fieri non posse. Quoniam enim Sphæræ centrum nullam habet magnitudinem, neque perfectè ullam habere proportionem ad sphæræ superficiem existimandum est. Quare credibile est *Aristarchum* ita intellexisse, *utputa in hypothesium primâ, &c.*

Suis igitur numeris notisque (captu sanè perfacilibus) ut exhiberet Senex ille Siculus quantum arenarum capiendo esset fixarum orbis jam penitus oppletus, imò eo plusculum, hæc ante cætera poni voluit.

Hypotheses.

1. Est secundùm *Aristarchum*, qui inter sphæras fixarum solisque quàm inertes & defixas globum nostrum circum agitabat, ut hæc tellus: ad orbem Revolutionis Annuæ, (qui veterum Astronomorum Mundus fuit,) ita iste ad orbem fixarum: Fiatque adeò horum diametris ἀνάλογον, per 18. *e.* 12.

2. Terræ autem ambitus, quem Antiqui Geometræ 300000 stadiorum esse comprobarunt, (quia decuplo liberalior maluit illis esse *Archimedes* ἀναμφιλόγυ ἕνεκεν) haud superet trecentas stadiorum Myriadas, sitquè ita (per Cyclometrica *Archim.*) diameter terrestris minor quàm stadiorum centrum Myriades.

3. Statuatur solis diameter & terrestri major, & quidem trigecupla diametri Lunaris, neque plus. Quid enim? hanc *Eudoxus* noncuplam Lunaris diametri pridem asseruerat, *Phidiasquè* duodecuplam: & demonstraverat sanè *Aristarchus* (*prop.* 9. libelli aureoli qui adhuc adservari meruit,) nè vix vigecuplam, atqui esse plusquam ipsius octodecuplâm.

Observationes.

1. *Aristarchus* quidem capto solis angulo visuali (quâ in re & manus & visus & organa nimiùm fallere solent,) aiebat solis discum partem Zodiaci vigesimam & septingentesimam subtendere: Veruntamen *Siculus* noster, quoniam Problema suum subtilius eo quicquam haud postulat, observavit binos modò angulos, alium quidem angulo solis paulò majorem, aliumque eo minorem. Is autem erat observandi modus.

Dummodo in crenâ regulæ super palum versatilis jaciat Cylindrulus, solis jàm exorti oppositos solum margines visui ad extremum regulæ posito permittens, angulus quem capiunt rectæ à mediò visu Cylindrulum tangentes, major fuerit visuali solis angulo si visiò visio fieret in puncto: Quia vero hoc aliter fit, ponatur jam ad regulæ extremum, ubi priùs erat visus, globulus, diametrum habens non minorem latitudine pupillæ: atque hunc globum necnon Cylindrulum tangant binæ rectæ; eæ accursu suo angulum efficient minorem angulo solis visuali, cùm utrinque aliquid solaris disci compareat. Cæterem magnitudo visu non minor hac arte investigatur: Sumantur duo Cylindri bene tornati, tersi, & æquè crassi, quorum alter sit albus, alter non albus: Non-albus verò ad oculum quam proximè statuatur in crenâ regulæ prædictæ, alter autem ab oculo magis distet; siquidem viso non-albo albus juxta varia intervalla promotus dispareat, magnitudo paris crasitudinis cum Cylindris istis non minor erit diametro visûs, quod suprà requirebatur. Ubi denique Cylindrulus in crenâ regulæ collocatus totum solis discum à visu penitus abripit, rectæ quæ à visu ducuntur Cylindrulum contingentes continebunt coeundo angulum haud minorem $<^{o}$ solis visuali. Ita autem deprehensus est angulus solis visualis major esse $\frac{1}{200}$ recti anguli, minorque $\frac{1}{164}$ recti: Modos tamen alios stellarum diametros & quidem accuratius paulò captandi vide apud *Ricciolum* in Almag.

2. Observatum est 25 papaveres (*μήκωνας*) in rectam lineam dispositos longitudinem digitalem superare.

Sit tamen, majoris evidentiæ ergo, diameter papaveris haud minor quàm digiti pars quadragesima: atque constet corpus papavere non majus decem millibus arenarum, neque pluribus.

Lemmata.

1. Solis diameter major est latere chiliagoni orbitæ revolutionis annuæ inscripti.

Plano per terræ centrum *h*, visúmque *d* secentur, sole jam exorto, Orbis annuæ revolutionis, terra ipsa, & Sol secundum circulos *abc*, *def*, & *sq*. quem quidem tangant rectæ *dn*, *dt*, itemque *hr*, *hq* secantes circulum *abc* in *a*, *b*. Quoniam, dum *k* horizontem stingit, [a] $<$ [g] *hdk* rectus *e*, exceditquè [b] terrestrem diameter solis, erit sole jam prorsus elevato, $<$ *hdk* obtusus, [c] & $hk > dk$, necnon *rhq* ($<$ [d] *ndt*, angulo solis) $< \frac{1}{164}$ recti: adeòque recta $ab <$ subtensâ $\frac{1}{4 \times 164}$ circuli *abc*. Atqui perimeter 656-goni. *kh* :: $\sqsubset$ 44.7 :: $\sqsubset$ 656. $104\frac{4}{11}$, atque adeò latus 656-goni. *kh* :: $\sqsubset$ 1. $104\frac{4}{11}$: quare $\frac{ba}{kh}$ :: $\sqsubset$ ($\frac{1}{1148}$, *i. e.* in integris, :: $\sqsubset$)

Fig. 283.

a 18. 3. Commandini.
b *hyp.* 3. *pag.* c 32, 19. 1.
d 24 *opt.* Aucl.
e *Observ.* 1.
f *cor.* 33. 6.

g Ptol. Alm. l. 1. c. 9. $\frac{1}{100}$: atque ba multò $\sqsupset \frac{hk}{100}$. est autem ba diameter circuli sg.
h 13. 5. quippe (ob auh, hkr, rectos [m] & h communem) est [n] $hk . ha$ [l]
i 16. 1. $= hk :: kr . au$: unde [o] $kr = au$, & diameter ($= 2kr$)
k 28. 5. $= ab$; Estque [p] $2hy \sqsupset ab$ sive $2ks$, unde $hy + ks \sqsupset \frac{1}{100} hk$,
l 15. def. 1. & reliquum $ys \sqsubset \frac{99}{100} hk$, adeòque $hk . ys :: \sqsupset 100 . 99$.
m 3. 18. 3. Quia autem tam hr [c] $\sqsupset hk$, quàm $ys \sqsupset dt$, (Scil. junctis
n 4. 6. dy, st, obtusi [r] sunt $\angle$ [i] dyz, zst, & [c] $dz \sqsubset yz$ necnon $zt \sqsubset zs$,
o 9. 5.
p hyp. 3.
q 8. 5. eòque [s] $ys \sqsupset dt$.) erit $\frac{hr}{dt}$ (:: [q] $\sqsupset \frac{hr}{ys} :: \sqsupset \frac{hk}{ys}$ [t]) $:: \sqsupset \frac{100}{99}$

Fig. 284.

r Cor. 16. 3. Præterea in trigonis rectangulis hkr, dkt, quia $kr = kt$,
s 4. ax. ac hr (hq) $\sqsubset dt$, erit angulus [d] major $tdk . rhk$ ::
t ut priùs. $\sqsubset hk . dk$
u cor. 37. 3. & 15. 5. $\sqsupset hr . dt$. [Compositis etenim ad rectos trigonis ktd, khr,
x 12, 28. 1. sit $df = hk$, & [x] $fi \parallel kr$, circuli igitur pares circa pares diametros
y sch. 31. 3.
z 33. 6. df, hk, y transibunt per i, r, eritque $\frac{\angle fdi}{\angle rhk}$ (:: [z] $\frac{\text{arcus } fi}{\text{arcus } kr}$) [g]

Fig. 285. :: $\sqsubset$ [h] $\frac{\text{recta } fi}{\text{rect. } kr}$ :: $\sqsubset$ [n] $\frac{(fd)\, kh}{kd}$ Vel Componantur triangula ista ad acutos, h, d, & centro d, intervallo do, describatur circulus poq, Erit igitur $\frac{\angle kdo}{\angle odt}$ ($h.\ e.$ [f] $\frac{\text{sector } pod}{\text{sect. } oqh}$ :: $\sqsupset$ [q] $\frac{\text{sect. } pod}{\triangle oth}$) :: $\sqsupset$ [q] $\frac{\triangle kod}{\triangle oth}$ sive [i] $\frac{ko}{ot}$; & componenti, $\frac{\angle kdt}{\angle khr}$ (:: $\sqsupset$ [k] $\frac{(kt)\, kr}{ot}$) [n] :: $\sqsupset$ e. $\frac{hr}{dt}$.]

Inde [u] $\frac{ndt}{rhk}$ (:: $\sqsupset \frac{hr}{dt}$) multò :: $\sqsupset \frac{100}{99}$. Tum, quia ndt (major $\frac{1}{200}$ recti) rhq :: $\sqsupset \frac{1}{200} . \frac{99}{20000}$, $h.\ e.$ 1001.99, est rhq ($\sqsubset$ [l] $\frac{99}{20000}$ recti, $h.\ e.$ $\sqsubset \frac{1}{202} . \frac{2}{99}$ recti) multò $\sqsubset \frac{1}{203}$ recti. Solis igitur diameter ba major est subtensâ parti $\frac{1}{812}$ circumferentiæ totius, & adhuc major subtensâ $\frac{1}{1000}$ circumferentiæ seu latere Chiliagoni Orbitæ ἐνιαυσίᾳ inscripti.

Coroll.

Hinc autem sequitur, quia ambitus Chiliagoni, (qui quidem
α 21. 1 [α] excedit tres diametros Orbitæ annuæ cui inscribitur, cùm vel
β cor. 15. 4. ambitus hexagoni [β] æquet tres diametros sui circuli,) minor est mille diametris

diametris solis, & adhuc minor tricies mille diametris Lunæ aut terræ, Diametrum Orbis revolutionis annuæ (quem mundum vocant, minorem esse decies mille diametris terræ, multoque minorem γ centrum Myriadibus myriadum stadiorum, sive γ *hyp.* 2.
10000×1000000.

2. Τῶν ἀριθμῶν κατονόμαξις.

Novem primi gradus seu Periodi ab unitate in ratione decuplâ (quæ ad præsens institutum abundè sufficit) progredienti vocentur Numeri Primi: & gradus octo præter unitatem Octas Prima. Isti verò numeri commodè satis exprimi solent, notis puta distinctis ad Myriades & ad Myriadum Myriades notis illis repetitis. Dein novem gradus, qui proximè sequuntur incipiendo à nono seu ultimo gradu, numerorum primorum, appellentur Numeri Secundi necnon octo ipsius gradus excepto itidem primo, Octas secunda: Atque ita porro

3. Si numeri ab unitate proportionalis fuerunt, ut $\iota = \alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.\zeta.\eta.\theta.\iota.\kappa.\lambda.$ seu $1.b.b^2.b^3.b^4.b^5.b^6.b^7.b^8.b^9.b^{10}$ & aliqui δ, θ ex eadem analogeâ sese multiplicaverint, factus inde numerus $(\delta \times \theta =)\ \chi$ æqualis erit ipsi λ, qui tantum distet à θ majore multiplicantium, quantum minor ab unitate in eadem analogiâ.

Quippe [a] $\begin{matrix}\alpha.\beta :: \theta.\iota \\ \beta.\delta :: \iota.\lambda\end{matrix}$ & $\alpha.\delta :: \theta.\lambda$: quare [b] $\theta\lambda$ seu $\chi = \alpha\lambda$ a *hyp.* & 14.7.
b 19.7.
$=$ [c] λ. Patet etiam $\lambda - \iota$ distare ab unitate quantus est numerus c 5 *ax.* 7.
ex utrisque conflatus, quibus se invicem multiplicantes δ, θ ab unitate absunt. Sunt equidem $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$, quot ipse θ ab unitate distat, at ι, κ, λ, sunt uno minores, quàm quibus δ distat ab unitate: etenim unà cum θ totidem erunt.

His igitur partim positis, partim verò demonstratis, quod jam propositam est, ostendemus.

Propositio Princeps.

Arenæ numerus, quæ magnitudinem obtineat æqualem Sphæræ stellarum inerrantium ab *Aristarcho* positæ, minor est mille Myriadibus octavorum, quos vocamus, numerorum, tantum abest ut sit vel infinitus vel ineffabilis.

Quia diameter papaveris est ad digitum :: (1.40 [a] :: 40.1600 a *Observ.* 2.
::) 1600.64000; Sphæra ex diametro digitali non [b] continebit b 1 2/2. 2.
plusquam 64000 papaverum globosorum, sive [a] arenarum 64000×10000,

10000, hoc eſt, ſex myriades myriadum quatuorque myriadum millia $=$ ſex n^{ii} $+$ quatermillibus myriadum α^{i}: atqui $\sqsubset$ decem α^{ii}. Numerus autem arenarum, quas capit ſphæra ex diametro centum digitorum, adeóque [b] ſphæræ ex digitali diametro multiplex centum myriadibus, minor eſt $1000000 \times$ decem n^{ii}, hoc eſt, minor mille myriadibus α^{ii}: Nam $10\ \alpha^{ii} \times 1000000$, qui fit ex $10\ n^{ii}$ termino decimo ab unitate in ratione decuplâ, & ex 1000000 termino ſeptimo
c *Lemma* 3. [c] erit progreſſionis iſtius terminus decimus ſextus; octo autem primi termini pertinent ad n^{i}, & octo ſequentium ultimus valet mille myriades ꝟ n^{ii}. Rurſus numerus arenarum, unà cum monade quibus conſtat ſphæra ex diametro decies mille digitorum, qui quidem ſtadium ſuperant, hoc eſt, ſphæra [b] centum myriadibus multiplex ſphæræ ex diametro digitali, minor eſt $1000000 \times$ mille myriades n^{ii}, hoc eſt, minor decem myriadibus ꝟ n^{iii}, ſive progreſſionis iſtius termino ($16+7-1=$[c]) 22^{do}, quandoquidem octo primi termini cum unitate pertineant ad n^{i}, octo ſequentes ad n^{ii}, & cæterorum ſex ultimus definat in decem myriades n^{iv}. Numerus etiam arenarum, quibus repletur ſphæra centum ſtadiorum diametrum habens adeóque ſphæræ ex diametro unius ſtadii multiplex myriadibus centum, minor erit $1000000 \times$ decem myriades n^{iii}, ſive progreſſionis termino ($22+7-1$) 28^{vo}, hoc eſt, minor mille unitatibus ꝟ n^{iv}. Pariter ſphæra ex diametro denum millium ſtadiorum, adeóque ſphæræ centum ſtadiorum diametrum habentis multiplex centum myriadibus, continet arenarum numerum minorem 1000000×1000 unitates ꝟ n^{iv}, ſive termino progreſſionis ($28+7-1$) 34^{to}, hoc eſt, minorem decem unitatibus ꝟ n^{v}. Dein ſphæra ex diametro centum myriadum ſtadiorum continet arenas pauciores quàm 1000000×10 unitates ꝟ n^{v}, ſeu quantitatem termini 40^{mi}, hoc eſt, pauciores quàm mille myriades ꝟ n^{v}. Item ſphæra ex diametro decies mille myriadum ſtadiorum habet arenarum numerum minorem $1000000 \times$ mille myriades ꝟ n^{v}, ſeu termino 46^{to}, hoc eſt, minorem myriadibus decem ꝟ n^{vi}: Et ſphæra ex diametro centum myriadum myriadum ſtadio-
d *Cor. lem.* 1. rum, quæ [d] orbis annui diametro major eſt continet arenarum numerum minorem $1000000 \times$ myriades decem ꝟ n^{vi}, ſive termino 52^{do}, hoc eſt, minorem mille unitatibus ꝟ n^{vii}. Ergo mundus veterum Aſtrologorum ſeu orbis revolutionis annuæ non capit tot arenas quot ſunt mille unitates ꝟ n^{vii}. Denique numerus arenarum quæ repleant fixarum ſphæram *Ariſtarchicam*, minor eſt mille myriadibus ꝟ n^{viii}. Quoniam enim diametri terræ, mundi Aſtrolo-
e *Hyp.* 1. gorum, orbiſque fixarum fuit $\div\div$[e], oſtensáque eſt diameter mundi iſtius

iſtius minor 10000 diametris terræ, erit etiam fixarum orbis diameter minor 10000 diametris mundi, & fixarum orbis [b] minus decies millies decies mille myriades mundorum: unde numerus arenarum, quas continebit ſphæra æqualis fixarum orbi juxta *Ariſtarchum*, minor erit 1000000000000 × mille unitates ἀρ n^{vii}, ſive progreſſionis termino $(13+52-1)$ 64^{to}, qui eſt gradus octavus ἀρ n^{viii}; minor mille myriadibus ἀρ n^{viii}. Patet ergo propoſitum. Hæc autem, rex *Gelo!* quamplurimis quidem, qui Mathematicis inſtructi non ſunt, non admodum credibilia fore arbitror: illis verò qui ea didicerunt, & circa diſtantias & magnitudines terræ, ſolis, mundique totius elaborarunt, credibilia prorſus eſſe propter demonſtrationem. Quapropter & de his ipſis ſpeculari aliquos non abſurdum eſſe exiſtimavi.

ARCHI-

ARCHIMEDIS
EXOTERICA.

PRæter illa *Archimedis* opera quæ hic exponuntur, alia memorat *Rivaltus* partim ab *Archimede* scripta, partim ab illo facta; sed quorum particularis notitia, præ temporum injuriâ, ad nos non pervenit.

1. Ex *Vitruvio* ad hunc sensum narrat. Cùm *Hiero Syracusarum* Rex, Aurum certo pondere Artifici tradiderat, qui Coronam inde conficeret; posteaque intellexerat Artificem, Auri parte surreptâ, Argentum æquali pondere substituisse; *Archimedem* ea de re consuluit. Ille autem Balneum ingressus, effluentem aquam conspicatus, hinc ansam cepit determinandi, quantum Auri surreptum fuerat; statimque præ gaudio nudus exiliens Balneo, vociferatus Εὕρηκα, Εὕρηκα, domum se contulit. Nempe, cum Aurum, ejusdem ponderis, minoris molis sit quàm Argentum; molesque corporis irregularis non aptiùs colligi possit, quàm ex Aquæ mensurâ cujus locum occupet; explorato primùm, quantum spatii in Aquâ occuparet Corona, quantumque Aurum purum ejusdem ponderis, & quantum denique æqualis ponderis Argentum; hinc calculo colligendum esse, quantum Auri & quantum Argenti miscuerat Artifex.

Inventum certè *Archimede* dignum. Sed, quomodo ille calculum instituerit, & quantâ subtilitate singulorum molem rimatus est, non exponit *Vitruvius*; contentus rem crassiùs exposuisse, quam ipsam (puto) executus est *Archimedes*. Et, siquid ea de re scripsit *Archimedes* ipse, periit. Alii alios modos exposuerunt; inter quos *Ghetaldus*, in suo *Archimede promoto*; atque *Johannes Baptista Hodierna* in suo *Archimede Redivivo*, impresso *Panormi Siculorum*, in 4°, Anno 1644 Italicé.

Calculus sic commode instituitur. Pondus Auri quantum est Coronæ, occupet spatium L; Pondus Argenti huic æquale, spatium L + M. Pondus Coronæ, spatium L + N. Ergo, ut N ut ad M, sic pondus Argenti admixti, ad pondus Coronæ. Nempe spatii incrementum

crementum M prodiret si totum Aurum Argento commutatum foret; adeóque incrementum N, ostendet quantum jam commutatum sit.

2. Ex *Athenæo* & *Diodoro*, Cochleam *Archimedis* memorat ad Aquam ex Sentinâ stupendi Navigii *Hieronis* exhauriendam, unius hominis operâ: eandemque machinam ad aquas ex Fodinis, Lacubus, similibusque exhauriendis adhibitam. Recentiores ex conjecturâ hujusmodi figuram accommodant: & speciatim *Guido Ubaldus* in peculiari Tractatu. Fig. 284.

3. Ex *Athenæo*, memorat *Archimedis Helicem*, cujus ope (cum paucis aliis instrumentis) stupendum illud navigium in mare deduxit *Archimedes*. Figuram hujusmodi, ex conjecturâ supplent. Fig. 285.

4. Ex *Zetze* & *Oribasio*, recenset *Archimedis* Trispastum, quo 7000 mediorum pondus attrahebat. (Nescio an 50000 legendum sit, propter πεντεμυριομέδιμνον.) Figurasque adhibet has duas. Fig. 286, 287.

5. Ex *Polybio*, & aliis, memorat *Archimedis* Tormenta Bellica, Ballistas, Catapultas, Sagittarios, Scorpiones, Manum ferream cum catena (Tollenovis instar) aliúmque apparatum, quibus contra copias, navesque, *Marcelli* & *Appii* pugnatum est.

6. Ex *Galeno* & *Zetze*, *Archimedis* Πύρεια memorat, seu specula Ustoria, quibus *Marcelli* Naves incendebat. De quibus *Cavalerius*, in tractatu posthumo, *Del Specchio Ustorio*, (*Bononiæ* impresso in 4°, Anno 1650.) Italicè fusius agit.

7. Ex *Zetze*, *Pappo*, & *Tertulliano*, memorat *Archimedis* Pneumatica & Hydroscopica: nec hujusmodi tantum Instrumenta constructa, sed & libros ab *Archimede* conscriptos.

8. Ex *Claudiano*, *Archimedi* Σφαιροποιΐαν memorat; seu machinam Cœlestium motuum æmulam.

Verùm quum horum omnium nihil jam exstet ab *Archimede* conscriptum; non nisi ex dubiis conjecturis suppleri possunt.

FINIS.

Pag.	Lin.	In Argumento.
2	8	A *pro* B.
2	13	X *pro* H & G.
3	2	Z vel Y *pro* X.
8	*pe.*	C F H *pro* F G M.
9	19	B M *pro* D M.
10	34	F N O L *pro* P X O L.
11	3	A G *pro* H G.
16	10	FE ⊏ DE *pro* GF ⊏ DE.
16	17	DEq. EB × BA :: Tq. Mq *pro* DEq. EB × AE :: Mq. Tq.
19	11	C F *pro* C E.
20	*ul.*	C D *pro* F B.
21	4	Q.AE—EB *pro* Q.EB—AE.
22	28	B A *pro* D A.
23	4,5 6,7	A G *pro* A E.
30	1	L X *pro* L K.
31	1	*In margine*, D E *pro* D C.
31	14	$\frac{4\,DEq.}{BX}$ *pro* $\frac{4\,FEq.}{BX}$
31	26	B H *pro* E H.
35	5	F G *pro* O G.
35	6	F H *pro* O H.
37	11	C B *pro* A B.
37	*pe.*	Y Z *pro* V Z.
38		Fig. 49. *pro* 94.
41	13	B H *pro* B E.
43	*pe.*	B A C *pro* B A D.
45	25	X V *pro* X Y.
52	22	A, B *pro* A, F.

P.	L.	
54	13	A E *pro* B E.
58	25	M C *pro* Z C.
59	*ul.*	majus *pro* minus.
62	16	G I *pro* C I.
64	22	L E *pro* L I.
64	26	O *pro* I.
64	29	D C *pro* G D.
66	6	B X K *pro* B X R, & B F *pro* B E.
66	16	A F *pro* A G.
68	17	D B q *pro* D K q.
68	33	H F × F E *pro* H F × F D.
68	34	
69	22	G I *pro* G L.
69	28	T O *pro* I O.
70	4	sectionum *pro* contingentium.
70	8	A E *pro* A F.
70	10	LSH *pro* LSF, & ALN *pro* ALM.
74	22	*Deest* + *inter* AEq & CX×XA.
75	*pe.*	*Deest* + *inter* EXq & CE×ED.
77	18	E C *pro* F C.
78	21	*Citatur* 4 & 22.6 *pro* 19.5.
79	10	A B *pro* A D.
79	26	K O B *pro* K O P.
86	5	F A *pro* D F.
91	*ul.*	O P *pro* O D.
96	*pe.*	F G *pro* F M.
99		*Ult. duæ lineæ ita corrigantur*, FN.FL::NK.KL & (ob sect. AMD) NK.KL :: NM . ML quar FN.FL::NM.ML *Q.e.a.*
102	8	A D, B G *pro* A C, B C.

In Citationibus.

Prop. 9. *nota* f, *pro* 17.6 *lege* 16.6. *pr.* 16. *n.* a, 13 hujus *l.* 12 hujus. *pr.* 20. *n.* c, 3.6 *l.* 1.6. *pr.* 33. *n.* c, 4. *l.* 4.2. *pr.* 38 *n.* c, 21 hujus *l.* 37 hujus. *pr.* 44 *n.* a, 31 hujus *l.* 37 hujus. *pr.* 45. *n.* f, 7.1 *l.* 7.5. *pr.* 45. *n.* g, 4.1 *l.* 4.6. *pr.* 51. *n.* m, 7.1 *l.* 7.5. Libri I.

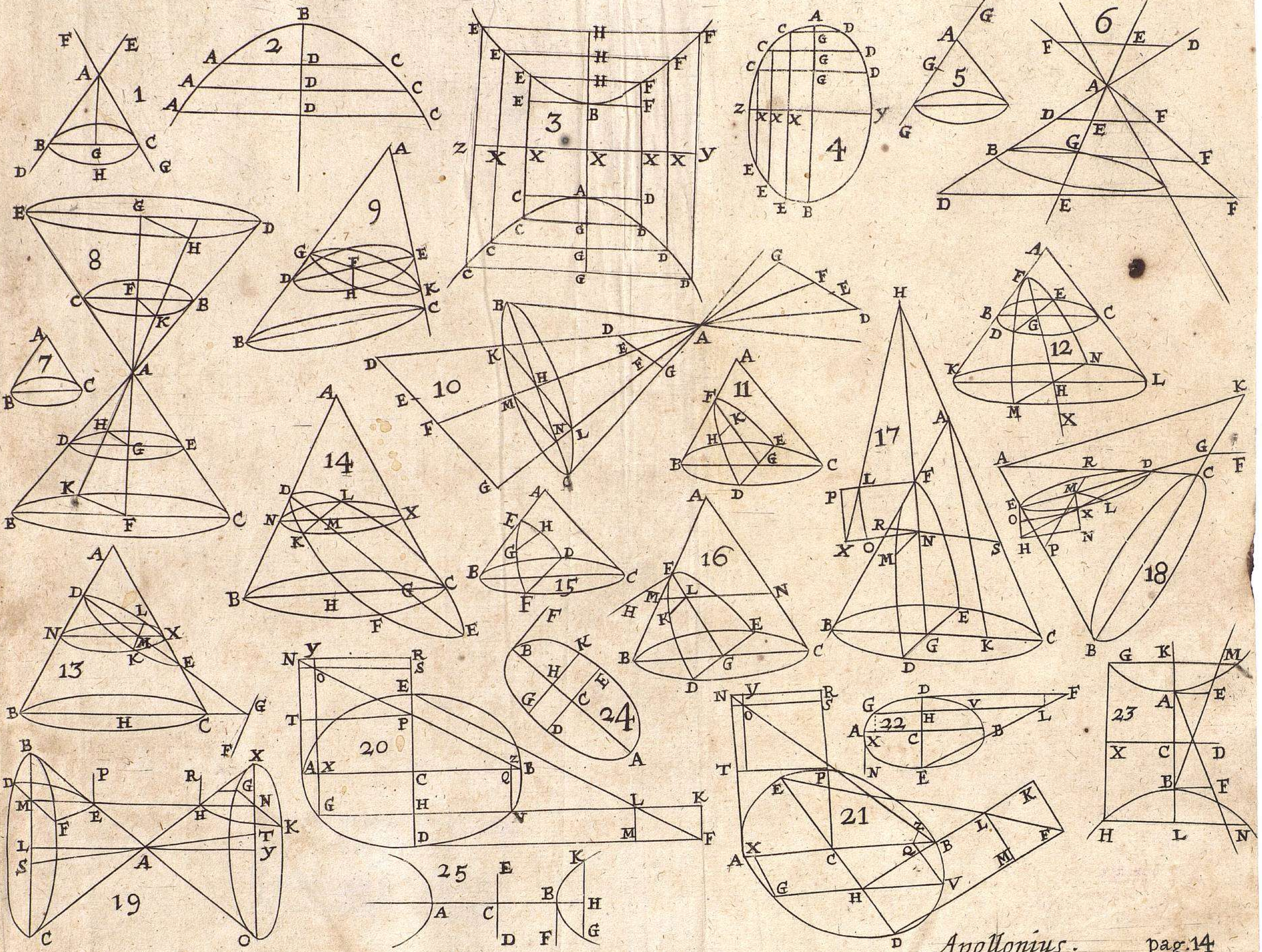
Prop. 2. *nota* g, *pro* 6.5 & 3 ax. 1 *lege* 6 & 5.2. *pr.* 4. *n.* g, 53. hujus *l.* 53.1 hujus. *pr.* 48. *n.* g, *deest hæc citatio* (17 ax. 1.) Libri II.

Prop. 4. *nota* a, *pro* cor. 44 hujus *lege* cor. 15.2 hujus. *pr.* 8. *n.* k, 8.1 *l.* 4.3 hujus. *pr.* 16. *n.* d, & *pr.* 16, 17, 18, 19. *n.* b, *in singulis pro* 16.5 *l.* 4.6. *pr.* 20. *n.* c, 16.3 *l.* 4.6. *pr.* 21. *n.* b, 46.5 *l.* 4.6. *pr.* 22. *n.* k, 2.6 *l.* 6.2. *pr.* 23. *n.* b, 16.5 *l.* 4.6. *pr.* 23. *n.* d, *l.* facilè deducitur ex 15.3 hujus. *pr.* 33. *n.* d, 2.6 *l.* 6.2. *pr.* 34 *n.* e, 15.6 *l.* 16.6. *pr* 37. *n* b, 49 & 51. hujus *l.* 2 & 11.3 hujus. *pr.* 44. *n.* b, & *pr.* 45. *n.* c, *pro* 15.6 *l.* 16.6. *pr.* 56. *n.* p, ex 2 vel 4.8 *l.* 2 vel 4.3. Libri III.

Prop. 14 *nota* a, *pro* cor. 14 hujus *lege* 5 hujus *pr.* 15. *n.* b, 36.1 hujus *l.* 39.3 hujus. *pr.* 21. *n.* a, 6 hujus *l.* 8 hujus. *pr.* 21. *n.* b, 15 hujus *l.* 17 hujus. Libri IV.

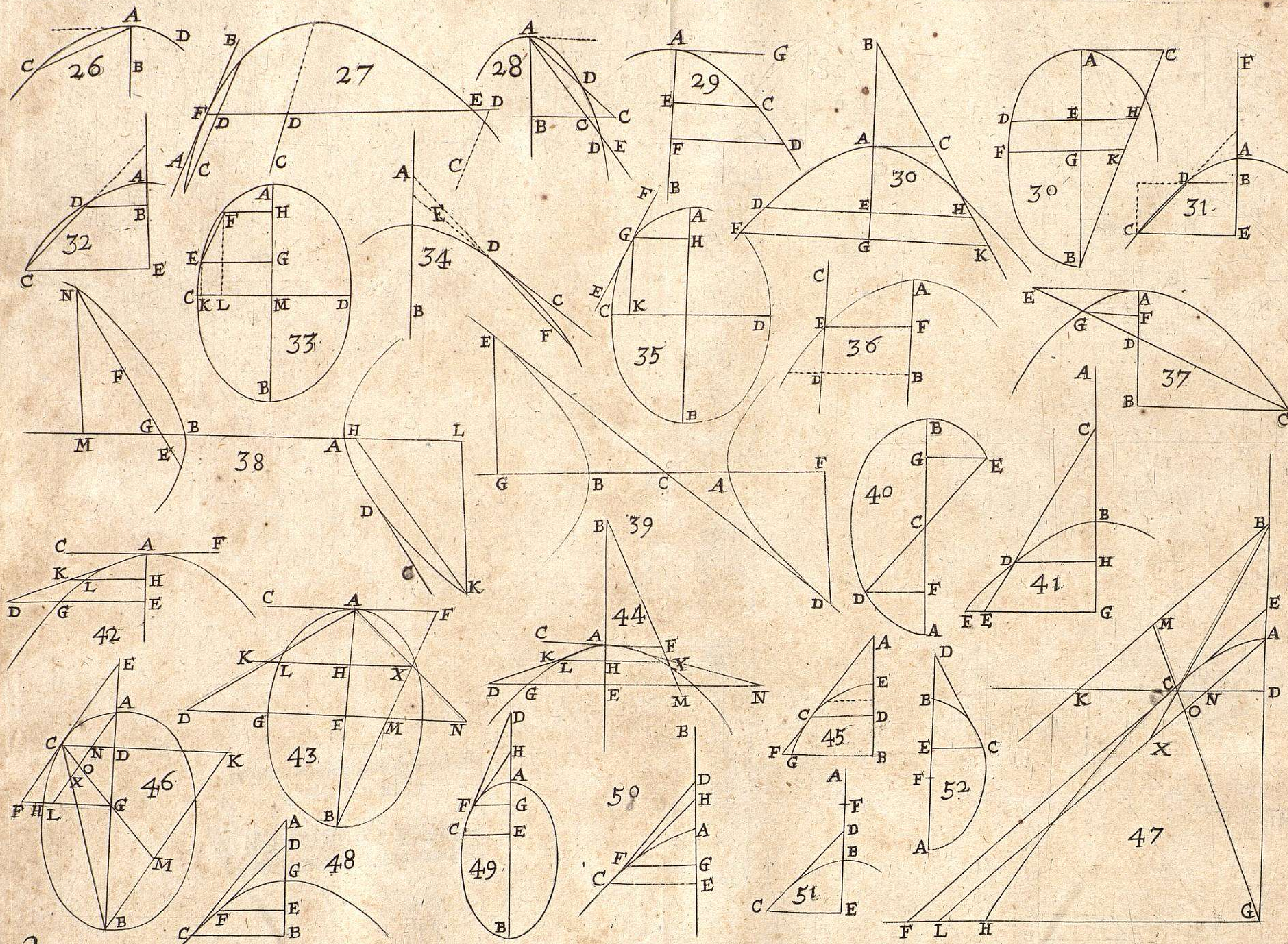
In Schematis.

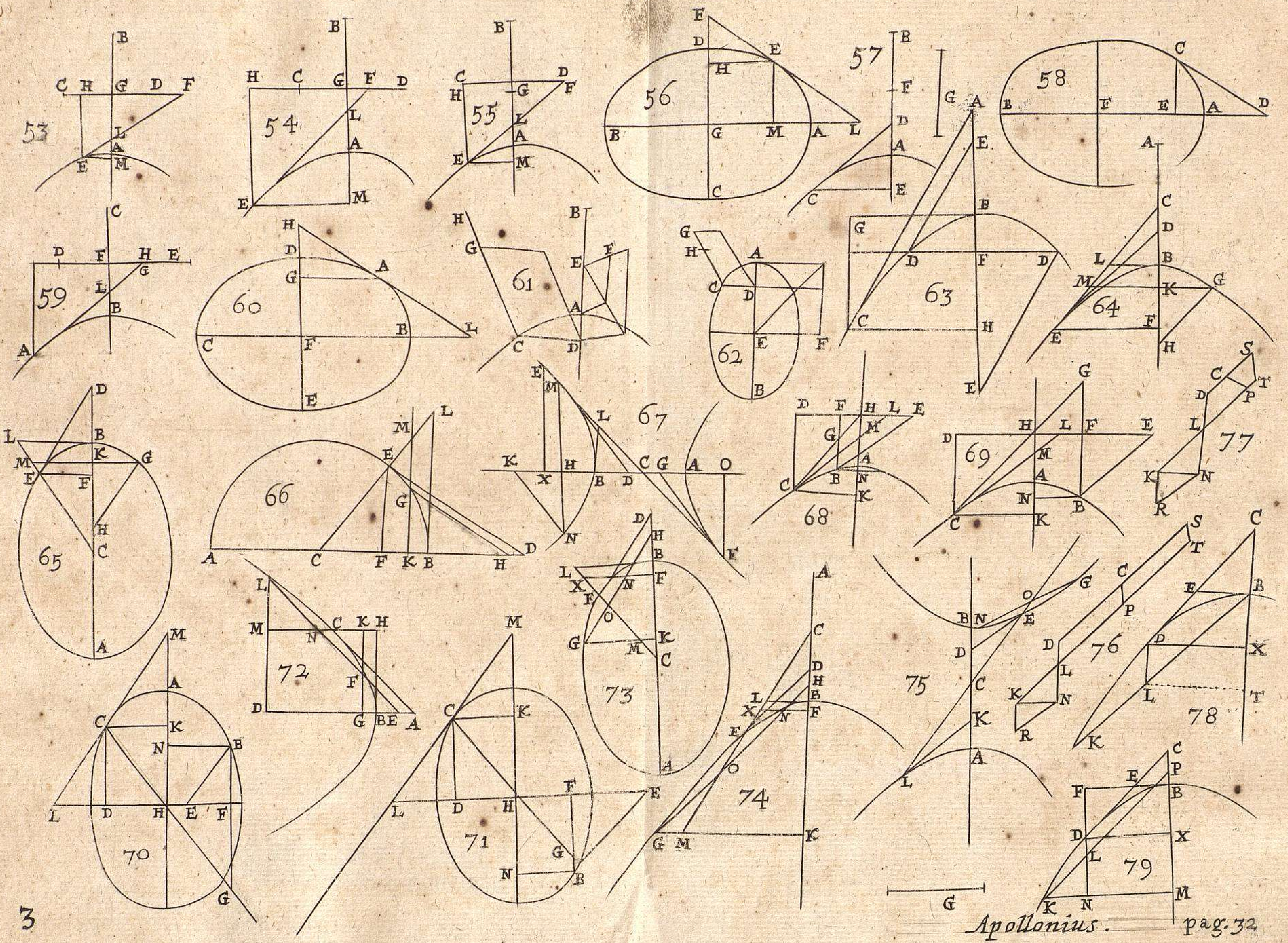
Fig. 14. *deest linea* F G. fig. 30. *deest* D *ubi* EH *occurrit sectioni*. fig. 136. *pro* H *lege* B. fig. 148 *deest* D *ubi lineam* AC *bisecat* KB. fig. 176. *deest* E. fig. 194. *deest ubi* Y *ubi* LX *diametro occurrit*. fig. 276. *deest* E *ubi* DK *sectioni occurrit*.



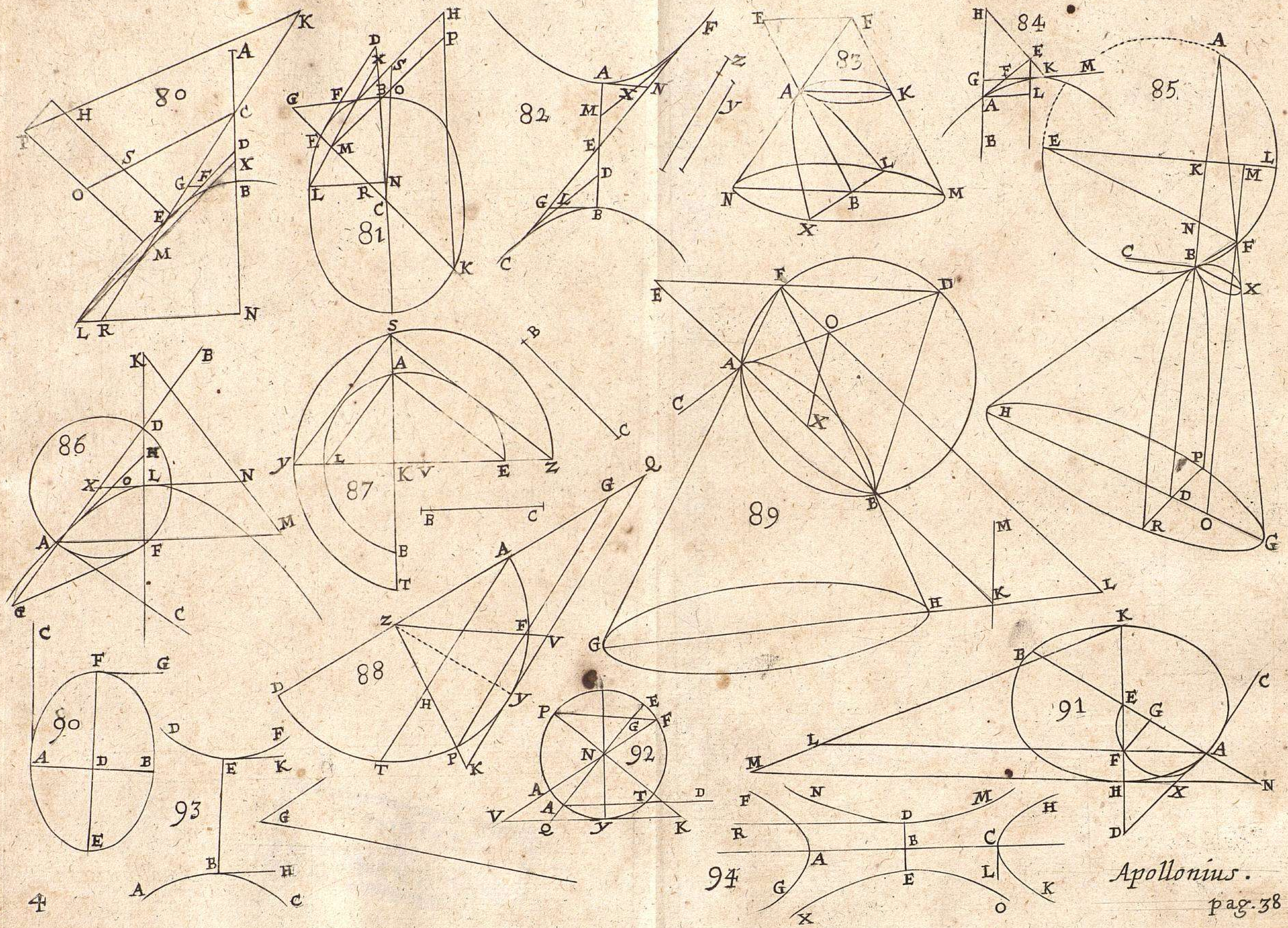
Apollonius. pag.14

1


26
27
28
29
30
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52


53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79

3

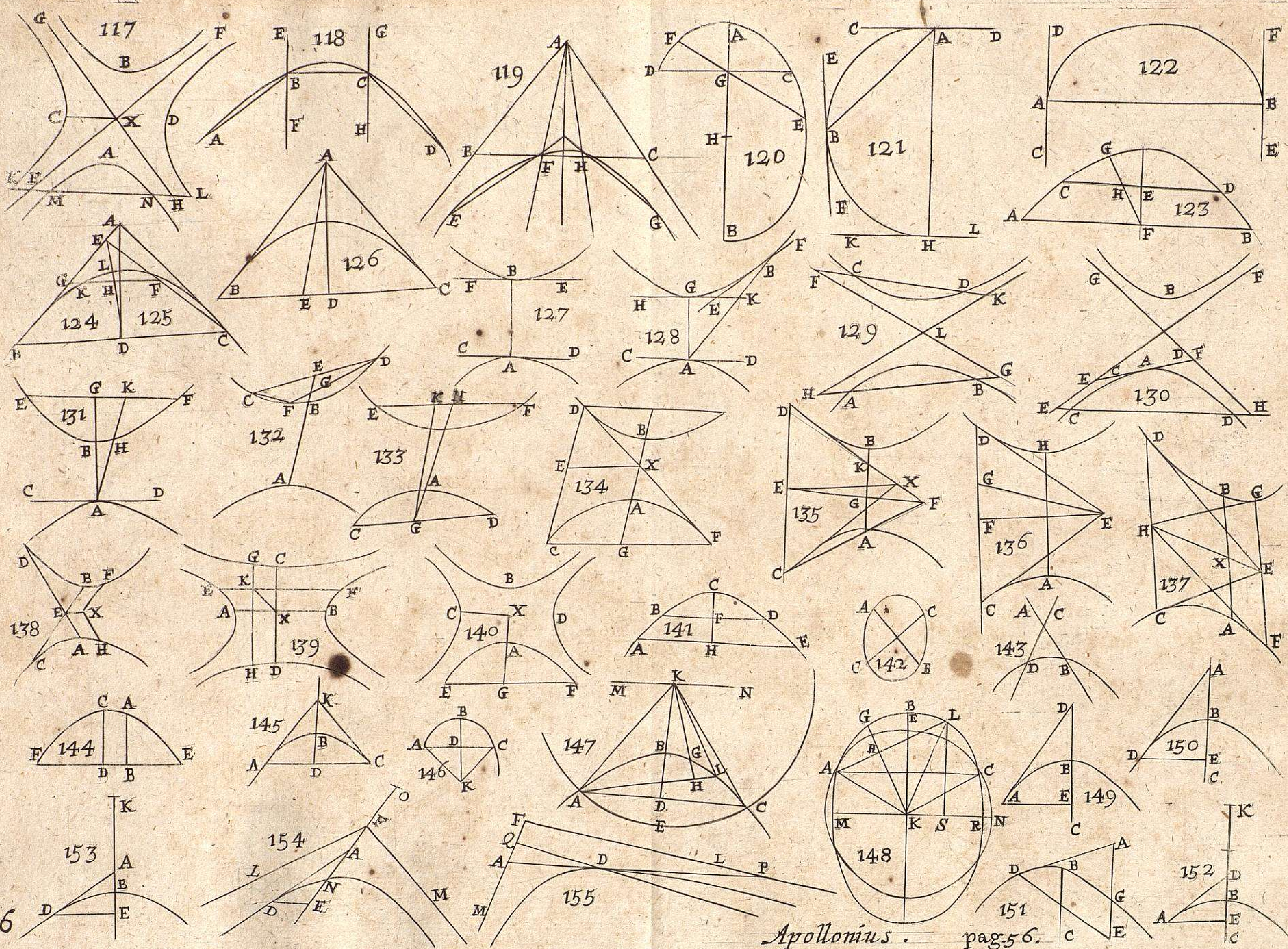


4

Apollonius.

pag. 38

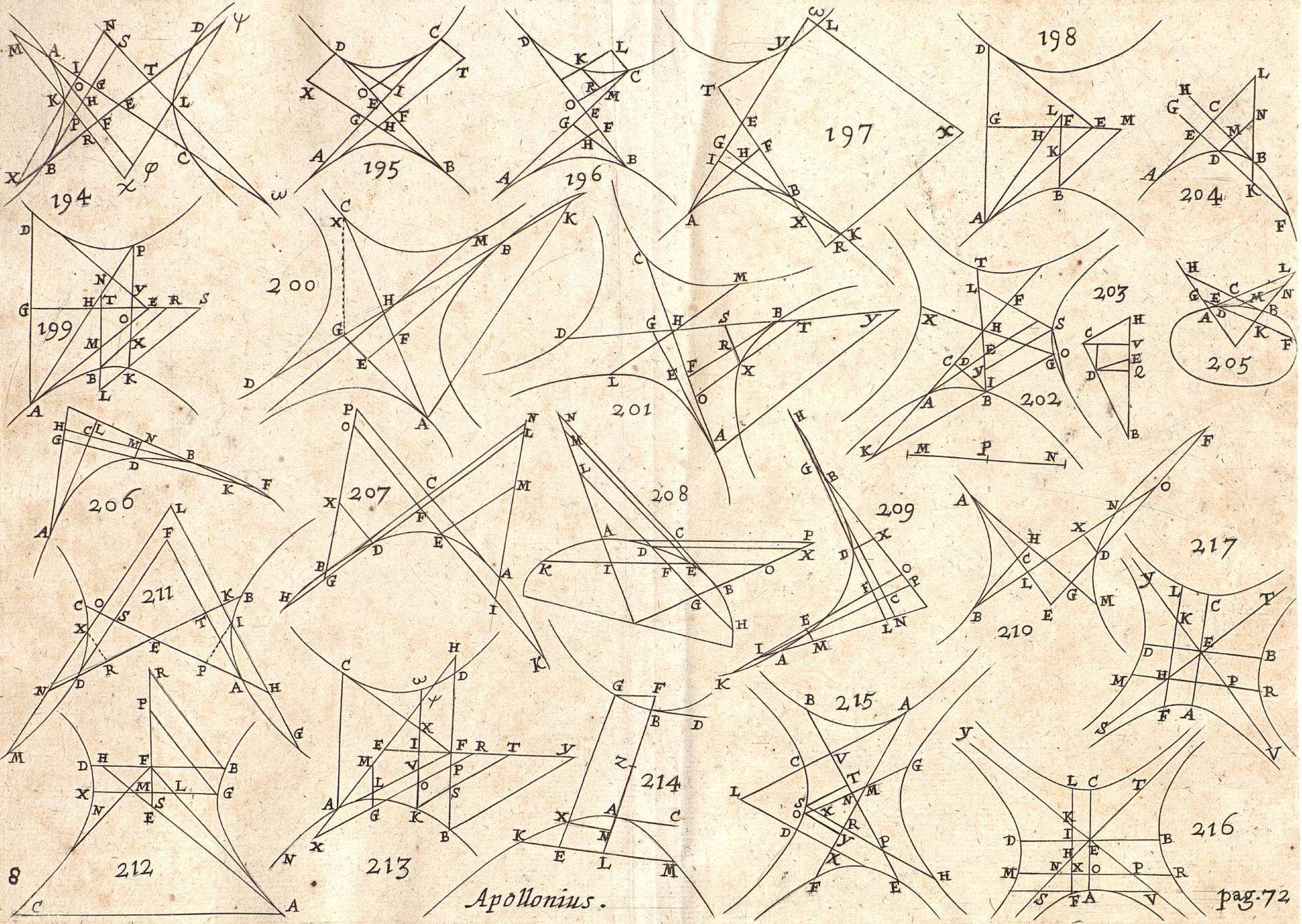

95
97
96
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116



6

Apollonius. pag.56.

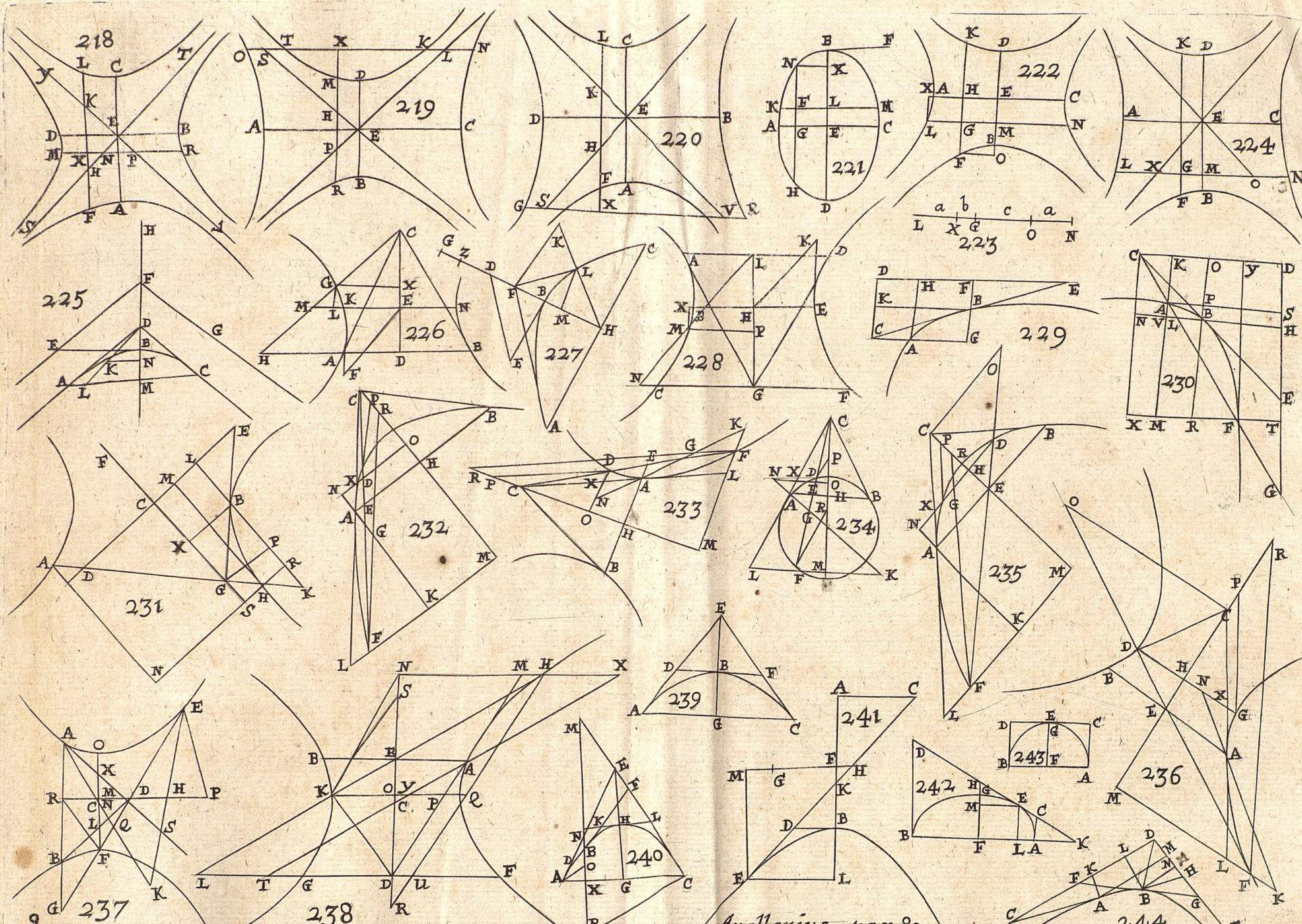
Apollonius.
pag. 64



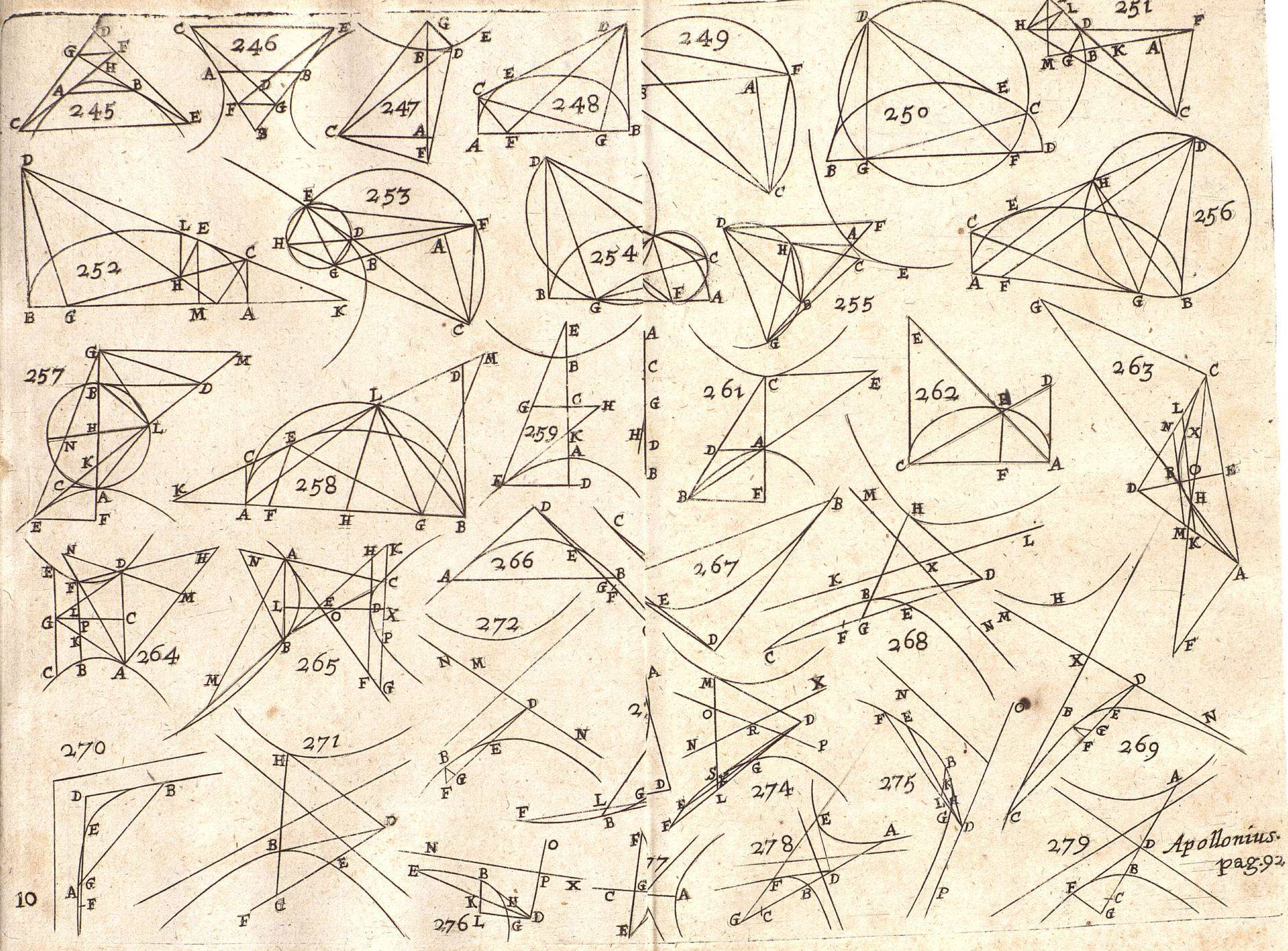
8

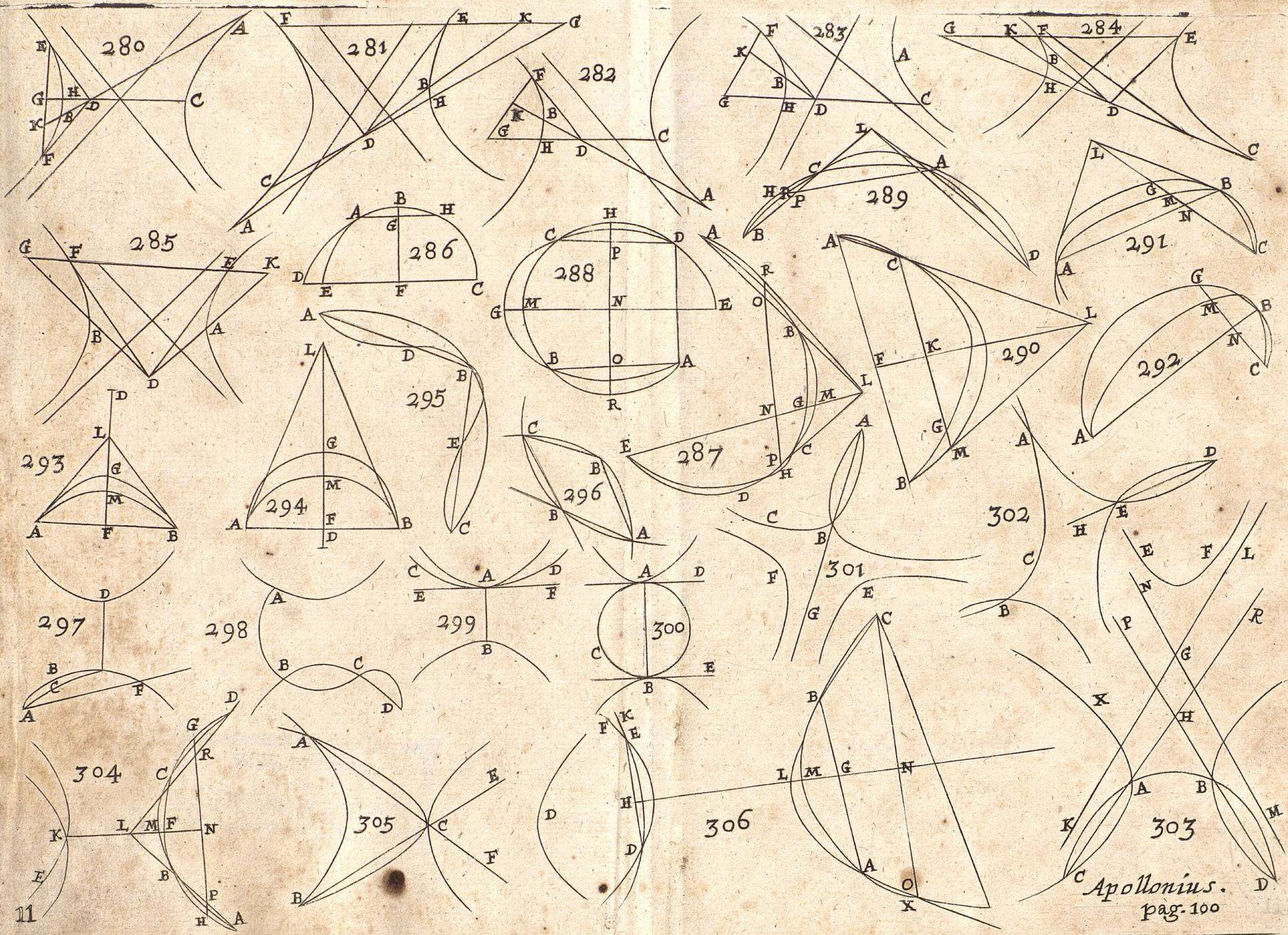
Apollonius.

pag. 72

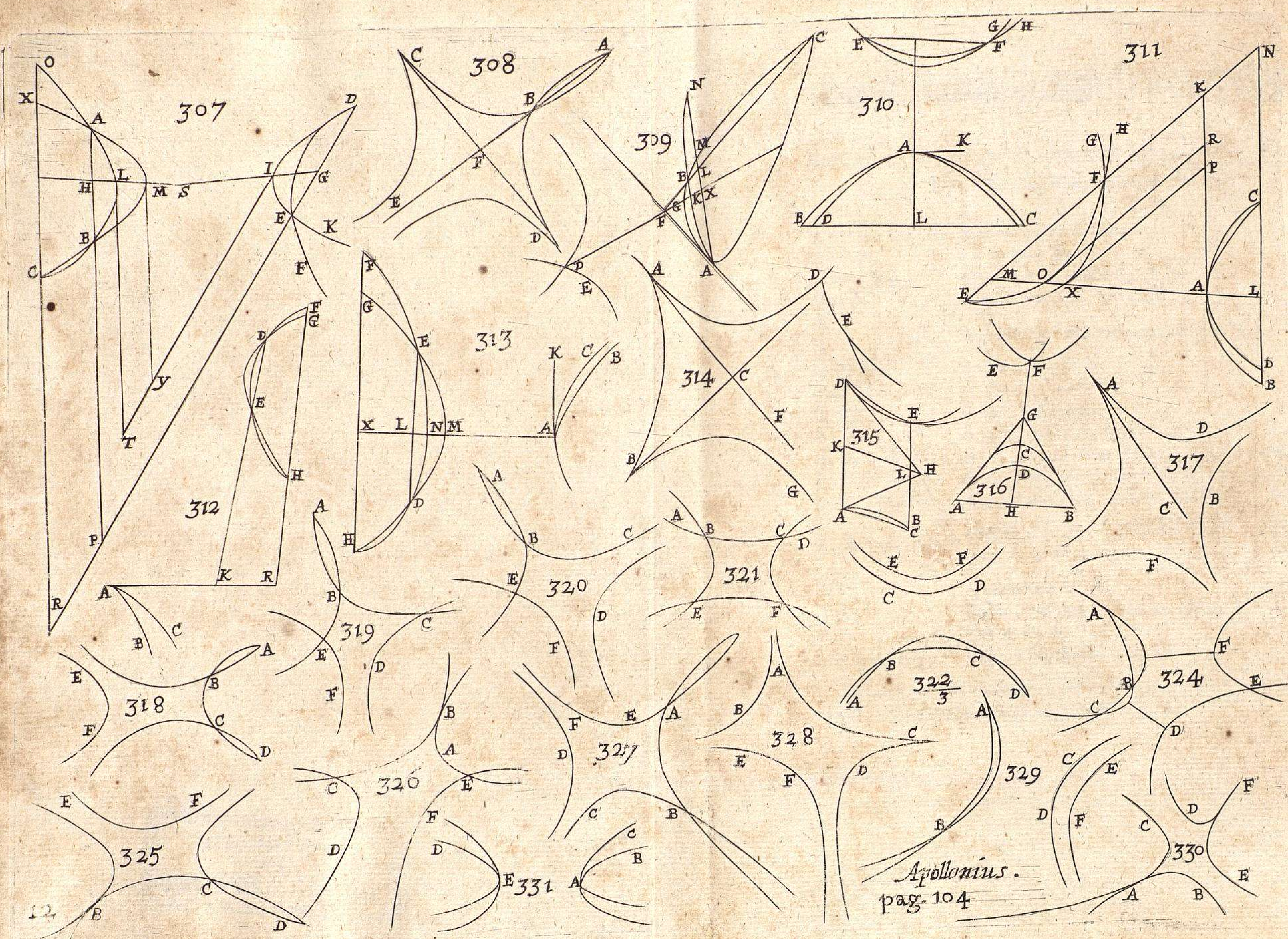


Apollonius. pag. 82.


245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
274
275
276
278
279
Apollonius. pag. 92
10



Apollonius.
pag. 100



Apollonius.
pag. 104

Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum hîc ſubjungitur interpretatio.

$A + B$, *hoc eſt.*	A & B *ſimul acceptæ.*
$A - B$,	A, *demptâ* B.
$A -: B$,	*differentia ipſarum* A, & B.
$A \times B$,	A *multiplicata, vel ducta in* B.
$\frac{A}{B}$	A *diviſa per* B, *vel applicata ad* B.
$A = B$,	A *æquatur ipſi* B.
$A \sqsubset B$,	A *major eſt quàm* B.
$A \sqsupset B$,	A *minor eſt quàm* B.
$A . B :: C . D$,	A *ad* B *eandem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A, B, C, D \div\div$,	A, B, C, D *ſunt continuè proportionales.*
$A . B \sqsubset C . D$,	A *ad* B *majorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B \sqsupset C . D$,	A *ad* B *minorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B + C . D \left\{\begin{matrix} = \\ \sqsubset \\ \sqsupset \end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix}\text{M.N. } \textit{Rationes} \text{ A ad B,} \\ \text{\& C ad D } \textit{compoſitæ}\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\textit{adæquant} \\ \textit{excedunt} \\ \textit{deficiunt à}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\textit{ratione} \text{ M} \\ \text{ad N.}\end{matrix}$
Aq,	*Quadratum ex* A.
$\sqrt{} A$,	*Latus, vel radix quadrata ipſius* A.
Ac,	*Cubus ex* A.
$\sqrt{} Aq + Bq$,	*Latus compoſiti ex* Aq & Bq.

Reliquas, ſi quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ capiet, preſertim in analyſi tantillùm verſatus.

THEODOSII
SPHÆRICA:

Methodo Nova Illuſtrata, & Succinctè

DEMONSTRATA.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-profeſſorem Lucaſianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI,

Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Robertum Scott*, in vico Little-Britain. 1675.

De THEODOSIO, ex VOSSIO de Scientiis Mathematicis.

In temporibus Ciceronis ac Pompeii claruit Theodosius Tripolites qui partem Geometriæ de figura Sphærica libris tribus utilissimis egregiè excoluit.

EOs *Græcè edidit Latinèque vertit ac* Lutetiæ Wechelii *typis mandavit* Joannes Pena *Mathematicus Regius. Compluria ex eo* Ptolomæus *hausit &* Ptolemæo *recentiores*, Pappus, Proclus, Theon, *multa item; sed, dissimulato* Theodosii *nomine; exscripsit* Vitellio, *ob quæ tamen maximè fuit admirationi.* Arabes *etiam in Linguam suam transtulerunt. Ex Arabico verò Latinè versus fuit à* Platone Tiburtino, *ut auctor est, qui de Speculis ustoriis scripsit. Eaqne interpretatio* Venetiis *excusa, ante annos jam* 155 *eo nempe à quo & Almansoris Judicia ex Arabico Latine versa sunt. Sed immane quantum interest inter genuinum* Theodosium *& Arabicè loquentem, usque adeò ut ob tam multa addita alius videri possit, quæ res compulit* Joannem Penam *regium apud Parisienses Mathematicum, ut, non contentus Græcè edere, quod per se magnam laudem merebatur, ex Græco etiam optima fide faceret Latinum Parisiis editus* 1558, *& post eum* Christophorus Clavius, Herigonius, *& nuperrime* Guarini *in* Euclide *adaucto, &* Claudius Millet *de Chales in cursu Mathematico hoc opus illustrarunt. Quanquam*

autem

autem Theodosius *hic* Tripolites *inscribatur, eòque nomine* à Suida *etiam memoretur: non dubium tamen quin idem sit ac* Bithynus *ille* Theodosius, *professione philosophus; quem Mathematicis disciplinis uti & filios ejus, præstitisse, ait* Strabo, *lib.* 12. *Ut* Pompeii *magni temporibus vixisse videatur. Nec obstat quod dicatur* Bithynus. *Nam fortasse ex* Bithynia, Tripolin *in* Africam *abiit, atque ibi sedem fixit. Quomodo* Hipparchus *eidem* Straboni *est* Bithynus; *qui* Ptolemæo, *& aliis, est* Rhodius. *Scripsit etiam* περὶ οἰκήσεων, de habitationibus, *cujus Argumenti* 12 *Propositiones dedit* Mersennius *in Synopsi Mathematica, pag.* 246, *& tribus sequentibus; & libros* 2, περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν, de diebus ac noctibus. *Quæ Græcè in Bibliotheca Regia* Lutetiæ, *adservantur, Latinè* Argentorati *edi curavit* Petrus Dasypodius, *anno* 1572.

THE-

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

SPHÆRA est figura solida comprehensa una superficie, ad quam ab uno eorum punctorum, quæ intra figuram sunt, omnes rectæ lineæ ductæ sunt inter se æquales.

Aliter in Elemento 11° definitur, à Semicirculi circumductu.

II

Centrum autem Sphæræ est ejusmodi punctum.

III.

Axis verò Sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque terminata in Sphæræ superficie, circa quam quiescentem circumvolvitur Sphæra.

IV.

Poli Sphæræ sunt extrema puncta ipsius axis.

V.

Polus Circuli in Sphæra, est punctum in superficie Sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circuli circumferentiam tendentes sunt inter se æquales.

Ut si omnes rectæ P Z à puncto P ad circumferentiam circuli B Z A ductæ sint æquales, erit P polus circuli B Z A: & inversè si P sit polus, erunt omnes P Z æquales inter se. Fig. 1.

VI.

In Sphæra æqualiter distare à centro sphæræ circuli dicuntur, cùm perpendiculares quæ à centro sphæræ in ipsorum plano ducuntur, sunt æquales. Longiùs autem abesse ille dicitur, in cujus planum major perpendicularis cadit.

Prop. I. Theor.

Fig. 2. Si ſphærica ſuperficies (B A C) ſecetur aliquo plano (B C); linea (B G C F E), quæ fit in ſphæræ ſuperficie, eſt circumferentia circuli.

a 1. *def. hujus.* b *hyp.* c 15. *def.* 1. Fig. 3. d 12. 11. e 3. *def.* 11. f 47. 1. g 1. *def. huj.* h 1 *ax.* 1. & 3. *ax.* 1. k 15 *def.* 1.

Nam primò tranſeat planum per ſphæræ centrum D: [a] liquet igitur rectas quaſcunque (D E, D F &c.) à D ad lineam B G C F E, [b] hoc eſt è centro ſphæræ ad ejus ſuperficiem, eductas inter ſe æquari; [c] & proinde lineam B G C F E eſſe circuli circumferentiam.

Sin planum non tranſeat per centrum ſphæræ, ab eo (D) [d] ducatur D H plano B C perpendicularis; & ab H ad lineam B G C F E ducantur utcunque rectæ H E, H F, & connectantur D E, D F. Eritque (ob [e] ang. D H E, D H F rectos) D Hq + HEq [f] = (DEq [g] = D F q =) D Hq + H Fq. [h] quare H E = H F. Eodem modo rectæ omnes ab H ad lineam B G C F E eductæ æquantur: [k] ergo linea B G C F E eſt circumferentia circuli. *Q. E. D.*

Coroll. Idem eſt ſphæræ centrum & circuli, qui fit plano per ſphæræ centrum trajecto.

Centrum circuli, qui fit plano non per centrum ſphæræ trajecto, eſt in perpendiculari à centro ſphæræ in planum demiſſâ.

Prop. II. Probl.

Fig. 4. Datæ ſphæræ (B A D C) centrum reperire.

a 1 *hujus.* b 1. 3. c 12. 11. d 11. 11. e 6. 11. f *cor.* 1 *huj.*

Data ſphæra ſecetur utcunque plano [a] facienti circulum B E D, [b] cujus centrum F; ab F [c] erigatur F A recta plano B D E, quæ ſphæræ occurrat punctis A, C; biſecetur A C in G: erit G centrum ſphæræ. Si negas, eſto H centrum ſphæræ, [d] à quo ducatur H I recta plano B D E: [e] eſtque H I ipſi G F parallela; & punctum I eſt centrum circuli B E D, ſed F ponebatur centrum: quæ repugnant.

Coroll. Si in ſphæra ſit circulus non per centrum ſphæræ tranſiens, ſphæræ centrum erit in rectâ è centro circuli ad ipſius planum perpendiculari.

Prop. III. Theor.

Fig. 5. Sphæra (A D B) planum (E F), à quo non ſecatur, non tangit in pluribus punctis uno.

a 1 *hujus.*

Tangat, ſi fieri poteſt, punctis A, B; & à ſphæræ centro C conjungantur C A, C B; planum per C A, C B [a] facit in ſphæra circulum A D B, A D B, in plano tangenti [b] rectam E A B F: [c] hæc circulum A D B secat, & proinde sphæram: ergo planum secat sphæram, non tangit, contra hypothesin. b 3. 11. c 2. 3.

Cor. Recta, quæ duo puncta in sphæræ superficie signata connectit, intra sphæram cadit.

Prop. IV. Theor.

Si sphæra (A C D E) tangat planum (A H K I L), quod eam non secet, recta linea (B A) ducta à sphæræ centro (B) ad contactum (A), perpendicularis erit ad planum (A H K I L). Fig. 6.

Nam per B A ducantur utcunque duo plana, quæ faciant in sphæra circulos A C D E, A F D G, in plano tangenti rectas H A I, K A L. Et quia sphæræ centrum B [a] est quoque centrum circulorum A C D E, A F D G, & rectæ H I, K L tangunt hos circulos ([b] quippe non secant), [c] erit B A utrique H I, K L perpendicularis; ergo & plano per H I, K L ducto recta erit. *Q. E. D.* a cor. 1. huj. b hyp. c 18. 3. d 4. 11.

Prop. V. Theor.

Si sphæra (A B C D) tangat planum (E F), quod ipsam non secet, à contactu autem (C) excitetur recta linea (C A) ad angulos rectos ipsi plano (E F), in lineâ excitatâ (C A) erit sphæræ centrum. Fig. 7.

Si negas punctum G extra C A sit centrum, jungatur C G: [a] ergo C G plano E F recta est. [b] ergo C A eidem plano E F recta non est, contra hypothesin. a 4. hujus. b 13. 11.

Prop. VI. Theor.

Circulorum (A D, B C, E F), qui in sphæra sunt, maximi sunt, qui per sphæræ centrum (G) ducuntur (A D); aliorum verò (B C, E F) illi inter se æquales sunt, qui æqualiter à centro (G) distant; qui verò longiùs à centro distant, minores sunt: & circuli in sphæra maximi per sphæræ centrum transeunt; aliorum autem æquales à centro æqualiter distant, minores verò longiùs à centro distant. Fig. 8.

Ducantur G H recta circulo B C, & G I recta circulo E F; & connectantur G D, G C, G E.

1. G C recto angulo GHC opposita [a] major est quàm C H; hoc est radius circuli A D major est radio circuli B C: ergo circulus A D major est circulo B C. a 47. 1.

2 & 3. $GHq + HCq^{a} = (GCq = GEq)^{a} = GIq + IEq$. ergo si $GH = GI$, erit $HC = IE$; & proinde circulus BC æqualis circulo EF: sin $GH \sqsubset GI$, erit $HC \sqsupset IE$, & propterea circulus BC minor circulo EF.

4. Si circulus maximus AD per centrum non transeat, alius transeat, is ergo (ut modò ostensum est) circulo AD major erit, contra hyyothesin.

5. & 6. Ob $GHq + HCq = GIq + IEq$; si $HC = IE$, erit $GH = GI$: sin $HC \sqsupset IE$, erit $GH \sqsubset GI$.

Prop. VII. Theor.

Fig. 9. Si in sphæra (BAC) sit circulus (BFCG), à sphæræ autem centro (D) ad circuli centrum (E) connectatur recta linea (DE), connexa linea (DE) ad planum circuli (BFCG) recta erit.

Ducantur BC, GF diametri circuli BFCG, utcunque & connectantur DB, DC, DF, DG. Quoniam trigona DEB, DEC sibi mutuò æquilatera sunt (quippe $DB = DC$; $EB = EC$, & DE
a 8. 1. commune est) [a] erunt anguli DEB, DEC pares, & proinde recti.
b 4. 11. Simili discursu anguli DEF, DEG recti erunt. [b] ergo DE recta est plano BFCG. *Q. E. D.*

Prop. VIII. Theor.

Fig. 10. Si in sphæra (BADC) sit circulus (BGDH), & à sphæræ centro (E) ad circulum (BGDH) ducatur perpendicularis (EF), quæ ad utramque partem producatur, cadet ea in ipsius circuli polos (A, C).

Ducantur utcunque diametri BD, GH, & connectantur AB, AD,
a 3. def. 11. AH, AG. Quoniam radii FB, FD, FG, FH pares sunt, [a] & an-
b 4. 1. guli AFB, AFD, AFG, AFH recti, [b] erunt subtensæ AB, AD,
c 5. def. huj. AG, AH æquales. [c] ergo A est polus circuli BGDH. Similique argumento C ostendetur ejusdem polus. *Q. E. D.*

Prop. IX. Theor.

Fig. 10. Si sit in sphæra (BADC) circulus (BGDH) & ab altero (A) polorum ejus in ipsum ducatur perpendicularis recta linea (AFC), cadet hæc in circuli centrum (F), & inde producta cadet in reliquum polum ipsius circuli.

Nam

Nam per F ducantur rectæ BD, GH utcunque, & connectantur AB, AD, AG, AH. Et quoniam rectæ AB, AD, AG, AH [a] pares sunt, & anguli AFB, AFD, AFG, AFH [b] recti, [c] erunt rectæ FB, FD, FG, FH æquales. [d] ergo F est centrum circuli BGDH. [e] Item quia centrum sphæræ est in recta AFC, erit C ejusdem circuli alter polus. *Q. E. D.*

a 5. def. huj.
b 3. def. 11.
c 47. 1.
d 9. 3.
e 6. hujus.

Prop. X. Theor.

Si sit in sphæra circulus (BGDH); linea recta (AC) per ejus polos (A, C) ducta, ad circulum (BGDH) recta est, transitque per centrum circuli (F), & sphæræ (E). Fig. 11.

Fiat, ut in præcedenti, & connectantur rectæ CB, CD, CG, CH. Et quoniam trigona CAB, CAD, CAG, CAH sibi mutuò [a] æquilatera sunt, [b] erunt anguli CAB, CAD, CAG, CAH pares. [c] Ergo cùm rectæ FB, FD, FG, FH, tum anguli AFB, AFD, AFG, AFH æquantur. [d] quare AF recta est circulo BGDH, [e] & F est centrum ejus, & [f] proinde etiam centrum sphæræ est in AF. *Quæ E. D.*

a 5. def huj.
b 8. 1.
c 4. 1.
d 4. 11.
e 9. hujus.
f cor. 2. huj.

Schol. I. Theor.

Si in sphæra sit circulus (BGDH), & ab altero (A) polorum ejus per sphæræ centrum (E) ducatur recta (AEFC) erit hæc ad circuli planum perpendicularis, & producta cadet in centrum ipsius, & in reliquum polum. Fig. 11.

Fiat, ut priùs, & connectantur EB, ED, EG, EH: & quia trigona AEB, AED, AEG, AEH sibi mutuò æquilatera sunt, [a] erunt anguli EAB, EAD, EAG, EAH pares; [b] ergo cùm rectæ FB, FD, FG, FH, tum anguli AFB, AFD, AFG, AFH æquantur; [c] quare AF recta est circulo BGDH, [d] & F est centrum ejusdem, & C alter polus. *Q. E. D.*

a 8. 1.
b 4. 1.
c 4. 11.
d 9. hujus.

Schol. 2. Theor.

Si in sphæra sit circulus (BGDH), & à centro sphæræ (E) per centrum circuli (F) ducatur recta linea (AEFC), cadet hæc in utrumque polum circuli (BGDH).

Nam recta EF [a] perpendicularis est plano circuli BGDH. [b] ergo utrinque protracta cadet in polos circuli. *Q. E. D.*

a hyp & 7. h.
b 8. huj.

Corollarium ex his.

Quatuor puncta; centrum circuli, poli ejusdem, & centrum sphæræ in una recta existunt, in diametro scilicet sphæræ ad circuli planum recta.

Prop. XI. Theor.

Fig. 12. In sphæra (A B C D) maximi circuli (A C, B D) se mutuò secant bifariam.

a 6. hujus. b 3. 11. Commune enim centrum circulorum ([a] hoc est sphæræ centrum) esto G; erit hoc in communi sectione [b] recta E F: ergo recta E F est diameter, utrumque circulum bisecans. *Q. E. D.*

Coroll. Intersectio duorum circulorum in sphæra maximorum est diameter sphæræ.

Prop. XII. Theor.

In sphæra (A B C D) circuli (A C, B D), qui se mutuò bisecant, sunt maximi.

Communis circulorum sectio E F bisecetur in G; erit G centrum commune circulorum (quoniam E F diameter), quin & sphæræ: nam ex G erigatur GH perpendicularis circulo AC, & G B recta circulo BD; [a] eritque centrum sphæræ in utraq; GH, GI; ergo in communi puncto G. ergo cùm circuli A C, B D per centrum sphæræ transeant, [b] erunt maximi circuli. *Q. E. D.*

a cor. 1. huj. b 6. huj.

Prop. XIII. Theor.

Fig. 13. Si in sphæra maximus circulus (A B C D) circulum quempiam (B E D) ad rectos angulos secet, & bifariam secat eum, & per polos (A, C).

Ab F centro sphæræ (seu circuli maximi A B C D) ducatur F G recta circulo B E D, [a] quæ communi circulorum sectioni B D occurret in G. [b] eritque G centrum circuli B E D; ergo B D est diameter circuli B E D, ipsum bisecans; [c] & ipsius poli sunt in F G protracta; ergo in circulo A B C D. *Q. E. D.*

a 38. 11. b cor. 1. huj. c 8. hujus.

Valet hæc Propositio, nec non 8, 9, 10 cum ipsarum Scholiis, etiam quando circulus B D maximus est, & transit per centrum sphæræ.

Coroll. Hinc, si circulus maximus alterum non bisecet, neque per ejus polos transeat, is huic obliquus est.

Prop.

Prop. XIV. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) circulum non maximum (B E D) biſecat, ad angulos rectos eum ſecat, & per polos.

Biſecetur ſectio B D in G, & à ſphæræ centro F connectatur F G. Et quia B D [a] eſt diameter circuli B E D, erit G ejus centrum. [b] ergo F G recta eſt circulo B E D, & producta [c] cadet in ejuſdem polos; proinde poli ejus ſunt in circulo A B C D. Quæ *E. D.*

a *hyp.*
b 7 *hujus.*
c 8 *hujus.*

Prop. XV. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) eorum, qui in ſphæra ſunt, circulorum aliquem (B E D) ſecet per polos (A, C); ſecabit eum biſariam, & ad angulos rectos. Fig. 13.

Nam ducta recta A C [a] recta eſt circulo B E D, & per centra circulorum F, G tranſit. quare 1°, circulus A B C D [b] rectus eſt circulo B E D; & 2°, communis circulorum ſectio B D eſt diameter circuli B E D, ipſúmque biſecat. Quæ *E. D.*

a 10 *huj.*
b 18. 11.

Schol. 1. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) tranſeat per polos (A, C) alterius cujuſpiam maximi circuli (B D); tranſibit viciſſim hic (B D) per illius (A C) polos (B, D). Fig. 14.

Nam circulus A B C D circulum B D [a] perpendiculariter ſecat; ergo viciſſim circulus B D circulum A B C D ſecat perpendiculariter, [b] adeóque per polos ipſius. *Q. E. D.*

a 15 *hujus.*
b 13 *hujus.*

Schol. 2. Theor.

Si in ſphæra circulus (A B C D) circulum (B D) per polos (A, C) ſecet, circulus (A B C D) maximus eſt, & biſariam eum ſecat, & ad angulos rectos.

Nam recta A C [a] tranſit per centrum ſphæræ, [b] ergo circulus A B C D eſt maximus; [c] biſecátque circulum B D, eidémque rectus eſt. Quæ *E. D.*

a 10 *hujus.*
b 6 *hujus.*
c 15 *hujus.*

Schol.

Schol. 3. Theor.

Vide fig. Prop. præc. Si in ſphæra circulus (A B C D) circulum (B D) biſariam, & ad rectos ſecet angulos, circulus (A B C D) maximus eſt, eúmque ſecat per polos.

Nam biſectâ communi circulorum ſectione B D in G, erit G centrum circuli B D: in plano circuli A B C D ducatur G A ad B D
a 4. *def.* 11. perpendicularis; [a] erit G A plano B D recta; [b] ergo G A tranſit
b *Sch.* 2. 10 *h.* per polos circuli B D: [c] ergo circulus A B C D per ipſius B D polos
c *Sch.* 2. 15 *h.* tranſit, maximúſque proinde exiſtit. *Quæ E. D.*

Schol. 4. Theor.

Si in ſphæra ſit circulus (B D), & à polorum ejus altero (A) cadens recta (A G), ipſius plano perpendicularis, æquetur ejus ſemidiametro, circulus (B D) maximus eſt.

a 9 *hujus.* Nam G [a] eſt centrum circuli B D, & centrum ſphæræ eſt in rectâ A G, & alter polus C in eâdem protractâ: ergo circulus per A C eſt maximus. Eſto is A B C D ſecans circulum B D punctis B, D: &
b 3 *def.* 11. connectatur G D. Cùm igitur angulus A G D [b] rectus ſit (quoniam A G plano B D ponitur recta) erit A G. G D :: G D. G C. atqui G D = A G. ergo G C = (G D =) A G. ergo cùm centrum ſphæræ ſit in A G, erit G centrum ſphæræ. [c] ergo circulus D B eſt
c 6 *hujus.* maximus. *Q. E. D.*

Prop. XVI. Theor.

Fig. 15. Si ſit in ſphæra maximus circulus (A B), recta linea (C B), ducta ab ejuſdem circuli polo (C) ad circumferentiam, æqualis eſt lateri quadrati inſcripti maximo circulo.

a 9 *hujus.* Nam demiſsâ C E rectâ circulo A B, [a] erit E centrum circuli A B,
b 6 *hujus.* ipſiúſque ſphæræ; ([b]quare circulus A C B D eſt maximus), & anguli ad centrum E recti; ideóque ſinguli arcus C A, C B, A D, B D ſunt quadrantes: quare ſubtenſa C B eſt latus quadrati maximo circulo A C B D inſcripti. *Q. E. D.*

Schol.

Si in ſphæra ſit circulus (A B), & ab ejus polo (C) ad circumferentiam ducta recta (C B) æquetur lateri quadrati in eo deſcripti, circulus ipſe (A B) maximus eſt. Du-

Ducatur C E recta circulo A B; [a]ergo E est centrum circuli AB; & C E [b]perpendicularis est radio E B. ergo C Eq + B Eq [c]= C Bq = 2B Eq. quare C E = B E. [d]ergo circulus A B est maximus.

a 9 hujus. b 3 def. 11. c 47. 1. d sch. 4. 15. h.

Prop. XVII. Theor.

Si in sphæra sit circulus (A B), à cujus polo (C) in ipsius circumferentiam ducta recta linea (C B) æquetur lateri quadrati inscripti maximo circulo (C A B D), ipse circulus (A B) maximus erit.

Circulus enim C A D B, transiens per E centrum sphæræ, & rectam C B, est maximus; cujus arcus C B est quadrans; eique par C A etiam quadrans (ob rectam C A = C B); proinde sectio A B erit diameter circuli C A D B. eadémque A B diameter est circuli A B ([a]hunc enim bisecat;) ergo circulus A B est maximus. *Q.E.D.*

a 15 hujus.

Prop. XVIII. Probl.

Lineam rectam describere æqualem diametro (A C) circuli cujuslibet (A B C D) in sphæra dati. Fig. 16. 17.

In peripheria circuli A B C D sume tria quælibet puncta A, B, D, junctisque rectis A B, A D, B D, [a]fac triangulum E F G triangulo A B D æquilaterum; & duc F H ad E F, & G H ad E G perpendiculares, concurrentes in H; & connectatur E H. Erit E H = A C. Ducatur C D: atque ob ang. E F H + ang E G H [b]= 2 rect. [c]erit ang F E G + ang F H G = 2 rect. [d]ergo quadrilaterum E F H G circulo inscribi potest; quare ang E H G [c]= (ang E F G [d]= ang A B D [c]=) ang A C D. item ang H G E [b]= (rect [c]=) ang C D A; & [b]latus E G = A D; [f]ergo E H = A C. *Q.E.F.*

a 22. 1. b const. c cor. 32. 1. d cor. 22. 3. c 27. 3. d 8. 1. e 3. 1. f 26. 1.

Scholium. Theor.

Fig. 18.

Linea recta (A E) à polo (A) cujusvis circuli (B C), in sphæra, ad sphæræ superficiem ducta, quæ sit æqualis lineæ rectæ (A B) ab eodem polo ad superficiem circuli (B C) ductæ, in circuli (B C) circumferentiam cadet.

Not. hoc scholium prop. 19. subnectendum est.

Si negas; per A E ducatur circulus maximus A B E C, occurrens circulo B C punctis B, C; ergo ducta A B [a]= (A D [b]=) A E: [c]proinde arc. A B = arc. A E, contra 9. ax. 1.

a 5 def. huj. b hyp. c 28. 3.

Prop. XIX. Probl.

Fig. 19. 20. Describere lineam rectam (E H) æqualem diametro (A C) datæ sphæræ.

In superficie datæ sphæræ sume duo puncta A, B pro libitu tuo. Polo A intervallo A B describatur circulus B Z D, cujus diametro
a 18. hujus. B D [a] fac æqualem F G; & super F G fac triangulum F E G triangulo B A D æquilaterum; ipsisque E F, E G duc perpendiculares F H, G H convenientes in H: erit ducta E H æqualis diametro sphæræ.

Nam per A B, A C describatur maximus circulus secans circulum B Z D in B, D; eritque ut in præcedenti E H = A C.

Prop. XX. Probl.

Fig. 21. Per duo data puncta (A, B) in sphærica superficie describere circulum maximum.

Describatur polo A, intervallo A G, latere quadrati maximo circulo inscripti, circulus C D; & polo B, pari intervallo B G, describatur circulus E F priori occurrens in G. Itaque circulus polo G intervallo G A transibit per B (quia G A = G B), eritque maximus
a 17. hujus. ([a]quia G A æquatur lateri quadrati maximo circulo inscripti). *Q. E. F.*

Si puncta A B opponantur ex diametro sphæræ, liquet circulos quoscunque per illa descriptos fore maximos.

Prop. XXI.

Fig. 22. 23. Cujuslibet circuli (A B) in sphæra dati polum invenire.

1. Sit primò datus circulus A B non maximus; sume in ejus peripheria duo quælibet puncta C, D; biseca verò arcum C A D in A, & arcum C B D in D; unde arc. A C B = arc. A D B; itaque si
a 14. hujus. per puncta A, B ducatur circulus maximus A E B F, [a] erit in hoc polus circuli A C B; quare bisecto arcu A E B in E, erit E polus circuli A C B. *Q. E. F.*

2. Sin datus circulus A B sit maximus, biseca semicirculum A G B in G; polóque A, spatio G A (vel G B) duc circulum A E B F, bisectóque arcu A F B in F, erit F polus circuli A C B D. *Q. E. F.*

Prop.

Schol. 1. *Theor.*

Si in ſuperficie ſphæræ acceptum fuerit aliquod punctum (A), & ab eo puncto ad circumferentiam circuli cujuſpiam (B C) in ſphæra dati, cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales (A D, A E, A F); acceptum punctum (A) polus eſt ipſius circuli (B C). Fig. 24.

Ex A ducatur A G recta circulo B C, & connectantur G D, G E, G F.

Ob angulos A G D, A G E, A G F rectos; & rectas A D, A E, A F pares, [a]erunt G D, G E, G F etiam pares; quare G eſt centrum circuli B C; atque inde A erit ejuſdem polus. *Q. E. D.* a 47. 1. b 8 *hujus.*

Schol. 2. *Theor.*

In ſphæra circuli (B F, C E), à quorum polis (A, D) rectæ (A F, D E) ad eorum circumferentias ductæ ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt: & circulorum æqualium (B F, C E) æquales ſunt rectæ (A F, D E) ab eorum polis (A, D) ad circumferentias ductæ. Fig. 25.

A ſphæræ centro G ducantur G A, G D; [a] hæ tranſeunt per circulorum centra H, I; connectantur H F, I E; & G F, G E. a 10 *hujus.*

1. *Hyp.* Ob A F = D E, [a]erit ang A G F = ang D G E; item ang G H F = rect. = ang G I E. & G F = G E, ergo G H = G I. [b] ergo circuli B F, C E æquantur. *Q.E.D.* a 27. 3. b 6 *hujus.*

2. *Hyp.* Quia circuli B F, C E pares ſunt, [b] erit G H = G I. item G F = G E, & H F = I E; [c] ergo ang A G H = ang D G E. [d] quare ſubtenſæ A F, D E pares ſunt. *Q. E. D.* c 8. 1. d 29. 3.

Prop. XXII. *Theor.*

Si in ſphæra recta linea (A B) per centrum (A) ducta rectam aliquam lineam (C D) non per centrum ductam biſecet, ad angulos rectos ipſam ſecabit. Quòd ſi ad angulos rectos eam ſecet, etiam biſecabit ipſam. Fig. 26.

Nam circuli per A B, C D deſcripti, [a] maximi ſcilicet, centrum erit A; ergo ſi B C = BD, [b]erit A B ad CD perpendicularis; & ſi A B ſit perpendicularis, [b]erit B C = B D. a 6 *hujus.* b 3. 3.

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER SECUNDUS.

DEFINITIO.

IN sphæra circuli se mutuò tangere ducuntur, cùm communis sectio planorum utrumque circulum tetigerit.

Prop. I. Theor.

Fig. 27. In sphæra paralleli circuli (B F, C E) circa eosdem polos sunt.

a 10. 1 *hujus.* Sint A, D poli circuli B F, quos connectat recta A D; [a] hæc recta
b *conv.* 14. 11. est circulo B F, [b] ergo & circulo C E; [c] quare per polos circuli C E
c 8. 1 *hujus.* transit; ergo A, D sunt poli circuli C E. Unde liquet propositum.

Prop. II. Theor.

In sphæra circuli (B F, C E) qui sunt circa eosdem polos (A, D), sunt paralleli.

a 10. 1 *hujus.* Nam quia polos connectens recta A D utrique circulo B F, C E
b 14. 11. [a] recta est, [b] erunt paralleli isti circuli. *Q. E. D.*

Scholium. Theor.

Fig. 28. In sphæra non sunt plures circuli æquales, & paralleli, quàm duo.

Sint æquales duo circuli A B, E F, & paralleli: vis alterum C D
a 1. 2 *huj.* hisce parem dari, & parallelum. Sint igitur [a] communes omnium poli
b 10. 1 *huj.* G, H, quos connectat recta G H; [b] hæc per I centrum sphæræ transit, & parallelis circulis recta est; ergo ob circulos pares C D, E F,
c 6. 1 *huj.* [c] erit I L = I M, contra 9. *ax.* 1.

Prop.

Prop. III. Theor.

Si in sphæra duo circuli (A B, A C) secent in eodem puncto (A) circumferentiam illius maximi circuli (A B C), in quo polos habent, se mutuò tangent illi circuli (A B, A C). Fig. 29.

Nam circulus A B C ad ambos A B, A C [a] rectus est, [b] quare communis horum sectio (puta E D) circulo A B C recta est; ergo E D perpendicularis est rectis A B, A C (quæ communes sunt sectiones circuli A B C cum circulis A B, A C; & quæ diametri sunt circulorum A B, A C). [d] ergo E D tangit circulos A B, A C, ergo hi se mutuò tangunt. *Q.E.D.*

a 15. 1. *huj.*
b 19. 11.
c 3. *def.* 11.
d 16. 3.
e *def.* 1. 2 *huj.*

Prop. IV. Theor.

Si in sphæra duo circuli (A B, C B) se mutuò tangant, maximus circulus (D E) per eorum polos (D, E) descriptus, per eorum contactum (B) transibit. Fig. 30.

Si non transit per B, transeat per F; circulus igitur G F polo D, intervallo D F (majori quàm D B) descriptus secabit circulum C B in F. atqui circuli G F, C F se mutuò [a] contingunt (quia circulus maximus D F E transit per utriusque polos). Quæ repugnant.

a 3. 2. *hujus.*

Prop. V. Theor.

Si in sphæra duo circuli (A B, C B) se mutuò tangant, maximus circulus (D B) descriptus per unius (A B) polos (D), & per amborum contactum (B); per reliqui quoque circuli (C B) polos (E) transibit. Fig. 31.

Transeat circulus maximus D E per polos D, E; [a] hic per contactum B transibit; puta alterum maximum D B F transire per D, B. ergo cùm uterque arcus D B [b] sit semicirculus, & D sit polus circuli A B, erit B alter ejusdem polus, situs in suâ ipsius circumferentiâ. *Q.E.A.*

a 4. 2 *hujus.*
b 11. 1 *huj.*

Prop. VI. Theor.

Si in sphæra maximus circulus (A B) circulorum in sphærica superficie descriptorum aliquem (A C) tangat, tanget & alterum ei æqualem, & parallelum. Fig. 32.

Sint D & E poli circuli A C, quos nectat recta D E. Per A, D, E ducatur circulus maximus A D B E. Item polo E, per B, ducatur circulus a 10. 1 hujus. b 14. 11. c sch. 22. 1 h. d 3. hujus.

culus B F. Et quia D E utrique circulo A C, B F [a] recta est, [b] erunt hi paralleli. Item si ex semicirculis A D B, D B E dematur communis arcus D B, manet arcus A D = arc. B E. Unde circulus A C [c] æqualis est circulo B F. Denique quia polus circuli A B est in circulo A D E, in quo itidem polus circuli B F; [d] tanget circulus A B circulum B F. Unde liquet propositum.

Coroll. Hinc liquet contactus A, B diametraliter opponi.

Prop. VII. Theor.

Fig. 32.

Si sint in sphæra duo æquales, & paralleli circuli (A C, B F), maximus circulus (A B), qui eorum alterum (A C) tetigerit, reliquum quoque (B F) tanget.

a 6. 2. hujus. b sch. 2. 2 huj.

Nam si circulus A B non tangat ipsum B F, [a] tanget alterum saltem ipsi A C parem, & parallelum; ergo tanget tres circulos pares & parallelos. [b] *Q. E. A.*

Scholium. Theor.

Circuli (A C, B F) in sphæra paralleli, quos maximus aliquis circulus (A B) tangit, æquales inter se sunt.

a 1 hujus. b 4 hujus. c 3. ax. 1. d 2. sch. 21. 1. hujus.

Per [a] communes parallelorum polos D, E, & polos circuli A B describatur maximus circulus A F B, [b] qui per tactus A B transibit. Et ob semicirculos A D B, D B E, [c] erit arcus A D = B E. [d] ergo circuli A C, B F æquantur.

Prop. VIII. Theor.

Fig. 33.

Si in sphæra maximus circulus (A B) ad aliquem sphæræ circulum (C D) obliquus sit, tanget is duos circulos, æquales quidem inter se, parallelos autem prædicto circulo (C D), ad quem obliquus est.

a 3. 2 hujus. b 6. 2 hujus. c 2. 2 hujus.

Cape circuli C D polos E, F; perque hos, & polos circuli A B describatur circulus E A B; item polo E per A, & polo F per B describantur circuli A G, B H; [a] liquet circulum A B tangere circulos A G, B H; [b] hosque pares esse, & [c] parallelos circulo C D. *Q. E. F.*

Schol. Theor.

Si in sphæra maximus circulus (AB) circulorum aliquem (A G) tangat, obliquus erit ad alios circulos (C D) parallelos ei, quem tangit.

Nam

Nam quia circulus A B [a]non transit per polos circuli A G (tangit a 15.1 *hujus.*
enim circulum A G, non bisecat); non transibit per polos circuli b 13. 1 *huj.*
C D, [b]ergo obliquus est circulo C D. *Q.E.D.*

Prop. IX. Theor.

Si in sphæra duo circuli (A B C D, E D F B) se mutuò secent, maximus circulus (A E C F) per eorum polos ductus, bisecabit segmenta (B A D, B C D, & B E D, B F D) ipsorum circulorum. Fig. 34.

Sint A C, E F sectiones circulorum A D C, E D F cum circulo A E C F, & B D sectio ipsorum A D C, E D F. Et quia circuli ADC,
E D F circulo A E C [a]recti sunt; erit B D ([b]recta circulo A E C F, a 15.1 *huj.*
[c]adeóque) perpendicularis rectæ A C. Ergo cùm A C sit [d] diameter b 19.11.
circuli A D C, [e] erit arc A B = arc A D, & arc C B = arc C D. c 3.*def.* 11. d 15.1 *huj.*
Simili discursu arc E B = arc E D, & arc F B = arc F D. *Q.E.D.* e 28.3.

Schol. 1. Theor.

Si in sphæra circuli (A B C D, E B F D) se mutuò secent; circulus alius (A E C F) eorum segmenta (A B D, C B D; & E B D, F B D) bisecans, transit per eorum polos, éstque maximus.

Nam ob A B + B C [a]= A D + D C; erunt arcus A B C, ADC a 2. *ax.* 1.
semicirculi; ergo recta A C est diameter circuli A B C D; ergo cùm arcus A B, A D pares sint, erit recta B G D rectæ A C perpendicularis: & pari discursu recta B G D rectæ E F ostendetur perpendicularis; quare B G D [b]recta erit circulo A E C F per ipsas AC, b 4.11.
E F ducto; [c]ergo ambo circuli A B C D, E B F D recti sunt circu- c 18.11.
lo A E C F. [d] unde liquet circulum A E C F maximum fore, & per d 3 *sch.* 15.1. *huj.*
circulorum A B C D, E B F D polos transire. *Q.E.D.*

Schol. 2. Theor.

Si in sphæra duo circuli (A B C D, E B F D) se mutuò secent, maximus circulus (A F C E) bisecans duo quæcunque illorum segmenta (B A D, B E D), habens tamen arcum (A F C E) inter illa segmenta positum semicirculo inæqualem) transit per polos ipsorum, duóque reliqua segmenta (B C D, B F D) bisecet. Fig. 35.

Dic alium circulum maximum A GE descriptum iri per polos circulorum B C D, B F D; [a] hic segmenta B A D, B F D bisecabit, & a 9.2 *huj.*
proinde

proinde transibit per puncta A, E; unde arcus A F C E [b]erit semicirculus, contra hypothesin; ergo A F C E transit per polos circulo-
b 11. 1 *huj.* rum ABCD, EBFD; [1]adeóq; segmenta BCD, BFD bisecat. *Q.E.D.*

Prop. X. Theor.

Si sint in sphæra paralleli circuli (A B C D, E F G H), per quo-
Fig. 36. rum polos (I) describantur maximi circuli (A E I G C, B F I H D); parallelorum quidem circumferentiæ (A B, E F, & B C, F G &c.) inter maximos circulos interceptæ similes sunt; maximorum autem circulorum circumferentiæ (A E, B F, C G, D H) inter parallelos circulos interceptæ, sunt æquales.

Sint A C, B D sectiones circuli A B C D cum circulis A I C, B I D; & E G, F H sectiones circuli E F G H cum iisdem A I C, B I D,
a 15. 1 *hujus.* [a]erunt A C, B D diametri circuli A B C D, & E G, F H diametri circuli E F G H; ergo L & K sunt centra circulorum A B C D, EFGH.
b 16. 11. Item (ob circulorum A C B, E G H parallelismum) [b]erunt E G, A C,
c 10. 11. & F H, B D parallelæ; [c]quare ang E K F = ang A L B; ergo similes sunt arcus A B, E F: eâdémque ratione arcus B C, F G similes
* 5. *def.* 1 *huj.* ostendentur. Quinimò * subtensæ rectæ I A, I B, I C, I D, & [d]ideò
d 28. 3. arcus I A, I B, I C, I D æquantur; & pari modo arcus I E, I F, I G, I H æquantur; unde etiam reliqui arcus A E, B F, C G, D H pares sunt. *Q. E. D.*

Prop. X I. Theor.

Fig. 37. Si in diametris (A C, D F) circulorum æqualium (A B C, D E F)
38. æqualia circulorum segmenta (A G C, D H F) ad angulos rectos in-
39. sistant, à quibus sumantur æquales circumferentiæ (A G, D H), qua-
40. rum quælibet inchoata ab extremitate sui segmenti sit minor semisse
41. circumferenriæ integri segmenti; à punctis autem (G, H) æquales
42. circumferentias (A G, D H) terminantibus, ducantur æquales rectæ lineæ (G B, H E) ad circumferentias circulorum (A B C, D E F) primò positorum; ipsæ circulorum primò positorum circumferentiæ (A B, D E) interceptæ inter illas rectas lineas (G B, H E) & extremitates diametrorum (A C, D F) erunt æquales.

a 30. 11. Ducantur G I recta plano A B C, & H K recta plano D E F ([a]cadent hæ in rectas A C, D F); connectantúrque A G, B I; & D H,
b 27. 3. E K; & B L, EM (ad centra LM). Et propter arc. G C = arc. H F,
c 29. 3. [b]erit ang G A C = ang H D F. Item ang G I A *= rect. = ang
* 3. *def.* 11. H K D; & A G [c]= D H. [d]Ergo G I = H K, & A I = D K; un-
d 26. 1. de

de I L = K M). Item G B [e] = H E, & anguli G I B, H K E* sunt recti: [5] ergo I B [f] = K E: itaque trigona B I L, E K M sibi mutuò æquilatera sunt; unde ang A L B = ang D M E. [h] ergo arcus A B, D E æquantur. *Q. E. D.* e hyp. f 47. 1. g 8. 1. h 26. 3.

Si perpendicularis à G, & H incidant in diametrorum extremitates (ut in 5, & 6 figuris) breviùs conficietur negotium sic. Ob G A [k] = H D; & G B [e] = H E, & angulos G A B, H D E rectos. Erit quoque A B [f] = D E. [l] Ergo arc. A B = arc. D E. *Q. E. D.* k suprà. l 28. 3.

Prop. XII. Theor.

Si in diametris (A C, D F) circulorum æqualium (A B C, D E F) erigantur circulorum æqualium segmenta (A G C, D H F); & ab ipsis segmentis æquales circumferentiæ (A G, D H) ad extremitates segmentorum desumantur, minores dimidiis ipsorum partibus; ab ipsis autem circulis æquales circumferentiæ (A B, D E) sumantur ad easdem partes, quæ sunt ad extremitates diametrorum: rectæ lineæ (G B, H E) ductæ à punctis in circumferentiis segmentorum ad puncta in circumferentiis circulorum, erunt æquales.

Fiat, ut in præcedenti; & quoniam (ut istuc ostensum) I L = K M, & B L = E M, & arc A B = arc D E, [a] erit ang I L B = ang K M E. [b] ergo B I = E K: sed & G I = H K; & anguli G I B, H K E recti sunt; [b] ergo B G = E H. *Q. E. D.* a 27. 3.

In 5 & 6 Fig. ob arc A B = D E; & ideo rectam A B = D E, & A G = D H; & angulos G A B, H D E rectos, [b] erit G B = H E. *Q. E. D.* b 4. 1.

Prop. XIII.

Si in sphæra sunt paralleli circuli (A B, C D, F G H), & describantur maximi circuli (A F K, B H K), qui unum quidem (A B) parallelorum tangant, reliquos verò (C D, F G H) secent; circumferentiæ (A B, C D, F G; & A B, L E, M H) parallelorum, interceptæ inter eos maximorum circulorum semicirculos (B N P, A F O; & A M O, B H P), qui non concurrunt similes erunt: maximorum verò circulorum circumferentiæ (A C, A L; B D, B E; & C F, L M; D G, E H; & A F, A M, B G, B H,) inter duos quoscunque parallelos interceptæ, erunt æquales. Fig. 43.

* Fiant scilicet arc. K O = N A, & arc. K I = N B; unde quum

D NPK,

N P K, & N O K sint semicirculi, erunt B N P, A F O semicirculi; & adeò reliqui A M O, B H P etiam semicirculi).

* 1. 2 hujus. Per parallelorum *polos I, & contactus A, B describantur circuli maximi Q A I R, S B I T; estque arc C A [a] = arc A L, & arc D B

a 5 & 9. 2 h. [a] = arc B E; & arc C V [a] = arc V L; & arc D X [a] = arc X E. Porro, quum circulus Q A I R circulo A F K, & circulus S B I T cir-

b 15. 1 hujus. culo B H K [b] recti sint; & arcus A I, B I minores quadrante (ob circulum A B R T non maximum); & arc A I = B I; erunt juxta 11 hujus arc A C, B E æquales. Ergo arcus A L, A C; B E, B D æquales sunt. Eodémque pacto arcus A M, A F, B H, B G æquantur. Unde & reliqui C F, L M, E H, D H æquantur. *Q. E. D.*

c 29. 3. Item ob arc C A L = arc D B E; [c] erit subtensa C L æqualis

d 28. 3. subtensæ D E, & [d] proinde arcus C V L arcui D X E; & semissis C V = D X: unde addito vel subtracto communi V D, erit arc C D =

e 10. 2 huj. arc V X. Ergo, cùm arcus V X [e] similis sit arcui A B, erit arcus C D eidem A B similis. Eadémque ratione arcus F G, neque non & arcus E L, H M eidem A B similes ostendentur. *Q. E. D.*

Prop. XIV. Probl.

Fig. 44. Dato in sphæra circulo (A B), qui minor sit maximo, datóque in ejus circumferentia aliquo puncto (A), per illud punctum describere circulum maximum, qui tangat datum circulum (A B).

a 20. 1 huj. Per A, & C (polum circuli A B) [a] describatur circulus maximus

b 17. 1 huj. C A B E, è quo sumatur quadrans A D. Polo D per A ducatur cir-

c 3. 2 hujus. culus A Z E; [b] hic maximus est, [c] & tangit datum A B in A. *Q. E. F.*

Prop. XV. Probl.

Fig. 45. Dato in sphæra circulo (A B), qui minor sit maximo; & dato aliquo puncto (G) in sphæræ superficie, quod sit inter datum circulum (A B), & alium ei æqualem & parallelum C D; per punctum illud datum (G) describere circulum maximum, qui tangat datum circulum (A B), maximo minorem.

a 20. 1 hujus. & coroll. schol. 10. 1. huj. Per E, F [a] polos parallelorum, & punctum G [a] describatur circulus maximus E A C, in quo capiatur quadrans B H; & polo E per H describatur circulus H I. Sumatur etiam quadrans G K, polóque G per K describatur circulus K L (qui certè maximus erit) secans circulum H I in L (secabit verò, quia punctum K cadit inter H, & I; ob

arcum

arcum G H minorem, & arcum G I majorem quadrante G K: illud, quia B H est quadrans; hoc quia A F D, ipsi E A F æqualis, est semicirculus; & A I ([b]=B H) est quadrans; & proinde D I est qua- b 2 & 10. 2 *hujus.*
drans) tum per L & polos E, F ducatur maximus circulus E L F secans circulum A B in M; polóque demum L per M ducatur circulus M N: dico factum. Nam arc. L M [b] æquatur arcui H B quadranti, c 17. 1 *huj.*
[c]ergo M N est maximus circulus. Item, quia circ. K L transit per polum L circuli M N, [d]transibit hic vicissim per polum illius, hoc est per d 1 *sch.* 15. 1 *hujus.*
G: denique quia circuli A B, G N secant maximum circulum E F, in quo polos habent, in eodem puncto M, [e] ipsi se contingent mutuò. e 3 *hujus.*
Itaque factum.

Scholium.

Simili discursu, aliud punctum, quo circulus K L secat circulum H I, polus erit alterius circuli maximi transeuntis per G, tangentísque circulum A B.

Prop. XVI. Theor.

Maximi circuli, qui similes circumferentias parallelorum circulorum auferunt, aut per parallelorum polos transeunt, aut eundem unum parallelum tangunt. Fig. 46. 47. 48.

1°, Auferant circuli maximi A B C, D B E (ex parallelis A D C, F G) similes arcus A D, F G; & alter A B C transeat per polos parallelorum; erit maximorum intersectio B, polus parallelorum. Si negas, sit H polus ipsorum, & per H, G ducatur maximus H G I (secans ipsum A D C in I), unde arcus A I, F G [a]similes sunt. ergo cùm a 10. 2 *huj.*
A D, F G similes ponantur, erunt A I, A D similes, adeóque pares. *Q. E. A.*

2°. Auferant maximi A B C, D E F similes arcus A D, B E; & neuter per polos transeat, sed alter A B C unum B E tangat (in B); etiam D E F eundem B E tanget in E. Vis secare? [b] itaque per E b 14. 2 *huj.*
describatur circulus maximus G E H. [c] ergo arcus A G, B E similes c 13. 2 *huj.*
sunt; proinde verò arcus A D, A G similes erunt. *Q. E. A.*

3°. Auferant (ex parallelis A D C, G H) maximi A B C, D E F similes arcus A D, G H, & neuter per polos transeat, aut unum tangat parallelorum; [d] ergo circulus A B C parallelis obliquus est; d 13. 1. *huj.*
[e] ergo tanget aliquem, puta (B E) ipsis A D C, G H parallelum; eun- e 8. 2 *hujus.*
dem B E tanget circulus D E F: si negas; per H, [f] describatur cir- f 15. 2 *huj.*
culus maximus K H I tangens ipsum B E in I, [g] ergo arcus AK, G H g 13. 2 *huj.*
similes, itidémque arcus A K, A D similes erunt. *Q. E. A.*

Prop. XVII. Theor.

In ſphæra paralleli circuli (A B, E F), inter quos, & parallelorum
Fig. 49. maximum (C D) æquales circumferentiæ (A C, C E) maximorum circulorum intercipiuntur, ſunt inter ſe æquales; illi verò (A B), inter quos & maximum parallelorum (C D) majores maximorum circulorum circumferentiæ (A C) intercipiuntur, ſunt minores.

Nam primò tranſeat circulus maximus A C E F D B per polos pa-
a 15. 1 *huj.* rallelorum; ergo communes ſectiones A B, E F [a] erunt diametri cir-
b 10. 2 *huj.* culorum A B, E F. Jam ſi arc A C ([b]B D) = arc C E ([b]D F); ob
c 11. 1 *huj.* arc C G D [c] = arc C H D; erit arc A G B = arc E H F; [d] unde
d 29. 3. ſubtenſæ A B, E F pares erunt, & proinde circuli A B, E F etiam pares. *Q. E. D.* Quod ſi arc A C (B D) $\sqsubset$ arc C E (D F) erit arc A G B $\sqsupset$ arc E H F, & ſubtenſa A B $\sqsupset$ E F, & circulus A B $\sqsupset$ E F. *Q. E. D.*

Fig. 50. Non tranſeat ſecundò circulus maximus A C E F D B per parallelorum polos (G, H); verùm per hos, & polos circuli A C E F D B
e 20. 1 *hujus.* [e] deſcribatur circulus G I H K. [f] Itaque poli circuli G I H K erunt in
f 1 *ſch.* 15. 1 *h.* utroque maximo circulo A C E F D B, & C D. ergo ad interſectiones
g 5. *def.* 1 *huj.* C, D; [g] proinde arcus C I, C K æquantur.
& 28. 3. Jam ſi arc C A = arc C E, erit arc A I = arc E K. Item (ob ſe-
h 12. 2 *huj.* micirculos I K, G H) arc G I = H K; [h] ergo rectæ G A, H E pares
k 2 *ſch.* 20. 1. *h.* ſunt, & [k] conſequenter circuli A B, E F pares erunt. *Q. E. D.*

Sin arc C A $\sqsubset$ arc C E; ſit arc C L = arc C E. Ergo parallelus
l 6. 1 *hujus.* per L æquabiter (uti mox oſtenſum) parallelo E F. [l] Quare parallelus A B minor erit ipſo E F. *Q. E. D.*

Prop. XVIII. Theor.

In ſphæra maximorum circulorum circumferentiæ (A C, E C) interceptæ inter maximum parallelorum (C D), & duos alios circulos (A B, E F) æquales & parallelos, ſunt æquales. Illæ verò (A C) quæ intercipiuntur inter majorem parallelum (A B) & maximum C D, ſunt minores.

a 17. 2 *huj.* Nam in 1ª hyp. ſi dicas eſſe A C $\sqsubset$ C E, [a] erit idcirco circ A B $\sqsupset$ circ C D: in 2ª hyp. ſi dicas eſſe A C = vel $\sqsubset$ C E, [a] erit ergo circ A B = vel $\sqsubset$ circ C D, contra hypotheſin.

Prop.

Prop. XIX. Theor.

Si in sphæra maximus circulus (A B C D) parallelos aliquot circulos (E F, G H, I K) in sphærica superficie descriptos secet quidem, non tamen per polos, in partes inæquales eos secabit, excepto parallelarum maximo (G H): de parallelorum autem segmentis in hemisphæriorum uno (G Q H) interceptis, ea (L F M), quæ sunt inter maximum parallelorum (G H) & polum conspicuum (Q) sunt majora semicirculo, reliqua verò (O P K), quæ sunt inter maximum parallelorum & polum occultum (R) sunt semicirculo minora; æqualium denique ac parallelorum circulorum (E F, I K) alterna segmenta (L F M, O I P; & L E M, O K P) sunt inter se æqualia. Fig. 51.

1. Per polos Q, R & punctum B describatur circulus maximus (Q B R; is [a] transit etiam per D, unde arc B H D = arc B G D: [b] item arc S F T = arc S E T, [b] & arc X K V = arc X I V. ergo arc L F M ⊏ arc L E M, & arc O I P ⊏ arc O K P.

a 11. 1 huj.
b 15. 1 huj.

2. Si circulus E F = circ I K, per polos parallelorum Q, R, & polos circuli A B C D, ducatur circulus A G H: [c] istius circuli poli sunt B, D: ergo arcus B A, B C æquantur. [d] Item arc B L = arc B O; ergo arc L A = arc O C. ergo arc L A M [e] (2 L A) = arc O C P (2 O C): unde subtensa L M = O P. Ergo arc L E M = arc O I P. arc C E M = arc O K P. Q.E.D.

c 1 sch. 15. 1 hujus.
d 18. 2 huj.
e 9. 2 huj.

Prop. XX.

Si in sphæra maximus circulus (G L) parallelos aliquot circulos (A B, C D, E F) secet, non tamen per polos; de parallelorum assumptis circumferentiis in uno hemisphærio, illæ (O B H), quæ propiùs accedunt ad polum conspicuum (P) erunt majores, quàm ut similes esse possint illis (N D I), quæ ab eodem conspicuo polo longiùs absunt. Fig. 52.

Nam si per P, I; & P, N ducantur circuli maximi secantes ipsum A B in R, S; erit arcus H B O major arcu R B S, [a] qui similis est arcui I D N; unde liquet propositum.

a 10. 2 huj.

Prop. XXI.

Si in sphæris æqualibus maximi circuli (B N D, F O H) ad maximos circulos (A B C D, E F G H) inclinentur; ille (B N D) cujus polus Fig. 53. 54.

polus (P) sublimior est supra planum subjectum, inclinatior erit; illi verò circuli, quorum poli æqualiter distant à subjectis planis, æqualiter inclinantur.

Per L, P polos circulorum A B C D, B N D; perque M, Q polos circulorum E F G H, F O H ducantur maximi circuli A L C, E M G;
a 6. 1 *hujus.* [a] intersectiones A C, B D, M I concurrunt in sphæræ centro I. Et
b 19, & 3 *def.* 11. quoniam anguli A I D, N I D [b] recti sunt, (quippe cùm planum
c 15. 2 *huj.* A N C [c] rectum sit planis A B C D, B H D), [d] erit ang A I N inclina-
d 6 *def.* 11. tio plani B N D ad planum A B C D; pariterque ang E K O est in-
e *hyp.* clinatio circuli F O H ad planum E F G H. Cùm igitur sit arc C P [e] $\sqsubset$ G Q, & arc P N = Q O, & proinde arc C N $\sqsubset$ G O, erit arc N A
f 27. 3. $\sqsupset$ arc O E; [f] quare ang A I N $\sqsupset$ ang E K O: *Q.E.D.*

Quòd si arc C P = G Q, simili discursu liquet angulos A I N, E K O æquari. *Q.E.D.*

Facilè convertitur hoc Theorema.

Schol, 1. *Theor.*

Fig. 55. Circuli maximi (A B, C B) tangentes eundem parallelum (A C), æqualiter inclinantur ad maximum parallelorum (D E); qui verò (G H) majorem parallelum I G tangit, inclinatior est ad parallelorum maximum (D E); & circuli (A B, C B) æqualiter inclinati ad parallelorum maximum (D E) tangunt eundem parallelum (A C). Qui verò (G H) inclinatior est ad maximum parallelum, majorem parallelum (I G) tangit.

1. Per F polum parallelorum, & contactus A, C describantur
a 5. 2 *hujus.* maximi circuli F A D, F C E; [a] transeunt hi per polos circulorum
b 15. 1 *huj.* A B, C B, [b] secántque adeò ipsos perpendiculariter: ergo F A est altitudo poli F supra circulum A B; & F C altitudo ejusdem supra circu-
c 5. *def.* 1 *huj.* & 28. 3. lum C B; quare cùm sit F A [c] = F C, liquet primum.

2. Per polum F, & contactum G describatur maximus circulus F G E; ergo (ut priùs) F G est altitudo poli F supra circulum G H:
d 21. 2 *huj.* atqui F G $\sqsubset$ F A: [d] unde liquet secundum.

3. Per F, & polos circulorum A B, C B describantur maximi circuli F A D, F C E; [b] hi secant illos perpendiculariter; ergo arcus F A,
c *hyp.* F C sunt elevationes poli F supra circulos A B, C B; [c] ergo arcus F A,
d 3. 2 *huj.* F C pares sunt. [d] itaque circulus intervallo F A, vel F C descriptus tanget circulos A B, C B: quod erat tertium.

4. Per F, & polum circuli G H describatur circulus maximus F G E.

F G E. ergo arcus F G eſt elevatio poli F ſupra circulum G H. Atqui arc F G [c] $\sqsubset$ arc F A. ergo circ [d] tangens, polo F per G deſcriptus major erit quàm A C. Quod erat ultimum.

Schol. 2. *Theor.*

Circuli maximi (A B, C D) ad parallelorum maximum (D B) æqualiter inclinati, polos (E, F) habent in circumferentiâ ejuſdem paralleli. Et circuli maximi (A B, C D) qui polos (E, F) habent in circumferentia ejuſdem paralleli (E F), ad parallelorum maximum (D B) æqualiter inclinantur. Fig. 56.

1. Deſcriptis per G polum parallelorum, & per E, F polos circulorum A B, C D circulis maximis G E, G F; quia hi [a] recti ſunt illis, [b] erunt arcus G E. G F pares. [c] ergo circulus polo G per E, F deſcriptus parallelus eſt circulo D B. *Q.E.D.* a 15.1 *hujus.* b *hyp.* c 2. 2 *hujus.*
2. Ob arc G E [d] = G F, [e] erunt circuli A B, C D æqualiter inclinati ad ipſum B D. *Q. E. D.* d 5. *def.* 1 *h.* 2. e *ſch.* 21. *h.*

Schol. 3. *Theor.*

Si ſuper circuli (A B D E) diametro A D conſtituatur rectum circuli ſegmentum (A F D), dividatur autem ſegmenti inſiſtentis circumferentia (A F D) in duas inæquales partes (A F, F D); & à ſectionis puncto (F) ad circumferentiam circuli primi plurimæ rectæ lineæ (F A, F I, F H, F B, F C, F D, F E) cadant; erit recta (F A) ſubtendens minorem partem (F A) inſiſtentis ſegmenti omnium minima: quæ autem majorem (F D) ſubtendit, omnium maxima: reliquarum verò maximæ propinquior (F C) remotiore (F B) ſemper major eſt; duæ verò rectæ æquales (F E, F C) ab eodem puncto (D) in circumferentiam circuli (A B D E) à maxima (F D) æqualiter diſtantes. Fig. 57. 58.

Ducatur F G normalis plano A B D E, & connectantur G C, G B, G H, G I, G E; [a] liquet punctum G eſſe in recta A D; & ob F A [b] $\sqsupset$ F D, [c] erit G A $\sqsupset$ G D; [c] item G A $\sqsupset$ G I $\sqsupset$ G H &c. [c] & G D $\sqsubset$ G C $\sqsubset$ G B &c. a 38. 11. b *hyp.* c 7. *vel* 8. 3.

Ergo in triangulis rectangulis F G A, F G I, F G H, [d] erit F A $\sqsupset$ F I $\sqsupset$ F H; at in triangulis rectangulis F G D, F G C, F G B, [d] erit F D $\sqsubset$ F C $\sqsubset$ F B. Demum ob G E [b] = G C, [d] erit F E = F C. Quæ *E. D.* d 47. 1.

Si

Schol. 4. Theor.

Fig. 59. Si in ſphæræ ſuperficie intra cujuſq; circuli peripheriam (ABCDE) ſignetur punctum (G) præter ejus polum (F); ab eo autem ad circuli circumferentiam plurimi arcus (G A, G B, G E, G C, G D) circulorum maximorum ducantur ſemicirculo minores; maximus eſt (G F A, qui per polum circuli ducitur; minimus autem, qui (G D) ei adjacet; reliquorum verò maximo propinquior (G B) remotiore (G C) ſemper major eſt; duo verò arcus (G E, G B) ab eodem maximo (G A) vel minimo (G D) æqualiter remoti inter ſe æquales ſunt.

a 15. 1 hujus. b 3. ſch. 21 h. Nam quoniam arcus A G D [a] perpendiculariter inſiſtit ſemicirculo A C D, [b]erit ſubtenſa G A major ſubtenſâ G B; [b]& G B ipſâ G C: ergo arcus G A major eſt arcu G B; & G B ipſo G C. & ſic in reliquis, juxta Scholium præcedens.

Schol. 5.

Fig. 60. Si in ſphæræ ſuperficie extra peripheriam cujuſq; circuli (ABCDE) ſignetur punctum (G) præter ejus polum (F); ab eo autem ad circuli circumferentiam plurimi arcus (G A, G G, G B, G E) ducantur ſemirculo minores, ſecantéſque circumferentiam circuli: maximus eſt qui (G F A) per circuli polum ducitur; reliquorum verò maximo propinquior (G B) remotiore ſemper major eſt: minimus autem eſt ille (G D) maximi, qui inter punctum (G) & circuli circumferentiam extra circulum interjicitur: reliquorum verò minimo propinquior (G H) remotiore (G I) ſemper minor eſt. Duo verò arcus (G B, G E; & G H, G K) ab eodem maximo vel minimo æqualiter remoti inter ſe æquales ſunt.

Itidem patet hoc ex Scholio penultimo, ex ſubtenſis ad arcus diſcurrendo.

Prop. XXII.

Fig. 61. Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) unum quidem circulum (A F) tangat, alium verò ei parallelum (G B H D) ſecet, poſitum inter ſphæræ centrum, & eum circulum quem tangit maximus circulus; polus autem (E) maximi circuli fuerit inter utrumque parallelorum (A F, G B H D), deſcribantúrque maximi circuli (G L, H K, M P, N K,

N K, O L) tangentes duorum parallelorum majorem (G B H D): hi omnes erunt inclinati ad maximum circulum (A B C D), & eorum rectissimus quidém erit ille (H K), cujus contactus erit in eo puncto (H), in quo majus segmentum (B H D) paralleli majoris bifariam dividitur; humillimus verò & maximè inclinatus (G L) cujus contactus erit in eo puncto (G), in quo minus segmentum (B G D) bifariam dividitur; reliquorum autem illi quidem (M P, N K) qui æqualiter distant ab alterutro eorum punctorum (H, G) in quibus segmenta bifariam secantur, sunt similiter inclinati; qui verò (O L) contactum remotiorem habet à puncto (H), in quo majus segmentum bisecatur, inclinatior perpetuò est eo (N K), qui contactum eidem puncto propiorem habet. Poli denique maximorum circulorum erunt in uno circulo, qui & minor erit eo circulo (A F) quem tangit maximus in principio circulus, & eidem parallelus erit.

Per I polum parallelorum, & E polum circuli A B C D, ducatur
circulus; is [a]bisecat segmenta B G D, B H D, [b]transitque per conta- a 9. 2 huj.
ctum A: sit itaque circulus G A I E H C, fiat arcus H Q æqualis b 4. 2 hujus.
quadranti E A. ergo H Q $\sqsubset$ H I; atque Q cadit inter I, & A;
itaque polo I per Q descriptus circulus Q T R, erit parallelus circu-
lo A F, eóque minor. Per I, & puncta contactuum ducantur maxi-
morum circulorum arcus M I S, N I T, O I V, qui [c] transibunt per c 5. 2 hujus.
polos tangentium: ac ob arcus I H, I M, I N, I O, I G [d] æquales; d 5 def. 2 h.
& arcus I Q, I S, I T, I V, I R [d] etiam pares; erunt toti arcus H Q,
M S, N T, O V, G R æquales; ergo cùm H Q sit quadrans, erunt
reliqui omnes etiam quadrantes; [e] ergo puncta Q, S, T, V, R erunt e 16. 1 huj.
poli tangentium. *Q. E. D.*

Porro, quoniam arcus H M, H N [f] pares sunt, erunt istis [g] similes f hyp.
arcus R φ, R ψ pares. ergo oppositi arcus Q T, Q S pares sunt (nam g 10 hujus.
ductæ rectæ R Q, φ S, ψ T essent [h] diametri circuli Q T R) [k] ergo h 15. 1 hujus.
ducti arcus E T, E S pares erunt; & arcus E T $\sqsubset$ E V; & E Q k 4. sch. 21. 2 h.
maximus, ac E R minimus horum: [l] ergo circulus H K minimè in- l 21. 2 huj.
clinatur ad circulum A B C D, & G L maximè; & M P, N K æqualiter, & O L magis quàm N K. *Q. E. D.*

Prop. XXIII.

Iisdem positis, si circumferentiæ (M O, N P) circulorum tangenti- Fig. 62.
um (M O, N P) à contactibus (M, N) ad nodos (O, P) sint æquales, prædicti circuli maximi (M O, N P) similiter inclinati erunt.

Nam per E polum circuli ABCD, & I polum parallelorum ducatur circulus maximus GAC; & per I, ac contactus M, N describantur circuli maximi IM, IN: & quoniam hi [a] per polos tangentium MO, NP transeunt, [b] insistunt ipsis MO, NP diametricè & rectò; & inæqualiter secantur in I, & arc MO [c] = NP; [d] ergo ductæ rectæ IO, IP æquantur: ergo circulus OKP polo I per O descriptus transibit per P; sunt etiam arcus MO, MQ, & arcus SO, SQ [e] æquales; itidémque arcus NP, NR, & arcus TP, TR pares sunt; ergo (ob arc MO = NP) erunt toti OMQ, PNR pares; [f] ideóque subtensæ OQ, PR; & [g] propterea arcus OSQ, PTR, & horum dimidii SO, TP pares erunt. Item arcus KO, [c] æquantur; ergo reliqui arcus KS, KT, hisque [h] similes arcus HM, HN æquabuntur: [k] ergo circuli MO, NP similiter inclinantur ad circulum ABCD. *Q. E. D.*

a 5. 2 *huj.*
b 15. 1 *huj.*
c *hyp.*
d 12. 2 *h.*
e 9. 2 *huj.*
f 29. 3.
g 28. 3.
h 10. 2 *huj.*
k 22. 2 *hujus.*

LIB.

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER TERTIUS.

Prop. I.

SI circulum (A C B D) inæqualiter ſecet recta linea (A B); Fig. 63.
ſuper qua conſtituatur rectum circuli ſegmentum (A F B), non majus ſemicirculo; dividatur autem inſiſtentis ſegmenti circumferentia in duas partes inæquales (F A, F B); recta linea (F B) ſubtendens earum minorem, minima eſt linearum rectarum (F G, F H, F K, &c.) ductarum ab eodem puncto (F) ad majorem partem (A C H) circumferentiæ primi circuli: rectarum verò ductarum ab eo ipſo puncto ad circumferentiam (B C) interceptam inter illam minimam rectam (F B) & diametrum (C D) in quam cadit perpendicularis (F L) deducta ab illo puncto (F), ſemper minimæ propior (F G) remotiore (F H) minor eſt. Omnium autem maxima eſt ea (F C) quæ ab illo eodem puncto ducitur ad extremitatem ejuſdem diametri. Item recta (F A) ſubtendens majorem circumferentiam ſegmenti inſiſtentis, minima eſt earum (F A, F I, F K, &c.) quæ cadunt in circumferentiam (A C) interceptam inter ipſam & diametrum (C D), ſempérque huic propior (F I) remotiore (F K) minor eſt. Si verò recta linea (A B) ſubjectum circulum ſecans ſit ejus diameter, & reliqua omnia eadem ſint ut ſuprà; recta linea (F B) ſubtendens minorem partem circumferentiæ ſegmenti inſiſtentis, minima eſt rectarum ductarum ab illo eodem puncto ad primi & ſubjecti circuli circumferentiam; ea verò (F A) quam majorem partem circumferentiæ ſegmenti inſiſtentis ſubtendit, maxima eſt.

Connectantur rectæ L G, L H, L I, L K. Et quoniam L B [a] $\sqsupset$ a 7. 3.
L G [a] $\sqsupset$ L H, erit (in triangulis rectangulis F L B, F L G, F D H)
F B [b] $\sqsupset$ F G [b] $\sqsupset$ F H. Similiter, ob L A $\sqsupset$ L I $\sqsupset$ L K, erit F A b 47. 1.
$\sqsupset$ F I $\sqsupset$ F K. Et quoniam L C eſt [a] maxima omnium ab L ad circumferentiam A C B, [b] erit F C maxima omnium ab F ad eandem.

Sin arcus A C B, A D B pares ſint, patet res ex 3° Scholio 21æ ſecundi hujus.

Prop. II.

Fig. 65. Si recta linea (A B) ſecans circulum (A C B D) auferat ſegmentum (A C B) non minus ſemicirculo; ſuper ipſâ verò recta linea (AB) ſtatuatur aliud circuli ſegmentum A F B quod & ſemicirculo majus non ſit, & inclinatum ſit ad alterum ſegmentum (A D B), ſemicirculo non majus: dividatur autem inſiſtentis ſegmenti circumferentia in partes inæquales (AF, FB): recta linea (F B) ſubtendens minorem circumferentiæ partem minima eſt rectarum omnium (F B, F G, FH, &c.) ductarum ab illo puncto (F), à quo ipſa ducitur, ad ſubjecti circuli circumferentiam illam, quæ ſemicirculo minor non eſt: & reliqua omnia, quæ in præcedenti, ſequuntur.

Ex caſu vario perpendicularis F L varii caſus emergunt.

Iterum demiſsâ rectâ F L ad planum A C B D rectâ F L, ductiſq; rectis C E L D, L B, LG, L H, L A, L I, L K; liquet fore F B $\sqsupset$ F G $\sqsupset$ F H $\sqsupset$ F C; & FA $\sqsupset$ F I $\sqsupset$ F K $\sqsupset$ FC, ut præcedenti.

Prop. III.

Fig. 65. 66. Si in ſphæra duo circuli maximi (A B C, D B E) ſe mutuò ſecent, ab eorum verò utroque ſumantur æquales circumferentiæ (B A, B C, & B D, B E) utrinque à puncto (B), in quo ſe ſecant: rectæ lineæ (A D, C E), quæ extrema puncta circumferentiarum connectunt ad eaſdem partes, æquales ſunt inter ſe.

Sint primùm omnes B A, B C, B D, B E æquales; & polo B ducatur circulus A D C E; [a]ergo ſectiones A C, D E ſunt ejus diametri; & F centrum; & radii F A, F B, F D, F E pares. Item ang. E F C [b]= ang A F D. [c]ergo E C = A D.

a 15. 1 *hujus.* b 11. 1. c 4. 1.

Sin omnes non æquentur, polo B per A, & C ducatur circulus A G C H, cui occurrat utrinque productus arcus D B E in G, & H. [d]ergo B G = B H, item B D = B E. ergo D G = E H. Atqui etiam (ſicut in priori parte) ſubtenſæ G A, C H, adeóque arcus G A, C H æquantur; quare cum circuli ſegmentum GBH[a]rectum ſit circulo AGCH; [a]& arcus G A H, G C H ſint ſemicirculi; [e] liquet rectas A D, C E æquari.

d 28. 3. e 12. 2 *hujus.*

Prop.

Prop. IV.

Si in sphæra duo maximi circuli (A B C, D B E) se mutuò secent, ab eorúmque altero (A B C) sumantur æquales circumferentiæ (BA, B C) utrinque à puncto intersectionis (B); & per puncta (A, C) terminantia æquales circumferentias ducantur duo plana parallela (A F G, C H I), quorum alterum (A F G) conveniat cum communi sectione (K B) ipsorum circulorum, extra sphæram, versùs prædictum punctum (B): sit verò una illarum æqualium circumferentiarum (B A, B C) major utralibet circumferentiarum (B F, B H) in altero maximo circulo (D B E) interceptarum inter prædictum punctum (B) & utrumque planorum parallelorum: ea circumferentia (B H) quæ est inter illud punctum (B) & planum (C H I) quod non convenit cum communi sectione (K B) ipsorum circulorum, major est quàm ea ejusdem circuli circumferentia (B F), quæ est inter idem punctum (B) & planum (A F G) quod convenit cum communi sectione circulorum. Fig. 67.

Polo B per A, C ducatur circulus A D C E, habens A G, I C sectiones cum parallelis planis A F C, I H C; & A C, D E sectiones cum maximis circulis A B C, D B E; unde harum intersectio (K) [a] erit centrum circuli A D C E. a 15. 1 *huj.*

Jam, ob A G, C I [b] parallelas, [c] erit ang K A M = ang K C N: b 16. 11.
item ang A K M [d] = ang C K N. & K A = K C. [f] ergo K M = c 28. 1.
K N; [g] adeóque M D = N E. Porro K B (communis sectio cir- e 15. 1. f 26. 1.
culorum A B C, D B E) [h] recta est circulo A D C E; & propterea g 3. *ax.* 1.
[k] ang L K M rectus est; [l] ergo ang L M K acutus est, & ei æqualis h 19. 11.
H N E; angulus autem D M F obtusus. ergo arc E H $\sqsupset$ arc D F; k 3. *def.* 11.
& ideo reciprocè (cùm æquales sint arcus B D, B E) arc B H $\sqsubset$ arc l 17. 1.
B F. *Q.E.D.*

Obs: quòd arc E H $\sqsupset$ arc D F patet. Nam quia M D, N E æquantur, perpendiculares ab M, N auferent æquales arcus in circumferentia D B E; quorum alter minor est arcu D F, ob angulum D M F obtusum, alter major arcu E H, ob angulum E N H acutum: ergo liquet arcum D F esse majorem arcu E H.

Prop. V.

Si in circumferentia maximi circuli (A B C D) sit polus (A) parallelorum; húncque circulum maximum secent ad angulos rectos duo Fig. 68.

duo alii maximi circuli (B D, E C); quorum alter (B D) sit unus parallelorum, alter verò (E C) obliquus sit ad parallelos: ab hoc autem obliquo circulo (E C) sumantur æquales circumferentiæ (F G, G H) deinceps ad eandem partem maximi parallelorum, perque illa puncta (F, G, H) terminantia æquales circumferentias describantur paralleli circuli (I K, L M, N O): circumferentiæ (I L, L N) maximi illius circuli primò positi inter parallelos interceptæ, inæquales erunt; semperque ea (I L) quæ propior fuit maximo parallelorum, remotiore (L N) major erit.

Per polum A, & punctum G ducatur maximus circulus A G P, liquet arcus G P, G F esse minores semicirculo (nam G P est minor quadrante A K, unde G F non secat G P inter G & P, & proinde G F
a 5. sch. 21. 2 h. etiam minor est semicirculo). Item G P transit per polos circuli I K, ergo arc G P $\sqsupset$ G F. Simili discursu arc G Q $\sqsupset$ arc G H. Item recta per G ad centrum sphæræ (hoc est communis sectio circulorum A P, E C) secat interjectum planum circuli I K intra sphæram; ergo eadem secabit planum paralleli N O extra sphæram. Ergo, juxta præ-
b 10. 2 hujus. cedentem arc G P major est arcu G Q; quare cùm sit arc I L [b] = G P; & arc L N [b] = G Q, erit arc I L major arcu L N. *Q. E. D.*

Prop. VI.

Fig. 69. Si in circumferentia maximi circuli (A B C D) sit polus (A) parallelorum, húncque maximum circulum ad angulos rectos secent duo alii circuli maximi (B D, E C), quorum alter (B D) sit unus parallelorum, alter verò (E C) sit obliquus ad parallelos: sumantur autem ab obliquo circulo (E C) æquales circumferentiæ (F G, G H) deinceps ad easdem partes maximi illius paralleli; & per puncta (F, G, H) terminantia æquales circumferentias, pérque polum (A) describantur maximi circuli (A I, A K, A L): hi circumferentias inæquales intercipient de maximo parallelorum, quorum propior (K L) maximo circulo primò posito (A B C D) semper erit major remotiore (K I).

a 5. 3 hujus. Per puncta F, G, H describantur paralleli M N, O P, Q R; [a] ergo
b 10. 2 hujus. arc O M $\sqsubset$ O Q; & [b] proinde arc G V $\sqsubset$ G X: fiat arc G Y = G X, & per Y describatur parallelus S T; cùm igitur arcus G Y,
c 3. 2 hujus. G X, & arcus G H, G F pares sint, [c] erunt ductæ rectæ H X, Y F
d 15. 1. hujus. æquales. Porro circulus S Z T [d] circulo A I rectò insistit, & bisecatur ab eo (ductâ ab Z ad alteram sectionem rectâ) & segmentum circuli A I ab Z per I ad alteram sectionem majus est semicirculo; & arcus

arcus Y Z est quadrante minor, (nam quia circulus A B C D rectus est circulis B D, E C, transibit per eorum polos, & [e] bisecabit eorum segmenta; unde arcus B φ, E φ erunt quadrantes; quare K I quadrante minor est; & proinde ipsi [f] similis Y Z quadrante minor est). [g] ergo recta Y Z est minima cadentium in circumferentiam Z I; adeóque minor ipsâ Y F, [h] hoc est ipsâ H X. ergo cùm circulus Q R minor sit circulo S T, erit arcus H X major quàm ut sit similis arcui Y Z. (Major enim subtensa ex minore circulo majorem proportione arcum aufert, quàm minor ex majore,) ergo arcus L K ([f] similis arcui H X) major est, quàm ut similis sit arcui K I (qui similis est arcui Y Z). quare cùm arcus L K, K I sint in eodem circulo, erit simpliciter arc L K major arcu K I. *Q. E. D.*

e *9. 2 hujus.*
f *10. 2 hujus.*
g *1 hujus.*
h *priùs.*

Prop. VII.

Si in sphæra maximus circulus (A B C D) tangat aliquem sphæræ circulum (A E); alius autem maximus circulus (G H) ad parallelos obliquus sit, tangátque circulos majores illis, quos tangit maximus circulus primò positus; fuerintque eorum contactus (G, H) in maximo circulo primò posito; & sumantur à circulo obliquo circumferentiæ (I K, K L) æquales, & continuæ ad easdem partes maximi (B D) parallelorum: per puncta autem (I, K, H) terminantia æquales circumferentias describantur paralleli circuli (M N, O P, Q R); hi circumferentias inæquales (M O, O Q) intercipient de maximo circulo (A B C D) primò posito; quarum ea (M O) quæ propior erit maximo parallelorum, erit major remotiore (O Q). Fig. 70.

Per S polum parallelorum, & punctum K describatur circulus maximus S K, secans parallelos punctis T, V: item per K [a] describatur circulus maximus K E tangens parallelum A E in E versùs partes G (unde K E cadit inter S V, & G I; nam si extra G I caderet, non tangeret circulum A E, quoniam ipsi K G non priùs occurrit quàm in puncto quod opponitur puncto K). ergo cùm arcus S V transeat polum circuli M N, [b] erit K V minimus arcus omnium à K ad M N cadentium, & K Y minor quàm K I; paritérque K X ⊐ K L; ergo (ut in 5tâ hujus) erit arcus K Y major arcu K X; sed arcus M O [c] æquatur arcui K Y, [c] & arcus O Q arcui K X; ergo arcus M O major est arcu O Q. *Q. E. D.*

a *15. 2 h.*
b *5 sch. 21. 2 h.*
c *13. 2 huj.*

Prop.

Prop. VIII.

Fig. 71. Si in sphæra maximus circulus (A B) tangat aliquem sphæræ circulum (A C;) aliquis autem alius maximus circulus (D E) obliquus ad parallelos tangat circulos majores illis, quos tangebat maximus circulus primò positus; fueritque eorum contactus in maximo circulo primò posito: sumantur autem de obliquo circulo æquales circumferentiæ continuæ (F G, G H) ad easdem partes maximi parallelorum, perque puncta (F, G, H) terminantia æquales circumferentias describantur maximi circuli (M N, K L, C I), qui & tangant eundem circulum (A C) quem tangebat maximus circulus primò positus, & similes parallelorum circumferentias intercipiant; habeántque eos semicirculos, qui tendunt à punctis contactuum (C, K, M) ad puncta (F, G, H) terminantia æquales obliqui circuli circumferentias, per quæ describuntur, ejusmodi ut minimè conveniant cum illo circuli maximi primò positi semicirculo, in quo est contactus (A) obliqui circuli inter apparentem polum, & maximum parallelorum. Inæquales intercipient circumferentias (I L, L N) de maximo parallelorum (B D), quorum propior (I L) circulo maximo (A B) primò posito, semper erit major remotiore (L N).

Per puncta F, G, H describantur paralleli P F, Q G, R H secantes circulum K L in O, S; [a] ergo arc Q P ⊏ Q R, & [b] ideo arc G O ⊏ G S; fiat arc G T = G S, & per T describatur parallelus V T secans circulum M N in X: Jam circulus M N secans parallelum V X non per polos aufert segmentum, ab X per V ad alteram sectionem, minus semicirculo; etiam, segmentum circuli M N ab X per N ad oppositam sectionem est majus semicirculo. Item segmentum V X inclinatur ad M X versùs partes R. (Nam circulus B E [c] rectus est circulo N Y per polum incidenti parallelorum; ergo B E inclinatur ad circulum M N, ergo V X ad eundem N M inclinatur); denique segmentum paralleli X V, ab X per V ad alteram sectionem, *secatur inæqualiter in T: è quibus recta T X [d] minor est rectâ T F, [e] hoc est rectâ H S; unde, sicut in 6tâ hujus, erit arcus I L major arcu L N. *Q.E.D.*

a 7. 3 *hujus.*
b 13. 2 *hujus.*
c 15. 1 *huj.*
* *Vid. Not.*
d 2. 3 *hujus.*
e 3. 3 *hujus.*

Fig. 72. *Not.* Quòd segmentum ab X per V ad alteram sectionem protensum, secetur inæqualiter in T, ita patebit. Ducatur circulus maximus E Z tangens parallelum A C in Z; & quoniam circulus maximus Z Y [f] transit per polos circulorum E Z, & B E, [g] bisecabit is horum seg-

f 5. 2 *hujus,* & *const.*
g 9. 2 *huj.*

ſegmenta; ergo arcus E Z eſt quadrans; paríque de cauſa arcus E D eſt quadrans; ergo circulus polo E per Z deſcriptus tranſit per Y, & D.

Simili diſcurſu N M eſt quadrans, & circulus maximus polo N per M deſcriptus tranſibit per Y, [f] pérque polos tangentis N M; [g] ergo circulus M Y biſecabit ſegmenta tangentis N M, & circulorum E B, X Y; ergo ſecabit circulum E B ad intervallum quadrantis ex N; hoc eſt ultra quadrantem ex E, hoc eſt extra circulum D B. ergo ſegmentum ab X per V ad alteram ſectionem biſecatur extra V; & arcus X V minor eſt ſemiſſe iſtius ſegmenti, magíſque arcus T X eſt minor ejuſdem ſemiſſe.

Lemma Probl.

Propoſitis duabus inæqualibus magnitudinibus (A B, A C,) reperire aliam mediam, quæ datæ cuicunque magnitudini (D G) commenſurabilis ſit. Fig. 73.

Biſecetur D G, & ejus ſemiſſis biſecetur, ac ita continuò [a] donec aliqua pars D F ſit minor quàm C B; & ſit E multiplex ipſius D F proximè major quàm A C; ergo E ⊐ A B: (nam ſi æqualis eſſet, poſſet detrahi una magnitudo æqualis ipſi D F, ſic ut ſupereſſet multiplex ipſius D F major quàm A C, contra conſtructionem), atqui E & D G commenſurabiles ſunt, [b] propter D F communem menſuram: ergo liquet propoſitum.

a 1.10.

b *conſtr.*

Prop. I X.

Si polus (A) parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli (AB), quem duo alii maximi circuli B C, D C ad rectos angulos ſecent; quorum circulorum alter (B C) ſit unus parallelorum, alter verò (D C) ad parallelos obliquus ſit: hoc obliquo circulo ſumantur æquales circumferentiæ (E F, G H) quæ continuæ quidem non ſint, ſed tamen ſint ad eaſdem partes maximi illius paralleli: per polum autem (A) & ſingula puncta (E, F, G, H) æquales circumferentias terminantia deſcribantur maximi circuli (A E I, A F K, A G L, A H M): inæquales intercipient circumferentias; quarum ea (ML) quæ propior erit maximo circulo primùm poſito, ſemper erit major remotiore (KI.) Fig. 74.

Sit primùm arcus intermedius F G commenſurabilis arcui E F, vel G H; & [a] dividantur arcus E F, F G, G H in partes æquales communi menſuræ: pérque diviſionum puncta Q, P, N, & polum A ducantur circuli maximi A Q V, A P T, A N R; ergo arc MR [b] ⊏ b 6.3. huj.

a 4. 10.

F RL

R L[b] $\sqsubset$ L S, & sic continuò ; ergo arc M L $\sqsubset$ K I. *Q. E. D.*

Fig. 75. Sit secundò arc F G incommensurabilis utrique arcui EF, FG ; tum si arcus M L non sit major arcu K I ; sit primò minor, & sumatur K N æqualis ipsi M L ; & ducatur circulus maximus A N secans circulum c lem. 8.3.b. C D in O ; tum [c] capiatur arcus F P major quàm F O, & minor quàm F E, ipsique F G commensurabilis ; & huic æqualis sit G Q, ducantúrque maximi circuli A P R, A Q S. Hinc ob arcus P F, G Q æquales, & commensurabiles intermedio F G, erit (ut modò ostensum est) arc S L $\sqsubset$ arc K R $\sqsubset$ arc K N. Ergo arc M L $\sqsubset$ arc K N : d suppos. atqui arc M L [d] $=$ arc K N, quæ repugnant.

Fig. 76. *Q*uòd si dicatur arcus M L æqualis arcui K I, bisecentur arcus E F, G H in N, O ; ducantúrque maximi circuli A N P, A O Q ; [e] ergo e 6. 3 huj. arc M Q $\sqsubset$ arc Q L ; [e] & arc K P $\sqsubset$ P I ; unde *Q* L $\sqsupset$ $\frac{1}{2}$ M L ($\frac{1}{2}$ K I) ; & K P $\sqsubset$ $\frac{1}{2}$ K I. quare arc *Q* L $\sqsupset$ K P. atqui, cùm arc. G O $=$ F N, non erit *Q* L $\sqsupset$ *Q* P, ut modò ostensum est ; ergo malè ponitur arc M L æqualis arcui K I.

Igitur arcus M L non est minor arcu K I, nec æqualis ei ; ergo major. *Q. E. D.*

Scholium.

Planè simili discursu, quæ de arcubus continuis ostensa sunt in propositionibus 5, 7, 8, etiam de non-continuis ostendi possent. Valeant igitur.

Prop. X.

Fig. 77. Si polus (A) parallelorum sit in circumferentia maximi circuli (AB), quem duo alii maximi circuli (B D, C D) ad angulos rectos secent ; quorum alter (B D) sit unus parallelorum, alter verò (C D) sit obliquus ad parallelos : in hoc autem obliquo circulo (C D) sumantur duo quælibet puncta (E, F) ad easdem partes maximi illius paralleli ; pérque polum (A) parallelorum, & per utrumque illorum punctorum describantur maximi circuli (A G, A H) : erit ut circumferentia (B H) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò positum, & proximum maximum circulum per polum & per unum punctorum descriptum, ad circumferentiam (C F) obliqui circuli inter eosdem circulos interceptam ; ita circumferentia (H G) maximi parallelorum intercepta inter duos maximos circulos per polum pérque utrumque punctorum descriptos ad circumferentiam aliquam, quæ sit minor, quàm circumferentia (F E) obliqui circuli inter utrumque punctum intercepta.

Sint

Sint primùm arcus C F, F E commensurabiles, & dividantur in arcus æquales communi mensuræ, perque puncta divisionum & polum A ducantur circuli maximi I M, K N, L O.

Quum igitur arcus C L, L K, K F, F I, I E æquentur; sitque ideò arc B O [a]⊏ O N [a]⊏ N H, & sic porro: [b] erit arc B O. C L ⊏ O N. L K ⊏ N H. K F. [c] ergo compositè arc B O + O N + N H ad arc C L + L K + K F. ⊏ arc N H. K F; hoc est arc B H. C F ⊏ arc N H. K F [b]⊏ H M. F I. verùm arc H M. F I ⊏ H G. F E ([c] ob H M. F I ⊏ M G. I E) ergo arc B H. C F ⊏ arc H G. F E. Sit arc B H. C F :: H G. P. quare H G. P ⊏ H G. F E. [d] ergo P ⊐ arc. F E. *Q.E.D.* — a 6. 3 *hujus.* b 8. 5. c 34. 5. d 10. 5.

Quòd si arcus C F, F E sint incommensurabiles: sit primò B H. C F :: H G. F I. & arcus F I major (si fieri potest) arcu F E: tum inter F I F E medius arcus F K [e] sit ipsi C F commensurabilis; ac per polum A & K ducatur maximus circulus K L; ergo è mox ostensis, est B H. C F (hoc est H G. F I) ⊏ H L. F K. [f] ⊏ H G. F K. [g] ergo F I ⊐ F K. *Q.E.A.* — Fig. 78. e *lem.* 8. 3 *huj.* f 8. 5. g 10. 5.

Sin dicatur arc B H. C F :: H G. F E; bisecetur arcus F E in X, pérque polum A & X ducatur circulus maximus X Y; [h] ergo arc H Y ⊏ Y G; adeóque H Y ⊏ $\frac{1}{2}$ H G. [k] ergo H Y. F X ⊏ $\frac{1}{2}$ H G. F X ($\frac{1}{2}$ F E) :: H G. F E. ergo H Y. F X ⊏ B H. C F; [l] unde H Y ad arcum majorem arcu F X se habebit ut B H ad C F; quod fieri non posse modò demonstratum est. — Fig. 79. h *6. 3 hujus.* k 8. 5. l 10. 5.

Igitur potiùs ut B H ad C F, ita erit H G ad arcum minorem ipso F E. *Q.E.*

Coroll. arc. B H. C F ⊏ H G. F E. & permutatim.

Prop. XI.

Si polus (A) parallelorum sit in circumferentia maximi circuli (A B), quem duo alii maximi circuli (B C, D E) ad angulos rectos secent; quorum alter (B C) sit unus parallelorum, alter verò (D E) sit obliquus ad parallelos, alius autem maximus circulus (A E) per polos parallelorum transiens obliquum circulum secet (in E) inter maximum parallelorum, & eum (D F) quem obliquus circulus (D E) tangit: diameter sphæræ (D L) ad diametrum (D M) ejus circuli, quem tangit obliquus circulus, majorem rationem habet, quàm circumferentia (B C) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò positum, & maximum circulum per polos paralle- — Fig. 80.

lorum tranſeuntem, ad circumferentiam (D E) obliqui circuli inter
eoſdem circulos interceptam.

Sint A G, B G, D L, D M communes ſectiones circuli A B cum
circulis A C, B C, D E, D F; item C G, F N communes ſectiones
circuli A E, cum circulis B C, D F. Ex polo A per E deſcribatur
parallelus O E; ſintque O H, E H, E I communes ejus ſectiones
a 10. 1 *huj.* cum circulis A B, A C, D E. Quoniam igitur A G [a] recta eſt plano
b 19. 1. paralleli O E, caditque in ejus centrum, erit ang G H I rectus; [b] er-
c 19. 11. go I G ⊏ I H: Fiat I K = I H, & connectatur E K; ergo (cùm
d 4. 1. circulus uterque D E, O E rectus ſit circulo A B, ac [c] ideò commu-
e 15. 5. nis ipſorum ſectio E I recta plano A B; ideóque anguli E I H, E I K
f 4. 6. recti ſint, & latera E I, I H æquentur lateribus E I, I K) [d] erunt an-
g 7. 5. guli I H E, I K E æquales. Jam D L. D M [e] :: D G. D N :: I G. I H
* *Vid. Not.* [g] :: I G. I K * ⊏ ang I K E ([h] hoc eſt ang. I H E, [k] vel B G C).
h *priùs.*
k 10. 11. I G E. Eſt verò ang B G C. ang I G E (vel D G E) [l] :: arc B C.
l 33. 6. D E. ergo D L. D M ⊏ arc B C. D E. *Q. E. D.*

Fig. 81. *Not.* Quòd I G. I K ⊏ ang I K E. I G E, ſic patet.

Ducatur G X ad K E parallela, cui occurrat I E protracta in X.
centróque G per E ducatur arcus circuli Z E Y, ipſis G I (protractæ)
m 1. 6. & G X occurrens punctis Z. Y. Eſtque X E. E I [m] :: triang X G E.
n 8. 5. triang E G I [n] ⊏ ſector Y G E. triang E G I [n] ⊏ ſector Y G E.
o 33. 6. Sector E G Z [o] :: ang X G E. ang E G I. [p] ergo componendo X I.
p 28. 5. E I ⊏ ang X G I. ang E G I. [q] hoc eſt G I. K I ⊏ ang E K I. ang.
q 4. 6. E G I. *Q. E. D.*

Scholium.

Iiſdem poſitis, diameter ſphæræ ad diametrum paralleli (G E) per
punctum (E) obliqui circuli, per quod maximus circulus (A C) è
polo tranſit, deſcripti, minorem rationem habet, quàm circumferen-
tia (B C) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum
primò poſitum, & maximum circulum per polos parallelorum tranſe-
untem, ad circumferentiam (D E) obliqui circuli inter eoſdem circu-
los interceptam.

a 13. 1 *huj.* Nam quoniam uterque circulus B C, D E tranſit [a] per polos circuli
A B, erit iſtorum interſectio Q polus circuli A B; ergo ſegmentum
b 3 *ſch.* 21. 2 *h.* D E L (rectò inſiſtens circulo A B) dividitur inæqualiter in E; [b] er-
go ducta recta E D minor eſt ductâ E O; ergo (cùm circulus E O
c 8. 5. minor ſit circulo E D) erit arcus E O major arcu E D; [c] ergo arc
B C. E O ⊐ B C. E D; ergo tota peripheria circuli B C ad totam
periph. circuli E O (hoc eſt diameter B R ad diametrum O D) mino-
rem rationem habet quàm B C ad E D. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. XII.

Si in ſphæra maximi circuli (A B, C D) tangant unum eundémque parallelorum (A C), intercipiántque ſimiles parallelorum circumferentias (P K, B D) inter utrumque maximorum circulorum interjectas; alius autem maximus circulus (E F) ad parallelos obliquus circulos tangat majores (B G) illis, quos tangunt maximi circuli primò poſiti; ſecétque obliquus idem circulus eoſdem maximos circulos primò poſitos in punctis (I, K) poſitis inter maximum parallelorum, & circulum quem tangunt circuli maximi primò poſiti: diameter ſphæræ ad diametrum circuli (E G), quem tangit obliquus circulus, majorem rationem habet, quàm circumferentia (B D) maximi paralleli (H F) intercepta inter circulos (A B, C D) primò poſitos, eundémque circulum tangentes, ad circumferentiam (I K) obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam. Fig. 82.

Per L polum parallelorum & puncta E, I, K deſcribantur maximi circuli L H, L M, L N; & per K parallelus K O ſecans A B in P: quum igitur [a] ſit ratio diametri ſphæræ ad diametrum circuli E G major quàm ratio arcûs H M ad E I, [b] & hæc major ratione arcûs M N ad I K; ſitque arcus B D minor arcu M N (nam arcus P K, [c] ſimilis arcui B D, minor eſt arcu O K, [d] qui ſimilis eſt arcui M N); [e] erit ratio diametri ſphæræ ad diametrum circuli E G major ratione arcûs B D ad arcum I K. *Q. E. D.*

a 11. 3 *hujus.*
b *cor.* 10. 3. *h.*
c *hyp.*
d 10. 2 *hujus.*
e 8. 5.

Prop. XIII.

Si in ſphæra paralleli circuli (C D, E F) intercipiant circumferentias (G C, G F) maximi alicujus circuli (A F) utrinque æquales ab illo puncto (G) in quo ipſe maximus circulus (A F) ſecat maximum parallelorum (B G); per puncta verò (C, F) terminantia æquales circumferentias, & per parallelorum polos deſcribantur maximi circuli; aut ſi deſcribantur maximi circuli, qui unum eundémque parallelorum tangant, æquales intercipient circumferentias (G H, G I) de maximo parallelorum. Fig. 83. 84.

Ob arcus G C, G F pares, [a] erunt paralleli C D, E F pares. [b] ergo arcus G K, G L æquantur; [c] ergo ductæ ſubtenſæ C K, F L æquales erunt; [d] unde arcus C K, F L æquantur; ergo, quum arcus G H [e] ſimilis ſit arcui C K, [e] & arcus G I arcui F L, erunt arcus G H, G I ſimiles, & proinde æquales. *Q. E. D.*

a 17. 2 *huj.*
b 18. 2 *huj.*
c 3. 3 *huj.*
d 28. 3.
Coroll. e 10, *vel* 13. 2. *huj.*

Coroll. Hinc arcus C H, H E, & similiter intercepti æquales sunt. Nam rectæ C H, H E æquantur.

Prop. XIV.

Si in sphæra maximus circulus (A B) aliquem circulum (A C) tangat; alius autem maximus circulus (D E) obliquus ad parallelos tangat circulos (D F) majores illis, quos tangebat maximus circulus (A B) primò positus; inæquales intercipient circumferentias (K H, E I) parallelorum circulorum, quorum propiores (K H, vel B E) utrivis polorum majores erunt, quàm ut similes sint remotioribus (E I, vel G K).

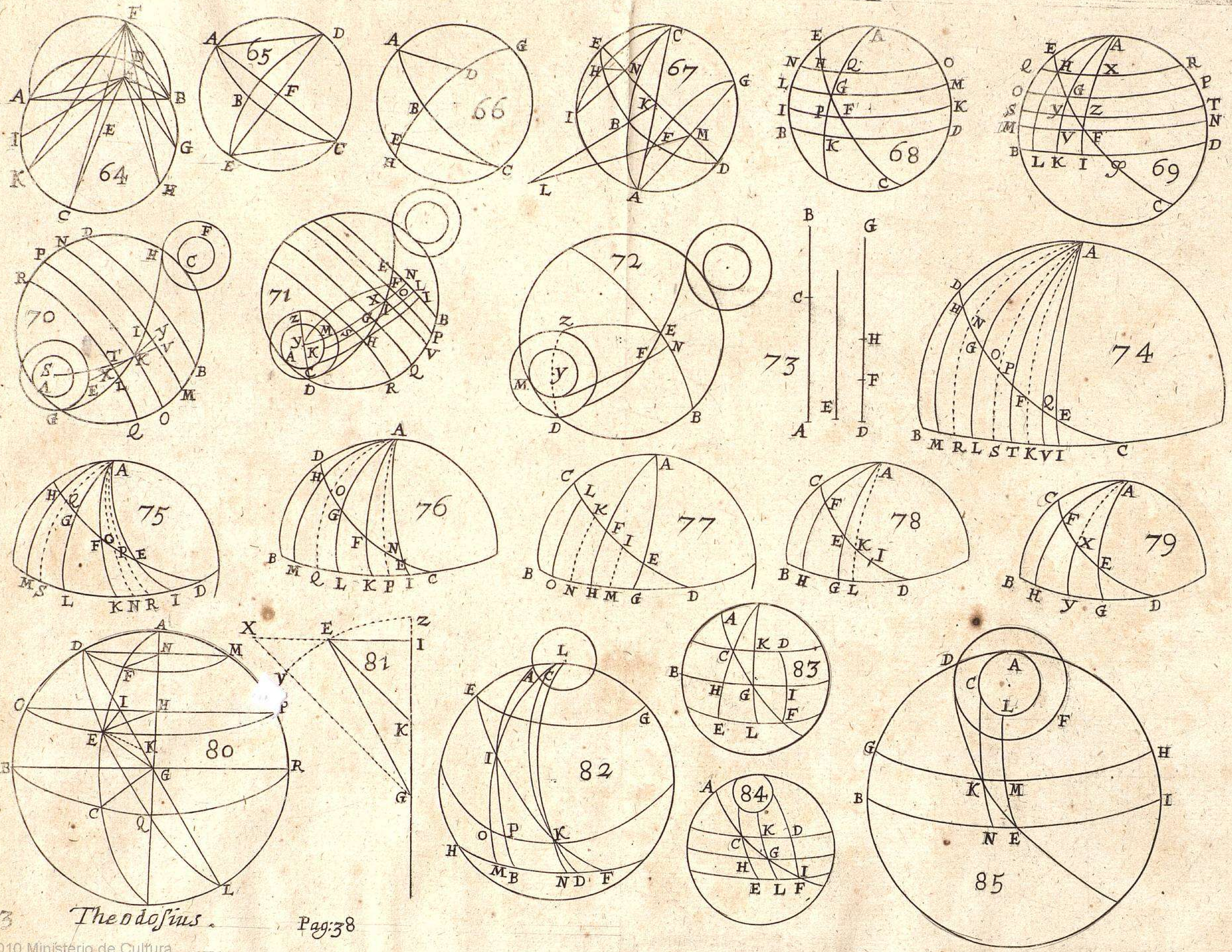
a 15. 2 *huj.* b 13. 2 *huj.*

Per puncta E, K [a] describantur maximi circuli L E, C K tangentes circulum A C in C, & L: [b] ergo arcus M H, E I similes sunt; quare K H major est, quàm ut similis sit arcui E I; paritérque similes sunt arcus B N, G K, ergo B E (propior alteri polo) major est quàm ut similis sit arcui G K. unde liquet propositum.

F I N I S.

Theodosius.
Pag: 28

2



3 Theodosius. Pag:38

8

ARCHIM
OPERA
TO. I