

ISAACI NEWTONI EQU. AUR.

FA
70A(2)

1669212

TRACTATUS

DE

QUADRATURA
CURVARUM

IN

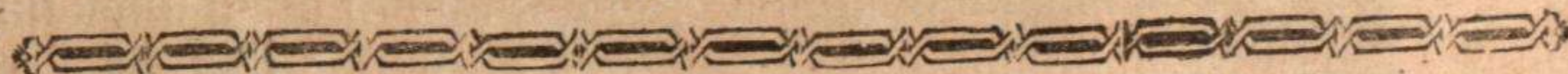
USUM STUDIOSÆ JUVENTUTIS MATHEMATICÆ

EXPLICATIONIBUS ILLUSTRATUS

A

DANIELE MELANDER.

ASTRON. PROFESS. UPSAL.



UPSALIÆ, MDCCLXII.

AD LECTOREM.

Liber Quadraturæ Curvarum Newtoni, non minus quam reliqua Illustrissimi Auctoris Scripta, omni tempore, quodcumque demum ad fastigium pervenerit analysis hujus generis, ejusdem magni erit pretii. Auctor vero, parcus verborum, & plurima simul ingenio sublimi volvens, neque hunc tractatum nisi mathematice doctis conscripsit. Hinc, sicut Ejus Liber Princip. Phil. Nat. commentariis Dominorum Seur & Jacquier, non infimi ordinis Mathematicorum, illustratus habetur, etiam exstiterunt illi, qui Tractatum de Quadratura Curvarum suis notis lectori faciliorem reddere studuerunt. Hujusmodi commentariis hunc tractatum explicuit D. Stewart, qui ipsum tractatum una cum illis commentariis anglice edi curavit. Præterquam autem quod hi commentarii nimis sint prolixi, difficilesque paratu, etiam circa loca quædam attentione digna deficiunt. Itaque duodecim fere abhinc annis annotationes aliquas in eundem tractatum conscripsi, eum in finem, ut, si quando muneri informationis præesse mihi contingeret, ad manus essent. Cum vero plerisque scientiæ nobilissimæ cultoribus viva, ut ajunt, manu ductione fata sæpius interdican, de illis autem magna sperare fas esset, si libri legendi eorum progressibus & intelligentiæ accommodentur, igitur in eorum gratiam, unius vel alterius amici consilio, annotationes meas in hunc tractatum publici juris facere constitui. Hanc instituti rationem ita sum profecutus, ut primum ipse Tractatus Newtoni de Quadratura Curvarum habeatur, eumque deinde explicationes sequantur, occasionibus ad eas sumtis ex locis ipsius tractatus citandis. Upsaliæ d. 26. Febr. 1762.

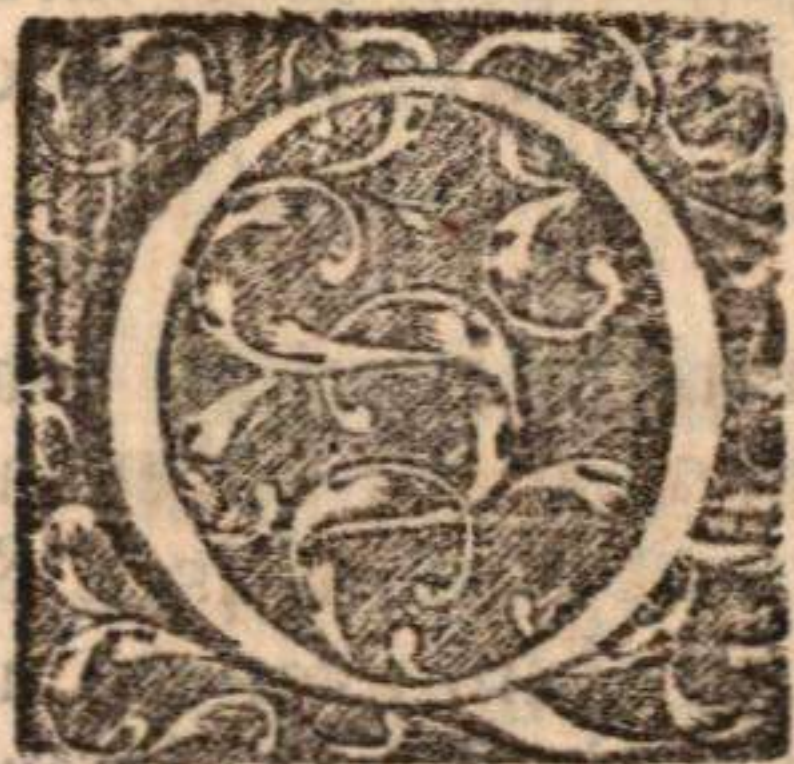
D. M.

IN

INTRODUCTIO

A D

Quadraturam Curvarum.



uantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineæ describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum; superficies per motum linearum; solida per motum superficierum; anguli per rotationem laterum; tempora per fluxum continuum, & sic in cæteris. Hæ

Geneses in rerum natura locum vere habent, & in motu corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc modum Veteres ducendo rectas mobiles in longitudinem rectarum immobilium genesin docuerunt rectangulorum.

Considerando igitur quod quantitates æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori qua crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores; methodum quærebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum quibus generantur; & has motuum vel incrementorum velocitates nominando *Fluxiones*, & quantitates genitas nominando *Fluentes*, incidi paulatim *Annis* 1665 & 1666 in Methodum Fluxionum qua hic usus sum in Quadratura Curvarum.

Fluxiones sunt quam proxime ut Fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quam minimis genita, & ut accurate loquar, sunt in prima ratione augmentorum nascentium; exponi autem possunt per lineas quascunque, quæ sunt ipsis proportionales.

Ut si areae ABC, ABDG Ordinatis BC, BD super basi AB uni-
formi cum motu progredientibus describantur, harum arearum fluxio-
nes erunt inter se ut Ordinatae describentes BC & BD, & per Ordina-
tas

Fig. 1,

natas illas exponi possunt, propterea quod Ordinatae illae sunt ut area-
rum augmenta nascentia.

Progrediatur ordinata BC de loco suo BC in locum quemvis no-
vum bc. Compleatur parallelogrammum BCEb, ac ducatur recta
VTH, quae Curvam tangat in C, ipsisque bc & BA productis occurrat
in T & V: & abscissae AB, Ordinatae BC, & Lineae Curvae ACc
augmenta modo genita erunt Bb, Ec & Cc; & in horum augmento-
rum nascentium ratione prima sunt latera trianguli CET, ideoque
fluxiones ipsarum AB, BC & AC sunt ut trianguli illius CET late-
ra CE, ET & CT & per eadem latera exponi possunt, vel quod
perinde est per latera trianguli consimilis VBC.

Eodem recidit, si sumantur fluxiones in ultima ratione partium eva-
nescentium. Agatur recta Cc & producat eadem ad K. Redeat
Ordinata bc in locum suum priorem BC, & coeuntibus punctis C &
c, recta CK coincidet cum tangente CH, & triangulum evanescens
CEc in ultima sua forma evadet simile triangulo CET, & ejus latera
evanescencia CE, Ec & Cc erunt ultimo inter se ut sunt trianguli
alterius CET latera CE, ET & CT, & propterea in hac ratione sunt
fluxiones linearum AB, BC & AC. Si puncta C & c parvo quovis
intervallo a se invicem distant, recta CK parvo intervallo a tangente
CH distabit. Ut recta CK cum tangente CH coincidat & rationes
ultimae linearum CE, Ec & Cc inveniantur, debent puncta C & c
coire & omnino coindere. Errores quam minimi in rebus Mathe-
maticis non sunt contemnendi.

Simili argumento, si circulus centro B radio BC descriptus in longi-
tudinem Abscissae AB ad angulos rectos uniformi cum motu ducatur,
fluxio solidi geniti ABC erit ut circulus ille generans, & fluxio su-
perficie ejus erit ut perimeter Circuli illius & fluxio lineae curvae
AC conjunctim. Nam quo tempore solidum ABC generatur du-
cendo circulum illum in longitudinem abscissae AB, eodem su-
perficie ejus generatur ducendo perimetrum circuli illius in lon-
gitudinem Curvae AC. Hujus methodi accipe etiam exempla quae
sequuntur.

Fig. 2. Recta PB circa polum datum P revolvens secet aliam positione da-
tam rectam AB: quaeritur proportio fluxionum rectarum illarum AB
& PB.

Progrediatur recta PB de loco suo PB in locum novum Pb. In Pb capiatur PC ipsi PB æqualis, & ad AB ducatur PD sic, ut angulus bPD æqualis sit angulo BBC; & ob similitudinem triangulorum BBC, bPD, erit augmentum Bb ad augmentum Cb ut Pb ad Db. Redeat jam Pb in locum suum priorem PB, ut augmenta illa evanescant, & evanescentiam ratio ultima, id est ratio ultima Pb ad Db, ea erit quæ est PB ad DB, existente angulo PDB recto, & propterea in hac ratione est fluxio ipsius AB ad fluxionem ipsius PB.

Recta PB circa datum Polum P revolvens secet alias duas positione datas rectas AB & AE in B & E: quæritur proportio fluxionum rectarum illarum AB & AE.

Progrediatur recta revolvens PB de loco suo PB in locum novum Pb rectas AB, AE in punctis b & e secantem, & rectæ AE parallela BC ducatur ipsi Pb occurrens in C, & erit Bb ad BC ut Ab ad Ae, & BC ad Ee ut PB ad PE, & conjunctis rationibus, Bb ad Ee ut Ab . PB ad Ae . PE. Redeat jam linea Pb in locum suum priorem PB, & augmentum evanescens Bb erit ad augmentum evanescens Ee ut AB . PB ad AE . PE, ideoque in hac ratione est fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ AE.

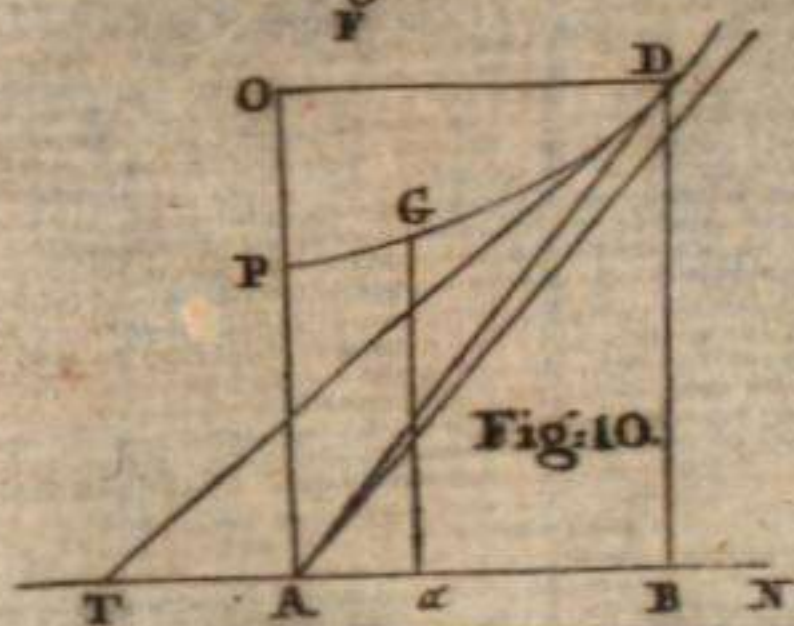
Hinc si recta revolvens PB lineas quasvis Curvas positione datas secet in punctis B & E; & rectæ jam mobiles AB, AE Curvas illas tangant in Sectionum punctis B & E: erit fluxio Curvæ, quam recta AB tangit, ad fluxionem Curvæ, quam recta AE tangit, ut AB . PB ad AE . PE. Id quod etiam eveniet, si recta PB Curvam aliquam positione datam perpetuo tangat in puncto mobili P.

Fluat quantitas x uniformiter & invenienda sit fluxio quantitatis x^n . Quo tempore quantitas x fluendo evadit $x \rightarrow 0$, quantitas x^n evadet $\frac{x \rightarrow 0}{x \rightarrow 0}^n$, id est per methodum serierum infinitarum, $x^n \rightarrow nox^{n-1} \rightarrow \frac{nn-n}{2} oox^{n-2} \rightarrow \&c.$ Et augmenta o & $no x^{n-1} \rightarrow \frac{nn-n}{2} oox^{n-2} \rightarrow \&c.$ sunt ad se invicem ut 1 & $nx^{n-1} \rightarrow \frac{nn-n}{2} o x^{n-2} \rightarrow \&c.$ Evanescant jam augmenta illa, & eorum ratio ultima erit 1 ad nx^{n-1} : ideoque fluxio quantitatis x est ad fluxionem quantitatis x^n , ut 1 ad nx^{n-1} .

Similibus argumentis, per methodum rationum primarum & ultimarum, colligi possunt fluxiones linearum, seu rectarum seu curvarum, in casibus quibuscunque; ut & fluxiones superficierum, angulorum, & aliarum quantitatum. In finitis autem quantitibus Analysin sic instituere, & finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigare, consonum est Geometriæ Veterum: & volui ostendere quod in Methodo Fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen potest Analysis in figuris quibuscunque, seu finitis seu infinite parvis, quæ figuris evanescentibus finguntur similes, ut & in figuris, quæ per Methodos Indivisibilium pro infinite parvis haberi solent, modo caute procedas.

Ex Fluxionibus invenire Fluentes Problema difficilius est, & solutionis primus gradus æquipollet Quadraturæ Curvarum; de qua sequentia olim scripsi.







Quadratura Curvarum.



uantitates indeterminatas ut motu perpetuo crescentes vel decrecentes, id est ut fluentes vel defluentes in sequentibus considero, designoque literis z, y, x, v , & earum fluxiones, seu celeritates crescendi noto iisdem literis punctatis $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$. Sunt & harum fluxionum fluxiones, seu mutationes magis aut minus celeres, quas ipsarum z, y, x, v , fluxiones secundas nominare licet, & sic designare $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, & harum fluxiones primas, seu ipsarum z, y, x, v fluxiones tertias, sic $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$, & quartas sic $\ddddot{z}, \ddddot{y}, \ddddot{x}, \ddddot{v}$. Et quemadmodum $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$ sunt fluxiones quantitatum $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, & hæ sunt fluxiones quantitatum $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$, & hæ sunt fluxiones quantitatum primarum z, y, x, v : sic hæ quantitates considerari possunt ut fluxiones aliarum, quas sic designabo, $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$, & hæ ut fluxiones quantitatum $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, & hæ ut fluxiones aliarum $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$. Designant igitur $\ddot{z}, \ddot{z}, \ddot{z}, \ddot{z}, \ddot{z}, \ddot{z}, \ddot{z}, \ddot{z}$, &c. seriem quantitatum, quarum quælibet posterior est fluxio præcedentis; & quælibet prior est fluens quantitas fluxionem habens subsequentem. Similis est series $\sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}$, ut & series $\frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}$.

Et notandum est, quod quantitas quælibet prior in his seriebus est, ut area figuræ curvilinæ, cujus ordinatim applicata rectangula est quantitas posterior & abscissa est z : uti $\sqrt{az-zz}$ area curvæ, cujus ordinata est $\sqrt{az-zz}$, & abscissa z . Quo autem spectant hæc omnia patebit in Propositionibus quæ sequuntur.

PROP.

*Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente,
invenire fluxiones.*

Solutio.

Multiplicetur omnis æquationis terminus per indicem dignitatis quantitates cujusque fluentis quam involvit, & in singulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus in fluxionem suam; & aggregatum factorum omnium sub propriis signis erit æquatio nova.

Explicatio.

Sunto a, b, c, d &c. quantitates determinatæ & immutabiles, & proponatur æquatio quævis quantitates fluentes z, y, x &c. involvens, uti $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0$. Multiplicentur termini primo per indices dignitatum x , & in singulis multiplicationibus pro dignitatis latere, seu x unius dimensionis, scribatur $\dot{x}$, & summa factorum erit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$. Idem fiat in y & prodibit $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z & prodibit $a^2\dot{z}$. Ponatur summa factorum æqualis nihilo, & habebitur æquatio $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Dico, quod hac æquatione definitur relatio fluxionum.

Demonstratio.

Nam sit o quantitas admodum parva & sunt oz, oy, ox , quantitatium z, y, x momenta, id est incrementa momentanea synchrona. Et si quantitates fluentes jam sunt z, y & x , hæ post momentum temporis incrementis suis oz, oy, ox auctæ, evadent $z + oz, y + oy, x + ox$, quæ in æquatione prima pro z, y , & x scri-

scriptæ, dant Æquationem $x^3 \div 3x^2 \dot{o}x \div 3x \dot{o}^2 \ddot{x}x \div o^3 \ddot{x}^3 - xy^2 - \dot{o}xy^2$
 $- 2x\dot{o}yy - 2x\dot{o}^2\ddot{y}y - x\dot{o}^2\ddot{y}\ddot{y} - x\dot{o}^3\ddot{y}\ddot{y} \div a^2z \div a^2\dot{o}z - b^3 = 0.$

Subducatur æquatio prior, & residuum divisum per $\dot{o}$ erit $3x\dot{x}^2$
 $\div 3x\dot{x}\dot{o}x \div x^3\dot{o}^2 - xy^2 - 2x\dot{y}y - 2x\dot{o}yy - x\dot{o}yy - x\dot{o}^2\ddot{y}y \div a^2z = 0.$ Mi-
 nuatur quantitas $\dot{o}$ in infinitum, & neglectis terminis evanescentibus
 restabit $3x\dot{x}^2 - xy^2 - 2x\dot{y}y \div a^2z = 0.$ Q. E. D.

Explicatio plenior.

Ad eundem modum si æquatio esset $x^3 - xy^2 \div a^2 \sqrt{ax - yy} - b^3 = 0,$
 produceretur $3x^2\dot{x} - xy^2 - 2x\dot{y}y \div a^2 \sqrt{ax - yy} = 0.$ Ubi si fluxionem
 $\sqrt{ax - yy}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax - yy} = z,$ & erit $ax - y^2 = z^2,$ & (per
 hanc Propositionem) $ax - 2yy = 2zz$ seu $\frac{ax - 2yy}{2z} = z,$ hoc est $\frac{ax - 2yy}{2\sqrt{ax - yy}}$
 $= \sqrt{ax - yy}.$ Et inde $3x^2\dot{x} - xy^2 - 2x\dot{y}y \div \frac{a^3\dot{x} - 2a^2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - yy}} = 0.$

Et per operationem repetitam pergitur ad fluxiones secundas, ter-
 tias & sequentes. Sit æquatio $zy^3 - z^4 \div a^4 = 0,$ & fiet per opera-
 tionem primam $zy^3 \div 3z\dot{y}y^2 - 4z\dot{z}^3 = 0,$ per secundam $\ddot{z}y^3 \div 6\dot{z}\dot{y}y^2$
 $\div 3\ddot{z}\dot{y}y^2 \div 6z\ddot{y}^2y - 4\ddot{z}z^3 - 12\dot{z}^2\dot{z}^2 = 0,$ per tertiam $\ddot{\ddot{z}}y^3 \div 9\ddot{\ddot{z}}\dot{y}y^2 \div 18\dot{z}\ddot{\ddot{y}}^2y$
 $\div 3\ddot{\ddot{z}}\dot{y}y^2 \div 18z\ddot{\ddot{y}}yy \div 6z\dot{y}^3 - 4\ddot{\ddot{z}}z^3 - 36\dot{z}\dot{z}z^2 - 24\dot{z}^3\dot{z} = 0.$

Ubi vero sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes,
 convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare,
 & pro ejus fluxione prima unitatem scribere, pro secunda vero & se-
 quentibus nihil. Sit æquatio $zy^3 - z^4 \div a^4 = 0,$ ut supra; & fluat z
 uniformiter, sitque ejus fluxio unitas, & fiet per operationem pri-
 mam $y^3 \div 3z\dot{y}y^2 - 4z^3 = 0,$ per secundam $6\dot{y}y^2 \div 3\ddot{z}\dot{y}y^2 \div 6z\ddot{y}^2y - 12\dot{z}^2$
 $= 0,$ per tertiam $9\ddot{y}y^2 \div 18\dot{y}^2y \div 3\ddot{\ddot{z}}\dot{y}y^2 \div 18z\ddot{\ddot{y}}yy \div 6z\dot{y}^3 - 24\dot{z} = 0.$

In hujus autem generis æquationibus concipiendum est, quod fluxiones in singulis terminis sint ejusdem ordinis, id est vel omnes primi ordinis $\dot{y}$, $\dot{z}$, vel omnes secundi $\ddot{y}$, $\dot{y}^2$, $\dot{y}\dot{z}$, $\dot{z}^2$, vel omnes tertii $\ddot{y}\dot{y}$, $\ddot{y}\dot{z}$, $\dot{y}^3$, $\dot{y}^2\dot{z}$, $\dot{y}\dot{z}^2$, $\dot{z}^3$, &c. Et ubi res aliter se habet, complendus est ordo per subintellectas fluxiones quantitatis uniformiter fluentis.

Sic æquatio novissima complendo ordinem tertium fit $9\dot{z}\ddot{y}\dot{y}^2 + 18\dot{z}\dot{y}^2\dot{y} + 3\dot{z}\ddot{y}\dot{y}^2 + 18\dot{z}\ddot{y}\dot{y}\dot{y} + 6\dot{z}\dot{y}^3 - 24\dot{z}\dot{z}^3 = 0$.

PROP. II. PROB. II.

Invenire Curvas quæ quadrari possunt.

Fig. 1. Sit ABC figura invenienda, BC Ordinatum applicata rectangula, & AB abscissa. Producatur CB ad D ut sit $BD = 1$, & compleatur parallelogrammum ABDG, & arearum ABC, ABDG fluxiones erunt ut BC & BD. Assumatur igitur æquatio quævis, qua relatio arearum definiatur, & inde dabitur relatio ordinatarum BC & BD per Prop. 1. Q. E. I.

Hujus rei exempla habentur in Propositionibus duabus sequentibus.

PROP. III. THEOR. I.

Si pro abscissa AB & area AD seu AB . 1, promiscue scribatur z , & si pro $e + fz^\eta + gz^{2\eta} + bz^{3\eta} + \&c.$ scribatur R: fit autem area Curvæ $z^\theta R^\lambda$, erit ordinatum applicata BC æqualis

$$\frac{\theta e + \theta fz^\eta + \theta gz^{2\eta} + \theta bz^{3\eta} + \&c. \cdot z^{\theta-1} R^\lambda}{+ \lambda \eta \quad + 2\lambda \eta \quad + 3\lambda \eta} R^{\lambda-1}.$$

Demonstratio.

Nam si sit $z^\theta R^\lambda = v$, erit (per Prop. 1) $\theta z z^{\theta-1} R^\lambda + \lambda z^\theta R R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Pro R^λ in primo æquationis termino: & z^θ in secundo scribe $RR^{\lambda-1}$

I pro z, fiet

$$\theta e \quad \begin{matrix} + \theta \\ + \lambda \eta \end{matrix} \quad f z \eta \quad \begin{matrix} + \theta \\ + 2\lambda \eta \end{matrix} \quad g z^{2\eta} \quad \begin{matrix} + \theta \\ + 3\lambda \eta \end{matrix} \quad b z^{3\eta} + \&c., \text{ in } z^{\theta-1} R^{\lambda-1} = BC.$$

Q. E. D.

PROP. IV. THEOR. II.

Si Curvæ absciffa AB fit z , & fi pro $e \div fz^n \div gz^{2n} \div \&c.$ scribatur R, & pro $k \div lz^n \div mz^{2n} \div \&c.$ scribatur S: fit autem area Curvæ $z^\theta R^\lambda S^\mu$: erit ordinatim applicata BC æqualis.

$$\left. \begin{array}{l} \theta e k \vdash \theta \\ \vdash \lambda \eta \end{array} \right\} f k z^{\eta} \vdash \theta \left. \begin{array}{l} \vdash 2 \lambda \eta \end{array} \right\} g k z^{2 \eta} \dots * \dots * \dots * \left. \begin{array}{l} \vdash \theta \\ \vdash \lambda \eta \end{array} \right\} e l z^{\eta} \vdash \theta \left. \begin{array}{l} \vdash \lambda \eta \\ \vdash \mu \eta \end{array} \right\} f l z^{2 \eta} \vdash \theta \left. \begin{array}{l} \vdash 2 \lambda \eta \\ \vdash \mu \eta \end{array} \right\} g l z^{3 \eta} \dots * \dots * \left. \begin{array}{l} \vdash \theta \\ \vdash 2 \mu \eta \end{array} \right\} e m z^{2 \eta} \vdash \theta \left. \begin{array}{l} \vdash \lambda \eta \\ \vdash 2 \mu \eta \end{array} \right\} f m z^{3 \eta} \vdash \theta \left. \begin{array}{l} \vdash 2 \lambda \eta \\ \vdash 2 \mu \eta \end{array} \right\} g m z^{4 \eta} \end{array} \right\} i n z^{\theta} \vdash R^{\lambda} \vdash S^{\mu} \vdash$$

Demonstratur ad modum Propositionis superioris.

PROP. V. THEOR. III.

Si Curvæ absciffa AB fit z , & pro $e \div fz^\eta \div gz^{2\eta} \div hz^{3\eta} \div \&c.$ feribatur
 R fit autem Ordinatum applicata $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$ in $a \div bz^\eta \div cz^{2\eta} \div dz^{3\eta} \div \&c.$
 & ponatur $\frac{\theta}{\eta} = r, r \div \lambda = s, s \div \lambda = t, t \div \lambda = v, \&c.$

$$\begin{aligned}
 \text{Erit Area} &= z^\theta R^\lambda \text{ in } + \frac{\frac{1}{\eta} a}{re} \\
 &+ \frac{\frac{1}{\eta} b - sfA}{\frac{r+1 \cdot e}{z^\eta}} \\
 &+ \frac{\frac{1}{\eta} c - s+1 \cdot fB - tgA}{\frac{r+2 \cdot e}{z^{2\eta}}} \\
 &+ \frac{\frac{1}{\eta} d - s+2 \cdot fC - t+1 \cdot gB - vbA}{\frac{r+3 \cdot e}{z^{3\eta}}} \\
 &+ \frac{-s+3 \cdot fD - t+2 \cdot gC - v+1 \cdot bB}{\frac{r+4 \cdot e}{z^{4\eta}}} \\
 &+ \&c.
 \end{aligned}$$

Ubi $A, B, C, D, \&c.$ denotant totas coefficientes datas terminorum singulorum in serie cum signis suis $+$ & $-$, nempe

A primi termini coefficientem

$$\frac{\frac{1}{\eta} a}{re}$$

B secundi termini coefficientem

$$\frac{\frac{1}{\eta} b - sfA}{\frac{r+1 \cdot e}{z^\eta}}$$

C tertii termini coefficientem

$$\frac{\frac{1}{\eta} c - s+1 \cdot fB - tgA}{\frac{r+2 \cdot e}{z^{2\eta}}}$$

Et sic deinceps.

Demonstratio.

Sunto juxta Propositionem tertiam.

CURVARUM ORDINATÆ		AREÆ
1. $\theta e A + \theta$	$\left\{ fAz^\eta + \theta \right\}$	$Az^\theta R^\lambda$
$+ \lambda \eta$	$\left\{ fAz^\eta + 2\lambda \eta \right\}$	$Bz^{\theta+\eta} R^\lambda$
2. $+ \theta + \eta \cdot e Bz^\eta + \theta + \eta$	$\left\{ fBz^{2\eta} + \theta + \eta \right\}$	$Cz^{\theta+2\eta} R^\lambda$
$+ \lambda \eta$	$\left\{ fBz^{2\eta} + 2\lambda \eta \right\}$	$Dz^{\theta+3\eta} R^\lambda$
3. $+ \theta + 2\eta \cdot fCz^{2\eta} + \theta + 2\eta$	$\left\{ fCz^{3\eta} + \theta + 2\eta \right\}$	
$+ \lambda \eta$	$\left\{ fCz^{3\eta} + \lambda \eta \right\}$	
4. $+ \theta + 3\eta \cdot e Dz^{3\eta} + \theta + 3\eta$	$\left\{ fDz^{3\eta} + \theta + 3\eta \right\}$	
$+ \lambda \eta$	$\left\{ fDz^{3\eta} + \lambda \eta \right\}$	

in $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$

Et

Et si summa ordinatarum ponatur æqualis Ordinatæ $a \div bz^\eta \div cz^{2\eta}$,
 $\div dz^{3\eta} \div \&c.$ in $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$, summa arearum $z^\theta R^\lambda$ in $A \div Bz^\eta \div Cz^{2\eta}$
 $\div Dz^{3\eta} \div \&c.$ æqualis erit areæ Curvæ, cujus ista est Ordinata. Æquen-
 tur igitur Ordinatarum termini correspondentes,

& fiet $a = \theta e A$,

$$b = \frac{\theta + \lambda \eta \cdot fA + \theta + \eta \cdot eB}{\theta + \eta \cdot e}$$

$$c = \frac{\theta + 2\lambda \eta \cdot gA + \theta + \eta + \lambda \eta \cdot fB + \theta + 2\eta \cdot eC}{\theta + 2\eta \cdot e},$$

&c.

$$\& \text{ inde } A = \frac{a}{\theta e}$$

$$B = \frac{b - \frac{\theta + \lambda \eta \cdot fA}{\theta + \eta \cdot e}}{\theta + \eta \cdot e}$$

$$C = \frac{c - \frac{\theta + 2\lambda \eta \cdot gA - \frac{\theta + \eta + \lambda \eta \cdot fB}{\theta + 2\eta \cdot e}}{\theta + 2\eta \cdot e}}{\theta + 2\eta \cdot e}$$

Et sic deinceps in infinitum.

Pone jam $\frac{\theta}{\eta} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, &c. & in area $z^\theta R^\lambda$ in A
 $\div Bz^\eta \div Cz^{2\eta} \div Dz^{3\eta} \div \&c.$ scribe ipsorum A , B , C , &c. valores in-
 ventos, & prodibit series proposita. Q. E. D.

Et notandum est quod Ordinata omnis duobus modis in seriem re-
 solvitur. Nam index η vel affirmativus esse potest vel negativus.

Proponatur Ordinata $\frac{3k - lz^2}{zz \sqrt{kz - lz^3 + mz^4}}$: Hæc vel sic scribi potest

$$z^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{3k - lz^2 \cdot k - lz^2 + mz^3}{\left| -\frac{1}{2} \right|},$$

$$\text{vel sic } z^{-2} \cdot \frac{-l + 3kz^{-2} \cdot m - lz^{-1} + kz^{-3}}{\left| -\frac{1}{2} \right|}$$

In casu priore est $a = 3k$, $b = 0$, $c = -l$, $e = k$, $f = 0$, $g = -l$,
 $h = m$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\eta = 1$, $\theta = 1 = -\frac{5}{2}$, $\theta = -\frac{3}{2} = r$, $s = -1$, $t = -\frac{1}{2}$,
 $v = 0$.

In posteriore est $a = -l$, $b = 0$, $c = 3k$, $e = m$, $f = -l$, $g = 0$, $h = k$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\eta = -1$, $\theta - 1 = -2$, $\theta = -1$, $r = 1$, $s = 1\frac{1}{2}$, $t = 2$, $v = 2\frac{1}{2}$. Tentandus est casus uterque. Et si serierum alterutra ob terminos tandem deficientes abruptitur ac terminatur, habebitur area Curvæ in terminis finitis. Sic in exempli hujus priore casu scribendo in serie valores ipsorum $a, b, c, e, f, g, h, \lambda, \theta, r, s, t, v$, termini omnes post primum evanescunt in infinitum & area Curvæ

prodit $2\sqrt{\frac{k-lz^2+3mz^3}{z^3}}$. Et hæc area ob signum negativum adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ. Nam area omnis affirmativa adjacet tam abscissæ quam ordinatæ, negativa vero cadit ad contrarias partes ordinatæ & adjacet abscissæ productæ, manente scilicet signo Ordinatæ. Hoc modo series alterutra, & nonnunquam utraque, semper terminatur & finita evadit, si Curva geometricè quadrari potest. At si Curva talem quadraturam non admittit, series utraque continuabitur in infinitum, & earum altera converget & aream dabit approximando, præterquam ubi r (propter aream infinitam) vel nihil est, vel numerus integer & negativus, vel ubi $\frac{2\eta}{e}$ æqualis est unitati. Si $\frac{2\eta}{e}$ minor est unitate, converget series in qua index η affirmativus est: si $\frac{2\eta}{e}$ unitate major est, converget series altera. Si in uno casu area adjacet abscissæ ad usque ordinatam ductæ, in altero adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ.

Nota insuper quod si Ordinata contentum est sub factore rationali Q , & factore furdo irreducibili R^π , & factoris furdi latus R non dividit factorem rationalem Q ; erit $\lambda - 1 = \pi$ & $R^{\lambda-1} = R^\pi$. Sin factoris furdi latus R dividit factorem rationalem semel, erit $\lambda - 1 = \pi + 1$ & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+1}$: si dividit bis, erit $\lambda - 1 = \pi + 2$ & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+2}$: si ter, erit $\lambda - 1 = \pi + 3$ & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+3}$: & sic deinceps.

Si Ordinata est fractio rationalis irreducibilis cum denominatore ex duobus vel pluribus terminis composito: resolvendus est denominator in divisores suos omnes primos. Et si divisor sit aliquis, cui nullus alius est æqualis, Curva quadrari nequit: Sin duo vel plures sint divisores æquales, rejiciendus est eorum unus, & si adhuc alii duo vel plures sint sibi mutuo æquales & prioribus inæquales, rejiciendus est

est etiam eorum unus, & sic in aliis omnibus æqualibus si adhuc plures sint: deinde divisor qui relinquitur, vel contentum sub divisoribus omnibus, qui relinquuntur, si plures sunt, ponendum est pro R , & ejus quadrati reciprocum R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$, præterquam ubi contentum illud est quadratum, vel cubus, vel quadrato quadratum, &c. quo casu ejus latus ponendum est pro R , & potestatis index 2 vel 3 vel 4 negative sumptus pro λ , & Ordinata ad denominatorem R^2 vel R^3 vel R^4 vel R^5 &c. reducenda.

Ut si Ordinata sit $\frac{z^5 + z^4 - 8z^3}{z^5 + z^4 - 5z^3 - z^2 + 8z - 4}$; quoniam hæc fractio irreducibilis est & denominatoris divisores sunt pares, nempe $z-1$, $z-1$, $z-1$ & $z+2$, $z+2$, rejicio magnitudinis utriusque divisorem unum. & reliquorum $z-1$, $z-1$, $z+2$ contentum $z^3 - 3z + 2$ pono pro R , & ejus quadrati reciprocum $\frac{1}{R^2}$ seu R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$. Dein Ordina-

tam ad denominatorem R^2 seu $R^{\lambda-1}$ reduco, & fit $\frac{z^6 - 9z^4 + 8z^3}{z^3 - 3z + 2} \Big|_2$, i. e. z^3

in $8 - 9z + z^3 \cdot 2 - 3z + z^3 \Big|^{-2}$ Et inde est $a=8$, $b=-9$, $c=0$, $d=1$, &c.

$e=2$, $f=-3$, $g=0$, $h=1$, $\lambda-1=-2$, $\lambda=-1$, $\eta=1$, $\theta=1$, $\theta=3$, $\theta=4=r$, $s=3$, $t=2$, $v=1$. Et his in serie scriptis prodit

area $\frac{z^4}{z^3 - 3z + 2}$, terminis omnibus in tota serie post primum evanescentibus.

Si denique Ordinata est fractio irreducibilis, & ejus denominator contentum est sub factore rationali Q & factore furdo irreducibili R^π , inveniendi sunt lateris R divisores omnes primi, & rejiciendus est divisor unus magnitudinis cujusque, & per divisores qui restant, si qui sint, multiplicandus est factor rationalis Q : & si factum æquale est lateri R , vel lateris illius potestati alicui, cujus index est numerus integer, esto index ille m , & erit $\lambda-1=-\pi-m$, & $R^{\lambda-1}=R^{-\pi-m}$.

Ut si Ordinata sit $\frac{3q^5 - q^4x + 9q^2x^2 - q^2x^3 - 6qx^4}{q^2 - x^2 \cdot q^3 + q^2x - qx^2 - x^3} \Big|_{\frac{1}{3}}$, quoniam factoris furdi latus R seu $q^3 + q^2x - qx^2 - x^3$ divisores habet $q+x$, $q+x$, $q-x$ qui duarum sunt magnitudinum, rejicio divisorem unum magnitudinis

nis utriusque, & per divisorem $q+x$ qui relinquitur, multiplico facto-
rem rationalem q^2-x^2 . Et quoniam factum $q^3+q^2x-qx^2-x^3$ æ-
quale est lateri R ; pono $m=1$, & inde, cum π sit $\frac{1}{3}$, fit $\lambda-1=-\frac{4}{3}$.
Ordinatam igitur reduco ad denominatorem $R-\frac{4}{3}$, & fit

$$x^0 \cdot \frac{3q^6+2q^5x+8q^4x^2+8q^3x^3-7q^2x^4-6qx^5}{q^3+q^2x-qx^2-x^3} \Big| -\frac{4}{3}$$

Unde est $a=3q^6$, $b=2q^5$ &c. $e=q^3$, $f=q^2$ &c. $\theta-1=0$, $\theta=1=\eta$,
 $\lambda=-\frac{1}{3}$, $r=1$, $s=\frac{2}{3}$, $t=\frac{1}{3}$, $v=0$. Et his in serie scriptis prodit

area $\frac{3q^2x+3qx^3}{q^3+q^2x-qx^2-x^3} \Big| \frac{1}{3}$, terminis omnibus in serie tota post tertium
evanescentibus.

PROP. VI. THEOR. IV.

Si Curvæ abscissa AB sit z , & scribantur R pro $e+fz^\eta+gz^{2\eta}+bz^{3\eta}$
+ &c. & S pro $k+lz^\eta+mz^{2\eta}+nz^{3\eta}+$ &c. fit autem Ordinatum ap-
plicata $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$ in $a+bz^\eta+cz^{2\eta}+dz^{3\eta}$ &c. & si terminorum,
 e, f, g, b , &c., & k, l, m, n , &c. rectangula sint.

$$ek \quad fk \quad gk \quad bk \quad \&c.$$

$$el \quad fl \quad gl \quad bl \quad \&c.$$

$$em \quad fm \quad gm \quad bm \quad \&c.$$

$$en \quad fn \quad gn \quad bn \quad \&c.$$

Et si rectangulorum illorum coefficientes numerales sint respective

$$\frac{\theta}{\eta} = r. \quad r+\lambda=s. \quad s+\lambda=t. \quad t+\lambda=v. \quad \&c.$$

$$r+\mu=s'. \quad s'+\mu=t'. \quad t'+\mu=v'. \quad v'+\mu=w'. \quad \&c.$$

$$s'+\mu=t''. \quad t''+\mu=v''. \quad v''+\mu=w''. \quad w''+\mu=x''. \quad \&c.$$

$$t''+\mu=v'''. \quad v'''+\mu=w'''. \quad w'''+\mu=x'''. \quad x'''+\mu=y'''. \quad \&c.$$

Area

Area Curvæ erit hæc

$$\begin{aligned}
 z^\theta R^\lambda S^\mu \text{ in } & + \frac{\frac{1}{\eta} a}{r e k} \\
 & + \frac{\frac{1}{\eta} b \frac{s f k A}{s' e l}}{r + 1 . e k} z^\eta \\
 & + \frac{\frac{1}{\eta} c \frac{s + 1 . f k B \frac{t g k A}{t' f l}}{s' + 1 . e l} \frac{t'' e m}{t' e m}}{r + 2 . e k} z^{2\eta} \\
 & + \frac{\frac{1}{\eta} d \frac{s + 2 . f k C \frac{t + 1 . g k B \frac{v b k A}{v' g l}}{s' + 2 . e l} \frac{t' + 1 . f l}{t'' + 1 . e m} \frac{v'' f m}{v''' e n}}{r + 3 . e k} z^{3\eta} \\
 & + \&c.
 \end{aligned}$$

Ubi A denotat termini primi coefficientem datum $\frac{\frac{1}{\eta} a}{r e k}$ cum signo suo $\div$ vel $-$; B coefficientem datum secundi, C coefficientem datum tertii, & sic deinceps. Terminorum vero, a, b, c , &c. e, f, g , &c. k, l, m , &c. unus vel plures deesse possunt.

Demonstratur Propositio ad modum præcedentis, & quæ ibi notantur hic obtinent. Pergit autem Series talium Propositionum in infinitum; & Progressio Seriei manifesta est.

PROP. VII. THEOR. V.

Si pro $e \div f z^\eta \div g z^{2\eta} \div \&c.$ scribatur R ut supra, & in Curvæ alijus Ordinata $z^\theta \div \eta^\sigma R^\lambda \div \tau$ maneant quantitates datæ $\theta, \eta, \lambda, e, f, g$, &c. & pro σ ac τ scribantur successive numeri quicunque integri: & si detur Area unius ex Curvis, quæ per Ordinatæ innumeras sic prodeuntes designantur, si Ordinatæ sunt duorum nominum in vinculo radiceis, vel si dentur Areæ duarum ex Curvis, si Ordinatæ sunt trium nominum in vinculo radiceis, vel Areæ trium ex Curvis, si Ordinatæ sunt quatuor nominum in vinculo radiceis, & sic deinceps in infinitum: dico, quod dabuntur Areæ curvarum

C

omnium

omnium. Pro nominibus hic habeo terminos omnes in vinculo radicis tam deficientes quam plenos, quorum indices dignitatum sunt in progressionem arithmetica. Sic Ordinata $\sqrt{a^4 - ax^3 + x^4}$ ob terminos duos inter a^4 & $-ax^3$ deficientes pro quinquinomio haberi debet.

At $\sqrt{a^4 + x^4}$ binomium est, & $\sqrt{a^4 + x^4 - \frac{x^8}{a^4}}$ trinomium, cum progressio jam per majores differentias procedat. Propositio vero sic demonstratur.

CAS. I.

Sunto Curvarum duarum Ordinatae $pz^{\theta-1} R^{\lambda-1}$ & $qz^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1}$, & Areae pA & qB , existente R quantitate trium nominum $e + fz^\eta + gz^{2\eta}$. Et, cum per Prop. 3. sit $z^\theta R^\lambda$ area Curvae, cujus Ordinata est $\theta e + \theta + \lambda\eta$. $fz^\eta + \theta + 2\lambda\eta \cdot gz^{2\eta}$ in $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$, subduc Ordinatas & Areas priores

de Area & Ordinata posteriori, & manebit $\theta e - p + \frac{\theta}{\lambda\eta} fz^\eta + \frac{\theta}{2\lambda\eta} gz^{2\eta} - qz^\eta$.

$z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$, Ordinata nova Curvae, & $z^\theta R^\lambda - pA - qB$ ejusdem Area.

Pone $\theta e = p$, & $\theta f + \lambda\eta f = q$, & Ordinata evadet $\theta + 2\lambda\eta \cdot gz^{2\eta} \cdot z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$, & Area $z^\theta R^\lambda - \theta e A - \theta f B - \lambda\eta f B$. Divide utramque per $\theta g + 2\lambda\eta g$, & Aream prodeuntem dic C , & assumpta utcumque r , erit rC Area Curvae, cujus Ordinata est $rz^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1}$. Et, qua ratione ex Area pA & qB Aream rC Ordinatae $rz^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1}$ congruentem invenimus, licebit ex Area qB & rC Aream quartam puta sD , Ordinatae $sz^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda-1}$ congruentem invenire, & sic deinceps in infinitum. Et par est ratio progressionis ab Area B & A in partem contrariam pergentis. Si terminorum θ , $\theta + \lambda\eta$, & $\theta + 2\lambda\eta$ aliquis deficit & seriem abruptit, assumatur Area pA in principio progressionis unius & Area qB in principio alterius, & ex his duabus Areae dabuntur Areae omnes in progressionem utraque. Et contra, ex aliis duabus Areae assumptis fit regressus per Analysin ad Areas A & B , adeo ut ex duabus datis ceterae omnes dentur. Q. E. O.

Hic est casus Curvarum ubi ipsius z index θ augetur vel diminuitur perpetua additione vel subtractione quantitatis η . Casus alter est Curvarum ubi index λ augetur vel diminuitur unitatibus.

CAS.

CAS. II.

Ordinatae $pz^{\theta-1} R^\lambda$ & $qz^{\theta+\eta-1} R^\lambda$, quibus Areae pA & qB jam respondeant, si in R seu $e \div fz^\eta \div gz^{2\eta}$ ducantur, ac deinde ad R vicissim applicentur, evadunt $pe \div pfz^\eta \div pgz^{2\eta} \cdot z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$, & $qe \div qfz^{2\eta} \div qgz^{3\eta} \cdot z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$.

Et per Prop. 3. est $az^\theta R^\lambda$ area Curvæ cujus Ordinata est $\theta ae \div \theta \div \lambda \eta \cdot afz^\eta \div \theta \div 2\lambda \eta \cdot agz^{2\eta} \cdot z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$, & $bz^{\theta+\eta} R^\lambda$ area Curvæ cujus Ordinata est $\theta \div \eta \cdot bez^\eta \div \theta \div \eta \div \lambda \eta \cdot bfz^{2\eta} \div \theta \div \eta \div 2\lambda \eta \cdot bgz^{2\eta} \cdot z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$.

Et harum quatuor Arcarum summa est $pA \div qB \div az^\theta R^\lambda \div bz^{\theta+\eta} R^\lambda$, & summa respondentium Ordinarum

$$\begin{aligned} & \theta ae \div \theta \div \lambda \eta \cdot afz^\eta \div \theta \div 2\lambda \eta \cdot agz^{2\eta} \div \theta \div \eta \div 2\lambda \eta \cdot bgz^{2\eta} \cdot z^{\theta-1} R^{\lambda-1} \\ & \div pe \div \theta \div \eta \cdot be \div \theta \div \eta \div \lambda \eta \cdot bf \quad \div 1 \cdot qg \\ & \quad \div 1 \cdot pf \quad \quad \div 1 \cdot pg \\ & \quad \div 1 \cdot qe \quad \quad \div 1 \cdot qf \end{aligned}$$

Si terminus primus tertius & quartus ponantur seorsim æquales nihilo, per primum fiet $\theta ae \div pe = 0$, seu $-\theta a = p$, per quartum $-\theta b - \eta b - 2\lambda \eta b = q$, & per tertium (eliminando p & q) $\frac{2ag}{f} = b$. Unde se-

cundus fit $\frac{\lambda \eta aff - 4\lambda \eta age}{f}$, adeoque summa quatuor Ordinarum est $\frac{\lambda \eta aff - 4\lambda \eta age}{f} z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1}$, & summa totidem respondentium Area-

rum est $az^\theta R^\lambda \div \frac{2ag}{f} z^{\theta+\eta} R^\lambda - \theta a A \div \frac{2\theta+2\eta+4\lambda\eta}{f} agB$. Dividantur

hæ summæ per $\frac{\lambda \eta aff - 4\lambda \eta age}{f}$, & si Quotum posterius dicatur D , erit D

Area curvæ, cujus Ordinata est Quotum prius $z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1}$. Et eadem ratione ponendo omnes Ordinatæ terminos præter primum æqua-

les nihilo, potest Area Curvæ inveniri, cujus Ordinata est $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$. Dicitur Area ista C , & qua ratione ex Areis A & B inventæ sunt Areæ C ac D , ex his Areis C ac D inveniri possunt aliæ duæ E & F Ordinatis $z^{\theta-1} R^{\lambda-2}$ & $z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-2}$ congruentes, & sic deinceps in infinitum. Et per Analysin contrariam regredi licet ab Areis E & F ad Areas C ac D , & inde ad Areas A & B , aliasque quæ in progressionem sequuntur. Igitur si index λ perpetua unitatum additione vel subtractione augeatur vel minuatur, & ex Areis quæ Ordinatis sic prodeuntibus respondent duæ simplicissimæ habentur; dantur aliæ omnes in infinitum. Q. E. O.

CAS. III.

Et per casus hosce duos conjunctos, si tam index θ perpetua additione vel subtractione ipsius η , quam index λ perpetua additione vel subtractione unitatis, utcumque augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ singulis prodeuntibus Ordinatis respondentes. Q. E. O.

CAS. IV.

Et simili argumento si Ordinata constet ex quatuor nominibus in vinculo radicali & dantur tres Arearum, vel si constet ex quinque nominibus & dantur quatuor Arearum, & sic deinceps: dabuntur Areæ omnes quæ addendo vel subducendo numerum η indici θ vel unitatem indici λ generari possunt. Et par est ratio Curvarum, ubi Ordinata ex binomiis constantur, & Area una earum, quæ non sunt Geometricæ quadrabiles, datur. Q. E. O.

PROP. VIII. THEOR. VI.

Si pro $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \&c.$ & $k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + \&c.$ scribantur R & S ut supra, & in Curvæ alicujus Ordinata $z^{\theta + \eta\sigma} R^{\lambda + \tau} S^{\mu + \upsilon}$ maneant quantitates datæ $\theta, \eta, \lambda, \mu, e, f, g, k, l, m, \&c.$ & pro $\sigma, \tau, \& \upsilon$, scribantur successive numeri quicunque integri: & si dentur Areæ duarum ex curvis quæ per Ordinatas sic prodeutes designantur si quantitates R & S sunt binomia, vel si dentur Areæ trium ex curvis si R & S conjunctim ex quinque nominibus constant, vel Areæ quatuor ex curvis si R & S conjunctim ex sex nominibus constant, &

& sic deinceps in infinitum: dico quod dabuntur Areæ curvarum omnium.

Demonstratur ad modum propositionis superioris.

PROP. IX. THEOR. VII.

Æquantur Curvarum Areæ inter se quarum Ordinatæ sunt reciproce ut fluxiones Abscissarum.

Nam contenta sub Ordinatis & fluxionibus Abscissarum erunt æqualia, & fluxiones Arearum sunt ut hæc contenta.

COROL. I.

Si assumatur relatio quævis inter Abscissas duarum Curvarum, & inde per Prop. I. quærat relatio fluxionum Abscissarum, & ponantur Ordinatæ reciproce proportionales fluxionibus, inveniri possunt innumeræ Curvæ, quarum Areæ sibi mutuo æquales erunt.

COROL. II.

Sic enim Curva omnis, cujus hæc est Ordinata $z^{\theta-1} \cdot \overline{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \&c.}^{\lambda}$ assumendo quantitatem quamvis pro v & ponendo $\frac{\eta}{v} = s$, & $z^s = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{v}{\eta} x^{\frac{v\theta-\eta}{\eta}} \cdot \overline{e + fx^v + gx^{2v} + \&c.}^{\lambda}$.

COROL. III.

Et Curva omnis, cujus Ordinata est $z^{\theta-1} \cdot \overline{a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + \&c.} \cdot \overline{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \&c.}^{\lambda}$, assumendo quantitatem quamvis pro v & ponendo $\frac{\eta}{v} = s$, & $z^s = x$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Ordinata est $\frac{v}{\eta} x^{\frac{v\theta-\eta}{\eta}} \cdot \overline{a + bx^v + cx^{2v} + \&c.} \cdot \overline{e + fx^v + gx^{2v} + \&c.}^{\lambda}$.

COROL. IV.

Et Curva omnis cujus ordinata est

$$z^{\theta-1} \cdot \frac{a+bz^\eta+cz^{2\eta}+\&c.}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}+\&c.} \Big|^\lambda \cdot \frac{k+lz^\eta+mz^{2\eta}+\&c.}{\phantom{e+fz^\eta+gz^{2\eta}+\&c.}} \Big|^\mu,$$

assumendo quantitatem quamvis pro v , & ponendo $\frac{\eta}{v} = s$, & $z^s = x$,
migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est

$$\frac{v}{\eta} x^{\frac{\theta-1}{\eta}} \cdot \frac{a+bx^v+cx^{2v}+\&c.}{e+fx^v+gx^{2v}+\&c.} \Big|^\lambda \cdot \frac{k+lx^v+mx^{2v}+\&c.}{\phantom{e+fx^v+gx^{2v}+\&c.}} \Big|^\mu$$

COROL. V.

Et Curva omnis cujus Ordinata est

$$z^{\theta-1} \cdot \frac{e+fz^\eta+gz^{2\eta}+\&c.}{\phantom{e+fz^\eta+gz^{2\eta}+\&c.}} \Big|^\lambda, \text{ ponendo } \frac{x}{z} = x, \text{ migrat in aliam sibi}$$

æqualem cujus Ordinata est $\frac{1}{x^{\theta+1}} \cdot \frac{e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\&c.}{\phantom{e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\&c.}} \Big|^\lambda$ id est

$$\frac{1}{x^{\theta+1+\eta\lambda}} \cdot \frac{f+ex^\eta}{} \Big|^\lambda \text{ si duo sunt nomina in vinculo radicis, vel } \frac{1}{x^{\theta+1+2\eta\lambda}} \cdot$$

$$\frac{g+fx^\eta+ex^{2\eta}}{\phantom{g+fx^\eta+ex^{2\eta}}} \Big|^\lambda \text{ si tria sunt nomina; \& sic deinceps.}$$

COROL. VI.

Et Curva omnis cujus Ordinata est

$$z^{\theta-1} \cdot \frac{e+fz^\eta+gz^{2\eta}+\&c.}{\phantom{e+fz^\eta+gz^{2\eta}+\&c.}} \Big|^\lambda \cdot \frac{k+lz^\eta+mz^{2\eta}+\&c.}{\phantom{e+fz^\eta+gz^{2\eta}+\&c.}} \Big|^\mu, \text{ ponendo } \frac{x}{z} = x,$$

migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est

$$\frac{1}{x^{\theta+1}} \cdot \frac{e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\&c.}{\phantom{e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\&c.}} \Big|^\lambda \cdot \frac{k+lx^{-\eta}+mx^{-2\eta}+\&c.}{\phantom{e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\&c.}} \Big|^\mu$$

$$\text{id est } \frac{1}{x^{\theta+1+\eta\lambda+\eta\mu}} \cdot \frac{f+ex^\eta}{} \Big|^\lambda \cdot \frac{l+kx^\eta}{} \Big|^\mu \text{ si bina sunt nomina in vincu-}$$

$$\text{lis radicum, vel } \frac{1}{x^{\theta+1+2\eta\lambda+\eta\mu}} \cdot \frac{g+fx^\eta+ex^{2\eta}}{\phantom{g+fx^\eta+ex^{2\eta}}} \Big|^\lambda \cdot \frac{l+kx^\eta}{} \Big|^\mu \text{ si tria sunt}$$

nomina in vinculo radicis prioris ac duo in vinculo posterioris: & sic in aliis.

Et nota quod Areae duæ æquales in novissimis hisce duobus Corol-
lariis

lariis jacent ad contrarias partes Ordinatarum. Si Area in alterutra Curva adjacet Abscissæ, Area huic æqualis in altera Curva adjacet Abscissæ productæ.

COROL. VII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abscissam z definiatur per æquationem quamvis affectam hujus formæ,

$$y^{\alpha} . e + fy^{\eta} z^{\delta} + gy^{2\eta} z^{2\delta} + hy^{3\eta} z^{3\delta} + \&c. = z^{\beta} . k + ly^{\eta} z^{\delta} + my^{2\eta} z^{2\delta} + \&c.,$$

hæc Figura assumendo $s = \frac{\eta - \delta}{\eta}$, $x = \frac{1}{s} z^s$, & $\lambda = \frac{\eta - \delta}{\alpha\delta + \beta\eta}$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Abscissa x , ex data Ordinata v , determinatur per æquationem non affectam $\frac{1}{s} v^{\alpha\lambda} . e + fv^{\eta} + gv^{2\eta} + \&c. |^{\lambda}$.

$$k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} + \&c. |^{-\lambda} = x.$$

COROL. VIII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abscissam z definia-
tur per æquationem quamvis affectam hujus formæ,

$$y^{\alpha} . e + fy^{\eta} z^{\delta} + gy^{2\eta} z^{2\delta} + \&c. = z^{\beta} . k + ly^{\eta} z^{\delta} + my^{2\eta} z^{2\delta} + \&c.$$

$$+ z^{\gamma} . p + qy^{\eta} z^{\delta} + ry^{2\eta} z^{2\delta} + \&c.$$

hæc Figura assumendo $s = \frac{\eta - \delta}{\eta}$, $x = \frac{1}{s} z^s$, $\mu = \frac{\alpha\delta + \beta\eta}{\eta - \delta}$, $\nu = \frac{\alpha\delta + \gamma\eta}{\eta - \delta}$, mi-
grat in aliam sibi æqualem cujus Abscissa x ex data Ordinata v deter-

minatur per æquationem minus affectam $v^{\alpha} . e + fv^{\eta} + gv^{2\eta} + \&c.$

$$= s^{\mu} x^{\mu} . k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} + \&c.$$

$$+ s^{\nu} x^{\nu} . p + qv^{\eta} + rv^{2\eta} + \&c.$$

COROL. IX.

Curva omnis cujus Ordinata est

$$\pi z^{\theta-1} . ve + v + \eta fz^{\eta} + v + 2\eta gz^{2\eta} + \&c. . e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \&c. |^{\lambda-1}$$

in

in $a + b \cdot e z^\eta + f z^{\eta+1} + g z^{\eta+2} + \&c. |^\tau |^\omega$, si sit $\theta = \lambda \nu$, & assumantur
 $x = e z^\nu + f z^{\nu+1} + g z^{\nu+2} + \&c. |^\pi$, $\sigma = \frac{\tau}{\pi}$, & $\vartheta = \frac{\lambda - \pi}{\pi}$, migrat in aliam

sibi æqualem cujus Ordinata est $x^\vartheta \cdot a + b x^\sigma |^\omega$. Et nota quod Ordinata prior in hoc Corollario evadit simplicior ponendo $\lambda = 1$, vel ponendo $\tau = 1$, & efficiendo ut radix dignitatis extrahi possit cujus index est ω , vel etiam ponendo $\omega = -1$, & $\lambda = 1 = \tau = \sigma = \pi$, ut alios casus præteream.

COROL. X.

Pro

$e z^\nu + f z^{\nu+1} + g z^{\nu+2} + \&c. \vee e z^{\nu-1} + \nu + \eta f z^{\nu+1-\eta-1} + \nu + 2\eta g z^{\nu+2-\eta-1} + \&c.$
 $k + l z^\eta + m z^{2\eta} + \&c. \& \eta l z^{\eta-1} + 2\eta m z^{2\eta-1} + \&c.$ scribantur $R, r, S \& s$

respective, & Curva omnis cujus Ordinata est $\pi S r + \phi R s \cdot R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$.
 $a S^\tau + b R^\tau |^\omega$, si sit $\frac{\mu - \nu \omega}{\lambda} = \frac{\nu}{\tau} = \frac{\phi}{\pi}$, $\frac{\tau}{\pi} = \sigma$, $\frac{\lambda - \pi}{\pi} = \vartheta$, & $R^\pi S^\phi = x$,

migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $x^\vartheta \cdot a + b x^\sigma |^\omega$. Et nota, quod Ordinata prior evadit simplicior, ponendo unitates pro τ , ν , & λ vel μ , & faciendo ut radix dignitatis extrahi possit cujus index est ω , vel ponendo $\omega = -1$ vel $\mu = 0$:

PROP. X. PROB. III.

Invenire Figuras simplicissimas cum quibus Curva quævis Geometricæ comparari potest, cujus Ordinatum applicata y per æquationem non affectam ex data Abscissa z determinatur.

CAS. I.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}$, & Area erit $\frac{1}{\theta} az^\theta$, ut ex Prop. 5. ponendo $b = 0 = c = d = f = g = b$, & $e = 1$, facile colligitur.

CAS.

CAS. II.

Sit Ordinata $az^{\theta-1} . e \div fz^{\eta} \div gz^{2\eta} \div \&c. |^{\lambda-1}$, & si Curva cum Figuris rectilineis Geometrice comparari potest, quadrabitur per Prop. 5. ponendo $b = 0 = c = d$. Sin minus convertetur in aliam Curvam si-

bi æqualem, cujus Ordinata est $\frac{\alpha}{\eta} x^{\frac{\theta-\eta}{\eta}} . e \div fx \div gx^2 \div \&c. |^{\lambda-1}$ per

Corol. 2. Prop. 9. Deinde si de dignitatum indicibus $\frac{\theta-\eta}{\eta}$ & $\lambda - 1$ per Prop. 7. rejiciantur unitates, donec dignitates illæ fiant quam minimæ, devenietur ad Figuras simplicissimas quæ hac ratione colligi possunt. Dein harum unaquæque, per Corol. 5. Prop. 9. dat aliam, quæ nonnunquam simplicior est. Et ex his per Prop. 3. & Corol. 9. & 10. Prop. 9. inter se collatis, Figuræ adhuc simpliciores quandoque prodeunt. Denique ex Figuris simplicissimis assumptis facto regressu computabitur Area quæsitæ.

CAS. III.

Sit Ordinata $z^{\theta-1} . a \div bz^{\eta} \div cz^{2\eta} \div \&c. . e \div fz^{\eta} \div gz^{2\eta} \div \&c. |^{\lambda-1}$, & hæc Figura, si quadrari potest, quadrabitur per Prop. 5. Sin minus, distinguenda est Ordinata in partes $z^{\theta-1} . a . e \div fz^{\eta} \div gz^{2\eta} \div \&c. |^{\lambda-1}$, $z^{\theta-1} . bz^{\eta} . e \div fz^{\eta} \div gz^{2\eta} \div \&c. |^{\lambda-1}$, &c. & per Cas. 2. inveniendæ sunt Figuræ simplicissimæ, cum quibus Figuræ partibus illis respondentibus comparari possunt. Nam Areæ figurarum partibus illis respondentium sub signis suis $\div$ & $-$ conjunctæ component Aream totam quæsitam.

CAS. IV.

Sit Ordinata $z^{\theta-1} . a \div bz^{\eta} \div cz^{2\eta} \div \&c. . e \div fz^{\eta} \div gz^{2\eta} \div \&c. |^{\lambda-1}$ in $k \div lz^{\eta} \div mz^{2\eta} \div \&c. |^{\mu-1}$, & si Curva quadrari potest, quadrabitur per Prop. 6. Sin minus, convertetur in simpliciolem, per Corol. 4. Prop.

Prop. 9. ac deinde comparabitur cum Figuris simplicissimis, per Prop. 8. & Corol. 6, 9 & 10. Prop. 9. ut fit in Casu 2 & 3.

CAS. V.

Si Ordinata ex variis partibus constat, partes singulæ pro Ordinatis curvarum totidem habendæ sunt, & Curvæ illæ, quotquot quadrari possunt, sigillatim quadrandæ sunt, earumque Ordinatæ de Ordinata tota demendæ. Dein Curva, quam Ordinatæ pars residua designat seorsim, (ut in Casu 2, 3 & 4,) cum Figuris simplicissimis comparanda est, cum quibus comparari potest. Et summa Arearum omnium pro Area Curvæ propositæ habenda est.

COROL. I.

Hinc etiam Curva omnis, cujus Ordinata est radix quadratica affecta æquationis suæ, cum Figuris simplicissimis, seu rectilineis, seu curvilineis, comparari potest. Nam radix illa ex duabus partibus semper constat, quæ, seorsim spectatæ, non sunt æquationum radices affectæ.

Proponatur æquatio $axy^2 + z^2y^2 = 2a^3y + 2z^3y - z^4$, & extra-
cta radix erit $y = \frac{a^3 + z^3 + a\sqrt{a^4 + 2az^3 - z^4}}{aa + zz}$, cujus pars rationalis $\frac{a^3 + z^3}{aa + zz}$
& pars irrationalis $\frac{a\sqrt{a^4 + 2az^3 - z^4}}{aa + zz}$, sunt Ordinatæ curvarum, quæ per
hanc Propositionem vel quadrari possunt, vel cum Figuris simplicissimis comparari, cum quibus collationem Geometricam admittunt.

COROL. II.

Et Curva omnis, cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur, quæ, per Corol. 7. Prop. 9. in æquationem non affectam migrat, vel quadratur per hanc Propositionem, si quadrari potest, vel comparatur cum Figuris simplicissimis, cum quibus comparari potest. Et hac ratione Curva omnis quadratur, cujus æquatio est trium terminorum. Nam æquatio illa, si affecta sit, transmutatur in non affectam, per Corol. 7. Prop. 9. ac deinde per Corol.

rol. 2. & 5. Prop. 9. in simplicissimam migrando, dat vel quadraturam Figuræ, si quadrari potest, vel Curvam simplicissimam, quacum comparatur.

COROL. III.

Et Curva omnis, cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur, quæ per Corol. 8. Prop. 9. in æquationem quadraticam affectam migrat, vel quadratur per hanc Propositionem & hujus Corol. 1., si quadrari potest, vel comparatur cum Figuris simplicissimis, cum quibus collationem Geometricam admittit.

SCHOLIUM.

Ubi quadrandæ sunt Figuræ, ad Regulas hæc generales semper recurrere nimis molestum esset: præstat Figuras, quæ simpliciores sunt & magis usui esse possunt, semel quadrare, & quadraturas in Tabulam referre; deinde Tabulam consulere, quoties ejusmodi Curvam aliquam quadrare oportet. Hujus autem generis sunt Tabulæ duæ sequentes, in quibus z denotat Abscissam, y Ordinatam rectangulam, & t Aream Curvæ quadrandæ, & d, e, f, g, h, η sunt quantitates datæ cum signis suis $+$ & $-$.



TABULA

CURVARUM SIMPLICIORUM, QUÆ QUADRARI POSSUNT.

CURVARUM FORMÆ.		CURVARUM AREÆ.	
<i>Forma prima.</i> $dz^{\eta-1} = y$		$\frac{d}{\eta} z^{\eta} = t$	
<i>Forma secunda.</i> $\frac{dz^{\eta-1}}{ee + 2efz^{\eta} + ffz^{2\eta}} = y$		$\frac{dz^{\eta}}{nee + nefz^{\eta}} = t$, vel $\frac{-d}{nef + nffz^{\eta}} = t$	
1	<i>Forma tertia.</i> $dz^{\eta-1} \sqrt{e + fz^{\eta}} = y$	$\frac{2d}{3nf} R^3 = t$, existente $R = \sqrt{e + fz^{\eta}}$	
2	$dz^{2\eta-1} \sqrt{e + fz^{\eta}} = y$	$\frac{-4e + 6fz^{\eta}}{15nff} dR^3 = t$	
3	$dz^{3\eta-1} \sqrt{e + fz^{\eta}} = y$	$\frac{16ee - 24efz^{\eta} + 30ffz^{2\eta}}{105nf^3} dR^3 = t$	
4	$dz^{4\eta-1} \sqrt{e + fz^{\eta}} = y$	$\frac{-96e^3 + 144eefz^{\eta} - 180effz^{2\eta} + 210f^3z^{3\eta}}{945nf^4} dR^3 = t$	
1	<i>Forma quarta.</i> $\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e + fz^{\eta}}} = y$	$\frac{2d}{nf} R = t$	
2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e + fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-4e + 2fz^{\eta}}{3nff} dR = t$	
3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e + fz^{\eta}}} = y$	$\frac{16ee - 8efz^{\eta} + 6ffz^{2\eta}}{15nf^3} dR = t$	
4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e + fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-96e^3 + 48eefz^{\eta} - 36effz^{2\eta} + 30f^3z^{3\eta}}{105nf^4} dR = t$	

TABU.

TABULA

Curvarum simpliciorum quæ cum Ellipsi & Hyperbola comparari possunt.

Sit jam aGD , vel PGD , vel GDS , Sectio conica, cujus Area ad Quadraturam Curvæ propositæ requiritur, sitque ejus Centrum A ; Fig. 9. 12. II
 Axis Ka ; Vertex a ; Semiaxis conjugatus AP ; datum Abscissæ prin- 10
 cipium A , vel a , vel α ; Abscissa AB , vel aB , vel $\alpha B = x$; Ordi-
 nata rectangula $BD = u$; & Area $ABDP$, vel $aBDG$, vel αBDG
 $= f$; existente αG Ordinata ad Punctum α . Jungantur KD , AD ,
 aD . Ducatur Tangens DT occurrens Abscissæ AB in T , & com-
 pleatur Parallelogrammum $ABDO$. Et, si quando ad Quadraturam
 Curvæ propositæ requiruntur Areae duarum Sectionum conicarum,
 dicatur posterioris Abscissa ξ , Ordinata γ , & Area σ . Sit autem
 $\therefore$ differentia duarum Quantitatum, ubi incertum est utrum poste-
 rior de priori, an prior de posteriori subduci debeat.



CURVARUM FORMÆ.		SECTIONIS CONICÆ.		CURVARUM AREÆ.
Forma prima.		Abscissa.	Ordinata.	
Fig. 9.	1	$z^\eta = x$	$\frac{d}{e+fx} = u$	$\frac{1}{\eta} s - t = \frac{\alpha GDB}{\eta}$
	2	$z^{2\eta} = y$ $e + fz^\eta$	$\frac{d}{e+fx} = u$	$\frac{d}{\eta f} z^\eta - \frac{e}{\eta f} s - t$
	3	$z^{3\eta} = y$ $e + fz^\eta$	$\frac{d}{e+fx} = u$	$\frac{d}{2\eta f} z^{2\eta} - \frac{de}{\eta f f} s - t$
Forma secunda.				
Fig 11. 12.	1	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^\eta} = x}$ $d z^{\frac{1}{2}\eta} = y$ $e + fz^\eta$	$\sqrt{\frac{d}{f} \frac{e}{xx} = u}$	$\frac{2xu}{\eta} - \frac{4s}{\eta} t = \frac{4}{\eta} ADGa$
	2	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^\eta} = x}$ $d z^{\frac{3}{2}\eta} = y$ $e + fz^\eta$	$\sqrt{\frac{d}{f} \frac{e}{xx} = u}$	$\frac{2de}{\eta f} z^2 + \frac{4es - 2exu}{\eta f} = t$
	3	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^\eta} = x}$ $d z^{\frac{5}{2}\eta} = y$ $e + fz^\eta$	$\sqrt{\frac{d}{f} \frac{e}{xx} = u}$	$\frac{2de}{3\eta f} z^3 - \frac{2dee}{\eta f f} z^2 + \frac{2exu - 4ees}{\eta f} = t$

Forma tertia.

Forma tertia.

Fig. 10.1
11.
12.

$$\frac{d}{z} \sqrt{e+fz^\eta} = y$$

Vel sic

2

$$\frac{d}{z^{\eta+1}} \sqrt{e+fz^\eta} = y$$

Vel sic

3

$$\frac{d}{z^{2\eta+1}} \sqrt{e+fz^\eta} = y$$

4

$$\frac{d}{z^{3\eta+1}} \sqrt{e+fz^\eta} = y$$

Forma quarta.

Fig. 10.1
11.
12.

$$\frac{d}{z} \sqrt{e+fz^\eta} = y$$

Vel sic

2

$$\frac{d}{z^{\eta+1}} \sqrt{e+fz^\eta} = y$$

Vel sic

$\frac{1}{z} = xx$	$\sqrt{f+exx} = u$	$\frac{4de}{\eta f} \text{ in } \frac{v^3}{2ex} - s - t = \frac{4de}{\eta f} \text{ in } aGDT, \text{ vel in } APDB \div TDB$
$\frac{1}{z} = x$	$\sqrt{fx+exx} = u$	$\frac{8dee}{\eta ff} \text{ in } s - \frac{1}{2} xu - \frac{fu}{4e} - \frac{ffu}{4eex} - t = \frac{8dee}{\eta ff} \text{ in } aGDA + \frac{ffu}{4eex}$
$\frac{1}{z} = xx$	$\sqrt{f+exx} = u$	$-\frac{2d}{\eta} s - t = \frac{2d}{\eta} APDB, \text{ seu } \frac{2d}{\eta} aGDB$
$\frac{1}{z} = x$	$\sqrt{fx+exx} = u$	$\frac{4de}{\eta f} \text{ in } s - \frac{1}{2} xu - \frac{fu}{2e} - t = \frac{4de}{\eta f} \cdot aGDK$
$\frac{1}{z} = x$	$\sqrt{fx+exx} = u$	$-\frac{d}{\eta} s - t = \frac{d}{\eta} \text{ in } -aGDB, \text{ vel } BDPK$
$\frac{1}{z} = x$	$\sqrt{fx+exx} = u$	$\frac{3dfs}{6\eta e} = \frac{2du^3}{t}$

$\frac{1}{z} = xx$	$\sqrt{f+exx} = u$	$\frac{4d}{\eta f} \text{ in } \frac{1}{2} xu - s - t = \frac{4d}{\eta f} \text{ in } PAD, \text{ vel in } aGDA$
$\frac{1}{z} = x$	$\sqrt{fx+exx} = u$	$\frac{8de}{\eta ff} \text{ in } s - \frac{1}{2} xu - \frac{fu}{4e} - t = \frac{8de}{\eta ff} \text{ in } aGDA$
$\frac{1}{z} = xx$	$\sqrt{f+exx} = u$	$\frac{2d}{\eta e} \text{ in } s - xu - t = \frac{2d}{\eta e} \text{ in } POD, \text{ vel in } AODGa$
$\frac{1}{z} = x$	$\sqrt{fx+exx} = u$	$\frac{4d}{\eta f} \text{ in } \frac{1}{2} xu - s - t = \frac{4d}{\eta f} \text{ in } aDGa$

3	$\frac{d}{z^{2\eta} + 1} \sqrt{e + fz^\eta}$	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + exx} = u$	$\frac{d}{\eta e} \text{ in } 3s \div 2xu = t = \frac{d}{\eta e} \text{ in } 3aDGa \div \Delta aDB$
4	$\frac{d}{z^{3\eta} + 1} \sqrt{e + fz^\eta}$	$\frac{1}{z^\eta} = u$	$\sqrt{fx + exx} = u$	$\frac{10dfxu - 15dfs - 2dexxu}{6\eta ee} = t$
1	Forma quinta.			
	$\frac{d}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{g} + \frac{ff - 4eg}{g} \frac{xx}{xx} = u}$	$\frac{xu - 2s}{\eta} = t$
	Vel sic	$\sqrt{\frac{d}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{e} + \frac{ff - 4eg}{e} \frac{xx}{xx} = u}$	$\frac{2s - xu}{\eta} = t$
2	$\frac{d}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{g} + \frac{ff - 4eg}{g} \frac{xx}{xx} = u}$	$\frac{d\sigma + 2fs - fxu}{2\eta g} = t$
	Forma sexta, ubi scribitur p. pro $\sqrt{ff - 4eg}$.			
1	$\frac{d}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}} = y$	$\sqrt{\frac{2dg}{f - p + 2gz^\eta}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{g} + \frac{ff - 4eg}{g} \frac{xx}{xx} = u}$	$\frac{2xu - 4s - 2\zeta\gamma + 4\sigma}{\eta p} = t$
		$\sqrt{\frac{2dg}{f + p + 2gz^\eta}} = \zeta$	$\sqrt{\frac{d}{g} + \frac{ff - 4eg}{g} \frac{xx}{xx} = u}$	
2	$\frac{d}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}} = y$	$\sqrt{\frac{2dex^\eta}{fz^\eta - pz^\eta + 2e}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{g} + \frac{ff - 4eg}{g} \frac{xx}{xx} = u}$	$\frac{4s - 2xu - 4\sigma + 2\zeta\gamma}{\eta p} = t$
		$\sqrt{\frac{2dex^\eta}{fz^\eta + pz^\eta + 2e}} = \zeta$	$\sqrt{\frac{d}{g} + \frac{ff - 4eg}{g} \frac{xx}{xx} = u}$	

Forma septima.

Fig. 11.1
12.

$$\begin{array}{c}
 d \\
 \frac{d}{z} V_e + f_z^\eta + g_z^{2\eta} = y \\
 \left\{ \begin{array}{l} z^\eta = x \\ 1 \\ z^\eta = z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_e + f_x + g_{xx} = u \\ V_g + f_z + e_{zz} = r \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2dfgxv \\ +4degv \\ 4dee\zeta r + 2defr - 2f^2dv - 8deeo + 4dfgs \\ 4neg - nff \end{array} \\
 \hline
 2 \quad d_z^\eta - 1 V_e + f_z^\eta + g_z^{2\eta} = y \quad \left\{ \begin{array}{l} z^\eta = x \\ 1 \\ z^\eta = z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_e + f_x + g_{xx} = u \\ V_g + f_z + e_{zz} = r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{d}{s} - t = \frac{d}{\eta} \text{ in } \alpha GDB. \\ \frac{d}{3ng} - u^3 - \frac{df}{2ng} - s - t \end{array} \\
 \hline
 3 \quad d_z^{2\eta} - 1 V_e + f_z^\eta + g_z^{2\eta} = y \quad \left\{ \begin{array}{l} z^\eta = x \\ 1 \\ z^\eta = z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_e + f_x + g_{xx} = u \\ V_g + f_z + e_{zz} = r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{6dex}{24ngg} - 5df - \frac{5dff}{16ngg} - \frac{4deg}{16ngg} - s - t \end{array} \\
 \hline
 4 \quad d_z^{3\eta} - 1 V_e + f_z^\eta + g_z^{2\eta} = y \quad \left\{ \begin{array}{l} z^\eta = x \\ 1 \\ z^\eta = z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_e + f_x + g_{xx} = u \\ V_g + f_z + e_{zz} = r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{8dgs}{4neg - nff} - 2dfu - t = \frac{8dg}{4neg - nff} \text{ in } \alpha GDB + \Delta DBA \end{array}
 \end{array}$$

Forma Octava.

Fig. 10.1

$$\begin{array}{c}
 d_z^{\eta-1} \\
 V_e + f_z^\eta + g_z^{2\eta} = y \\
 \left\{ \begin{array}{l} z^\eta = x \\ 1 \\ z^\eta = z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_e + f_x + g_{xx} = u \\ V_g + f_z + e_{zz} = r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{8dgs}{4neg - nff} - 2dfu - t = \frac{8dg}{4neg - nff} \text{ in } \alpha GDB + \Delta DBA \end{array} \\
 \hline
 2 \quad d_z^{2\eta-1} \\
 V_e + f_z^\eta + g_z^{2\eta} = y \quad \left\{ \begin{array}{l} z^\eta = x \\ 1 \\ z^\eta = z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_e + f_x + g_{xx} = u \\ V_g + f_z + e_{zz} = r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{4dfs + 2dfxu + 4deu}{4neg - nff} - t \end{array} \\
 \hline
 3 \quad d_z^{3\eta-1} \\
 V_e + f_z^\eta + g_z^{2\eta} = y \quad \left\{ \begin{array}{l} z^\eta = x \\ 1 \\ z^\eta = z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_e + f_x + g_{xx} = u \\ V_g + f_z + e_{zz} = r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3dff - 2dff}{4deg + 4deg} - 2dfu - t \end{array} \\
 \hline
 4 \quad d_z^{4\eta-1} \\
 V_e + f_z^\eta + g_z^{2\eta} = y \quad \left\{ \begin{array}{l} z^\eta = x \\ 1 \\ z^\eta = z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_e + f_x + g_{xx} = u \\ V_g + f_z + e_{zz} = r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{36defg + 8deg_{xx} - 28defg_{xu} + 10deff_u}{-15deff_s - 2dffg + 10deff_u - 16deeg} - t \end{array}
 \end{array}$$

1	<i>Forma nona.</i>			
	$\frac{d_2^{\eta-1} \sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+bz^{\eta}}$	$\sqrt{\frac{d}{g+bz^{\eta}} = x}$	$\frac{df}{b} + \frac{eb-fg}{b} \frac{xx-u}{b}$	$\frac{4fg - 2fg}{-4eb + 2eb} \frac{xu + \frac{2dfu}{x}}{\eta fb}$
2	$\frac{d_2^{\eta-1} \sqrt{g+bz^{\eta}}}{g+bz^{\eta}}$	$\sqrt{\frac{d}{g+bz^{\eta}} = x}$	$\frac{df}{b} + \frac{eb-fg}{b} \frac{xx-u}{b}$	$\frac{4egb - 2egb}{-4fgg + 2fgg} \frac{xu + \frac{2db}{x^3} - 2dfg}{\eta fbb} \frac{u}{x}$
<i>Forma decima.</i>				
Fig. II. 12.	$\frac{d_2^{\eta-1}}{g+bz^{\eta} \sqrt{e+fz^{\eta}}}$	$\sqrt{\frac{d}{g+bz^{\eta}} = x}$	$\frac{df}{b} + \frac{eb-fg}{b} \frac{xx-u}{b}$	$\frac{2xu - 4s}{\eta f} \frac{-t}{\eta f} \frac{4}{\eta f} ADGa$
	$\frac{d_2^{\eta-1}}{g+bz^{\eta} \sqrt{e+fz^{\eta}}}$	$\sqrt{\frac{d}{g+bz^{\eta}} = x}$	$\frac{df}{b} + \frac{eb-fg}{b} \frac{xx-u}{b}$	$\frac{4gs - 2gxu + \frac{2du}{x}}{\eta fb} \frac{-t}{\eta fb}$
<i>Forma undecima.</i>				
1	$\frac{d_2^{\eta-1} \sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+bz^{\eta}}$	$\sqrt{\frac{d}{g+bz^{\eta}} = x}$	$\frac{df}{b} + \frac{eb-fg}{b} \frac{xx-u}{b}$	$\frac{dxu^3 - \eta}{\eta fb - \eta eb} \frac{-4dfs - 4deb}{\eta fb - \eta eb} \frac{-t}{\eta fb}$
2	$\frac{d_2^{\eta-1} \sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+bz^{\eta}}$	$\sqrt{\frac{d}{g+bz^{\eta}} = x}$	$\frac{df}{b} + \frac{eb-fg}{b} \frac{xx-u}{b}$	$\frac{2d}{\eta b} \frac{-s}{\eta b} \frac{-t}{\eta b}$
3	$\frac{d_2^{2\eta-1} \sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+bz^{\eta}}$	$\sqrt{\frac{d}{g+bz^{\eta}} = x}$	$\frac{df}{b} + \frac{eb-fg}{b} \frac{xx-u}{b}$	$\frac{dxu^3 - 3dfg}{2\eta fbb} \frac{-deb}{-deb} \frac{-t}{-t}$

In Tabulis hisce, series Curvarum cujusque formæ utrinque in infinitum continuari potest. Scilicet in Tabula prima, in numeratoribus Arearum formæ tertiæ & quartæ, numeri coefficientes initialium terminorum (2, — 4, 16, — 96, 868, &c.) generantur multiplicando numeros — 2, — 4, — 6, — 8, — 10, &c. in se continuo, & subsequentium terminorum coefficientes ex initialibus derivantur multiplicando ipsos gradatim, in Forma quidem tertia, per $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{4}$, $-\frac{7}{6}$, $-\frac{9}{8}$, $-\frac{11}{10}$, &c. in quarta vero per $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $-\frac{7}{8}$, $-\frac{9}{10}$, &c. Et Denominatorum coefficientes 2, 15, 105, &c. prodeunt multiplicando numeros 1, 3, 5, 7, 9, &c. in se continue.

In secunda vero Tabula, series Curvarum formæ primæ, secundæ, quintæ, sextæ, nonæ, & decimæ ope solius divisionis, & formæ reliquæ ope Propositionis tertiæ & quartæ, utrinque producuntur in infinitum.

Quinetiam hæ series mutando signum numeri n variari solent. Sic enim e. g. Curva $\frac{d}{z} \sqrt{e \div fz^n} = y$, evadit $\frac{d}{z^{\frac{1}{2}n} \div 1} \sqrt{e \div fz^n} = y$.

PROP. XI. THEOR. VIII.

Sit ADIC Curva quævis Abscissam habens $AB = z$, & Ordinatum $BD = y$, & sit AEKC Curva alia, cujus Ordinata BE æqualis est prioris areæ ADB ad unitatem applicatæ, & AFLC Curva tertia, cujus Ordinata BF æqualis est secundæ Areæ AEB ad unitatem applicatæ, & AGMC Curva quarta, cujus Ordinata BG æqualis est tertiæ areæ AFB ad unitatem applicatæ, & AHNC Curva quinta, cujus Ordinata BH æqualis est quartæ Areæ AGB ad unitatem applicatæ, & sic deinceps in infinitum. Et sunt A, B, C, D, E , &c. Areæ Curvarum Ordinatæ habentium y, zy, z^2y, z^3y, z^4y , &c. & Abscissam communem z .

Detur Abscissa quævis $AC = t$, sitque $BC = t - z = x$, & sumto P, Q, R, S, T Areæ Curvarum Ordinatæ habentium, y, xy, x^2y, x^3y, x^4y &c. & Abscissam communem x .

Terminentur autem hæ Areæ omnes ad Abscissam totam datam AC, nec non ad Ordinatum positione datam & infinite productam CI:

Et erit Arearum sub initio positarum

Prima ADIC = $A = P.$

Secunda AEKC = $tA - B = Q.$

Tertia AFLC = $\frac{t^2 A - 2tB + C}{2} = \frac{1}{2} R.$

Quarta AGMC = $\frac{t^3 A - 3t^2 B + 3tC - D}{6} = \frac{1}{6} S.$

Quinta AHNC = $\frac{t^4 A - 4t^3 B + 6t^2 C - 4tD + E}{24} = \frac{1}{24} T.$

COROL.

Unde si Curvæ quarum Ordinatæ sunt $y, zy, z^2 y, z^3 y, \&c.$ vel $y, xy, x^2 y, x^3 y, \&c.$ quadrari possunt, quadrabuntur etiam Curvæ ADIC, AEKC, AFLC, AGMC, &c. & habebuntur Ordinatæ BE, BF, BG, BH, Arcis Curvarum proportionales.

SCHOLIUM.

Quantitatum fluentium Fluxiones esse primas, secundas, tertias, quartas, aliasque diximus supra. Hæ Fluxiones sunt ut termini ferrierum infinitarum convergentium.

Ut si z^η sit quantitas fluens & fluendo evadat $z \div o |^\eta$, deinde resolvatur in seriem convergentem $z^\eta \div noz^{\eta-1} \div \frac{\eta\eta-\eta}{2} oo z^{\eta-2} \div \frac{\eta-3\eta\eta+2\eta}{6}$

$o^3 z^{\eta-3} \div \&c.$ terminus primus hujus seriei z^η erit quantitas illa fluens, secundus $noz^{\eta-1}$ erit ejus incrementum primum seu differentia prima cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio prima, tertius $\frac{\eta\eta-\eta}{6}$

$ooz^{\eta-2}$ erit ejus incrementum secundum seu differentia secunda, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio secunda, quartus $\frac{\eta-3\eta\eta+2\eta}{6}$

$o^3 z^{\eta-3}$ erit ejus incrementum tertium seu differentia tertia, cui nascenti Fluxio tertia proportionalis est, & sic deinceps in infinitum.

Exponi autem possunt hæ Eluxiones per Curvarum Ordinatas BD, BE, BF, BG, BH, &c.

Ut si Ordinata BE ($= \frac{ADB}{I}$) sit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BD.

Si BF ($= \frac{AEB}{I}$) sit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BE, & Fluxio secunda ut Ordinata BD. Si

Si $BH (= \frac{AGB}{I})$ sit quantitas fluens, erunt ejus Fluxiones prima, secunda, tertia & quarta, ut Ordinatae BG, BF, BE, BD respective.

Et hinc in æquationibus quæ quantitates tantum duas incognitas involvunt, quarum una est quantitas uniformiter fluens & altera est Fluxio quælibet quantitatis alterius fluentis, inveniri potest fluens illa altera per quadraturam Curvarum. Exponatur enim Fluxio ejus per Ordinam BD, & si hæc sit Fluxio prima, quærat Area ADB = BE . 1, si Fluxio secunda, quærat Area AEB = BF . 1, si Fluxio tertia, quærat Area AFB = BG . 1, &c. & Area inventa erit exponens fluentis quæsitæ.

Sed & in æquationibus quæ fluentem & ejus fluxionem primam sine altera fluente, vel duas ejusdem fluentis fluxiones, primam & secundam, vel secundam & tertiam, vel tertiam & quartam &c. sine alterutra fluente involvunt: inveniri possunt fluentes per quadraturam Curvarum. Sit æquatio $aa\dot{v} = av + vv$, existente $v = BE$, $\dot{v} = BD$, $z = AB$, & $\dot{z} = 1$, & æquatio illa complendo dimensiones Fluxionum, evadet $aa\dot{v} = av\dot{z} + vv\dot{z}$, seu $\frac{aa\dot{v}}{av + vv} = \dot{z}$.

Jam fluat v uniformiter, & sit ejus Fluxio $\dot{v} = 1$, & erit $\frac{aa}{av + vv} = \dot{z}$, & quadrando Curvam cujus Ordinata est $\frac{aa}{av + vv}$ & Abscissa v habebitur fluens z . Adhæc sit æquatio $aa\ddot{v} = a\dot{v} + \dot{v}\dot{v}$, existente $v = BF$, $\dot{v} = BE$, $\ddot{v} = BD$, & $z = AB$, & per relationem inter $\ddot{v}$ & $\dot{v}$ seu BD & BE invenietur relatio inter AB & BE, ut in exemplo superiore. Deinde per hanc relationem invenietur relatio inter AB & BF quadrando Curvam AEB.

Æquationes quæ tres incognitas quantitates involvunt aliquando reduci possunt ad æquationes quæ duas tantum involvunt, & in his casibus fluentes invenientur ex fluxionibus ut supra. Sit æquatio $a - bx^m = cxy^n + dy^{2^n}y$, ponatur $y^n y = v$, & erit $a - bx^m = cxv + dv\dot{v}$. Hæc æquatio quadrando Curvam cujus Abscissa est x & Ordinata $\dot{v}$ dat Aream v ; & æquatio altera $y^n y = v$, regrediendo ad fluentes, dat $\frac{1}{n+1} y^{n+1} = v$: Unde habetur fluens y .

Quinetiam in æquationibus, quæ tres incognitas involvunt, & ad æquationes quæ duas tantum involvunt, reduci non possunt, fluentes quandoque prodeunt per quadraturam Curvarum. Sit æquatio

$\sqrt[p]{ax^m + bx^n} = rex^{r-1}y^s + sex^t\dot{y}y^{e-1} - fyy^t$, existente $x = 1$; Et pars posterior $rex^{r-1}y^s + sex^t\dot{y}y^{e-1} - fyy^t$, regrediendo ad fluentes, fit $ex^ry^s - \frac{f}{t+1}y^{t+1}$, quæ proinde est ut Area Curvæ cujus Abscissa est x & Ordinata $\sqrt[p]{ax^m + bx^n}$, & inde datur fluens y .

Sit æquatio $x \cdot \sqrt[p]{ax^m + bx^n} = \frac{dyy^{n-1}}{\sqrt[e+fy^n]{}}$. Et fluens cujus Fluxio est $\frac{dyy^{n-1}}{\sqrt[e+fy^n]{}}$ erit ut Area Curvæ cujus Abscissa est y & Ordinata est $\sqrt[p]{ax^m + bx^n}$. Item fluens cujus Fluxio est $\frac{dyy^{n-1}}{\sqrt[e+fy^n]{}}$ erit ut Area Curvæ cujus

Abscissa est y & Ordinata $\frac{dy^{n-1}}{\sqrt[e+fy^n]{}}$, id est (per Casum 1. Formæ quartæ

Tab.I.) ut Area $\frac{2d}{nf} \sqrt[e+fy^n]{}$. Pono ergo $\frac{2d}{nf} \sqrt[e+fy^n]{}$ æqualem Area Curvæ

cujus Abscissa est x & Ordinata $\sqrt[p]{ax^m + bx^n}$, & hæcbitur fluens y .

Et nota quod fluens omnis, quæ ex Fluxione prima colligitur, augeri potest vel minui quantitate quavis non fluente. Quæ ex Fluxione secunda colligitur, augeri potest vel minui quantitate quavis cujus Fluxio secunda nulla est. Quæ ex fluxione tertia colligitur, augeri potest vel minui quantitate quavis cujus fluxio tertia nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate Conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, & cum Fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, Conclusio recte se habet: sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum Fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquantur. Nam & fluens pro lubitu assumi potest, & assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem Fluxioni propositæ, & terminos homologos inter se comparando.

Et his principiis via ad majora sternitur.

EXPLICATIONES

TRACTATUS ANTECEDENTIS

DE

Quadratura Curvarum.

PROP. I.

*Data æquatione quocunque Fluentes quantitates involvente
invenire fluxiones.*

Historiam quæstionis motæ de veritate Methodi Fluxionum, cuius principia hac propositione Newtoniana continentur, & quam alii contendunt falsis hypothesibus inniti, proindeque geometricam non esse, alii vero argumenta priorum solvendo, ostendere studuerunt ejus certitudinem, exponere, litesque has facere nostras, supersedeo. Viam Celeberrimi Domini Mac Laurini in hac re discutienda insequi utilius erit. Hic namque Mathematicus ad contentiones istas nihil attendendo, hujus methodi veritatem geometricam more veterum demonstrare aggressus est in excellenti suo opere, quod inscribitur *Treatise of Fluxions*, idque felici cum successu. Hanc Mac Laurini Demonstrationem apponere jam quidem locus esset, cum vero, ut nimis prolixa, efficeret opusculum hocce nostrum debitos limites excessurum fore, aliam potius breviorē certitudine & evidentia, nostro quidem judicio, illi Mac Laurini non cedentem, licet alia occasione ante hac a nobis publici juris factam, suggerendo, brevitati nobis propositæ magis consulatur. Hunc in finem ad id attendamus, quod Newtonus, hujus Methodi inventor, omnes quantitates tanquam motu genitas conceperit. Sic Linea motu puncti nascitur, eo major vel minor, quo majori vel minori velocitate & tempore punctum generans fertur. Simili modo concipere licet superficiem quamvis ex motu lineæ, crescentis vel decrescentis per motum puncti, nec non omne solidum ex motu superficiei oriri. Eodemque modo, si quantitates minuantur, fingitur id fieri per motum contrarium ei, quo generantur vel augentur. In genere autem, omnis quantitas, quatenus illa est augmentationis & diminutionis capax,

pax, concipi potest dato tempore secundum datam legem augeri & minui, hoc est aliqua velocitatis lege crescere vel decrescere. Hujusmodi quantitates crescentes vel decrescentes sunt illæ, quas Newtonus appellat *Fluentes*, velocitates autem quibus fluunt, earum *Fluxiones*, quæ quatenus finitæ sint magnitudines, etiam per quantitates quascunque ipsis proportionales exponi poterunt, & propterea per incrementa illa, quæ quævis quantitas capiet, si dato tempore cum velocitate illa uniformiter continuata flueret, hæc enim illis sunt proportionalia. Ponatur jam recta *Ee* (Fig. 3.) ad angulos rectos semper super rectam *AB* moveri, ea lege, ut sit sibi semper æqualis, & figura hoc modo genita erit parallelogrammum *Ab*. Sit *EF* spatium quod describitur cum velocitate puncti *E*, quam habet illo temporis momento, quo *Ee* est in situ *Ee*, dato tempore uniformiter continuata, & erit *EF* ut Fluxio baseos *AE*. Quoniam vero parallelogrammum *Ae* eandem semper habet altitudinem *Ee*, incrementa ejus vel decrementa solum orientur a velocitate, qua movetur recta *Ee*, & cum velocitas illa semper est æqualis velocitati puncti *E*, erit incrementum rectanguli *AE*, quod acquirit dato tempore cum ea velocitate uniformiter fluendo, qua fluit, dum *Ee* est in situ *Ee*, æquale spatio *EFfe*. Erit ergo rectangulum *EFfe* ut fluxio rectanguli *AE*. Ponatur ulterius recta *Ee* moveri super rectam *AB*, sit vero *Ee* non sibi semper æqualis ut prius, sed punctum *e* motu suo in recta *Ee* eam utcunque augeat vel minuat, eritque superficies genita vel triangulum *ABC* (Fig. 4.), si scilicet puncta *E* & *e* simul sint in *A*, ibique moveri incipiant, alias trapezium *EeCB*; vel figura curvilinea convexa ad axem, si punctum *e* feratur motu accelerato, dum *E* progreditur motu uniformi, & concava, si contra. Sit figura genita primum triangulum *ABC*, & crescat illa figura motu utcunque accelerato vel retardato lineæ *Ee*. Sit *EF* fluxio baseos *AE*, & cum fluxio trianguli *AEe* sit spatium, quod dato tempore cum velocitate, qua crescit triangulum *AEe*, uniformiter continuata, describitur, supponi poterit, si ordinata *Ee* motu sibi parallelo, & cum velocitate, quam habet punctum *E*, uniformiter continuata dato tempore, ei scilicet æquali, quo ab *E* describitur *EF* uniformiter, generet figuram aliquam, per spatium aliquod ab illa ordinata, producta si opus est ad *K*, descriptum, representari fluxionem trianguli *AEe*. Describat hujusmodi motu recta *EK* aream *EKLF*, & ordinata *Ee* aream *EeHF*. Dico primum, aream, quæ representabit fluxionem trianguli *AEe*, esse figuram parallelogrammiam: nam si *KL* non sit parallela ipsi *AB*, crescet area *EKLF*, quæ
jam

jam per supposita repræsentat fluxionem trianguli AEe , motu vel accelerato vel retardato continue, crescente EF motu uniformi. Area autem, quæ exponet fluxionem, motu uniformi fluere debet per antecedentia. Ergo. Ulterius dico latitudinem illius parallelogrammi esse EF , nam velocitas lineæ Ee ad partes AB æqualis est velocitati puncti E , adeoque linea EK & punctum E idem spatium EF eodem tempore dimetientur. Dico etiam altitudinem illius parallelogrammi non esse KE sed Ee , nam si non sit Ee , erit illa aut major aut minor. Sit primo major, æqualis scilicet ipsi EK , & per K ducatur KL ipsi AB parallela, & erit sic KF fluxio trianguli AEe . Interea autem dum EK describit rectangulum KN motu uniformi, trapezium $EeMN$ generabitur ab ordinata Ee motu continue accelerato, quia si EN dividatur in partes æquales, istæ æqualibus describentur temporibus, partes autem trapezii interea descriptæ eo majores sunt quo propiores sumantur ipsi MN , & propterea velocitas qua fluit figura $EeMN$ major est velocitate, qua fluit triangulum AEe , eo momento quo Ee est in situ Ee . Dum autem ordinata Ee movetur super AB , rectangulum KN semper majus est trapezio $EeMN$, usque dum ordinata pervenerit ad situm MN , & propterea eo usque rectangulum NK fluet cum majori velocitate quam trapezium $EeMN$, quod prius ostensum est fluere majori cum velocitate, quam triangulum AEe , majori igitur velocitate fluet rectangulum KN quam area AEe . Altitudo igitur rectanguli, quod exponet fluxionem trianguli AEe non erit major ipsa Ee . Sit jam minor ut DE , & ducta PD parallela ipsi AB , similiter ac prius, ostendetur jam rectangulum $EDPR$ minori fluere velocitate quam triangulum AEe . Altitudo igitur parallelogrammi, quod exponet fluxionem trianguli AEe , erit ipsa Ee . Figura igitur $eHFE$ est fluxio trianguli AEe . Sit jam locus puncti e non amplius linea recta, ut hactenus, sed curva quælibet. Et demonstrabitur eodem modo ac de triangulo, fluxionem figuræ curvilineæ esse productum ab ordinata in fluxionem abscissæ, quoniam independenter a triangulo cujus hypotenusa est linea recta id demonstratum est. Observandum tamen est, quando superiora applicantur ad figuras curvilineas, supponi, quocunque motu describantur, motum istum esse aut uniformem aut acceleratum aut retardatum continue, hoc est tempus quo tota generatur figura dividi posse in partes assignabiles, quarum quavis durante motus quo figura nascitur erit unus horum trium. Atque hoc obtinet etiam de omni quantitate per motum genita, nam si quovis momento temporis, novum velocitatis incrementum vel de-

crementum datum caperet motus, quo quantitas fluit, tempore assignabili generaretur velocitas omni assignabili major vel minor, quali motu nulla fluit quantitas. Super AB moveatur ulterius Ee a B ad A ita ut triangulum AEe hoc motu semper decrescat, & ultimo evanescat, & modo priori inverso ostendetur rectangulum eF representare fluxionem trianguli AEe . Idem etiam facile inde colligitur, quod, si ponatur Ee , dum triangulum AEe generatur, eadem semper velocitate ferri in eodem puncto E super basi AB ac jam dum decrescit triangulum AEe , manifestum sit, fluxionem ejusdem trianguli decrescientis eadem velocitate ac crescentis, esse eandem, hoc est, esse rectangulum eF . Quaecunque igitur est figura fluens per motum ordinatæ super abscissam genita, ejus fluxio semper exponetur per rectangulum, quod fit ducendo fluxionem abscissæ in ordinatam. Ex his sequentia deducuntur confectaria.

1:0 Moveatur recta Ee (Fig. 5.) ut prius ad angulos rectos super rectam AB motu quocunque, & similiter recta Me super rectam AD , sitque locus puncti e curva vel recta quævis AeH , & hujusmodi motu generabitur rectangulum $AEeM$. Sit jam fluxio lineæ AE ipsa EF , lineæ vero AM ipsa MN , eritque fluxio rectanguli $AEeM$ æqualis ipsi $AM \cdot EF + AE \cdot MN$. Rectangulum enim genitum semper æquale est summæ arearum AeE & AeM , & ob id fluxio rectanguli æqualis fluxionibus harum arearum simul sumtis.

2:0 Si AE semper est æqualis ipsi AM , erit EF æqualis ipsi MN , & ob id fluxio quadrati ME æqualis $2AE \cdot MN$.

3:0 Et quoniam fluxio rectanguli cujusvis est summa vel differentia rectangulorum supra dictorum, patet fluxionem secundam rectanguli, seu fluxionem horum rectangulorum, quorum summa præbet fluxionem primam, exponi per summam rectangulorum, quæ fiunt ducendo fluxionem fluxionis lateris unius in latus alterum, & fluxionem utriusque lateris in se invicem, in utroque rectangulo.

4:0 Usus erat Newtonus literis punctatis pro earum fluxionibus, sic $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, denotant fluxionem primam, secundam, tertiam, quantitatis x . Notionem vero hætenus expositam quantitatum fluentium & fluxionum retinendo, litera d quantitibus fluentibus præfixa nobis exprimat earum fluxiones, ita ut sit dx fluxio ipsius x , & sic porro.

ro. Hisce positis patet ipsius $a \div x$ fluxionem esse dx , quantitas enim constans nulla fuit velocitate. Dum quantitas fluens x multiplicatur per aliam a constantem, ita ut quantitas fluens sit ax , seu rectangulum ex constanti a in variabilem x , fluxio illius rectanguli erit per superius ostensa æqualis ipsi adx .

5:o Sit jam quantitatis xy fluxio sumenda. Et quia xy rectangulum designat, cujus latera sunt x & y , ipsarum vero x & y fluxiones sint dx & dy , erit per Cor. I. $ydx \div xdy$ fluxio quantitatis xy . Simili ratiocinio ac adhibitum est in Corollario I., ostenditur $xdy - ydx$ esse fluxionem rectanguli xy , si crescente y decrescit x . In algorithmo tamen fluxionum convenientius est, fluentes semper tanquam crescentes spectare, ut fluxiones semper sumi possint positive, quæ ratione fluxiones quantitatum decrescientium negativos habebunt valores, etiam si signo afficiantur affirmativo. Si $x = y$ erit $2ydy$, vel $2x dx$ fluxio quadrati xy vel xx . Si quantitas constans multiplicet vel dividat quantitatem xy vel xx fluxio erit eadem ac alias ducta in illam quantitatem constantem vel divisa per illam. art. 4.

6:o Sit ulterius quantitatis x^3 fluxio sumenda, & ponatur $x^3 = xz$, unde $d. x^3 = xdz \div zdx$, nec non $dz = 2x dx$, hinc substituendo hos valores, erit $d. x^3 = 2x^2 dx \div x^2 dx = 3x^2 dx$. Similiter ponendo $x^3 = z$, & $x^4 = xz$, invenitur esse $d. x^4 = 4x^3 dx$. Et universaliter diff. $x^m = mx^{m-1} dx$, ubi m est numerus positivus integer, sicut regula Newtoni pro solutione hujus problematis indicat.

7:o Fluxio quantitatis $x^{\frac{n}{m}}$ jam sit sumenda, & ponatur $x^{\frac{n}{m}} = z$, unde $x^n = z^m$, & $nx^{n-1} dx = mz^{m-1} dz$, seu $dz = \frac{nx^{\frac{n}{m}-1} dx}{m}$.

Unde patet regulam Newtonianam iterum obtinere.

8:o Fluxio quantitatis xyz capiatur. Et ponendo $yz = t$, erit $xyz = xt$ & diff. $xyz = xdt \div tdx$, nec non $ydz \div zdy = dt$, substitutiones sic debitas faciendo habetur diff. $xyz = xydz \div xzdy \div yzdx$. Similiter invenitur diff. $xyzt = xyzdt \div xytdz \div xztdy \div yztdx$. Hinc si $x = z$, & $y = t$, habebitur $xyzt = x^2 y^2$, & ob id diff. $x^2 y^2 = 2y^2 x dx \div 2x^2 y dy$. Modo eodem invenitur diff. $x^3 y^3 = 3x^3 y^2 dy \div 3y^3 x^2 dx$. Et similiter ostendetur, si m, n, p , sint numeri quicun-

que dati, esse $d. x^n y^m z^p = n y^m z^p x^{n-1} dx + m x^n z^p y^{m-1} dy + p y^m x^n z^{p-1} dz$. nec non $dx^{\frac{n}{m}} y^p = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} y^p dx + \frac{p}{y^p} x^{\frac{n}{m}} dy$,
ponendo scilicet $y^p = z$ & $x^{\frac{n}{m}} = t$, & proinde regulam Newtonianam
etiam heic obtinere.

9:0 Sit præterea fluxio quantitatis $\frac{1}{x^n}$ sumenda, & ponendo $\frac{1}{x^n} = z^m$ & sumendo fluxiones hujus æquationis, & reducendo invenietur
 $d. \frac{1}{x^n} = -\frac{ndx}{x^{n+1}}$, seu $d. x^{-n} = -n x^{-n-1} dx$. secundum regulam
superius dictam. Ex his & superioribus constat fluxionem quantitatis
 $\frac{1}{x^{\frac{n}{m}} z^{\frac{p}{m}}}$ esse $-\frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} z^{\frac{p}{m}} dx - \frac{p}{m} z^{\frac{p}{m}-1} x^{\frac{n}{m}} dz$.

Et modo consimili ostenditur, si fluxio sumenda sit quantitatis
 $\frac{a}{x^{\frac{m}{n}} z^{\frac{p}{r}} y^{\frac{k}{n}}}$, illam secundum eandem regulam sumi. Data igitur
æquatione quotcunque Fluentes quantitates involvente inveniuntur
ejus fluxiones secundum solutionem Newtonianam.

SCHOLIUM

Regulam Newtoni pro inveniendis fluxionibus, ex principiis suis geometricis in iis quæ hætenus dicta sunt, ostendisse propositum erat. Prius autem quam ulterius progredior, conveniens erit modum Auctoris hanc suam solutionem explicandi, etiam exponere, ut pateat methodum ab ipso Auctore propositam neque minus geometricam esse. Ex iis, quæ initio dicta sunt colligitur, Newtonum per fluxiones intelligere velocitates, quibus fluentes quovis momento crescere vel decrescere incipiunt, nulla autem incrementa & decrementa vel finita vel infinite parva, qualia non existunt. Harum autem fluxionum relationem per momenta, quæ illi significant incrementa nascentia & evanescencia nullius magnitudinis, momentorumque illorum rationes demonstrat. Hæc colliguntur ex iis quæ in ejus scriptis de
hac

hac Methodo passim occurrunt, ut si conferantur ea quæ habet Lem. 2. Libr. 2. Princ. Philosophiæ Nat. cum iis quæ continet introductio in Tractatum præcedentem. Ut vero hæc melius intelligantur observandum est, Newtonum per limitem rationis, intelligere rationem, ad quam ratio duarum quantitatum dato tempore fluentium propius durante illo tempore accedit, quam pro data quavis differentia, ut-cunque parva illa sumatur. Igitur si determinari possit hujusmodi limes, finito illo tempore seu accurate loquendo eo ipso momento quo terminatur tempus, quo fluere ponuntur quantitates, erunt quantitates in illa ratione. Hoc ipsum lemmate I. Libr. I. Princ. Phil. Nat. sic exponit Newtonus. *Nam si negas, sit differentia illa D , ergo non propius ad se invicem accedere possunt, (quantitates vel quantitatum rationes) quam pro data differentia D , contra hypotbesin.* Et cum incrementa quantitatum, dato tempore motu uniformi genita, sint mensuræ velocitatum, quibus hæc incrementa nascuntur, unde rationes incrementorum, dum iterum decrescere & ultimo evanescere ponuntur, ad rationes velocitatum, quibus eodem temporis momento quantitates ipsæ fluere incipiunt, propius accedant quam pro data differentia quavis, propterea quod velocitas, qua decrescit incrementum, ad æqualitatem cum velocitate, qua crescere incipit, propius quam pro data differentia accedat, atque id propterea quod velocitates, quibus nascuntur quantitates, dato quovis tempore ut-cunque parvo continue aut retardentur aut accelerentur, si non sint uniformes; sequitur rationem ultimam incrementorum evanescentium eandem esse cum ratione velocitatum quibus incrementa illa nasci incipiunt. Fluat jam quantitas x , & sit o quantitas quædam ducta in dx , quæ dx denotet quantitatem ejus conditionis, ut odx semper sit æqualis incremento ipsius x , minuatur jam o semper, & incrementum quantitatis x , quod semper est odx semper minuetur, & quoniam odx semper est ut dx , relatione scilicet habita ad rationes quibus plures quantitates fluunt, & quarum incrementa communem habent factorem o , erit illa ratio quam habet dx eo momento, quo o evanescit, hoc est quando incrementum ipsius x evanescit, ratio ultima illius incrementi, adeoque per antecedentia dx tum erit fluxionis ipsius x exponens. Proponatur jam æquatio quævis quantitates fluentes x, y, z , involvens, ea scilicet Auctoris $x^3 - xyy + aaz - b^3 = 0$. Substituendo jam $x \div odx, y \div ody, z \div odz$, pro x, y, z , respectively in hac æquatione, & subducendo æquationem priorem a hac, habebitur residua æquatio prioris incrementum. Dividendo hoc incrementum per o , cum omnes ejus termini habeant o communem

factorem, erit æquatio illa adhuc incrementum prioris. Minuatur deinde o in infinitum ea ratione ut dx , dy , dz , semper eos habeant valores, ut odx , ody , odz , sint interea dum o minuitur semper incrementa ipsarum x , y , z , contemporanea, & hoc modo minuatur o in infinitum, & ob id omnes termini adhuc ducti in o evanescent. Evanescant igitur hi termini & fiant nihilo æquales, & propterea æquatio residua jam ejus erit conditionis, ut exponat rationem fluxionis æquationis propositæ, & quæ post has operationes fiet hæc $3x^2 dx - 2xy dy - yy dx + aadz = 0$, sicut auctor indicat. Fusius circa explicationem problematis pro inveniendis fluxionibus fluentium occupati fuimus. Verum eos præter, qui methodum fluxionem labefactare studuerunt, dictitando eam minime esse Geometricam, alii etiam sunt, qui, contenti principiis Leibnitianis, assumendo quantitates infinite parvas in Geometriam, quod non licet, nihilo tamen minus sunt hujus calculi cultores. Utriusque horum causæ explicationes præcedentes adferre in animum induximus, tum ut contra prioris methodi Fluxionum veritatem vindicemus, tum ut posteriores melius de hujus methodi natura instruantur.

Hiscæ jam expositis, ea, quæ continet ipsa introductio Newtoni in Tractatum de quadratura curvarum, etiam facile intelliguntur, ita ut brevitati studentes ejus ulteriorem explicationem omitemus.

PROPOSITIO II.

Invenire curvas quæ quadrari possunt.

Sensus propositionis est ex data area alicujus curvæ invenire ipsam, seu æquationem relationem coordinatarum curvæ exprimentem. Detur exempli gratia æquatio $x\sqrt{ax} = v$ exprimens relationem arearum $x\sqrt{ax}$ & v , & invenienda est curva cujus area $x\sqrt{ax}$. Quærantur fluxiones hujus æquationis per Prop. I, scil. $\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} dx = dv$, scribatur jam unitas seu BD pro dx , quoniam abscissa fluere supponi poterit cum motu uniformi, & proinde exponi per quantitatem quamvis constantem, valor itaque ipsius dv seu $\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$, posita $dx = 1$, erit valor ordinatæ curvæ quærendæ, habetur ergo $\frac{9}{4} xa = dv^2$ æquatio ad parabolam. Ut vero notationem magis receptam in sequentibus adhibeamus, ponamus ordinatam curvæ semper designari per y , & abscissam

scissam per z , eritque ydz per ea quæ prius dicta sunt fluxio areæ, $sydz$ vero fluens ipsa illius fluxionis, seu ejus summa vel integrale, adhibitis his designandi modis, retenta autem notione fluxionum prius exposita. Hoc modo habetur in exemplo antecedenti $x\sqrt{ax} = \int ydx$, & ob id $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}dx = ydx$, fluxiones scilicet hujus æquationis sumendo, seu eam differentiando, quibus expressionibus etiam perinde utor in sequentibus, atque hinc $\frac{9}{4}ax = y^2$, ut prius.

PROP. III.

Si pro abscissa AB & area AD, seu AB.I, promiscue scribatur z, &c.

Demonstratio auctoris nullius est difficultatis, ergo illi describendæ non immoror. Continet præterea hæc propositio exemplum ad propositionem præcedentem, cujus sensus prius expositus est.

PROP. IV.

Si curvæ abscissa sit z, & si pro $e \div fz^n \div gz^{2n}$ &c. scribatur R, &c.

De demonstratione hujus propositionis observandum est idem ac de propositionis proxime antecedentis demonstratione.

PROP. V.

Si curvæ abscissa AB sit z, & pro $e \div fz^n \div gz^{2n} \div bz^{3n}$ &c. scribatur R, &c.

Neque hæc propositio ejusque demonstratio alicujus est difficultatis. Unicum quod ad ulteriorem explicationem addi posset, est, quod Newtonus in hac demonstratione utatur principio sequenti. Si plures sint curvæ AC & AD (Fig. 6.), quarum communis est abscissa AB, ordinatæ autem utcunque inæquales BD & BC, area curvæ, cujus ordinata semper æquatur summæ harum ordinatarum, & cujus abscissa eadem ac earum, erit æqualis summæ harum arearum. Sit enim $BE = BD \div BC$, ergo $DE = BC$, & $de = bc$. Evanescente igitur Bb ratio ultima ipsius De figuræ ad figuram Bc erit æqualitatis. Area- rum ergo ADE & ABC fluxiones sunt semper æquales, & coeun-
tibus

tibus punctis B & A areae illae simul evanescunt, ergo ipsae areae sunt aequales. Ergo area $ABE = ABC + ABD$. Annotationes autem Newtoni ad hanc Propositionem figillatim considerandae sunt. Quarum est

1:a *Quod ordinata omnis duobus modis in seriem resolvitur, nam index η vel affirmativus esse potest vel negativus.*

Antequam ex ordinata qualibet ad aream curvae cujus ista est ordinata perveniri potest, oportet illam ordinatam in suos factores resolvere, ut comparari queat cum ordinata $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$.

$a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} + \&c.$ cujus area ab auctore exhibita est. Tum vero comparari potest, quando reducitur ad eandem formam cum hac ordinata generali, & hoc ipsum Newtono significat ordinatam in seriem resolvere. Id autem duplici modo fieri posse observat Newtonus, primo, dum index η est affirmativus, secundo, dum est negativus, & utrumvis in qualibet ordinata obtinet. Proponatur ordinata

$\frac{3k - lzz}{zz \sqrt{kz - lz^3 + mz^4}}$. Hæc sic in seriem resolvitur $z^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{3k - lzz}{zz \sqrt{kz - lz^3 + mz^4}}$.

$k - lz^2 + mz^3$ $z^{-\frac{1}{2}}$. In qua index $\eta = 1$ positivus est. Eadem ordinata sic etiam in seriem resolvitur. Est scil. $\frac{3k - lzz}{zz \sqrt{kz - lz^3 + mz^4}}$

$$= \frac{3kz^{-2} - l}{z^4} \cdot \frac{kz - lz^3 + mz^4}{z^4} z^{-\frac{1}{2}} \cdot z^{-2} = z^{-2} \cdot \frac{3kz^{-2} - l}{z^4}.$$

$m - lz^{-1} + kz^{-3}$ $z^{-\frac{1}{2}}$. In qua index $\eta = -1$ est negativus. Et similiter ordinata omnis hoc duplici modo in seriem resolvitur. Tentandum esse dicit Newtonus casum utrumque, et, si serierum alterutra ob terminos tandem deficientes, abrumpitur, habebitur area curvae in terminis finitis. Si unus casus tantummodo tentetur, & comparatio terminorum instituat, inveniaturque area in terminis in infinitum continuandis, non propterea concludi debet, aream curvae cujus ordinata erat comparanda cum ordinata generali, non esse absolute quadrabilem, quia si alter casus tentetur fieri potest, ut area absolute inveniatur, sicut in exemplo auctoris. Interdum vero neutra series abrumpitur, & hoc indicium est aream curvae absolute exhiberi non posse. Aream $= 2 \sqrt{\frac{k - lzz + mz^3}{z^3}}$, quæ est area curvae cujus

ordi-

ordinata est illa antecedens, adjacere abscissæ ultra ordinatam productæ indicat Newtonus, quod etiam de omni area negativa intelligendum esse asserit, omnem autem affirmativam adjacere tum abscissæ tum ordinatæ. Quia enim area curvæ est negativa, erit ejus fluxio etiam negativa, adeoque valor areæ negativus nullam aliam exhibere potest aream, quam cujus fluxio est negativa. Crescente autem abscissa, nulla alia portio areæ curvæ per motum ordinatæ genitæ fluxionem habet negativam, quam quæ per hunc motum decrescit, hoc est illa quæ adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ. Hinc constat propositum. Utravis autem harum arearum curvæ, vel ea, quæ adjacet tum abscissæ tum ordinatæ, vel quæ adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ inveniatur, sufficit ad exhibendas quaslibet portiones areæ, ut attendenti constabit. Pergit Newtonus. *At si curva talem quadraturam non admittit, series utraque continuabitur in infinitum, & earum alterutra converget, & aream dabit approxi-*

mando, præterquam ubi &c. Si $\frac{z^\eta}{e}$ minor est unitate & index η af-

firmativus, decrescet $\frac{z^\eta}{e}$ in tanta ratione ad altiores dignitates sem-

per exurgendo, nisi $f, g, h, \&c.$ admodum magni sint, ut reliqui termini cujusque coefficientes seriei infinitæ, (licet denominatores reliquorum horum coefficientium semper deficient a numeratoribus,) in illas $\frac{z^\eta}{e}$ ad suas potestates successivas evectas ductæ producant ter-

minos prioribus semper minores, dum series debite continuatur; & sic series converget. Si $\frac{z^\eta}{e}$ major est unitate erit $\frac{z^{-\eta}}{e}$ minor unitate,

& propterea ob eandem rationem ac prius series converget, dum index η est negativus, ita ut si una series non convergat, altera convergat. Si vero r sit vel nihil vel numerus negativus integer, area prodit infinita ut seriei naturam consideranti patet. Si $\frac{z^\eta}{e}$ sit unitas,

scribenda est unitas pro quavis potestate ipsius $\frac{z^\eta}{e}$, & sic convergen-

tia vel non convergentia dependet a coefficientibus reliquis. Si con-

visore, ita ut qui restat sit quadratum $\sqrt{1+x \cdot x^2} \cdot \sqrt{1+x \cdot x^2}$. Est ita-

$\sqrt{1+x \cdot x^2} \cdot \sqrt{1+x \cdot x^2} = \sqrt{1+x \cdot x^2}^2 = R^{-\lambda}$, & $\sqrt{1+x \cdot x^2} \cdot \sqrt{1+x \cdot x^2} \cdot \sqrt{1+x \cdot x^2}$
 $= \sqrt{1+x \cdot x^2}^3 = R^{-\lambda+1}$, unde $\sqrt{1+x \cdot x^2} = R^{\lambda-1}$, & propterea
 ordinata $\frac{2+3x}{x^5+3x^6+3x^7+x^8} = x^{-5} \frac{2+3x}{1+x} = x^{-5} \frac{2+3x}{1+x}^{\frac{1}{3}}$, quod explicat ex-
 ceptionem Newtoni in hac nota de quadrato cubo &c., dum ejus la-
 tus ponendum est pro R , & potestatis index negative sumtus pro λ ,
 & idem index unitate diminutus pro $\lambda-1$.

4:ta. Si denique ordinata est fractio irreducibilis, & cujus denomi-
 natur &c.

Ut si ordinata sit $\frac{3q^5 - q^4x + 9q^3x^2 - qqx^3 - 6qx^4}{qq - xx \cdot q^3 + qqx - qxx - x^3}^{\frac{1}{3}}$, erit in hac $qq - xx$
 $= Q$, & $q^3 + qqx - qxx - x^3 = R^\pi$, & $\pi = \frac{1}{3}$, factoris surdi divi-
 fores omnes primi sunt $q+x$, $q-x$, $q-x$, per unum igitur ho-
 rum divisorum, scilicet $q+x$, omissis seu rejectis duobus $q+x$,
 $q-x$, quorum unus est magnitudinis cujusque lateris factoris divi-
 dentis, multiplicandus est $qq - xx = Q$, & totus numerator, ut va-
 lor ordinatæ maneat, & fiet $\frac{q+x \cdot 3q^5 - q^4x + 9q^3x^2 - q^2x^3 - 6qx^4}{q^3 + qqx - qxx - x^3 \cdot q^3 + qqx - qxx - x^3}^{\frac{1}{3}}$
 $= \frac{3q^6 + 2q^5x + 8q^4x^2 - 8q^3x^3 - 7q^2x^4 - 6qx^5}{q^3 + qqx - qxx - x^3}^{\frac{1}{3}}$. In hac jam factor ratio-
 nalis $Q = qq - xx = q+x \cdot q-x$ ductus in $q+x$ evadit æqualis lateri
 factoris surdi R^π , & index factoris rationalis jam factus est $1 = m$, &
 si fuisset Q ductus in $q+x$ quadratum lateris R^π , fuisset $m = 2$, si
 cubus, $m = 3$ &c. adeoque erit ordinata proposita, dicendo numera-
 torem ejus P , æqualis ipsi $\frac{P}{Q \cdot R^\pi} = \frac{3q^6 + 2q^5x + 8q^4x^2 + 8q^3x^3 - 7q^2x^4 - 6qx^5}{q^3 + qqx + qxx - x^3}^{\frac{1}{3}}$ unde $\lambda - 1$
 $= -\pi - m = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$.

PROP. VI.

Si curvæ abscissa AB sit z , & scribatur R pro $e + fz^n + gz^{2n} + bz^{3n} + \text{etc.}$ & S pro $k + lz^n + mz^{2n} + \text{etc.}$ Sit autem ordinatim applicata $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} \text{ etc.}$

Quoniam hæc propositio eodem modo deducitur a propositione 4 ac propositio 5:ta antecedens a 3:ta adeoque nullam pariat difficultatem, brevitati studens hujus ulteriorem explicationem omitto.

PROP. VII.

Si pro $e + fz^n + gz^{2n} + \text{etc.}$ scribatur R ut supra, & in curvæ aliqujus ordinata $z^{\theta+\eta\sigma} R^{\lambda+\tau}$ maneant quantitates at $\theta, \eta, \lambda, e, f, g, \text{etc.}$ & pro σ & τ scribantur successive numeri quicunque integri & c.

Hanc propositionem auctor demonstrat singulos casus figillatim considerando. Sunt autem casus tres, scil. 1. dum index ipsius z augetur vel minuitur perpetua additione vel subductione ipsius η , quod fit scribendo pro σ numeros quoscunque integros. 2. Dum index ipsius R augetur vel minuitur perpetua additione vel subductione unitatis, quod fit pro τ scribendo numeros quoscunque integros. 3. Dum uterque hic casus conjungitur; quibus quartum subjungit casum, qui est, quando R est quadrinomium vel multinomium, considerato scil. R in tribus prioribus ut trinomio. Hos singulos casus ita exponemus, ut demonstrationem auctoris adhibendo, eruantur progressionesserierum in quovis casu, quo ipso series in infinitum continuari poterunt, quæ erunt instar formularum, quibuscum ordinatæ curvarum quarumvis comparari queant.

CASUS I.

Dum index ipsius z augetur vel diminuitur continua additione vel subductione ipsius η .

Sint areæ $pA = \int p z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz$, & $qB = \int q z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz$ datæ, ubi R est trinomium æquale ipsi $e + fz^n + gz^{2n}$, & ex his areis datis dabitur area $C = \int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} dz$. Nam per Prop. 3 est $z^{\theta} R^{\lambda} = \int$

$$\begin{aligned}
&= \int \overline{\theta e + \theta + \lambda \eta . fz^{\eta} + \theta + 2\lambda \eta . gz^{2\eta}} . \text{ in } z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz, \text{ ergo } z^{\theta} R^{\lambda} \\
&- pA - qB = \int \overline{\theta e + \theta + \lambda \eta . fz^{\eta} + \theta + 2\lambda \eta . gz^{2\eta}} . z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz - \\
&\int p z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz - \int q z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz = \\
&= \int \overline{\theta e - p}^{\theta + \lambda \eta} . \overline{f - q}^{\eta + 2\lambda \eta} . z^{\eta + \theta} . gz^{2\eta} . z^{\theta-1} R^{\lambda-1} . dz \text{ Ponatur jam} \\
&\theta e = p, \text{ \& } \overline{\theta + \lambda \eta . f} = q \text{ cum } p \text{ \& } q \text{ sint arbitrarie assumptae hoc modo} \\
&\text{determinandae, \& fiet } \int \overline{\theta + 2\lambda \eta . gz^{2\eta}} . z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz = \underline{z^{\theta} R^{\lambda} - \theta e A} \\
&- \theta f B - \lambda \eta f B, \text{ vel dividendo totam aequationem per } \overline{\theta + 2\lambda \eta . g}, \text{ \&} \\
&\text{erit } \int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} dz = C = \frac{z^{\theta} R^{\lambda} - \theta e A - \overline{\theta + \lambda \eta . f} B}{\overline{\theta + 2\lambda \eta . g}}. \text{ Hinc da-} \\
&\text{tis arcis } A \text{ \& } B \text{ dabitur } C.
\end{aligned}$$

Jam ut eruatur series pro determinandis arcis in infinitum ex dua-
bus datis si R sit trinomium, ex tribus datis si R sit quadrimomium &c.
assumatur aequatio superior $\overline{\theta + 2\lambda \eta . fgz^{2\eta}} . z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz = \underline{z^{\theta} R^{\lambda}}$
 $- \theta e A - \overline{\theta + \lambda \eta . f} B$, quae dividatur per η & fiet $\frac{\theta}{\eta} + 2\lambda . fgz^{\theta+2\eta-1}$.

$$\begin{aligned}
dz &= \frac{1}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda} = \frac{\theta}{\eta} eA - \frac{\theta}{\eta} + \lambda . fB. \text{ Sit jam juxta propositionem 5,} \\
\frac{\theta}{\eta} &= r, r + \lambda = s, s + \lambda = t, \text{ \&c. \& fiet } tg . \int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} dz = \\
\frac{1}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda} &- reA - sfB, \text{ seu } \frac{1}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda} = re . \int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz + sf . \\
&\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz + tg . \int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} dz. \text{ Positis nempe valori-} \\
&\text{bus ipsarum } A \text{ \& } B \text{ earum loco, \& scribendo deinde } \theta, \theta + \eta, \theta + 2\eta, \\
&\theta + 3\eta, \theta + 4\eta, \text{ \&c. pro } \theta \text{ habebitur}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda} &= re . \int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz + sf . \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz \\
&+ tg . \int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda} = \overline{r+1} . e . \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz + \overline{s+1} . f . \int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} dz \\
& \quad + \overline{t+1} . g . \int z^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda-1} dz \\
& \frac{1}{\eta} z^{\theta+2\eta} R^{\lambda} = \overline{r+2} . e . \int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} dz + \overline{s+2} . f . \int z^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda-1} dz \\
& \quad + \overline{t+2} . g . \int z^{\theta+4\eta-1} R^{\lambda-1} dz \\
& \frac{1}{\eta} z^{\theta+3\eta} R^{\lambda} = \overline{r+3} . e . \int z^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda-1} dz + \overline{s+3} . f . \int z^{\theta+4\eta-1} R^{\lambda-1} dz \\
& \quad + \overline{t+3} . g . \int z^{\theta+5\eta-1} R^{\lambda-1} dz \\
& \frac{1}{\eta} z^{\theta+4\eta} R^{\lambda} = \overline{r+4} . e . \int z^{\theta+4\eta-1} R^{\lambda-1} dz + \overline{s+4} . f . \int z^{\theta+5\eta-1} R^{\lambda-1} dz \\
& \quad + \overline{t+4} . g . \int z^{\theta+6\eta-1} R^{\lambda-1} dz
\end{aligned}$$

Et sic ulterius, unde patet progressio seriei in infinitum quando index ipsius z augetur continua additione ipsius η . Sit jam brevitatis causa

$$\begin{aligned}
\int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz &= A, & \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz &= B \\
\int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} dz &= C, & \int z^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda-1} dz &= D \\
\int z^{\theta+4\eta-1} R^{\lambda-1} dz &= E, & \int z^{\theta+5\eta-1} R^{\lambda-1} dz &= F, \\
\int z^{\theta+6\eta-1} R^{\lambda-1} dz &= G, \text{ \&c.}
\end{aligned}$$

Et substitutis his valoribus dicatur series prodiens X , & habebitur

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{1}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda} = reA + sfB + tgC \\
& \frac{1}{\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda} = \overline{r+1} . eB + \overline{s+1} . fC + \overline{t+1} . g . D \\
& \frac{1}{\eta} z^{\theta+2\eta} R^{\lambda} = \overline{r+2} . eC + \overline{s+2} . fD + \overline{t+2} . g . E \\
& \frac{1}{\eta} z^{\theta+3\eta} R^{\lambda} = \overline{r+3} . eD + \overline{s+3} . fE + \overline{t+3} . g . F \\
& \frac{1}{\eta} z^{\theta+4\eta} R^{\lambda} = \overline{r+4} . eE + \overline{s+4} . fF + \overline{t+4} . g . G \\
& \text{\&c.}
\end{aligned} \right\} = X.$$

Si R est binomium, hoc est $g = 0$, evanescunt omnes termini ducti in g , existente $R = e + fz^\eta$, si sit quadrinomium, augenda est æquatio singula hujus seriei uno termino, qui ex ipsa progressionē hujus seriei cognoscitur, si R sit multinomium, augenda est æquatio quævis hujus seriei tot terminis quot nominibus R excedit trinomium, & termini isti similiter ex progressionē seriei cognoscuntur. Igitur una area ipsarum $A, B, C, D, E, F, \&c.$ data si R est binomium dabuntur omnes; duabus datis si R est trinomium, tribus datis si R est quadrinomium, & tot datis minus una quot nominum est R , si R est multinomium, dabuntur omnes, sicut ab ipsa serie manifestum est.

Scribendo ulterius in æquatione $\frac{1}{\eta} z^\theta R^\lambda = refz^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz + sfz^{\theta+\eta-1} dz + \&c.$ $\theta - \eta, \theta - 2\eta, \theta - 3\eta, \theta - 4\eta, \&c.$ pro θ , & ponendo

$$\begin{aligned} \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz &= B, & \int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz &= A \\ \int z^{\theta-\eta-1} R^{\lambda-1} dz &= P, & \int z^{\theta-2\eta-1} R^{\lambda-1} dz &= Q \\ \int z^{\theta-3\eta-1} R^{\lambda-1} dz &= R, & \int z^{\theta-4\eta-1} R^{\lambda-1} dz &= S \\ &\&c. & &\&c. \end{aligned}$$

Nec non dicendo seriem sic prodeuntem X' habebitur

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\eta} z^{\theta-\eta} R^\lambda &= t-1.g B + s-1.f A + r-1.e P \\ \frac{1}{\eta} z^{\theta-2\eta} R^\lambda &= t-2.g A + s-2.f P + r-2.e Q \\ \frac{1}{\eta} z^{\theta-3\eta} R^\lambda &= t-3.g P + s-3.f Q + r-3.e R \\ \frac{1}{\eta} z^{\theta-4\eta} R^\lambda &= t-4.g Q + s-4.f R + r-4.e S \&c. \end{aligned} \right\} = X'$$

Ex hac serie patet, datis duabus arcis ipsarum $A, B, P, Q, R, S, \&c.$ dari omnes, nec non easdem annotationes, quæ factæ sunt ad seriem X in casu R binomii, quadrinomii, & multinomii etjam heic obtinere, nec non, cum arcæ A & B inveniantur etjam in hujus seriei prima æquatione æque ac in seriei X prima æquatione, series duas X & X' tanquam unam constituere ejus conditionis, ut si dentur
duæ

duæ arcæ ipfarum $A, B, C, D, E, F, \&c. PQRST \&c.$ dabuntur omnes, dum C est trinomium, si tres dum R est quadrinomium & sic ulterius, dabuntur omnes.

CASUS II.

Dum index λ ipsius R augetur vel diminuitur continua additione vel subductione unitatis.

Sit jam R trium nominum scil. $R = e \div fz^\eta \div gz^{2\eta}$. Et ex duabus arcis $\int z^{\theta-1} R^\lambda dz$ & $\int z^{\theta+\eta-1} R^\lambda dz$ juxta auctorem quærendæ sunt arcæ $\int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz$ & $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz$, & ex his duabus arcæ $\int z^{\theta-1} R^{\lambda-2} dz$, $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-2} dz$ & sic semper. Ponatur itaque $\int pz^{\theta-1} R^\lambda = pA$, $\int qz^{\theta+\eta-1} R^\lambda = qB$, & juxta prop. 3 est

$$az^\theta R^\lambda = \int \frac{\theta ae \div \theta}{\div \lambda \eta} \frac{afz^\eta \div \theta}{\div 2\lambda \eta} . agz^{2\eta} . z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz, \text{ nec non}$$

$$bz^{\theta+\eta} R^\lambda = \int \frac{\theta}{\div \eta} \frac{bez^\eta \div \theta}{\div \lambda \eta} \frac{bfz^{2\eta} \div \theta}{\div 2\lambda \eta} . bgz^{3\eta} . z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz, \text{ \&}$$

propterea summa harum arearum quæ brevitatis causa æquetur ipsi Y erit

$$\left[\int \frac{\theta ae + \theta + \lambda \eta . af . z^\eta + \theta + 2\lambda \eta . ag . z^{2\eta} + \theta + \eta + 2\lambda \eta . bg . z^{3\eta} . z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz}{\div pe \quad \frac{\theta + \eta . be}{\div pf} \quad + \frac{\theta + \eta + \lambda \eta . bf}{\div pg} \quad + qg} \right] = P$$

$= pA \div qB \div az^\theta R^\lambda \div bz^{\theta+\eta} R^\lambda$. Jam ut determinantur valores hujusmodi ipfarum p, q, a & b pro arbitrio assumtarum, ut per illam reductionem termini $z^{2\eta}$ & $z^{3\eta}$ nec non terminus $\theta ae \div pe$ ex æquatione priori exterminentur, & æquatio proinde contineat relationem tantum inter A, B , & terminum $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz$, nec non quantitates datas, quo ipso problemati convenienter operatio instituitur, cum sic datis duabus ex his arcis detur tertia, ponatur $\theta ae \div pe = 0$, unde $p = -\theta a$, deinde $\theta \div \eta \div 2\lambda \eta . bg \div qg = 0$, unde $q = -\theta b - \eta b - 2b\lambda \eta$, nec non $\theta \div 2\lambda \eta . ag \div \theta \div \eta \div \lambda \eta . bf \div pg \div qf = 0$, unde

de in hac ultima æquatione ponendo valores ipsarum p & q pro iis obtinetur $\theta ag + 2\lambda\eta ag + \theta bf + \eta bf + \lambda\eta bf - \theta ag - \theta bf - \eta bf - 2\lambda\eta bf = 0$, delendoque æquipollentes invenitur $b = \frac{2ag}{f}$. Ponan-

tur itaque valores ipsarum q, p & b , ex his æquationibus inveniendi pro ipsis in termino secundo æquationis Y , & æquatio illa Y migrabit in hanc $\int \frac{\eta f^2 - 4\lambda\eta ge}{f} \cdot z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz = z^{\theta} R^{\lambda} + \frac{2g}{f} z^{\theta+\eta} R^{\lambda} - \theta A - \frac{2\theta+2\eta+4\lambda\eta}{f} \cdot gB$, seu dividendo totam æquationem per η ,

$$\int \frac{\lambda f^2 - 4\lambda ge}{f} \cdot z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz = \frac{1}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda} + \frac{2g}{f\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda} - \frac{\theta}{\eta} A - \frac{\theta}{\eta} + 1 + 2\lambda \cdot \frac{2g}{f} B, \text{ vel } \frac{\lambda f^2 - 4\lambda ge}{f} \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz = \frac{1}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda} + \frac{2g}{\eta f} z^{\theta+\eta} R^{\lambda} - \frac{\theta}{\eta} \int z^{\theta-1} R^{\lambda} dz - \frac{\theta}{\eta} + 1 + 2\lambda \cdot \frac{2g}{f} \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda} dz.$$

Unde manifestum est, si dentur areæ $\int z^{\theta-1} R^{\lambda} dz$ & $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda} dz$ dari aream $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz$. Pro invenienda serie, per quam ex datis duabus areis ejus seriei omnes inveniantur in hac ultima æquatione, ponatur ut prius $\frac{\theta}{\eta} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, nec non brevitas causa $\frac{ff - 4ge}{f} = p$, & $\lambda, \lambda - 1, \lambda - 2, \lambda - 3$, &c. in infinitum pro λ , prætereaque

$$\begin{aligned} \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda} dz &= B, \quad \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz = C \\ \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-2} dz &= D, \quad \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-3} dz = E. \text{ \&c.} \end{aligned}$$

& habebitur

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda} + \frac{2g}{f\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda} &= rA + t + 1 \cdot \frac{2g}{f} B + \lambda pC \\
 \frac{1}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda-1} + \frac{2g}{f\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda-1} &= r f z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz + t \cdot \frac{2g}{f} C + \lambda - 1 \cdot pD \\
 \frac{1}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda-2} + \frac{2g}{f\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda-2} &= r f z^{\theta-1} R^{\lambda-2} dz + t - 1 \cdot \frac{2g}{f} D + \lambda - 2 \cdot pE \\
 \frac{1}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda-3} + \frac{2g}{f\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda-3} &= r f z^{\theta-1} R^{\lambda-3} dz + t - 2 \cdot \frac{2g}{f} E + \lambda - 3 \cdot pF
 \end{aligned} \right\} = Z$$

Patet hinc datis duabus A & B dari C , datis $f z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz$ & C dari D , datis D & $f z^{\theta-1} R^{\lambda-2} dz$ dari E & sic ulterius. Areae autem $f z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz$, $f z^{\theta-1} R^{\lambda-2} dz$, $f z^{\theta-1} R^{\lambda-2} dz$ &c. determinantur sic ut sequitur.

Assumatur iterum æquatio Y , atque in illa ponantur omnes termini separatim, præter primum $\int \frac{\theta a e}{\div p e} \cdot z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz$, æquales nihilo, ut termini reliqui, dimensiones z^{η} , $z^{2\eta}$, $z^{3\eta}$, continentes evanescant. Erit sic $\theta \div \eta \div 2\lambda\eta \cdot b g \div q g = 0$, & $q = -\theta b - b\eta - 2b\lambda\eta$ habetur etjam $\theta \div \lambda\eta \cdot a g \div \theta \div \eta \div \lambda\eta \cdot b f \div p g \div q f = 0$, & in hac ponendo valorem inventum ipsius q , invenitur per debitam reductionem $p = \frac{b\lambda\eta f}{g} - \theta a - 2\lambda\eta a$. Est similiter $\theta \div \lambda\eta \cdot a f \div \theta \div \eta \cdot b e \div p f \div q e = 0$, in qua ponendo valores ipsatum p & q inventos, debiteque reducendo, invenietur $b = \frac{a f g}{f f - 2 g e}$. Substituendo denique hunc valorem ipsius b in valoribus inventis ipsarum p & q , habebitur $q = \frac{\theta \div \eta \div 2\lambda\eta \cdot a f g}{2 e g - f f}$, & $p = \frac{\lambda\eta a f f}{f f - 2 e g} - \theta \div 2\lambda\eta \cdot a$. Tandem hos valores substituendo in æquatione $pA \div qB \div a z^{\theta} R^{\lambda} \div b z^{\theta+\eta} R^{\lambda} = Y$ fiet delendo per hanc operationem terminos areae Y in quibus potestates η ipsius z deprehenduntur, $\int \frac{\theta a e}{\div p e} \div \frac{\lambda\eta a e f f}{f f - 2 e g} - \theta \div 2\lambda\eta \cdot a e \cdot z^{\theta-1}$

$$z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz = \frac{\lambda \eta aff}{ff-2eg} - \frac{\theta + 2\lambda \eta \cdot a \cdot A - \frac{\theta + \eta + 2\lambda \eta \cdot afg}{ff-2eg} \cdot B +$$

$$az^{\theta} R^{\lambda} + \frac{afg}{ff-2eg} z^{\theta+\eta} R^{\lambda}. \quad \text{Dividendo totam æquationem per } a \text{ \&}$$

$$\text{multiplicando per } ff-2eg, \text{ fiet } 4\lambda \eta e^2 g - \lambda \eta eff \cdot \int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz$$

$$= \theta + 2\lambda \eta \cdot eg - \theta + \lambda \eta \cdot ff \cdot A - \theta + \eta + 2\lambda \cdot fg B + \frac{\theta + \eta + 2\lambda \eta \cdot afg}{ff-2eg} \cdot z^{\theta} R^{\lambda} + fg z^{\theta+\eta} R^{\lambda}. \quad \text{Dividatur tota æquatio per } \eta, \text{ ponaturque ut supra}$$

$$\frac{\theta}{\eta} = r, r + \lambda = s, s + \lambda = t, \&c. \text{ nec non brevitatis causa } 4e^2 g - eff$$

$$= \alpha, \& ff-2eg = \beta, \text{ eritque } \lambda \alpha z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz = t \cdot 2eg - sff \cdot A$$

$$- t + 1 \cdot fg B + \frac{\beta}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda} + \frac{fg}{\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda}, \& \text{ transponendo, } \frac{\beta}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda} +$$

$$\frac{fg}{\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda} = sff - t \cdot 2eg \cdot A + t + 1 \cdot fg B + \lambda \cdot \alpha z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz$$

$$= sff - t \cdot 2eg \cdot \int z^{\theta-1} R^{\lambda} dz + t + 1 \cdot fg \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda} dz + \lambda \cdot$$

$\alpha \int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz.$ Scribendo jam in hac æquatione $\lambda, \lambda-1, \lambda-2, \lambda-3, \lambda-4, \&c.$ in infinitum pro λ nec non $A B C D E F G \&c.$ pro earum valoribus, qui colliguntur ex iis quæ prius dicta sunt, & ponendo similiter

$$\int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz = P, \int z^{\theta-1} R^{\lambda-2} dz = Q,$$

$$\int z^{\theta-1} R^{\lambda-3} dz = R, \int z^{\theta-1} R^{\lambda-4} dz = S$$

$$\int z^{\theta-1} R^{\lambda-5} dz = T, \&c. \quad \text{fiet tandem}$$

$$\frac{\beta}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda} + \frac{fg}{\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda} = s \cdot ff - t \cdot 2eg \cdot A + t + 1 \cdot fg B + \lambda \cdot \alpha P$$

$$\frac{\beta}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda-1} + \frac{fg}{\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda-1} = s-1 \cdot ff - t-1 \cdot 2eg \cdot P + t \cdot fg \cdot C + \lambda-1 \cdot \alpha Q$$

$$\frac{\beta}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda-2} + \frac{fg}{\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda-2} = s-2 \cdot ff - t-2 \cdot 2eg \cdot Q + t-1 \cdot fg \cdot D + \lambda-2 \cdot \alpha R$$

$$\frac{\beta}{\eta} z^{\theta} R^{\lambda-3} + \frac{fg}{\eta} z^{\theta+\eta} R^{\lambda-3} = s-3 \cdot ff - t-3 \cdot 2eg \cdot R + t-2 \cdot fg \cdot E + \lambda-3 \cdot \alpha S$$

&c. in infinitum. Ponendo ulterius si lubet $P Q R S \&c.$ pro earum valoribus in serie Z fiet illa

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\eta} \theta R^\lambda + \frac{2g}{f\eta} \theta + \eta R^\lambda &= rA + \overline{t+1} \cdot \frac{2g}{f} B + \lambda pC \\
 \frac{1}{\eta} \theta R^{\lambda-1} + \frac{2g}{f\eta} \theta + \eta R^{\lambda-1} &= rP + t \cdot \frac{2g}{f} C + \overline{\lambda-1} \cdot pD \\
 \frac{1}{\eta} \theta R^{\lambda-2} + \frac{2g}{f\eta} \theta + \eta R^{\lambda-2} &= rQ + \overline{t-1} \cdot \frac{2g}{f} D + \overline{\lambda-2} \cdot pE \\
 \frac{1}{\eta} \theta R^{\lambda-3} + \frac{2g}{f\eta} \theta + \eta R^{\lambda-3} &= rR + \overline{t-2} \cdot \frac{2g}{f} D + \overline{\lambda-3} \cdot pF \\
 &\text{\&c. in infinitum.}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \theta R^\lambda + \frac{2g}{f\eta} \theta + \eta R^\lambda \\ \frac{1}{\eta} \theta R^{\lambda-1} + \frac{2g}{f\eta} \theta + \eta R^{\lambda-1} \\ \frac{1}{\eta} \theta R^{\lambda-2} + \frac{2g}{f\eta} \theta + \eta R^{\lambda-2} \\ \frac{1}{\eta} \theta R^{\lambda-3} + \frac{2g}{f\eta} \theta + \eta R^{\lambda-3} \end{aligned}} \right\} = Z$$

Datis igitur duabus areis quibuslibet ipfarum $A, B, C, D, E, F, G, P, Q, R, S, T, \&c.$ dabuntur omnes in infinitum per has duas

series $Z' \& Z$ conjunctas, ut ex ipfarum natura manifestam est. Et si scribantur $\lambda, \lambda + 1, \lambda + 2, \lambda + 3, \lambda + 4, \&c.$ pro λ , sicut in casu subductionis ipsius η ostensum erat, in æquationibus illis a quibus hæ duæ series deductæ sunt, pervenietur ad alias duas series per quas omnis curva, cujus ordinata est trium nominum sub vinculo radice, dum index λ continua additione unitatis augetur ex duabus areis datis ipfarum A, B, C, P, Q, R , quadrabitur.

CASUS III.

Quando tum index θ augetur vel diminuitur perpetua additione vel subductione ipsius η , vel tum index λ augetur vel diminuitur perpetua additione vel subductione unitatis.

Index λ ipsius R augeatur vel diminuatur additione vel subductione ipsius unitatis, donec ordinata prodiens, seu fluxio areæ curvilinearæ sic obtentæ, ejus fiat conditionis, ut ejus fluens per casum primum hujus propositionis inveniri queat. Assumpta sic area inventa pro cognita, applicetur ordinata proposita ad series in casu secundo, & habebitur quadratura curvæ. Et sic conjungendo hos duos casus priores absolvitur hic casus tertius, sicut Auctor monet.

CASUS IV.

Dum R est quadrinomium vel multinomium.

Si R est quadrinomium, in casu primo indicatum est, quomodo series

series continuari possint. In casu secundo assumantur tres areæ, similiter ac in casu trinomiali assumptæ sunt duæ, puta areas $\int z^{\theta-1} R^{\lambda} dz$, $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda} dz$, $\int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda} dz$, & similiter ac in casu secundo inventæ sunt duæ series, jam invenientur tres series per similem operationem, cui proinde describendæ non immoror, quæ series erunt ejusmodi, ut per eas conjunctas omnes areæ dentur, datis tribus. Idem similiter perficitur dum R est multinomium. Dum R est duorum nominum, fiet in casu secundo $g = 0$, & omnes areæ dabuntur data una, sicut ex serie $\dot{Z}$ colligitur.

Exemplum ad Propositionem septimam.

PROBL.

Datis in recta linea tribus punctis A, B, C , (Fig. 7.) ad punctum quodvis aliud D erigatur normalis DE , ut sit $AD : DB :: CDq : DEq$, & erit locus puncti E linea aliqua curva, quam quadrare oportet.

Cas. 1. Quando C cadit inter A & B , D autem versatur inter B & C .

Sit $BD = x$, $DE = y$, $AB = b$, $BC = a$ eritque $\frac{x \cdot a - x^2}{b - x} = yy$, æquatio ad

curvam $BECK$. Hinc $ydx = \frac{ax^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{b-x}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{b-x}}$, quæ partes fluxionis

areæ quadrandæ, seorsim jam integrandæ sunt. Super recta AB describatur semicirculus BFA , & producat DE donec occurrat circulo in F , ducaturque a puncto F ad centrum circuli L recta FL . Per

naturam circuli erit $\frac{b^2}{8} dx = \frac{b^2}{8} dx \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot b - x^{-\frac{1}{2}}$ fluxio sectoris

$LBGFL$, & proinde $\frac{b^2}{8} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx \cdot b - x^{-\frac{1}{2}} =$ Sectori circulari $LBGFL$.

Est similiter $a x^{\frac{1}{2}} dx \cdot b - x^{-\frac{1}{2}} =$ parti priori areæ curvæ inveniendæ.

Comparetur jam fluxio $dx \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot b - x^{-\frac{1}{2}}$, negligendo scilicet paulisper quantitatem constantem $\frac{b^2}{8}$, cum ordinata seu fluxione

$z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz$, ubi $R = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \&c.$ & habebitur $z = x$,
 $\theta - 1 = -\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\eta = 1$, $\frac{\theta}{\eta} = r = \frac{1}{2}$, $R = b - x$, $e = b$, $f = -1$,
 $g = 0$, $\lambda - 1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $r + \lambda = s = 1$. Quoniam $\eta = 1$, & in-
 dex ipsius x extra vinculum radice in fluxione integranda est $\frac{1}{2}$, in
 fluxione vero circuli $-\frac{1}{2}$, constat η esse differentiam inter hos indi-
 ces, & ob id integrale quantitatis propositæ inveniiri, assumpta area
 circuli pro data, per seriem X . Posito namque $\int x^{-\frac{1}{2}} dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}$
 $= A$, & negligendo constantem a , $\int x^{\frac{1}{2}} dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}} = B$, & scri-
 ptis valoribus inventis per comparationem terminorum superiorem
 pro iis in æquatione prima seriei X , habetur $x^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{b-x}^{\frac{1}{2}} = \frac{bA}{2} - B$,
 ergo $aB = \frac{abA}{2} - a \cdot \sqrt{bx - xx} = a \int x^{\frac{1}{2}} dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}$. Pro A substi-
 tuatur sector circularis $LBGFL$ divisus per $\frac{b^2}{8}$, & habetur
 $a \int x^{\frac{1}{2}} dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}} = \frac{4a}{b} \text{ Sect. } LBGFL - a \cdot \sqrt{bx - xx}$.

Ad inveniendum alterum membrum $-\int \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{\sqrt{b-x}} = -$
 $\int x^{\frac{3}{2}} dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}$, observandum est differentiam indicis x in hac
 quantitate proposita, & in fluxione areae circuli esse 2η , cum $\eta = 1$,
 adeoque assumpta area B prius inventa ut cognita, erit $\int z^{\frac{3}{2}} dz \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}$
 $= C$, quæ proinde invenitur per æquationem secundam seriei A .
 Scriptis namque his valoribus in illa, habetur $x^{\frac{3}{2}} \cdot \overline{b-x}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} bB -$
 $2C$, seu $-C = \frac{x\sqrt{bx-xx}}{2} + \frac{3b}{4}\sqrt{bx-xx} - \frac{3b^2 A}{8}$, vel ponendo $\frac{8}{b^2}$
 $\text{Sect. } LBGFL$ pro A erit $-C = \frac{x\sqrt{bx-xx}}{2} + \frac{3b}{4}\sqrt{bx-xx} - 3 \text{ Sect. } LBGFL$.

Est ergo $\int y dx = \int \frac{ax^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{b-x}} - \int \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{\sqrt{b-x}} = \frac{4a}{b} - 3 \cdot \text{Sect. } LBGFL$
 $- a\sqrt{bx-xx} + \frac{x\sqrt{bx-xx}}{2} + \frac{3b}{4}\sqrt{bx-xx} = \frac{4a}{b} - 3 \cdot \text{Sect. } BGF B + \Delta LBF$
 $- a$

$$-a\sqrt{bx-xx} + \frac{x\sqrt{bx-xx}}{2} \div 3\Delta LBF = \frac{4a}{b} - 3. \text{ Sect. BGFB} \div \frac{4a}{b}$$

$$\Delta LBF - a\sqrt{bx-xx} \div \Delta BDF = \Delta BDF \div \frac{4a-3b}{b} \text{ Sect. BGFB} = \Delta BDF$$

$$\div \frac{AB-4AC}{AB}. \text{ Sect. BGFB. Q. E. J.}$$

Idem etiam perfici poterit per casum tertium propositionis septimæ, seu per casus primum & secundum conjunctos. Fluxionis

$ax^{\frac{1}{2}}dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}$ integrale primum quærat. Et quoniam $dx \cdot \sqrt{bx-xx} = x^{\frac{1}{2}}dx \cdot \overline{b-x}^{\frac{1}{2}}$ est fluxio areæ circuli $BGFD$, patet negligendo constantem a nullam aliam esse differentiam inter has duas fluxiones, quam quod index factoris surdi fluxionis integrandæ sit $-\frac{1}{2}$, dum ejusdem factoris in fluxione areæ circuli index est $\frac{1}{2}$, adeoque unitatem esse differentiam indicum horum factorum. Comparationem igitur

instituendo cum serie $\dot{Z}$ invenietur integrale quantitatis propositæ sic ut sequitur. Est scilicet $z=x$, $\theta-1=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{3}{2}$, $\eta=1$, $\frac{\theta}{\eta}=\frac{3}{2}$

$=r$, $R=e \div fz^{\eta} \div gz^{2\eta} \div \&c. = b-x$, unde $e=b$, $f=-1$, $g=0$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $r \div \lambda=s=2$, $\beta=1$, $\alpha=-b$, $\int x^{\frac{1}{2}}dx \cdot \overline{b-x}^{\frac{1}{2}}=A$, & $\int x^{\frac{1}{2}}dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}=P$. Scriptis jam his valoribus in æquatione prima

seriei $\dot{Z}$ pro ipsis habetur $x^{\frac{3}{2}} \cdot \overline{b-x}^{\frac{1}{2}} = 2\int x^{\frac{1}{2}}dx \cdot \overline{b-x}^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2}$.
 $\int x^{\frac{1}{2}}dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}$, seu $a\int x^{\frac{1}{2}}dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}} = \frac{4aBDFCB}{b} - \frac{2xa\sqrt{bx-xx}}{b}$.

Integrale membri posterioris $-\int x^{\frac{3}{2}}dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}$, invento jam per præcedentem comparationem $\int x^{\frac{1}{2}}dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}$, habetur comparationem instituendo cum æquatione prima seriei X . Assumatur enim

$\int x^{\frac{1}{2}}dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}$ pro A , & erit $z=x$, $\theta-1=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{3}{2}$, $\eta=1$, $\frac{\theta}{\eta}=\frac{3}{2}$, $e=b$, $f=-1$, $g=0$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $r \div \lambda=s=2$, $\int x^{\frac{3}{2}}dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}=B$, scriptisque his valoribus pro iis habetur $x^{\frac{3}{2}} \cdot \overline{b-x}^{\frac{1}{2}} = \frac{3Ab}{2} - 2B$,

$2B$, seu $-B = \frac{x\sqrt{bx-xx}}{2} = \frac{3bA}{4}$. Substituendo valorem ipsius A per
 seriem Z inventum pro A in hac æquatione habetur $-\int x^{\frac{3}{2}} dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}}$
 $= \frac{x\sqrt{bx-xx}}{2} - 3BDFGB + \frac{3x\sqrt{bx-xx}}{2}$.

Erit ergo $\int y dx = a \int x^{\frac{3}{2}} dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}} = \int x^{\frac{3}{2}} dx \cdot \overline{b-x}^{-\frac{1}{2}} = \frac{4a}{b} - 3$.

$$BDFGB = \frac{2ax\sqrt{bx-xx}}{b} + \frac{x\sqrt{bx-xx}}{2} + \frac{3x\sqrt{bx-xx}}{2} = \frac{4a-3b}{b}.$$

$$\overline{BGFB} + \Delta BDF = \frac{4a}{b} \Delta BDF + \Delta BDF + 3\Delta BDF \frac{4a-3b}{b} \cdot \overline{BGFB} + \Delta BDF,$$

seu $\int y dx = \Delta BDF + \frac{AB-4AC}{AB}$. Sect. $BGFB$ ut prius.

Cas. 2. Dum C ut prius est inter A & B , D vero inter A & C ut d , æquatio
 ad curvam fiet $\frac{x \cdot \overline{x-a}^2}{b-x} = yy$, & area ejus invenitur similiter ac prius.

Cas. 3. Quando B & C cadunt ad diversas partes ipsius A , stantibus
 iisdem denominationibus ac in casu primo, eadem est æquatio ad cur-
 vam eademque quadratura.

Cas. 4. Quando C est inter A & B , D autem extra, iisdem retentis deno-
 minationibus, curvæ æquatio est vel $\frac{x \cdot \overline{x+a}^2}{b+x} = y^2$, vel $\frac{x \cdot \overline{x-a}^2}{x-b} = yy$,
 in utroque hoc casu quadratura curvæ dependet ex quadratura hyper-
 bolæ rectangulæ, & assumpta area hyperbolica ut cognita, similiter ac
 prius area circuli assumebatur, eodem modo ac in casu primo institui-
 tur quadratura, & ad eandem pervenietur æquationem areæ curvæ ac
 in casu primo & secundo, sectore hyperbolico loco circularis jam a-
 ream ingrediente. In hoc casu curva tres habere invenietur assympto-
 tos, unam axi normalem, duasque alteras efficientes in eodem pun-
 cto cum axe angulos semirectos.

Cas. 5. Quando D & C cadunt extra A & C , æquatio ad curvam
 eadem est ac in casu priori.

Cas. 6.

Cas. 6. Si C cadit in B in casu primo, curva est Cissois, & ejus quadratura habetur per casum primum. Si vero C cadit in A curva est circulus. Hyperbola autem est curva si C cadit in A in casu quarto.

Cas. 7. Si C cadit inter A & B , & AC quarta est pars ipsius AB , curva est folium Cartesii. Et si AC est dimidium ipsius AB curva est Moivræi. Usus propositionis septimæ ampliorem colligendi uberior erit occasio, dum ad calculos formarum tabulæ secundæ pervenerimus.

PROP. VIII.

Si pro $e \div f x^\eta \div g z^{2\eta} \div \text{etc.}$, $\text{et } k \div l z^\eta \div m z^{2\eta} \div \text{etc.}$ *scribantur* R $\text{et } S$ *ut supra, et in curvæ alicujus ordinata* $z^{\theta+\eta\sigma} R^{\lambda+\tau} S^{\mu+\nu}$ *maneant quantitates datæ* $\theta, \eta, \lambda, \mu, e, f, g, k, l, \text{etc.}$ *et pro* $\sigma, \tau, \text{et } \nu$ *scribantur successive numeri quicunque integri etc.*

Cas. 1. Dum index ipsius z extra vinculum augetur vel diminuitur continua additione vel subductione ipsius η . Sint R & S binomia, nec non $\int p z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz = pA$, $\int q z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz = qB$, & areæ $z^\theta R^\lambda S^\mu$ ordinata quærat per propositionem quartam, quæ ducta in dz & signo summatorio affecta addatur ad duas priores, & harum summa æquetur ipsi $pA \div qB \div z^\theta R^\lambda S^\mu$. Et quoniam ex datis arcis A & B invenienda est areo $C = \int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz$, ponantur in summa ordinatarum omnes termini qui non involvunt factorem $z^{\theta+2\eta-1}$ æquales nihilo, qui in hoc casu sunt duo primi, æquatione rite disposita, & sic habebuntur duæ æquationes, ex quibus cognoscentur assumptæ p & q , pro quibus in arcibus pA & qB earum valores hoc modo inventi sunt substituendi. Hinc invenietur æquatio inter A, B, C , ex illis & quantitatibus determinatis constans, ex qua dabitur C in A & B . Quoniam modus calculi huic similis in iis quæ dicta sunt ad Propositionem septimam expositus est, sufficit heic tantum viam ad hanc æquationem perveniendi indicasse. Ex hac æquatione similiter series deducuntur ac ostensum est ad Prop. 7., ex quibus patet duabus arcibus datis dari omnes.

Si R est binomium, S vero trinomium, vel S binomium, R autem duorum nominum sub vinculo radiceis, oportet tres areas dari, puta
I
has

has $\int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz \cdot p = pA$, $q \int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz = qB$, $r \int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz = rC$, ut inde haberi queat area $\int z^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz = D$. Nam quando in hoc casu secundum prop. 4. quæritur ordinata areae $z^{\theta} R^{\lambda} S^{\mu}$, pervenietur ad terminum $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz$ qui quatuor habet factores, in quorum primo index ipsius z est θ , secundo $= \eta$, in tertio $= 2\eta$, in quarto $= 3\eta$, unde ad valorem areae $\int z^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz$, calculum similiter instituendo ac prius, concludi non poterit, nisi ponendo tres primos factores seorsim æquales nihilo, unde tres obtinentur æquationes, ex quibus assumptæ p q r determinantur in quantitatibus datis, quorum valores substituti pro ipsis in areis pA , qB & rC , dabunt æquationem ejus conditionis, ut detur D in A , B , C , & constantibus. Hic autem calculus eodem modo procedit ac prius, & series similiter obtinentur. Eodemque ratiocinio nec non calculo simili invenietur area $\int z^{\theta+4\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz = E$, ex datis quatuor $\int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz = A$, $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz = B$, $\int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz = C$, $\int z^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} dz = D$. Si tum R tum S sit trinomium, vel R binomium, S vero quadrinomium, vel generaliter R & S sint simul sex nominum sub vinculo radicis.

Similiterque res procedit quotcunque nominum sint R & S , modo tot dentur areae curvarum, quot nominum sunt R & S simul, exceptis duobus, sicut ex iis quæ jam dicta sunt colligitur.

Casus 2. Quando index λ ipsius R augetur vel diminuitur perpetua additione vel subductione unitatis. Neque hic casus aliquem parit difficultatem attendenti ad modum, quo idem casus solutus est in propositione septima. Sit scilicet utrumque tum R tum S binomium, scilicet $e \div fz^{\eta}$ & $k \div lz^{\eta}$ respective, & ex datis areis $\int p z^{\theta-1} R^{\lambda} S^{\mu} dz$ & $\int q z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda} S^{\mu} dz$ quærendæ sunt areae $\int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu} dz$ & $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu} dz$, & ex his duabus, areae $\int z^{\theta-1} R^{\lambda-2} S^{\mu} dz$ & $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-2} S^{\mu} dz$, atque sic porro. Circa hunc calculum primum notandum est R & S ductas in se invicem non efficere altioris dignitatem ipsius z quam 2η , & propterea heic sufficere ordinatam generalem, respondentem areae η quærere, quæ sit trium tantum terminorum, per quæ igitur duæ æquationes obtineri poterunt ad

ad determinationem assumptarum p & q . Deinde notandum est aream cujus ordinata in hoc casu per prop. 4. quærenda est, esse debere hujus formæ $z^\theta R^\lambda S^{\mu+1}$, nam cum hujus areæ ordinata quæritur, fiet $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^\mu$ ejus factor communis qualis per hunc casum esse debet. Hac ratione habetur $pfz^{\theta-1} R^\lambda S^\mu dz$

$$= \int .pe \div pfz^\eta . z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^\mu dz = pA, \text{ nec non } qfz^{\theta+\eta-1} R^\lambda S^\lambda dz \\ = \int qez^\eta \div qfz^{2\eta} . z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^\mu dz = qB, \text{ itemque per prop. 4.}$$

$z^\theta R^\lambda S^{\mu+1} = \int \theta ek \div \theta \div \lambda \eta . fk \div \theta \div \mu \eta \div \eta . el . z^\eta \div \theta \div \lambda \eta \div \mu \eta \div \eta . fl z^{2\eta} .$
in $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^\mu dz$. Addantur jam hae tres æquationes, & habebitur hoc modo

$$\int \theta . k \div \theta \div \lambda \eta . fk . z^\eta \div \theta \div \lambda \eta \div \mu \eta \div \eta . fl . z^{2\eta} . z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^\mu dz \\ \div pe \div \theta \div \mu \eta \div \eta . el \div qf \\ \div qe \div pf$$

$= pA \div qB \div z^\theta R^\lambda S^{\mu+1}$. Ponantur jam primus & tertius terminus æquales nihilo, & per duas sic prodeuntes æquationes determinantur p & q , quibus valoribus pro illis positis in pA & qB , habebitur æquatio inter A , B , & $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} S^\mu dz = C$, seu habebitur C ex A & B datis. Ponendo iterum secundum & tertium terminum seorsim æquales nihilo, alii per illas æquationes invenientur valores ipsorum p & q , qui pro illis in pA & qB suppositi dabunt æquationem inter $\int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^\mu dz = D$ & A & B , ex qua dabitur D ex A & B datis. Datis igitur areis A & B dabuntur areæ C & D , & ex his novæ E & F & sic ulterius. Series autem pro determinandis per hanc Propositionem omnibus areis, duabus datis, in hoc casu ad modum casus secundi Prop. 7. facile inveniuntur.

Si R & S simul sint quinque nominum, eodem modo ex datis tribus areis, puta $\int z^{\theta-1} R^\lambda S^\mu dz$, $\int z^{\theta+\eta-1} R^\lambda S^\mu dz$, $\int z^{\theta+2\eta-1} R^\lambda S^\mu dz$, dabuntur tres areæ $\int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^\mu dz$, $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} S^\mu dz$, $\int z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} S^\mu dz$. Et sic ulterius si R & S sint plurium nominum. Series similiter ac prius indicavimus in hoc casu inveniuntur. Et si in iis pro λ scribuntur successive $\lambda+1$, $\lambda+2$, $\lambda+3$, &c. habentur etjam series dum index λ ipsius R augeatur perpetua additione unitatis, pro inveniendis omnibus areis dua-

bus datis, si R & S sint binomia, tribus datis si R & S simul sint quinque nominum, & sic porro, ex tot datis quot sunt R & S simul nominum, minus duabus.

Casus 3. Dum index μ ipsius S augetur per continuam additionem vel diminuitur per continuam subtractionem ipsius unitatis. Hic casus coincidit cum casu secundo, ubi indicem ipsius R mutari, illo ipsius S invariabili manente, supponebatur, ita ut posito S pro R & μ pro λ nec non R pro S & λ pro μ in casu secundo, hujus casus solutio habeatur.

Casus 4. Et applicando aream quadrandam ad casus tres antecedentes successive, per illos tres casus invenietur area dum non tantum index θ ipsius z extra vinculum augetur vel diminuitur additione vel subtractione ipsius η , sed etiam indices λ & μ ipsorum R & S augentur vel minuuntur additione vel subtractione ipsius unitatis.

PROP. IX.

Æquantur curvarum areae inter se, quarum ordinatae sunt reciproce ut fluxiones abscissarum.

Nam contenta sub ordinatis & fluxionibus abscissarum erunt æqualia, & fluxiones arearum sunt ut hæc contenta, proindeque æquales. Eluentes autem, quarum fluxiones sunt æquales, etiam æquantur; unde constat propositum.

COROLL. I.

Innumeræ inveniri possunt curvæ, quarum areae sunt æquales; innumeræ enim relationes inter abscissas assumi possunt.

COROLL. II.

Si curvæ quadrandæ ordinata est $z^{\theta-1} \cdot e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}$, ponatur $z^{\eta} = x^v$. Hinc $z = x^{\frac{v}{\eta}}$, & $z^{\theta} = z^{\frac{v\theta}{\eta}}$, deinde fluxiones hujus æquationis sumendo $\theta z^{\theta-1} dz = \frac{v\theta}{\eta} x^{\frac{v\theta-\eta}{\eta}} dx$, seu $z^{\theta-1} dz = \frac{v}{\eta} x^{\frac{v\theta-\eta}{\eta}} dx$,
Ponen-

Ponendo igitur in ordinata priori x^v pro z^η , & $\frac{v\theta}{\eta} x^{\frac{v\theta-\eta}{\eta}} dx$ pro $z^{\theta-1} dz$, fiet fluxio curvæ priori æqualis, quæ est hæc $\frac{v\theta}{\eta} x^{\frac{v\theta-\eta}{\eta}}$.
 $\frac{e + fx^v + gx^{2v} + \&c.}{v} |^\lambda$. Hoc adeoque obtinet ponendo $\frac{\eta}{v} = s$, &
 $z^s = x$, est namque $z^\eta = x^v$, unde $z^v = x$, sed ob id $z^s = x$.

COROLL. III.

Si curvæ quadrandæ fluxio est $z^{\theta-1} dz \cdot \frac{a + bz^\eta + cz^{2\eta} + \&c.}{v} |^\lambda$,
 ponatur $z^\eta = x^v$, unde $z = x^{\frac{v}{\eta}}$, & $z^\theta = x^{\frac{v\theta}{\eta}}$, fumendoque fluxio-
 nes, $\theta z^{\theta-1} dz = \frac{v\theta}{\eta} x^{\frac{v\theta-\eta}{\eta}} dx$, seu $z^{\theta-1} dz = \frac{v}{\eta} x^{\frac{v\theta-\eta}{\eta}} dx$. Ponen-
 do igitur hos valores ipforum z^η & $z^{\theta-1} dz$, in fluxione areæ propo-
 sitæ, fiet fluxio areæ curvæ novæ priori æqualis $\frac{v}{\eta} x^{\frac{v\theta-\eta}{\eta}} dx$.
 $\frac{a + bx^v + cx^{2v} + \&c.}{v} |^\lambda$. Hinc constat propo-
 situm.

COROLL. IV.

Eodem ac priora duo solvitur modo.

COROLL. V.

Si fluxio areæ curvæ quadrandæ est $z^{\theta-1} dz \cdot \frac{e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \&c.}{v} |^\lambda$,
 ponatur $x = \frac{1}{z}$, unde $xz = 1$, seu $z = x^{-1}$, $z^\eta = x^{-\eta}$, unde
 $\frac{e + fz^\eta + gz^{2\eta}}{v} |^\lambda = \frac{e + fx^{-\eta} + gx^{-2\eta}}{v} |^\lambda = \frac{e + \frac{f}{x^\eta} + \frac{g}{x^{2\eta}}}{v} |^\lambda =$

$\frac{ex^{2\eta} + fx^\eta + g}{x^{2\eta}} \Big|^\lambda$. Et cum sit $z = x^{-1}$, erit $z^\theta = x^{-\theta}$, & sumendo

fluxiones $\theta z^{\theta-1} dz = -\theta x^{-\theta-1} dx = \frac{-\theta dx}{x^{\theta+1}}$. Hinc erit $z^{\theta-1} dz =$

$$\frac{e + fz^\eta + gz^{2\eta}}{x^{\theta+1}} \Big|^\lambda = \frac{-dx}{x^{\theta+1}} \cdot \frac{ex^{2\eta} + fx^\eta + g}{x^{2\eta}} \Big|^\lambda = \frac{-dx}{x^{\theta+1+2\lambda\eta}}.$$

$ex^{2\eta} + fx^\eta + g \Big|^\lambda$. Unde constat propositum. Si vero duo sint nomina sub vinculo radicis fiet per eundem calculum $z^{\theta-1} dz \cdot e + fz^\eta \Big|^\lambda =$

$$\frac{-dx}{x^{\theta+1+\lambda\eta}} \cdot ex^\eta + f \Big|^\lambda. \text{ Si quatuor, } z^{\theta-1} dz \cdot e + fz^\eta + gz^{2\eta} + bz^{3\eta} \Big|^\lambda =$$

$$\frac{-dx}{x^{\theta+1+3\lambda\eta}} \cdot ex^{3\eta} + fx^{2\eta} + gx^\eta + b \Big|^\lambda. \text{ Et sic ulterius.}$$

COROLL. VI.

Si fluxio areæ curvæ quadrandæ est $z^{\theta-1} dz \cdot e + fz^\eta + gz^{2\eta} \Big|^\lambda$, $k + lz^\eta + mz^{2\eta} \Big|^\mu$, ponatur $x = \frac{1}{z}$, seu $z^\eta = x^{-\eta}$, unde

$$e + fz^\eta + gz^{2\eta} \Big|^\lambda \cdot k + lz^\eta + mz^{2\eta} \Big|^\mu = \frac{ex^{2\eta} + fx^\eta + g}{x^{2\eta}} \Big|^\lambda \cdot \frac{k + lx^\eta + mx^{2\eta}}{x^{2\eta}} \Big|^\mu.$$

$$\frac{kx^{2\eta} + lx^\eta + m}{x^{2\eta}} \Big|^\mu = \frac{1}{x^{2\eta\lambda + 2\eta\mu}} \cdot \frac{g + fx^\eta + ex^{2\eta}}{x^{2\eta}} \Big|^\lambda \cdot \frac{m + lx^\eta + kx^{2\eta}}{x^{2\eta}} \Big|^\mu.$$

Et cum $z = x^{-1}$, erit $z^\theta = x^{-\theta}$, sumendoque fluxiones $z^{\theta-1} dz =$

$$\frac{-dx}{x^{\theta+1}}, \text{ erit ergo } z^{\theta-1} dz \cdot e + fz^\eta + gz^{2\eta} \Big|^\lambda \cdot k + lz^\eta + mz^{2\eta} \Big|^\mu =$$

$$\frac{-dx}{x^{\theta+1+2\lambda\eta+2\mu\eta}} \cdot g + fx^\eta + ex^{2\eta} \Big|^\lambda \cdot m + fz^\eta + kz^{2\eta} \Big|^\mu. \text{ Si duo sunt}$$

$$\text{nomina sub vinculo radicis, erit } z^{\theta-1} dz \cdot e + fz^\eta \Big|^\lambda \cdot k + lz^\eta \Big|^\mu =$$

$\frac{-dx}{x^{\theta+1+\lambda\eta+\mu\eta}} \cdot \overline{ex^\eta \div f}^{\lambda} \cdot \overline{kz^\eta \div l}^{\mu}$. Et sic ulterius, quotcunque sint nomina.

COROLL. VII.

Si æquatio ad curvam propositam, cujus area est invenienda, sit
 $y^\alpha \cdot e \div fy^\eta z^\delta \div gy^{2\eta} z^{2\delta} \div hy^{3\eta} z^{3\delta} = z^\beta \cdot h \div ly^\eta z^\delta \div my^{2\eta} z^{2\delta} \div \&c.$

fiat $y^\eta z^\delta = v^\eta$, & $yz^\eta = v$, & $y = \frac{v}{z^\eta}$, unde erit $yz^\eta = \frac{v}{z^\eta}$,

quæ est fluxio areæ curvæ cujus ordinatim applicata $= v$, & fluxio abscissæ $\frac{dz}{z^\eta}$, ipsaque curva sic erit æqualis curvæ propositæ, cum sit

$\int ydz = \int \frac{v dz}{z^\eta}$, hinc abscissa curvæ novæ est æqualis ipsi $\int \frac{dz}{z^\eta} =$

$\frac{1}{\eta-\delta} z^{\frac{\eta-\delta}{\eta}}$, quæ ponatur $= x$, unde $z^{\frac{\eta-\delta}{\eta}} = \frac{\eta-\delta}{\eta} x$, & $z = \frac{\eta-\delta}{\eta} x$

$\frac{\delta}{\eta-\delta} \cdot x^{\frac{\delta}{\eta-\delta}}$, atque hinc erit $z^{\frac{\delta}{\eta}} = \frac{\delta}{\eta-\delta} x^{\frac{\delta}{\eta-\delta}}$

$\frac{\delta}{\eta-\delta} \cdot x^{\frac{\delta}{\eta-\delta}}$. Ergo cum sit $v = yz^\eta$, erit jam $v = \frac{\eta-\delta}{\eta} x^{\frac{\eta-\delta}{\eta}}$

$x^{\frac{\delta}{\eta-\delta}} \cdot y$, & $y = \frac{v}{z^\eta} = v \cdot \frac{\eta-\delta}{\eta} x^{\frac{\delta}{\eta-\delta}}$. Sub-

stituendo jam hos valores pro y & z in æquatione proposita, fiet

inde, $v^\alpha \cdot \frac{\eta-\delta}{\eta} x^{\frac{\delta}{\eta-\delta}} \cdot e \div f v^\eta \div g v^{2\eta} \div h v^{3\eta} = \frac{\eta-\delta}{\eta} x^{\frac{\delta}{\eta-\delta}}$.

$$z^{\frac{\beta\eta}{\eta-\delta}} \cdot k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} + \&c., \& v^{\alpha} \cdot e + fv^{\eta} + gv^{2\eta} + hv^{3\eta} = \frac{\eta-\delta}{\eta}$$

$$\frac{\beta\eta + \alpha\delta}{\eta - \delta} \cdot x^{\frac{\beta\eta + \alpha\delta}{\eta - \delta}} \cdot k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} + \&c.. \text{ Extrahendo denique radi-}$$

$$\text{cem cujus exponens est } \frac{\beta\eta + \alpha\delta}{\eta - \delta} \text{ per totam æquationem, fiet } v^{\frac{\alpha \cdot \frac{\eta - \delta}{\alpha\delta + \beta\eta}}{\eta - \delta}} \cdot$$

$$e + fv^{\eta} + gv^{2\eta} + hv^{3\eta} + \&c. \Big| \frac{\eta - \delta}{\alpha\delta + \beta\eta} = \frac{\eta - \delta}{\eta} x^{\frac{\eta - \delta}{\eta}} \cdot k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} \Big| \frac{\eta - \delta}{\alpha\delta + \beta\eta}.$$

$$\text{Hinc erit } x = \frac{\eta}{\eta - \delta} \cdot v^{\frac{\alpha \cdot \frac{\eta - \delta}{\alpha\delta + \beta\eta}}{\eta - \delta}} \cdot \frac{e + fv^{\eta} + gv^{2\eta} + hv^{3\eta}}{k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} + nv^{3\eta}} \Big| \frac{\eta - \delta}{\alpha\delta + \beta\eta}.$$

$$\text{Ponendo igitur secundum auctorem } s = \frac{\eta - \delta}{\eta}, \& \lambda = \frac{\eta - \delta}{\alpha\delta + \beta\eta}, \text{ un-}$$

$$\text{de } \frac{1}{s} = \frac{\eta}{\eta - \delta}, \text{ fiet } x = \frac{1}{s} v^{\alpha\lambda} \cdot e + fv^{\eta} + gv^{2\eta} + hv^{3\eta} + \&c. \Big| \lambda.$$

$$k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} + \&c. \Big| -\lambda. \text{ Unde constat propositum.}$$

COROLL. XIII.

Similem eundo viam ac in corollario antecedenti ostenditur.

COROLL. IX.

$$\text{Si fluxio areæ curvæ quadrandæ sit } \pi z^{\theta-1} dz \text{ in } v e^{\frac{+v}{\eta} + \frac{+v}{\eta}} f z^{\frac{+v}{\eta} + \frac{+v}{\eta}} g z^{2\eta} + \&c.$$

$$\text{in } e + f z^{\eta} + g z^{2\eta} + \&c. \Big| \lambda - 1 \text{ in } a + b \cdot e z^{\eta} + f z^{\eta+1} + g z^{\eta+2} + \&c. \Big| \tau \Big| \omega.$$

$$\text{Ponatur } x = c z^{\eta} + f z^{\eta+1} + g z^{\eta+2} \Big| \pi, \text{ unde erit } x^{\frac{1}{\pi}} = e z^{\eta} + f z^{\eta+1} + g z^{\eta+2}$$

$gz^{\nu+2\eta}$, & sumendo fluxiones $\frac{1}{\pi} x^{\frac{1-\pi}{\pi}} dx = (ve z^{\nu-1} + \nu + \eta)$.

$fz^{\nu+\eta-1} + \nu + 2\eta \cdot gz^{\nu+2\eta-1}$) unde erit $\frac{\frac{1}{\pi} x^{\frac{1-\pi}{\pi}} dx \cdot \pi z^{\theta-1}}{z^{\nu-1}} =$

$\frac{x^{\frac{1-\pi}{\pi}} dx}{z^{\nu-\theta}} = \pi z^{\theta-1} dz \cdot ve^{\frac{\nu}{\eta}} fz^{\eta} gz^{2\eta} + \&c.$ Quoniam vero est

$x^{\frac{1}{\pi}} = ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta}$ erit $\frac{x^{\frac{1}{\pi}}}{z^{\nu}} = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}$, & proinde

$\frac{x^{\frac{\lambda-1}{\pi}}}{z^{\nu\lambda-\nu}} = \frac{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}}{z^{\nu-\theta}} \Big|_{\lambda-1}$ unde $\frac{x^{\frac{1-\pi}{\pi}} dx \cdot x^{\frac{\lambda-1}{\pi}}}{z^{\nu-\theta} z^{\nu\lambda-\nu}} = \frac{x^{\frac{\lambda-\pi}{\pi}} dx}{z^{\nu\lambda-\theta}} =$
 $\pi z^{\theta-1} dz \cdot ve^{\frac{\nu}{\eta}} + \nu + \eta \cdot fz^{\eta} + \nu + 2\eta \cdot gz^{2\eta}$ in $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \&c. \Big|_{\lambda-1}$.

Cum autem $x^{\frac{1}{\pi}} = ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \&c.$ erit $x^{\frac{\tau}{\pi}} =$
 $ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} \Big|_{\tau}$ & ob id $a + b \cdot x^{\frac{\tau}{\pi}} \Big|_{\omega} = a + b$ in

$ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \&c. \Big|_{\tau} \Big|_{\omega}$. Hinc itaque colligitur $\frac{x^{\frac{\lambda-\pi}{\pi}} dx}{z^{\nu\lambda-\theta}}$.

$a + b \cdot x^{\frac{\tau}{\pi}} \Big|_{\omega} = \pi z^{\theta-1} dz \cdot ve^{\frac{\nu}{\eta}} + \nu + \eta \cdot fz^{\eta} + \nu + 2\eta \cdot gz^{2\eta} + \&c.$

$e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + fz^{3\eta} + \&c. \Big|_{\lambda-1} \cdot a + b \cdot ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} \Big|_{\tau} \Big|_{\omega} =$

$x^{\frac{\sigma}{\pi}} dx \cdot a + b \cdot x^{\sigma} \Big|_{\omega}$, ponendo scilicet secundum auctorem $\frac{\lambda-\pi}{\pi} = 9$,

$$\nu\lambda = \theta, \text{ \& } \frac{\tau}{\pi} = \sigma, \text{ unde fiet } \frac{x^{\frac{\lambda-\pi}{\pi}} dx}{z^{\nu\lambda-\theta}} \cdot \frac{a+b \cdot x^{\frac{\tau}{\pi}}}{\frac{\tau}{\pi}} \Big|^\omega = x^\theta dx.$$

$$\frac{a+b \cdot x^\sigma}{\frac{\tau}{\pi}} \Big|^\omega.$$

COROLL. X.

Si areae quadrandae fluxio est $\pi SR \div \phi RS \cdot R^{\lambda-1} S^{\mu-1} \cdot \frac{aS^\nu + bR^\tau}{\frac{\tau}{\pi}} \Big|^\omega$,
 feu $\pi SdR \div \phi RdS \cdot R^{\lambda-1} S^{\mu-1} \cdot \frac{aS^\nu + bR^\tau}{\frac{\tau}{\pi}} \Big|^\omega$ quod eodem recidit.
 Existentibus scilicet $R = ez' + fz'^{\nu+\eta} + gz'^{\nu+2\eta} + \&c.$ & ob id $dR =$
 $(\nu ez'^{\nu-1} + \nu+\eta \cdot fz'^{\nu+\eta-1} + \nu+2\eta \cdot gz'^{\nu+2\eta-1} + \&c.) dz$, $S = K +$
 $lz'^\eta + mz'^{2\eta} + \&c.$, & sic $dS = (\eta lz'^{\eta-1} + 2\eta m z'^{2\eta-1}) dz$. Ponatur jam
 $R^\pi S^\phi = x$, & sumendo fluxiones $\pi R^{\pi-1} dRS^\phi + \phi S^{\phi-1} dSR^\pi = dx$,
 dividendo per $R^{\pi-1}$ fiet $\pi S^\phi dR + \phi S^{\phi-1} dSR = dx \cdot R^{1-\pi}$, iterum-
 que dividendo per $S^{\phi-1}$ fiet $\pi SdR + \phi RdS = dx \cdot R^{1-\pi} R^{1-\phi}$, &
 propterea fiet $\pi SdR + \phi RdS \cdot R^{\lambda-1} S^{\mu-1} = dx \cdot R^{\lambda-\pi} S^{\mu-\phi}$. Cum
 vero fit $R^\pi S^\phi = x$, erit $R = x^{\frac{1}{\pi}} S^{-\frac{\phi}{\pi}}$, & $R^\tau = x^{\frac{\tau}{\pi}} S^{-\frac{\phi\tau}{\pi}}$, igi-
 tur $dx \cdot R^{\lambda-\pi} S^{\mu-\phi} \text{ in } \frac{aS^\nu + bR^\tau}{\frac{\tau}{\pi}} \Big|^\omega = dx \cdot R^{\lambda-\pi} S^{\mu-\phi+\nu\omega}$.
 $\frac{a+b \cdot x^\sigma}{\frac{\tau}{\pi}} \Big|^\omega = \pi SdR + \phi RdS \text{ in } \frac{aS^\nu + bR^\tau}{\frac{\tau}{\pi}} \Big|^\omega$, cum secundum auctorem
 fit $-\nu = \frac{\phi\tau}{\pi}$, seu $\frac{\nu}{\tau} = -\frac{\phi}{\pi}$, & $\frac{\tau}{\pi} = \sigma$. Ponatur rursus juxta
 Newtonum $\frac{\mu+\nu\omega}{\lambda} = \frac{\phi}{\pi}$, unde $\mu + \nu\omega = \frac{\lambda\phi}{\pi}$, substituaturque hic valor
 pro $\mu + \nu\omega$, & fiet $\pi SdR + \phi RdS \cdot R^{\lambda-1} S^{\mu-1} \cdot \frac{aS^\nu + bR^\tau}{\frac{\tau}{\pi}} \Big|^\omega = dx \cdot$
 $R^{\frac{\lambda\pi-\pi\pi}{\pi}} S^{\frac{\lambda\phi-\pi\phi}{\pi}} \cdot \frac{a+b \cdot x^\sigma}{\frac{\tau}{\pi}} \Big|^\omega = dx \cdot x^{\frac{\lambda-\pi}{\pi}} \cdot \frac{a+b \cdot x^\sigma}{\frac{\tau}{\pi}} \Big|^\omega = x^\theta dx.$
 $\frac{a+b \cdot x^\sigma}{\frac{\tau}{\pi}} \Big|^\omega$

$\frac{a + bx^\sigma}{\pi}$, cum sit $R^\pi S^\phi = x$, & ob id $R^{\frac{\lambda\pi - \pi\pi}{\pi}} \cdot S^{\frac{\lambda\phi - \pi\phi}{\pi}} = x^{\frac{\lambda - \pi}{\pi}}$
 $= x^\theta$, ob $\frac{\lambda - \pi}{\pi} = \theta$. Unde constat propositum.

Schol. Conducunt hæc corollaria ad reductionem fluxionum arearum curvarum quadrandarum in simpliciores, nec non ad reductionem æquationum affectarum in non affectas, unde in quibusdam casibus, sicut ex coroll. 7 & 8. colligi potest, integrationes hujusmodi æquationum redduntur formæ propositionum antecedentium, per quas sic obtineri poterunt.

PROP. X.

Invenire figuras simplicissimas, cum quibus curva quævis geometrice comparari potest, cujus ordinatim applicata y per æquationem non affectam ex data abscissa z determinatur.

CASUS I.

Heic continetur casus simplicissimus, qui ex sola regula differentiandi constat.

CASUS II.

Ponendo $\nu = 1$ facile constat quomodo ope corollarii secundi prop. 9. perveniatur ad ordinatam propositam. Si deinde rejiciantur unitates de indicibus $\frac{\theta - \eta}{\eta}$, & $\lambda - 1$, pervenitur ad fluxiones arearum simplicissimarum, quæ aut sunt sectionum conicarum vel aliarum simplicium, quibus tum pro datis assumtis curvæ propositæ area per prop. 7. inveniri potest. Quando denique per hanc viam ad figuras simplices perventum fuerit, fieri potest illas ejus esse formæ, ut si fluxio areæ cujusdam notæ per propositionem 3. invenienda illi addatur vel subtrahatur, fluxio areæ inde prodiens induat formam in corollariis 9 & 10. Prop. 9. assumtam, qua ratione illa in figuras illas simplices ibi expositas converti poterit, ejusque fluens inveniri per propositiones antecedentes, ex qua area prodeunte area illa data cujus fluxio addita vel subducta erat, subduci vel eidem addi debet, ut area curvæ propositæ habeatur.

CASUS III.

Hic casus reducitur, sicut monet auctor, distinguendo fluxionem areae propositae in partes, ad casum secundum.

CASUS IV.

Reductio secundum hunc casum similiter pendet a coroll. 6, 9 & 10. prop. 9. atque a propositione 8:va, ac reductio in casu 2 instituitur secundum corollaria 5, 9, 10, Prop. 9 & prop. 7.

CASUS V.

Summa enim arearum aequalis est areae, cujus ordinata, vel fluxio, aequalis est summae fluxionum illarum arearum, quod constat per annotationem primam ad Propositionem 5.

COROLL. I.

Hocce corollarium tantummodo continet exemplum ad casum quintum.

COROLL. II.

In hoc corollario usus corollarii 7. ad Prop. 9. exponitur, cujus ope Auctor heic affirmat aequationes affectas mutari in non affectas, easque quae sic obtinentur aut admittere quadraturam absolutam, seu sicut auctori mos est loqui, comparisonem cum figuris rectilineis, aut comparisonem cum figuris simplicissimis. Hæc tamen intelligenda sunt de iis aequationibus affectis, quæ applicari possunt ad Coroll. 7. cum non omnes plurium terminorum ejus sint conditionis. De omnibus autem trium terminorum assertio valet, cujus exemplum sit æquatio $y^3 - az^2 + z^3 = 0$, quæ per corollarium sæpius dictum 7. mutatur in non affectam. Curva cujus hæc est æquatio deinde comparisonem admittit cum figuris rectilineis. Si vero hujusmodi comparatio non obtineat, æquatio affecta mutata in non affectam tamen comparabitur cum figuris simplicibus, & hac ratione quadraturam dabit secundum methodos ab auctore prius expositas. Hoc obtinere de omnibus curvis, quarum æquationes sunt affectæ, triumque tantum terminorum, ex forma generali æquationis affectæ $y^a . e + fy^n z^d + \&c. = z^b$

$= z^\beta . k + ly^n z^\delta + \&c.$ constat. Isto nitebatur principio assertio Newtoni in Epistola ad Collinsium anno 1676. data, ubi hæc habet. *Nulla exstat curva, cujus æquatio ex tribus constat terminis, in qua licet quantitates incognitæ se mutuo afficiant, vel indices dignitatum sint surdæ quantitates, (verbi gratia $ax^\lambda + bx^\mu y^\sigma + cy^\tau = 0$, ubi x designat basin, y ordinatam, $\lambda, \mu, \sigma, \tau$, indices dignitatum ipsius x & y , & a, b, c quantitates cognitæ una cum signis suis $+$ vel $-$) nulla, inquam hujusmodi est curva, de qua an quadrari possit nec ne, vel quænam sint figuræ simplicissimæ, quibuscum comparari possit, sive sint conicæ sectiones, sive aliæ magis complicatæ intra horæ octantem respondere non possim.* Si curvæ æquatio autem sit plurium quam trium terminorum, & secundum cor. 7. in non affectam mutari nequeat, aliæ tentandæ sunt methodi, quæ quidem hoc tractatu non continentur, tamen partim a Mathematicis hodiernis docentur, partim in quovis casu particulari a Mathematicæ doctis investigari possunt. Exempla reductionum secundum hanc propositionem heic prætereo, cum illa in calculis formularum tabularum, quos exponere reliquis absolutis animus est, habentur: sufficiis heic sensum hujus propositionis explicuisse.

PROP. XI.

Sit ADIC curva quævis abscissam habens $= z$, & ordinatam $BD = y$, & sit AEKC curva alia, cujus ordinata BE æqualis est areæ prioris ADB &c.

Positis iis quæ auctor habet, thesis ejus est, esse aream primam $ADIC = A$, secundam $AEKC = tA - B$, tertiam $AFLC$ esse $= \frac{t^2 A - 2tB + C}{2}$, quartam $AGMC = \frac{t^3 A - 3t^2 B + 3tC - D}{6}$, quintam $AHNC = \frac{t^4 A - 4t^3 B + 6t^2 C - 4tD + E}{24}$. Demonstrationem hujus Theorematis omittit

Newtonus, quia latet in ipso Theoremate, si tantum modo applicetur propositio 2. Ut vero hæc res secundum fluxiones designandi a nobis receptum modum explicetur, observamus Newtonum ponere fluxionem abscissæ semper unitati æqualem, inde quod assumat in quadraturis curvarum abscissam semper fluere motu uniformi, unde ejus

fluxio erit constans, adeoque per quantitatem quamvis datam quæ sit unitas poterit exponi. Hinc quod nobis est yz , seu ordinata in fluxionem abscissæ, quod productum æquatur fluxioni areæ cujus abscissa z & ordinata y , illi est y seu ordinata, quæ sic designat fluxionem areæ. Hisce positis sit abscissa fluens z , & erit area, ad hanc abscissam $= AB$ terminata, æqualis $AHB = \frac{z^4 A - 4z^3 B + 6z^2 C - 4zD + E}{24}$, posito namque $t = z$. Differentietur jam, seu sumantur fluxiones hujus

$$\text{valoris areæ } AHB, \text{ \& habetur } \frac{4z^3 Adz + z^4 dA - 12z^2 Bdz - 4z^3 dB + 12z Cdz + 6z^2 dC - 4Ddz - 4z dD + dE}{24} = \frac{z^3 Adz - 3z^2 Bdz + 3z Cdz - Ddz}{6} + \frac{z^4 dA - 4z^3 dB + 6z^2 dC - 4z dD + dE}{24}.$$

Cum vero per hypothefin sint $ABCDE$ &c.

areæ curvarum ordinatas habentium y, zy, z^2y, z^3y, z^4y &c. erit $A = \int y dz, B = \int yz dz, C = \int yz^2 dz, D = \int yz^3 dz, E = \int yz^4 dz$, unde fumendo fluxiones erit $dA = y dz, dB = yz dz, dC = yz^2 dz, dD = yz^3 dz, dE = yz^4 dz$, &c. positis jam his valoribus pro dA, dB, dC , &c. habetur

$$\frac{z^4 dA - 4z^3 dB + 6z^2 dC - 4z dD + dE}{24} = \frac{z^4 y dz - 4z^4 y dz + 6z^4 y dz - 4z^4 y dz + z^4 y dz}{24} = 0,$$

Fluxio igitur areæ AHB æqualis est ipsi

$$\frac{z^3 Adz - 3z^2 Bdz + 3z Cdz - Ddz}{6},$$

per hypothefin autem erit hæc fluxio æqualis areæ prioris curvæ, seu quod idem est, ordinata hujus curvæ, quæ habetur dividendo fluxionem inventam per dz , æqualis erit areæ

priori AGB ad unitatem applicatæ, quæ proinde nobis est $\frac{AGB}{dz}$. More igitur Newtoni designandi fluxiones abscissæ per unitatem, habetur

$$AGB = \frac{z^3 A - 3z^2 B + 3z C - D}{6}, \text{ seu } AGMC = \frac{t^3 A - 3t^2 B + 3t C - D}{6}.$$

Differentiando jam hunc valorem ipsius areæ $AGMC$ seu AGB , habetur

$$\frac{3z^2 Adz + z^3 dA - 6z Bdz + 3 Cdz + 3z dC - dD}{6} = \frac{z^2 Adz - 2z Bdz + Cdz}{2},$$

reliqui namque termini inveniuntur similiter ac prius æquales nihilo, eritque sic

$$AFB = \frac{z^2 A - 2z B + C}{2}, \text{ vel } AFLC = \frac{t^2 A - 2t B + C}{2}.$$

Fluxionem deinde hujus valoris fumendo habetur

$$\frac{2z Adz + z^2 dA - 2 Bdz - 2z dB + dC}{2} = \frac{2z Adz - 2 Bdz}{2},$$

ergo $AEKC = tA - B$. Hujus denique fluxionem

capien-

capiendo, invenitur $Adz + zdA - dB$, seu $ADIC = A$. Facili autem negotio series hujusmodi arearum continuari potest in infinitum, nam coefficientes numerales terminorum habentur evolvendo quantitatem aliquam $a - b|d$, ubi d est numerus positivus integer, & exponens dignitatis ipsius t in termino primo illius areæ quæ invenienda est. Applicando deinde valorem sic prodeuntem ad quantitatem $d.d - 1.d - 2.d - 3. \&c.$ ita ut factor ejus ultimus $d - 3$, vel alius $d - m$ &c., sit æqualis unitati, cognitisque hoc modo coefficientibus numeralibus, series pro lubitu produci potest, cum ipsi termini per progressionem seriei inventæ manifesti sint. Ponatur jam $t - z = x$, & erit $-dz = dx$, posito t constanti seu data. Et si P, Q, R, S, T , sint areæ curvarum ordinatas habentium y, xy, x^2y, x^3y, x^4y , respective, erit $P = -\int y dx$, $Q = -\int yx dx$, $R = -\int yx^2 dx$, $S = -\int yx^3 dx$, $T = -\int yx^4 dx$ &c. qui valores ipsarum arearum P, Q, R, S, T , ideo negative sunt sumendi, quod adjacent abscissæ ultra ordinatas productæ. Habetur hinc $P = -\int y dz = \int y dz = A$. $Q = -\int yx dx = -\int y \cdot t - z \cdot -dz = -\int t y dz - \int y z dz = tA - B$, $R = -\int yx^2 dx = -\int y \cdot t^2 - 2tz + zz \cdot -dz = t^2 A - 2tB + C$, $S = -\int yx^3 dx = -\int y \cdot t^3 - 3t^2 z + 3tz^2 - z^3 \cdot -dz = t^3 A - 3t^2 B + 3tC - D$. Similiter invenietur $T = t^4 A - 4t^3 B + 6t^2 C - 4tD + E$. Constat igitur hinc esse sicut Auctor monet $ADIC = A = P$, $AEKC = Q$, $AFLC = \frac{R}{2}$, $AGMC = \frac{S}{6}$, $AHNE = \frac{T}{24}$, & sic ulterius.

COROLLARIUM.

Unde si curvæ, quarum ordinatæ sunt y, zy, z^2y, z^3 &c. vel y, xy, x^2y, x^3y &c. quadrari possunt, quadrabuntur etiam $ADIC$ &c.

Nam si hæ curvæ quadrari possunt, habentur per illam quadraturam earum areæ A, B, C, D, E , &c. & proinde areæ curvarum, de quibus auctor loquitur in hoc corollario.

SCHOLIUM.

Quantitatum fluentium fluxiones esse primas secundas tertias quartas aliasque diximus supra. Hæ fluxiones sunt &c.

Hoc

Hoc est Scholium illud, in quo tribuitur Newtono erroneam tradidisse methodum, colligendi fluxiones secundas, tertias, & altiorum ordinum, quando per resolutionem quantitatis fluentis, fluxione sua auctæ, in seriem convergentem, eas obtineri asserere videtur. Celeberrimus Joannes Bernoullius, Mathematicus utique primi ordinis, cuique multa maximi momenti debentur inventa, multam tamen in eo collocaverat operam, ut varia reprehensione digna apud Newtonum inveniret notaretque, licet ipse in hisce suis animadversionibus sæpius lapsus commiserit. Non huc pertinet omnes illos casus examini subicere: circa præsentem tantummodo materiam, quæ agit de methodo Newtoniana perveniendi ad fluxiones superiorum ordinum, in hoc Scholio indicata, quædam notanda adferre animus est. Postquam Newtonus, propositione prima hujus tractatus de quadratura curvarum, docuisset methodum colligendi fluxiones primas quantitatis, vel æquationis quocunque fluentes involventis, addit, per operationes repetitas pergi ad fluxiones secundas, tertias, & sequentes, ubi etiam exempla pro colligendis fluxionibus tertiis ipse adfert, ex quibus constat, eum per eandem regulam quæsisse fluxiones tertias a secundis, ac secundas a primis, & primas a fluentibus. Hinc collationem instituendo colligitur, Newtonum regulam in Scholio indicatam pro elevando binomio ad potestatem quamvis n , ad has fluxiones inveniendas, neutiquam adplicuisse. Itaque minus æquum erit vel dubitare, an Newtonus hujus calculi inventor, sibi habuerit perspectam viam pergendi ad fluxiones altiores, quam ipse nihilominus docuit, sicut Celeberrimus Joannes Bernoullius insinuare videtur, vel cum Domino Nicolao Bernoullio promulgare Newtonum hujusmodi regulam, quæ continetur in hoc Scholio, pro inveniendis fluxionibus superiorum ordinum, præscripsisse, præcipue cum D. N. Bernoullius ipse in sequentibus indicet, Auctorem nostrum alienam ab illa, quam in hoc Scholio invenire sibi videntur DD. Bernoullii, regulam in initio tractatus tradidisse. Si itaque illius nullum exstaret vestigium, tamen multo meliori jure suspicari fas esset, erratum aliquod typographicum Scholii præsentis verum sensum mutasse. Hæc vero explicatio eo magis obtinet, cum ipsum hoc Scholium satis manifeste indicet sensum auctoris in hac regula tradenda longe alium fuisse, quam ipsi tribuitur, initio enim hujus Scholii thesin proponit sequentem, *Hæ fluxiones sunt ut termini serierum infinitarum convergentium*. Nullam igitur aliam terminorum serierum infinitarum convergentium convenientiam cum fluxionibus notat auctor, quam quod hæ sint ut illi, hoc est, in eadem ratione ac illi, unde

unde si sint duæ magnitudines fluentes x & z incrementis suis p & o auctæ, & ad dignitates m & n elevatae, respective, erit per Theore-

ma Newtoni $x \div p^m = x^m \div m z^{n-1} \div \frac{m \cdot m-1}{2} p^2 x^{m-2} \div$

$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{6} p^3 x^{m-3} \div \&c.$; nec non $z \div o^n = z^n \div n z^{n-1} o \div$

$\frac{n \cdot n-1}{2} z^{n-2} o^2 \div \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{6} z^{n-3} o^3 \div \&c.$ Si itaque ipsarum

x^m & z^n fluxiones tertiæ sumantur, habebitur fluxio tertia ipsius x^m

æqualis ipsi $m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot x^{m-3} dx^3$, seu $m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot$

$x^{m-3} p^3$, cum p^3 Newtono idem sit ac dx^3 nobis, nec non fluxio ter-

tia ipsius z^n æqualis ipsi $n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot z^{n-3} dz^3$. erit igitur $n \cdot n-1 \cdot$

$n-2 \cdot z^{n-3} dz^3 : m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot x^{m-3} dx^3 :: \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot z^{n-3} o^3}{6}$

$: \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot x^{m-3} p^3}{6}$, quod nihil aliud est, quam id quod New-

tonus asserit in hoc Scholio. Observandum est, Newtonum in hoc

Scholio supponere, fluxiones primas ipsarum z & x esse o & p , fluxio-

nes autem ipsarum o & p esse nullas, seu quod eodem recidit ipsas

z & x fluere cum motu uniformi, hoc est, si sumenda sit e. g. fluxio

tertia ipsius x^n habetur secundum regulam Newtoni prima ejus fluxio

hæc $n x^{n-1} dx$, secunda hæc $n \cdot n-1 x^{n-2} dx^2 \div n x^{n-1} ddx$, tertia,

$n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot x^{n-3} dx^3 \div 2 \cdot n \cdot n-1 \cdot x^{n-2} dx ddx \div n \cdot x^{n-1} d^3 x \div$

$n \cdot n-1 \cdot x^{n-2} dx ddx$ positis scilicet nec dx nec ddx constantibus, seu

$n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot x^{n-3} dx^3$ posita dx constanti, sicut etiam Auctor in

hoc tractatu de quadratura curvarum supponit fluxionem abscissæ

constantem, seu unitati æqualem. Thesin propositam in sequenti-

bus hujus Scholii exemplo explicat, in quo alium ejus fuisse sensum

quam in ipsa Thesi statuere inimicum foret: itaque dum dicit; tertius

$\frac{n \cdot n-1}{3} o^2 z^{n-2}$ erit ejus incrementum secundum, omissum est per

erratum forte typographicum vocabulum illud ut, ab auctore prius

adhibitum. Accidere etiam forte potuit, ut Newtonus neque, dum

hæc scripserit, attendisset ad particulam illam ut, cum sensum suum

hac in re satis initio Scholii indicaverit, credideritque fortassis se tantum intelligere illum volentibus scribere. Prolixius quidem circa hanc rem occupati fuimus, verum operæ pretium esse duximus illam fusius explicare, cum viris tanti nominis ac Bernoulliis occasionem præbuerit, ad notandam regulam Newtoni in hoc Scholio ut erroneam. Sufficit nobis, dum hunc tractatum notis nostris explicare studemus, etiam quo ad hunc tractatum Auctorem nostrum ab omni paralogismi insimulatione debuisse immunem censi annotasse. Quousque autem ex hoc principio, errores aliqui orti fuerint, in determinandis viribus, quibus urgentur corpora in mediis resistentibus mota, quam rem libro secundo Principiorum Philosophiæ naturalis exponit, non nostrum est heic disquirere.

Sequentia hujus Scholii continent applicationem propositionis præcedentis ad resolutionem æquationum differentialium, quæ ad hanc propositionem referri possunt, quarum illa quæ exempli loco ab auctore adfertur, & est $aadv = avz \div vvz$, nullam parit difficultatem, ob separationem indeterminatarum sine molestia obtinendam, quo ipso problema ad quadraturas curvarum reducitur, & proinde solvitur per methodos ab auctore prius datas. Idemque sentiendum est de æquatione $a^2ddv = adv \div dv^2$ adplicando propositionem XI.

Æquatio $a - bx^m = cxy^n dy \div ey^{2n} dy^2$, quæ secundum auctorem tres involvit incognitas quantitates seu fluentes, puta x y & dy , ponendo $y^n dy = dv$, novam nempe fluentem introducendo, reducitur ad quadraturas. Per hanc enim suppositionem habetur $y^{2n} dy^2 = dv^2$ & æquatio migrat, substituendo valores hos, in hanc $a - bx^m = cvdv \div edv^2$, seu $adx^2 - bx^m dx^2 = cxdvdx \div edv^2$, complendo scilicet dimensiones fluxionum per fluxionem constantem dx , quæ auctori est unitas. Hæc æquatio extrahendo radicem dat $dv = -$

$$\frac{cxdx}{2e} \pm dx \sqrt{\frac{a}{ee} - \frac{bx^m}{ee} \div \frac{c^2 x^2}{4ee}}, \text{ unde hæc æquatio reducta est ad qua-}$$

draturam curvæ, cujus abscissa est x & ordinatim applicata $-\frac{cx}{2e} \pm$

$$\sqrt{\frac{4a - 4bx^m + c^2 x^2}{4ee}}, \text{ quæ per antecedentes methodos inventa dat va-}$$

lorem

lorem ipsius v , & proinde, cum per æquationem $y^n dy = dv$, sit $v = \frac{1}{n+1} y^{n+1}$, æquationem inter duas tantum incognitas x & y inve-
niendam.

Æquatio $ax^m + bx^n \mid^p = rex^{r-1}y^s + sex^r y^{s-1} dy - fy^t dy$, com-
plendo dimensiones fluxionum migrat in hanc $ax^m + bx^n \mid^p . dx =$
 $rex^{r-1}y^s dx + sex^r y^{s-1} dy - fy^t dy$. Hujus æquationis partis prioris
integrale habetur per quadraturam curvæ, cujus abscissa x & ordina-
tim applicata $ax^m + bx^n \mid^p$. Partisque posterioris priores duo termi-
ni sunt fluxiones fluentis $ex^r y^s$, terminusque ultimus fluxio ipsius
 $\frac{f}{t+1} y^{t+1}$.

Atque in genere omnis æquatio, cujus indeterminatæ separationem
admittunt, ad quadraturas reducitur, nec non omnis æquatio, cujus
una pars reduci potest ad duas tantum incognitas, scilicet x & dx ,
alterius autem partis integrale quocunque modo habeatur. Hujus
exempla innumera effingi possunt.

*Et nota, quod fluens omnis, quæ ex fluxione prima colligitur augeri
potest vel minui quantitate quavis non fluente &c.*

Quoniam constantium quantitatum fluxiones sint nullæ, confide-
rari debet omnis æquatio differentialis tanquam ejus conditionis, ut
illa æquatio, cujus hæc est differentialis, etjam involvere potuisset ter-
minos aliquot constantes. Quando igitur regressio a fluxionibus ad ipsas
fluentes secundum regulas vel solutionem quamvis instituitur, ipsaque
æquatio fluens obtinetur, oportet eam æquationem quantitate aliqua
indeterminata constanti augere, & hoc modo integrale inventum red-
dere completum, quæ quantitas per naturam problematis secundum
regulam tradendam determinari debet. Ut si quantitatis ipsius dx in-
tegrale sit sumendum, illud erit $x + a$, nam quantitatum $x - b$, x ,
 $x + b$ fluxiones sunt singulæ æquales ipsi dx , in casu igitur primo
erit $a = -b$, in secundo $a = 0$, in tertio $a = b$. Regula, secundum
quam hujusmodi correctio instituenda est, sic concipi potest. Æqua-
tionis integralis inventæ una incognitarum ponatur nihilo æqualis,

ille valor, quem incognitarum altera per hanc suppositionem adepta fuerit, tum pro ipsa erit substituendus, & termini sic orti erunt illi qui addendi vel demendi sunt ab ipso integrali, prout hi termini sunt vel negativi vel affirmativi. Ut si quadrando aliquam curvam, cujus abscissa est x , perventum fuerit ad aream $z = bx^n + cx^m$, tum corrigendo hæc forma huic æquationi tribuatur, scil. $z = bx^n + cx^m + A$, ubi A denotat quantitatem constantem addendam; ponatur jam area $z = 0$, & erit $A = -bx^n - cx^m$, quando autem evanescit z datur x quæ proinde fit a , & erit $A = -ba^n - ca^m$, & ob id $z = bx^n + cx^m - ba^n - ca^m$. Vel si sit æquatio integralis inventa hæc $ay^m x^n = bxp + cxyr + fy^k$, tum sic scribatur $ay^m x^n = bxp + cxyr + fy^k + A$, ponatur jam $y = 0$, & tum fiat $x = g$ fietque $A + bgp = 0$, seu $A = -bgp$, & æquatio integralis correctæ $ay^m x^n = bxp + cxyr + fy^k - bgp$. Si autem evanescente y simul evanescat x , tum fiet $g = 0$, & in hoc casu æquatio integralis sine additione constantis est completa, seu nulla indiget correctione. Hisce jam absolutis ad calculos tabularum, quæ formas continent, progredimur.

CALCULUS TABULÆ PRIORIS.

FORMA I. $az^{\eta-1} dz = ydz$, unde per prop. I. erit $\frac{a}{\eta} z^{\eta} = \int ydz = t = \text{area quæsitæ}.$

FORMA II. $\frac{az^{\eta-1} dz}{e^2 + 2efz^{\eta} + f^2 z^{2\eta}} = \frac{az^{\eta-1} dz}{e + fz^{\eta}} = az^{\eta-1} dz \cdot \frac{1}{e + fz^{\eta}} =$

ydz , comparisonem instituendo cum propositione 5, per quam est $az^{\eta-1} dz \cdot \frac{1}{e + fz^{\eta}} = z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz \cdot a + bz^{\eta} + \&c.$ erit

$\eta = \theta$, $\frac{\theta}{\eta} = r = 1$, $\lambda - 1 = -2$, $\lambda = -1$, $r + \lambda = s = 0$, $a = a$, $b = 0 = c$, $e = e$, $f = f$, $g = 0 = h$, & substitutis his valoribus in area

generali Prop. 5 habetur $\int az^{\eta-1} dz \cdot \frac{1}{e + fz^{\eta}} = \frac{az^{\eta}}{e^2 + e f z^{\eta}} =$

$\int ydz = t = \text{area quæsitæ}$, & in qua index η affirmativus dat aream affirmativam, quæ proinde adjacet tum abscissæ tum ordinatæ. Ponatur jam η negativus, & reducendo sicut prius indicatum est invenitur

nitur $az^{\eta-1} dz \cdot \sqrt{e + fz^{\eta}} = az^{\eta-1} dz \cdot \sqrt{e + ez^{-\eta}}$. Comparando jam ut prius habetur $\theta - 1 = \eta - 1$, & $\theta = -\eta$, $\eta = -\eta$, unde $\frac{\theta}{\eta} = \frac{-\eta}{-\eta} = 1 = r$, $\lambda = -1$, $r + \lambda = s = 0$, $a = a$, $b = 0 = c$,

$e = f$, $f = e$, & substituendo hos valores fiet $\int az^{\eta-1} \sqrt{e + ez^{-\eta}} dz = \frac{-a}{\eta e f + \eta f f z^{\eta}}$. Quæ quoniam est negativa adjacet abscissæ ultra ordi-

natam productæ. In utroque igitur casu tum quando η est affirmativus tum quando est negativus ordinata proposita absolutam admittit quadraturam, quod indicium est omnes curvas quarum ordinatæ sunt hujus formæ in utroque hoc casu esse absolute quadrabiles, feriemque abrumperè.

FORMA III.

Species I. $az^{\eta-1} dz \cdot \sqrt{e + fz^{\eta}} = az^{\eta-1} dz \cdot \sqrt{e + fz^{\eta}}^{\frac{1}{2}}$. Comparando cum Prop. 5. habetur $\theta - 1 = \eta - 1$, $\theta = \eta$, $\frac{\theta}{\eta} = 1 = r$, ob $\eta = \eta$, $\lambda - 1 = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$, unde $r + \lambda = s = \frac{5}{2}$, igitur cum s non sit negativus integer, series pro area continuabitur in infinitum, quod ex forma seriei est perspicuum. Adeoque cum series non abrumpat, dum η est affirmativus, tentandus est alter modus dum η est negativus,

est scil. $az^{\eta-1} dz \cdot \sqrt{e + fz^{\eta}}^{\frac{1}{2}} = az^{\frac{3\eta}{2}-1} dz \cdot \sqrt{e + ez^{-\eta}}^{\frac{1}{2}}$, unde comparando erit $\frac{3\eta}{2} - 1 = \theta - 1$, $\theta = \frac{3\eta}{2}$, $\eta = -\eta$, unde $\frac{\theta}{\eta} = -\frac{3}{2} = r$, $\lambda - 1 = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$, $r + \lambda = s = 0$. Substitutis sic hisce valoribus erit

$\int az^{\frac{3\eta}{2}-1} dz \cdot \sqrt{e + ez^{-\eta}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2a}{3\eta f} \cdot \sqrt{e + fz^{\eta}}^{\frac{3}{2}} = \frac{2a}{3\eta f} R^{\frac{3}{2}} = t$, existente nimirum $R = \sqrt{e + fz^{\eta}}$.

Species 2. $az^{2\eta-1} dz \cdot \sqrt{e + fz^{\eta}} = az^{\frac{5\eta}{2}-1} dz \cdot \sqrt{e + ez^{-\eta}}^{\frac{1}{2}}$. Comparando

rando jam habetur $\theta - 1 = \frac{5\eta}{2} - 1$, $\theta = \frac{5\eta}{2}$, $\eta = -\eta$, $\frac{\theta}{\eta} = \frac{\theta}{-\eta} = r = -\frac{5}{2}$, $\lambda - 1 = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$, $r + \lambda = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1 = s$. Substitutis suis

valoribus erit $\int az^{2\eta-1} dz \sqrt{e + fz^\eta} = \frac{az^2}{\eta} \cdot f + ez^{-\eta} \Big|^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{5}{2}f} +$

$$\frac{ez^{-\eta}}{-\frac{5}{2} - \frac{5}{2} + 1 \cdot ff} = \frac{-4e + 6fz^\eta}{15\eta ff} aR^3 = t.$$

Species 3. $az^{3\eta-1} \cdot \sqrt{e + fz^\eta} = az^2 \frac{7\eta}{2} - 1 dz \cdot f + ez^{-\eta} \Big|^{-\frac{3}{2}}$. Comparando sic habetur $\theta - 1 = \frac{7\eta}{2} - 1$, $\theta = \frac{7\eta}{2}$, $\eta = -\eta$, $\frac{\theta}{\eta} = \frac{\theta}{-\eta} = r = -\frac{7}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$, $r + \lambda = s = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -2$. Substituendo hos valores ut

prius, erit $\int az^{3\eta-1} dz \cdot \sqrt{e + fz^\eta} = \frac{az^2}{-\eta} \cdot f + ez^{-\eta} \Big|^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{-2}{7f} +$

$$\frac{2e}{-\frac{7}{2} - \frac{7}{2} + 1 \cdot ff} z^{-\eta} + \frac{2ee}{-\frac{7}{2} - \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot f^3} z^{2\eta} = \frac{16ee - 24efz^\eta - 30ffz^{2\eta}}{105\eta f^3}$$

in $a \cdot e + fz^\eta \Big|^{-\frac{3}{2}} = t.$

Species 4. $az^{4\eta-1} dz \cdot \sqrt{e + fz^\eta} = az^2 \frac{9\eta}{2} - 1 dz \cdot f + ez^{-\eta} \Big|^{-\frac{3}{2}}$. Comparando erit $\theta - 1 = \frac{9\eta}{2} - 1 = \theta = \frac{9\eta}{2}$, $\eta = -\eta$, $\frac{\theta}{\eta} = \frac{\theta}{-\eta} = r = -\frac{9}{2}$, $\lambda - 1 = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$, $r + \lambda = s = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -3$. Et substituendo hos valores ad modum in speciebus prioribus ostensum invenietur area illa, quæ apud Auctorem est. Et ad hunc modum continuando hujus formæ species in infinitum semper harum curvarum quadraturæ invenientur in terminis finitis ob s numerum semper integrum & negativum.

FORMA. IV.

Species 1. $\frac{az^{\eta-1} dz}{\sqrt{e + fz^\eta}} = az^2 \frac{\eta}{2} - 1 \cdot f + ez^{-\eta} \Big|^{-\frac{1}{2}}$. Comparando jam est

est $\theta - 1 = \frac{\eta}{2} - 1$, $\theta = \frac{\eta}{2}$, $\eta = -\eta$, $\frac{\theta}{\eta} = -\frac{\theta}{\eta} = -\frac{1}{2} = r$, $\lambda - 1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $r + \lambda = s = 0$, $a = a$, $b = 0 = c$, $e = f$, $f = e$, $g = 0 = b$. Substitutis his valoribus erit $\int az^{\eta-1} dz \cdot e + fz^{\eta} \Big|^{-\frac{1}{2}} = \frac{az^{\frac{\eta}{2}}}{-\eta}$. $f + ez^{-\eta} \Big|^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{-f} = \frac{2a}{\eta f} \cdot e + fz^{\eta} \Big|^{\frac{1}{2}} = t$. Quadraturæ reliquarum specierum hujus formæ similiter obtinentur.

CALCULUS TABULÆ POSTERIORIS.

Sicut Tabula prior continet hujusmodi formas, quæ comparando cum Prop. 5, admittunt quadraturas absolutas, seu ex terminis numero finitis constantes, ita hæc secunda tabula exhibet formas, quæ quadraturas admittunt in terminis non nisi numero infinitis, si applicentur ad propositionem 5. Igitur cum præstet eas formas reducere ad simplices, tanquam prius per varios calculos proxime notas, quales sunt Hyperbolæ & Ellipseos, Circulo ad Ellipsin relato, quadraturæ, Auctor eorum, quæ allata sunt propositionibus 7, 8, 9, 10, applicationem ostendendo, varias tradidit ejus generis formas, quarum quadraturæ ex datis sectionum conicarum prius dictarum quadraturis obtinentur. Hæ Formæ sunt sequentes.

FORMA. I.

Species 1. $\frac{az^{\eta-1} dz}{e + fz^{\eta}} = ydz$. Fiat per coroll. 2. prop. 9. $z^{\eta} = x^{\nu} =$

x , cum $\nu = 1$ hinc $\eta z^{\eta-1} dz = dx$, & ob id $\frac{az^{\eta-1} dz}{e + fz^{\eta}} = \frac{adx}{\eta e + \eta fz}$, &

$$\int \frac{az^{\eta-1} dz}{e + fz^{\eta}} = \frac{1}{\eta} \int \frac{adx}{e + fx} = \frac{1}{\eta} s = t.$$

Species 2. $\frac{az^{2\eta-1} dz}{e + fz^{\eta}} = ydz$. Ponatur ut prius $z^{\eta} = x$, unde inve-

nitur

nitur $\frac{az^{2\eta-1}dz}{e+fz^\eta} = \frac{a}{\eta} \cdot \frac{xdx}{e+fx}$. Assumta igitur $\int \frac{dx}{e+fx} = \int \frac{x^0 dx}{e+fx}$,
 ut cognita, quoniam est hyperbolæ intra assymptotos, ut infra videbi-
 tur, poterit $\int \frac{xdx}{e+fx}$ per casum primum Prop. 7. inveniri, cum secun-
 dum illum casum index $\theta - 1 = 0$, auctus jam sit additione ipsius $\eta =$
 1 . Comparando igitur habetur $\int z^{\theta-1} R^{\lambda-1} dz = A = \int x^0 dx$.
 $\frac{1}{e+fx} = s$, & $\int z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz = B = \int x dx \cdot \frac{1}{e+fx}$, $\theta - 1$
 $= 0$, $\theta = 1$, $\eta = 1$, $\frac{\theta}{\eta} = r = 1$, $\lambda - 1 = -1$, $\lambda = 0$, $r + \lambda = s = 0$
 $\frac{1}{e+fx} = R^\lambda = R^0 = 1$, existente $R = e+fx$. Ponendo itaque in se-
 rie X valores inventos pro ipsis A , B , &c. invenitur $\int \frac{az^{2\eta-1} dz}{e+fz^\eta} =$

$$\frac{a}{\eta f} \cdot x - \frac{es}{\eta f} = t = \frac{az^\eta}{\eta f} - \frac{ef}{\eta f}.$$

Species 3. $\frac{az^{3\eta-1} dz}{e+fz^\eta} = ydz$. Fiat ut prius $z^\eta = x$, unde $\frac{az^{3\eta-1} dz}{e+fz^\eta}$
 $\frac{a}{\eta} \cdot \frac{x^2 dx}{e+fx}$. Area igitur inventa in specie priori assumta pro A & hac
 pro B , comparando cum serie X , eodem ac in specie priori osten-
 sum est modo, habebitur area illa quam auctor indicat.

Quadraturæ præcedentes etiam obtineri possent brevius, si divisio
 numeratoris cujusque speciei per ejus denominatorem instituat, &
 contineturque, donec perveniatur ad formam speciei primæ, &
 hoc modo invenitur omnes terminos præter hunc ultimum esse abso-
 lute quadrabiles, illum vero, sicut in specie prima ostensum est,
 quadrari. Hac ratione iidem valores prodeunt pro areis illis, ac in
 antecedentibus inventum est. Area autem s seu sectionis conicæ sic
 invenitur. In recta linea $Aa = \frac{e}{f}$ (Fig. 9.) producta sit $aB = x$, &
 erigatur a puncto a ad AB perpendicularis $aG = \frac{a}{e}$, assymptotis de-
 inde

inde reſtangulis AF ABN deſcribatur hyperbola tranſiens per punctum G , eritque per naturam Hyperbolæ $Aa \cdot aG = AB \cdot BD$, hoc eſt dicta ordinata reſtangula $DB = y \frac{a}{f} = \frac{e}{f} + x \cdot y$ hinc $ydx = \frac{adx}{e+fx}$, ſeu $\int \frac{adx}{e+fx} =$ areæ hyperbolice $aGDB$.

FORMA. II.

Species I. $\frac{az^{\frac{\eta}{2}-1} dz}{e+ fz^{\eta}} = ydz$. Ponatur ſecundum Auctorem $\sqrt{\frac{a}{e+ fz^{\eta}}} = x$ & ſumendo fluxiones huius æquationis habetur per debitam reductionem $-\frac{2adx}{vfx} = \frac{az^{\eta-1} dz}{e+ fz^{\eta}}$. Cum vero eſt $x = \sqrt{\frac{a}{e+ fz^{\eta}}}$, erit

$$z^{\frac{\eta}{2}} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{a}{f} - \frac{exx}{f}} \text{ unde habetur } \frac{az^{\frac{\eta}{2}-1} dz}{e+ fz^{\eta}} = -\frac{2adx}{f\eta \cdot \sqrt{\frac{a}{f} - \frac{exx}{f}}}. \text{ In}$$

hoc igitur caſu ubi tum e tum f eſt quantitas affirmativa, centro A ſemiaxi tranſverſo $Aa = \sqrt{\frac{a}{e}}$ (Fig. 12.), conjugato $AP = \sqrt{\frac{a}{f}}$ deſcribatur Ellipſis $KPDa$, cujus abſciſſa $AB = x$, ordinata $BD = v$, junctaque AD ipſi admodum propinqua agatur AE , & punctis E & D coeuntibus erit, triangulum AED fluxio areæ Ellipticæ APD . Eſt autem AED , (demittendo a puncto A ad tangentem Ellipſeos in D puncto ſcil. HET perpendicularum AH), æquale ipſi $\frac{ED \cdot AH}{2} =$

$\frac{adx}{2f\sqrt{\frac{a}{f} - \frac{exx}{f}}}$, qui valor facile colligitur. Per ſimilitudinem namque

triangulorum BDT & TAH & inventionem tangentis DT , obtinetur AH , æquatio autem $ED = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ dat valorem ipſius ED , ex quibus debite reducendo valor ipſius $\frac{ED \cdot AH}{2}$ dictus prodibit. Erit igitur

$$-\int \frac{adx}{2f\sqrt{\frac{a}{f} - \frac{exx}{f}}} = \text{area Ellipticæ } ADa, \text{ \& ob id } \frac{1}{\eta} \int \frac{2adx}{f\sqrt{\frac{a}{f} - \frac{exx}{f}}} =$$

$$\frac{4ADa}{\eta} = \frac{4AODa - 2AODB}{\eta} = \frac{4s - 2x\eta}{\eta}.$$

Si f est negativa quantitas, in priori valore ipsius $\frac{\frac{\eta}{az^2} - 1}{e + fz^\eta} dz$ mu.

tetur signum ipsius f , & fiet propterea $\frac{\frac{\eta}{az^2} - 1}{e - fz^\eta} dz = \frac{2adx}{f\eta\sqrt{\frac{exx}{f} - \frac{a}{f}}}$

Centro igitur A (Fig. 11.) semiaxi transverso $Aa = \sqrt{\frac{a}{e}}$ & conjuga-
to $AL = \sqrt{\frac{a}{f}}$ describatur Hyperbola aGD , cujus abscissa $AB = x$, or-

dinata rectangula $BD = v$, eritque $v = \sqrt{\frac{exx}{f} - \frac{a}{f}}$. Ducatur per D
tangens ad hyperbolam, cui productæ perpendicularis AF occurrat
in F , & methodo consimili ac in casu priori invenitur triangulum

$$ADE = \frac{DE \cdot AF}{2} = \frac{adx}{2f\sqrt{\frac{exx}{f} - \frac{a}{f}}}. \text{ Est ergo } \int \frac{adx}{2f\sqrt{\frac{exx}{f} - \frac{a}{f}}} = \text{area hy-}$$

perbolicæ $ADGa$, & proinde erit $\int \frac{2adx}{\eta f\sqrt{\frac{exx}{f} - \frac{a}{f}}} = \frac{4ADGa}{\eta} =$

$$\frac{2AODB - 4BaD}{\eta}.$$

Eadem hæ quadraturæ per casum secundum Propositionis 7:ma ob-
tineri possunt. Cum enim sit ordinata Ellipseos BD seu $v = \sqrt{\frac{a}{f} - \frac{exx}{f}}$,

erit $vdx = dx\sqrt{\frac{a}{f} - \frac{exx}{f}}$, & ob id $\int vdx = -\int dx \cdot \frac{a}{f} - \frac{exx}{f}^{\frac{1}{2}} = BAD.$

Assum.

Assumta igitur in serie Z' , $-\int dx \cdot \frac{a}{f} - \frac{exx}{f}^{\frac{1}{2}}$ pro A , habetur $P = -\int dx \cdot \frac{a}{f} - \frac{exx}{f}^{\frac{1}{2}}$, & invenitur per æquationem primam seriei Z . Valor sic inventus coincidit cum illo prius exhibito.

Similiter si sit e negativa, f autem affirmativa, erit $\frac{az^{\frac{\eta}{2}}}{-e + fz^{\eta}} dz = \frac{-2adx}{\eta f \sqrt{\frac{a}{f} + \frac{exx}{f}}}$. Describatur itaque hyperbola AD , (Fig. 13.) cujus semiaxis transversus $AP = \sqrt{\frac{a}{f}}$, conjugatus vero $AL = \sqrt{\frac{a}{e}}$, $AB = x$, $BD = v$, eritque per naturam hyperbolæ $v = \sqrt{\frac{a}{f} + \frac{exx}{f}} = \text{aræ hyperbolicæ } ABDP$. Igitur ut paullo superius indicavimus per comparisonem cum serie Z invenietur $-\int \frac{2adx}{\eta f \sqrt{\frac{a}{f} + \frac{exx}{f}}}$.

Quadratura eadem etiam sine auxilio prop. 7. inveniri potest, sicut in casu primo & secundo. Agatur enim a centro hyperbolæ A ad punctum quodvis D in hyperbola recta AD , atque huic admodum propinqua AN , & coeuntibus punctis D & N erit ratio ultima trianguli ADN illa fluxionis aræ ADP . Stantibus autem iis denominationibus quæ in eadem figura paullo superius adhibitæ sunt, erit $AND = \frac{adx}{2f \sqrt{\frac{a}{f} + \frac{exx}{f}}}$, unde constat propositum.

Species 2. $\frac{az^{\frac{3\eta}{2}}}{e + fz^{\eta}} dz = ydz$. Divisionem instituendo numeratoris per denominatorem invenitur $\frac{az^{\frac{3\eta}{2}}}{e + fz^{\eta}} dz = \frac{a}{f} z^{\frac{1}{2}\eta - 1} dz - \frac{ea}{f}$ in

$\frac{z^{\eta-1}}{z^2} dz$. Membri prioris integrale habetur per formam primam

Tabulæ prioris. Membri posterioris integrale cognoscitur per speciem primam hujus formæ. Hujus speciei integrale etiam per seriem X ex dato integrali speciei primæ hujus formæ haberi potest.

Species 3. $\frac{az^{\frac{5\eta}{2}-1}}{e+fz^\eta} dz = ydz$. Similiter ac in specie priori invenitur

$$\frac{az^{\frac{5\eta}{2}-1}}{e+fz^\eta} dz = \frac{a}{f} z^{\frac{3\eta}{2}-1} dz - \frac{ae}{ff} z^{\frac{\eta}{2}-1} dz + \frac{aee}{fff} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}\eta-1} dz}{e+fz^\eta}, \text{cujus}$$

duo priora membra integrantur per formam primam Tabulæ prioris, ultimum vero est speciei primæ hujus formæ.

Quomodo hæ species continuari possint in infinitum ex allatis constat. Inventa quadratura speciei primæ apparet etiam, quod hæ spe-

cies $\frac{az^{\frac{\eta}{2}-1}}{e+fz^\eta} dz$, $\frac{az^{\frac{3\eta}{2}-1}}{e+fz^\eta} dz$ &c., per casum primum Prop. 7. haberi queant.

FORMA. III.

Species 1. $\frac{adz}{z} \cdot \sqrt{e+fz^\eta} = ydz$. Fiat $\frac{1}{z^\eta} = xx$, & sumendo flu-

xiones hujus æquationis erit $\frac{adz}{z} = -\frac{2adx}{\eta x}$, unde debite reducendo

colligitur $\frac{adz}{z} \cdot \sqrt{e+fz^\eta} = -\frac{2adx}{\eta xx} \cdot \sqrt{f+exx}$. In fluxione areæ hu-

jus novæ curvæ, cui æqualis inventa est fluxio areæ curvæ proposita, habetur $\eta = 2$, seu index ipsius x sub vinculo æqualis ipsi 2. Secundum Propositionem 10. igitur ad indicem ipsius x , extra vinculum

lum radicis, qui est -2 , (est scilicet $-\frac{2adx}{\eta xx} = -\frac{2ax^{-2}dx}{\eta}$) addatur η seu 2 , quo pervenietur ad figuram simplicissimam, cum qua curva proposita comparari poterit, scilicet hanc $-\frac{2ax^0dx}{\eta} \cdot \sqrt{f+exx}$.

Assumatur itaque area hujus curvæ, seu $\int x^0 dx \cdot \sqrt{f+exx}$, pro A in serie X , & per æquationem primam illius seriei invenietur $\int x^{-2} dx \sqrt{f+exx} = B$, comparisonem terminorum instituendo secundum modum prius descriptum, qua peracta, scribendo s pro A in valore ipsius C habebitur illa area curvæ, quam designat Auctor.

Sectio autem conica cujus ordinata est $\sqrt{f+exx}$ sic determinatur. Centro A , (Fig. 13.) semiaxi transverso $AP = \sqrt{f}$. & conjugato $AL = \sqrt{\frac{f}{e}}$ describatur hyperbola PD , positisque $AB = x$, $BD = v$, erit $v = \sqrt{f+exx}$, & propterea erit $\int v dx = \int dx \cdot \sqrt{f+exx} = A = \text{area } ABDP = s$.

Si ordinata curvæ propositæ est $\frac{a}{z} \sqrt{e-fz^\eta}$ erit $\int x^{-2} dx \cdot \sqrt{exx-f}$, area quærenda. Centro igitur A (Fig. 11.) & semiaxi transverso $Aa = \sqrt{\frac{f}{e}}$, & conjugato $AL = \sqrt{f}$ describatur Hyperbola, positisque $AB = x$, & $BD = v$ erit $v = \sqrt{exx-f}$, & proinde $\int dx \cdot \sqrt{exx-f} = \text{area hyperbolicæ } aDB$.

Si ordinata curvæ propositæ est $\frac{a}{z} \sqrt{fz^\eta-e}$, erit $\int x^{-2} dx \cdot \sqrt{-exx+f}$ area quærenda, semiaxibus igitur transverso & conjugato Aa & AP (Fig. 12.) iisdem ac in casu antecedenti describatur Ellipsis $KPDa$, & erit $v = \sqrt{f-exx}$, positis $AB = x$ & $BD = v$, erit igitur $\int dx \cdot \sqrt{f-exx} = \text{area Ellipticæ } ABDP = s$.

Ponatur ulterius $\frac{1}{z} = x$, & sumendo hujus æquationis fluxiones erit $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$. Per debitam igitur reductionem erit $\frac{adz}{z} \sqrt{e-fz^\eta}$

$= -\frac{ax^{-2}dx}{\eta} \cdot \sqrt{f+exx}$. In hac est η seu index ipsius x sub vinculo radicis æqualis ipsi 1, adeoque $\eta=1$ bis adjiciendus est indici ipsius x extra vinculum radicis, prius quam pervenitur ad figuram simplicissimam $dx \cdot \sqrt{fx+ex^2}$. In serie igitur X habetur $\int dx \cdot \sqrt{fx+ex^2} = A$, $\int x^{-1}dx \cdot \sqrt{fx+ex^2} = P$, & $\int x^{-2}dx \cdot \sqrt{fx+ex^2} = Q$, unde per æquationem primam illius seriei habetur P & hac inventa per æquationem secundam cognoscitur Q , & proinde area curvæ propositæ eadem ac auctor indicat. Ad inveniendam sectionem conicam cujus ordinata v est æqualis ipsi $\sqrt{fx+exx}$ vel ipsi $\sqrt{ex^2-fx}$, qui sunt casus hujus speciei, centro A (Fig. 12.) axi transverso $Ka = \frac{f}{e}$, conjugato $2AP = \frac{f}{\sqrt{e}}$ describatur Ellipsis KPa , ponendoque $KB = x$, & $BD = v$, erit $v = \sqrt{fx+exx}$. Describatur ulterius centro A (Fig. 11.) axi transverso $Ka = \frac{f}{e}$ & conjugato $2AL = \frac{f}{\sqrt{e}}$ hyperbola, & positis $aB = x$, $BD = v$ & erit $v = \sqrt{fx+exx}$, nec non $v = \sqrt{ex^2-fx}$ describendo hyperbolam iisdem axibus, ponendo autem $KB = x$, & $BD = y$.

Species 2. $\frac{adz}{z^{\eta+1}} \cdot \sqrt{e+fz^{\eta}} = ydz$. Fiat ut prius $\frac{1}{z^{\eta}} = xx$, & eodem modo ac prius invenitur $\frac{adz}{z^{\eta+1}} \cdot \sqrt{e+fz^{\eta}} = -\frac{2adx}{\eta} \cdot \sqrt{f+exx}$. Erit igitur $\int \frac{adz}{z^{\eta+1}} \cdot \sqrt{e+fz^{\eta}} = -\int \frac{2adx}{\eta} \sqrt{f+exx} = -\frac{2as}{\eta}$, ut habet auctor.

Species 3. $\frac{adz}{z^{2\eta+1}} \cdot \sqrt{e+fz^{\eta}} = ydz$. Sit $\frac{1}{z^{\eta}} = x$ & proinde habebitur $\int \frac{adz}{z^{2\eta+1}} \cdot \sqrt{e+fz^{\eta}} = -\int \frac{adx}{\eta} \cdot \sqrt{fx+exx} = -\frac{as}{\eta}$ secundum auctorem.

Species 4. $\frac{adz}{z^{3\eta+1}} \cdot \sqrt{e+fx^\eta} = ydz$. Sit ut prius $\frac{1}{z^\eta} = x$, unde fiet

$$\int \frac{adz}{z^{3\eta+1}} \cdot \sqrt{e+fx^\eta} = - \int \frac{xdx}{n} \cdot \sqrt{fx+exx}. \text{ Cujus quadratura modo}$$

superius descripto assumendo $fdx \cdot \sqrt{fx+exx}$ pro A per seriem X obtinetur. Sectiones conicæ ad has duas species novissimas (pertinentes prius sunt inventæ, & illæ ad secundam speciem habentur in speciei primæ prima resolutione.

Formæ priores, quarum quadraturæ reductæ sunt ad areas sectionum conicarum, quas describendi modos etiam exhibuimus facile reducuntur ad illas circulorum & hyperbolarum æquilaterarum, quæ figuræ adhuc simpliciores censendæ sunt, loco Ellipsium & Hyperbolarum quarumvis. Idem etiam de figuris quas auctor adhibet insequentibus obtinet. Ut si ordinata Ellipseos v inventa esset æqualis

ipsi $\sqrt{\frac{a}{f} - \frac{exx}{f}}$, erit $v = \sqrt{\frac{a}{f} - \frac{exx}{f}} = \sqrt{\frac{e}{f}} \cdot \sqrt{\frac{a}{e} - xx}$, unde radio æquali ipsi $\sqrt{\frac{a}{e}}$ describendo circulum, ponendoque ejus ordinatam

æqualem ipsi t erit $t = \sqrt{\frac{a}{e} - xx}$. Similiter res procedit in hyperbola. Hujusmodi reductiones omisimus, neque in sequentibus a nobis adhibendæ sunt, cum opera nostra in eo versetur, ut Auctoris formas ejusmodi calculo subjiciamus, quæ eadem ac Auctoris conclusiones obtinentur. In usum vero discipulorum, præcipuas circuli & hyperbolæ æquilateræ figuras, quibuscum comparantur formæ comparisonem hujusmodi admittentes, heic apponere locus erit, ut illis tanquam exempla inserviant.

1. Centro A & radio $AD = a$, (Fig. 14.) describatur circulus, sit $AB = x$, $BC = y$, & erit $\int ydx = \int dx \cdot \sqrt{aa - xx} = AKCB$ arcæ.

2. Sit $HB = x$ retentis præterea iisdem denominationibus, & erit $\int ydx = \int dx \cdot \sqrt{2ax - xx} = HKCB$ arcæ.

3. Sit $AB = x$, & ducantur a centro A ad puncta C & E coeuntia, rectæ AC , AE , & a puncto E demittatur perpendicularum Eb in ordi

ordinatam CB , & erit $CB:AC::Eb:EC$, hoc est $\sqrt{aa-xx}:a::dx:EC$
 $= \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$, unde $ACE = \frac{a^2 dx}{2\sqrt{aa-xx}}$, est vero AEC fluxio sectoris
 AKC , ergo $\int \frac{a^2 dx}{2\sqrt{aa-xx}} = AKC \text{ areæ.}$

4. Sit $HB = x$, & eodem modo invenitur idem triangulum $AEC =$
 $\frac{a^2 dx}{2\sqrt{2aa-xx}}$, & proinde $\int \frac{a^2 dx}{2\sqrt{2ax-xx}} = HKCA \text{ areæ.}$

5. Ducatur DO abscindens segmentum circulare $DKOD$, & sit DR
 $= x$, hisce positis invenitur fluxio segmenti $DKOD$ æqualis ipsi
 $\frac{ax dx}{2\sqrt{2ax-xx}}$ & proinde area $AKOD = \int \frac{ax da}{2\sqrt{2ax-xx}}$.

6. Sit $DO = x$, & $DH = a$, & hisce positis invenitur eadem area
 $DKOD = \int \frac{x^2 dx}{2\sqrt{aa-xx}}$.

7. Sit AK ut prius æqualis ipsi a , agatur per K tangens ad circu-
 lum KM , sitque $KL = x$, $LM = dx$, & erit radio AL describendo
 arcum evanescentem LN , $AL:AK::LM:LN = \frac{adx}{\sqrt{aa+xx}}$. Est simili-

ter $AL:LN::AO:OP = \frac{a^2 dx}{aa+xx}$. Est igitur triangulum $AOP =$

$\frac{\frac{a^3}{2} dx}{aa+xx}$ & ob id $\int \frac{\frac{a^3}{2} dx}{aa+xx} = AKO \text{ areæ.}$

1. Centro A & axi $AB = a$ (Fig. 15.) describatur Hyperbola æqui-
 latera BPD . Sit $AF = x$, & ordinata rectangula $FG = y$, & erit per
 naturam hyperbolæ $ydx = dx \cdot \sqrt{xx-aa}$, & proinde erit $dx \sqrt{xx-aa}$
 $= BDE \text{ areæ.}$

2. Sit $BF = x$, & erit $\int dx \cdot \sqrt{2ax+xx} = BDE$.

3. Sit

3. Sit Q alter vertex hyperbolæ & erit, ponendo $QF = x$, $\int dx \sqrt{xx - 2ax} = BDE$.

4. A centro hyperbolæ A ducantur ad puncta coeuntia D & H in hyperbola rectæ AD & AH , eritque triangulum AHD fluxio areæ $ADPB$, est vero posito $AF = x$, $AHD = \frac{a^2 dx}{2\sqrt{xx - aa}}$, ergo $\int \frac{a^2 dx}{2\sqrt{xx - aa}} = ADPB$ areæ.

5. Sit $BF = x$, & erit $\int \frac{a^2 dx}{2\sqrt{2ax + xx}} = ADPB$ areæ cum in hoc casu $AHD = \frac{a^2 dx}{2\sqrt{2ax + xx}}$.

6. Similiter si sit $QF = x$, erit $\int \frac{a^2 dx}{2\sqrt{xx - 2ax}} = ADPB$ areæ.

7. Agatur BD abscindens aream $BPDB$, & sit $BF = x$, eritque $\int \frac{ax dx}{2\sqrt{2ax + xx}} = BDPB$ areæ.

8. Sit $AO = x$, ducto nimirum AO normali ad AB , & erit $ADH = \frac{a^2 dx}{2\sqrt{aa + xx}}$, unde $AHB = \int \frac{a^2 dx}{2\sqrt{aa + xx}}$.

9. Ducatur BM tangens hyperbolam in puncto B , & sit $BL = x$, $ML = dx$, eritque $AHD : ALM :: ABq : ABq - BLq$, hoc est $AHD = \frac{\frac{a^3}{2} dx}{aa - xx}$, & proinde $\int \frac{\frac{a^3}{2} dx}{a^2 - xx} =$ areæ hyperbolicæ ADB .

10. Sit AK normalis ducta ad AB ipsique AB æqualis & per K agatur KDN occurrens hyperbolæ in D , sitque $KN = x$, & a puncto A ducantur ad puncta coeuntia N & O rectæ AN , AO , eritque $APQ : ANO :: ABq : KNq - AKq$, hoc est $APQ = \frac{\frac{a^3}{2} dx}{xx - aa}$. Erit igitur $\int \frac{\frac{a^3}{2} dx}{xx - aa} =$ areæ hyperbolicæ APB .

Ex his haud difficulter colligitur, quales prodeant figuræ si principia abscissarum tum in circulo tum in hyperbola in alio puncto ut in a sumantur, vel aliter mutantur, & quænam figuræ cum iis comparari possint.

FORMA. IV.

Species I. $\frac{adz}{z\sqrt{e+fz^\eta}} = ydz.$ Fiat $\frac{1}{z^\eta} = xx$ & per hanc æquationem invenietur $\frac{adz}{z\sqrt{e+fz^\eta}} = -\frac{4a}{\eta f} \cdot \frac{fdx}{2\sqrt{f+exx}}.$ Modum construendi sectionem conicam, cujus ordinata est vel $\sqrt{f+exx}$ vel $\sqrt{exx-f}$ ostendimus in calculo formæ præcedentis. Colligitur autem $\int \frac{fdx}{2\sqrt{f+exx}}$ vel $\int \frac{fdx}{2\sqrt{exx-f}}$ esse areas sectionum conicarum per ea quæ dicta sunt ad formam secundam. Has fluxiones esse arearum sectionum conicarum, sicut in formæ II. calculo ostendimus, etiam hoc modo constat. Scil. a fluxione areæ Ellipticæ $APDB$ Fig. 12. quæ est $dx \sqrt{f-exx}$ subducatur fluxio trianguli ADB seu fluxio ipsius $\frac{x \cdot \sqrt{f-exx}}{2}$, & restabit $\frac{fdx}{2\sqrt{f-exx}}$ fluxio sectoris Elliptici APD . Si Figura est hyperbolæ, a fluxione trianguli ADB (Fig. 11.) subducatur fluxio ipsius aDB , & manebit fluxio areæ ADa quæ sita. In omni igitur hoc casu area curvæ propositæ est $-\frac{4a}{\eta f} s.$

Species 2. $\frac{adz}{z^{\eta+1}\sqrt{e+fz^\eta}} = ydz.$ Ponatur $\frac{1}{z^\eta} = x^2$, & fiet $\frac{adz}{z^{\eta+1}\sqrt{e+fz^\eta}} = \frac{-2ax^2 dx}{\sqrt{f+exx}}.$ Comparando igitur cum serie X adhibendo

bendo $\int \frac{f dx}{2\sqrt{f+exx}}$ pro A , & $\int \frac{fx^2 dx}{2\sqrt{f+exx}}$ pro B , invenietur B & ob id area curvæ propositæ.

Species 3. $\frac{adz}{z^{2\eta+1} \cdot \sqrt{e+fz^\eta}} = ydz.$ Sit $\frac{1}{z^\eta} = x$, & fiet $\frac{adz}{z^{2\eta+1} \sqrt{e+fz^\eta}}$
 $= -\frac{ax^2 dx}{\eta \sqrt{fx+exx}}.$ Et cum $\int \frac{f^2 x dx}{4e \sqrt{fx-exx}}$ æqualis est areæ Ellipticæ
 $aDGa$ (Eig. 12.) posito $aB = x$, quod facile colligitur subducendo
 fluxionem trianguli aDB ab area Elliptica $aGDB$, patet, quando e est
 negativa quantitas in fluxione areæ propositæ, quomodo per casum
 primum Prop. 7. vel per seriem X inveniri possit $\int \frac{ax^2 dx}{\eta \sqrt{fx+exx}}.$ Si f est
 negativa e autem affirmativa, nec non utraque affirmativa, conferen-
 do cum iis quæ jam & prius dicta sunt, facile constat quomodo area
 curvæ invenienda sit, comparando cum area hyperbolica secundum
 seriem X .

Species 4. $\frac{adz}{z^{3\eta+1} \cdot \sqrt{e+fz^\eta}} = ydz.$ Inventa area curvæ speciei ter-
 tiæ, hujus speciei curvæ quadratura habetur per seriem X , postquam
 reducta est prius, per æquationem $\frac{1}{z^\eta} = x$, in curvam cujus abscissa

est x . Speciei primæ hujus formæ quadratura, assumpta $\int dx \sqrt{f+exx}$
 pro A in serie Z etiam haberi potest. Et hac inventa quadratura spe-
 ciei secundæ invenitur per seriem X , assumendo jam aream curvæ
 speciei primæ inventam pro A . Speciei tertiæ quadratura per casum
 tertium propositionis septimæ, seu conjungendo casum primum & se-
 cundum illius propositionis, obtinetur, assumpta $\int dx \sqrt{fx+exx}$ pro A .
 Hac inventa reliquæ ut dictum est inveniuntur.

FORMA V.

Species 1. $\frac{az^{\eta-1} dz}{e+fz^\eta + gz^{2\eta}} = ydz.$ Sit $\sqrt{\frac{a}{e+fz^\eta + gz^{2\eta}}} = x$, unde a
 $= exx$

$= exx \div fz^\eta xx \div gz^{2\eta} xx$, & ob id $z^{2\eta} \div \frac{f}{g} z^\eta = \frac{a-exx}{gxx}$. Ex hac

æquatione per extractionem radices habetur $z^\eta = \frac{-f}{2g} \pm \sqrt{\frac{ff}{4gg} + \frac{a-exx}{gxx}}$,

cujus æquationis fluxiones fumendo erit $\eta z^{\eta-1} dz =$

$$\frac{adx}{gx^3 \cdot \sqrt{\frac{ff}{4gg} + \frac{a-exx}{gxx}}} = \frac{adx}{gx^2 \cdot \sqrt{\frac{a}{g} + \frac{ff-4eg}{4gg} xx}} \text{ cum vero est } \frac{a}{xx} = e \div fz^\eta$$

$$\div gz^{2\eta} \text{ erit } \frac{az^{\eta-1} dz}{e+fz^\eta + gz^{2\eta}} = \frac{adx}{g\eta \sqrt{\frac{a}{g} + \frac{ff-4eg}{4gg} xx}}. \text{ In determinanda}$$

sectione conica, cujus ordinatim applicata est $\sqrt{\frac{a}{g} + \frac{ff-4eg}{4gg} xx}$, considerandum est.

1. Si utraque tum e tum g sit affirmativa quantitas, f vero vel affirmativa vel negativa, cum ejus quadratum ff semper sit positivum, & si ff majus est quam $4eg$, erit $v = \sqrt{\frac{a}{g} + \frac{ff-4eg}{4gg} xx} =$ ordinatæ hyperbolæ aD (Fig. 13.) cujus ordinata $OD = v$, abscissa $AO = x$, semiaxis transversus $Aa = \sqrt{\frac{a}{g}}$, & conjugatus $AL = \frac{\sqrt{\frac{a}{g}}}{p}$, ubi $p = \frac{ff-4eg}{4gg}$.

2. Iisdem positis sit $4eg$ majus quam ff , & erit v ordinata Ellipseos, cujus abscissa $AB = x$, (Fig. 12.). Semiaxis transversus $Aa = \sqrt{\frac{a}{g}}$, & conjugatus $AP = \sqrt{\frac{a}{g}}$.

3. Si e est quantitas negativa, g autem affirmativa, f vero utraque, signum ipsius $4eg$ fiet $\div$, & erit ordinatim applicata v hyperbolæ, cujus mentio facta est in casu I.

4. Si

4. Si e est affirmativa g autem negativa, erit coefficientis ipsius xx sub vinculo radice affirmativus, $\frac{a}{g}$ autem erit negativus. Ordinata igitur v est hyperbolæ, cujus abscissa $AB = x$, (Fig. 11.) semiaxis trans-

versus $Aa = \frac{\sqrt{\frac{a}{g}}}{p}$, conjugatus autem $AL = \sqrt{\frac{a}{g}}$.

5. Si utraque tum e tum g est negativa, ff autem majus quam $4gg$, ordinatim applicata v est hyperbolæ similiter construendæ ac in casu antecedenti.

Denominator itaque fluxionis areæ, inventæ æqualis fluxioni areæ quadrandæ, semper est ordinatim applicata alicujus sectionis conicæ. Ex iis igitur quæ dicta sunt ad formam secundam facile colliguntur fluxiones arearum sectionum conicarum, quarum integralia erunt areæ sectionum conicarum, & quæ exhibebunt aream in hac specie inveniendam in quovis casu.

Species 2. $\frac{az^{2\eta-1} dz}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}} = ydz$. Fiat ut prius $\sqrt{\frac{a}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}}} = x$

& similiter ac superius invenietur $z^\eta = \frac{-f}{2g} \pm \sqrt{\frac{ff}{4gg} + \frac{a - exx}{gxx}}$. Qua-

drando autem hanc æquationem erit $z^{2\eta} = \frac{ff}{4gg} \pm \frac{f}{g} \sqrt{\frac{ff}{4gg} + \frac{a - exx}{gxx}}$

$\pm \frac{ff}{4gg} \pm \frac{a}{gxx} - \frac{e}{g}$, & sumendo fluxiones hujus æquationis ultimæ

habebitur $\frac{fadx}{g^2xx \sqrt{\frac{a}{g} + \frac{ff - 4eg}{4gg} xx}} - \frac{2adx}{gx^3} = 2\eta z^{2\eta-1} dz$. Et cum sit

$\frac{a}{xx} = e \pm fz^\eta \pm gz^{2\eta}$, erit $\frac{az^{2\eta-1} dz}{e + fz^\eta + gz^{2\eta}} = \frac{fadx}{2\eta g^2 \sqrt{\frac{a}{g} + \frac{4eg + ff}{4gg} xx}}$

$\frac{adx}{ngx}$. Membri prioris integrale habetur in specie prima. Posterioris

membri integrale invenitur per formam primam hujus tabulæ, ponendo enim $x = e + \xi$, erit $\frac{adx}{x} = \frac{ad\xi}{e+\xi}$, quæ est formæ primæ.

FORMA. VI.

Species 1. $\frac{az^{\frac{\eta}{2}-1} dz}{e+fx^{\eta}+gz^{2\eta}} = ydz$. Bonatur $\sqrt{\frac{2ag}{f-p+2gz^{\eta}}} = x$, ubi

$p = \sqrt{ff-4eg}$, hinc erit $z^{\eta} = \frac{a}{xx} + \frac{p}{2g} - \frac{f}{2g}$, unde $z^{\frac{\eta}{2}} = \pm$

$\sqrt{\frac{a}{xx} + \frac{p}{2g} - \frac{f}{2g}}$, cujus æquationis sumendo fluxiones erit $\frac{1}{2}\eta z^{\frac{\eta}{2}-1} dz = \frac{adx}{x^3 \sqrt{\frac{a}{xx} + \frac{p-f}{2g}}}$, unde $az^{\frac{\eta}{2}-1} dz = \frac{2adx}{gx^2 \sqrt{a + \frac{p-f}{2g}xx}}$. Quadrando

jam æquationem $z^{\eta} = \frac{a}{xx} + \frac{p-f}{2g}$ & factum prodiens ducendo in g

habebitur valor ipsius $gz^{2\eta}$, cui addatur $\frac{af}{xx} + \frac{pf}{2g} - \frac{ff}{2g} + e = e + fz^{\eta}$,

& per debitam reductionem invenietur $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} = \frac{a^2g + apx^2}{x^4}$.

Erit ergo $\frac{az^{\frac{\eta}{2}-1} dz}{e+fx^{\eta}+gz^{2\eta}} = \frac{2ax^2 dx}{\eta \cdot ag + pxx \cdot \sqrt{a + \frac{p-f}{2g}xx}} = \frac{2ax^2 dx}{\eta}$.

$\sqrt{a + \frac{p-f}{2g}xx}^{\frac{1}{2}} \cdot ag + pxx^{\frac{1}{2}}$. Eodemque modo si ponatur

$\sqrt{\frac{2ag}{f-p+2gz^{\eta}}} = \xi$, erit $\frac{az^{\frac{\eta}{2}-1} dz}{e+fx^{\eta}+gz^{2\eta}} = \frac{2a\xi^2 d\xi}{\eta \cdot a - \frac{p-f}{2g}\xi\xi}^{\frac{1}{2}}$.

$ag - \frac{1}{2}\xi\xi^{\frac{1}{2}}$. Si ad indicem -1 factoris $ag + pxx$ & factoris $ag - \frac{1}{2}\xi\xi$ adjicia-

adjiciatur unitas, pervenitur ad fluxiones arearum, quarum fluentes per areas sectionum conicarum, quas construendi modos prius exhibuimus, dantur ope prop. 7. applicando figuras ad seriem X, quod ex iis, quæ in antecedentibus dicta sunt colligitur. Assumantur igitur

$$\text{areae } \int \frac{2ax^2 dx}{\eta} \cdot a \div \frac{p-f}{2g} xx \cdot \frac{p-f}{2g} |^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{ag \div pxx}{\eta} |^0 \text{ \& } \int \frac{2a\xi^2 d\xi}{\eta} \cdot a \div \frac{p-f}{2g} \xi\xi \cdot \frac{p-f}{2g} |^{-\frac{1}{2}}$$

$\cdot \frac{ag \div p\xi\xi}{\eta} |^0$ ut datae per quadraturas sectionum conicarum, & mu-

tetur area $\int ax^2 dx \cdot a \div \frac{p-f}{2g} \cdot xx \cdot \frac{p-f}{2g} |^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{ag \div pxx}{\eta} |^0$ in aliam sibi æqualem

hoc modo. Quoniam est $\sqrt{\frac{2ag}{f-p+2gz^\eta}} = x$, & $\sqrt{\frac{2ag}{f+p+2gz^\eta}} = \xi$, erit

$$xx = \frac{ag\xi\xi}{ag-p\xi\xi}, \text{ cujus fluxiones sumendo erit } x^2 dx = \frac{a^2 g^2 \xi^2 d\xi \cdot \sqrt{ag}}{ag-p\xi\xi |^2 \cdot \sqrt{ag-p\xi\xi}}$$

multiplicando scilicet per x . Substituatur jam $\frac{ag\xi\xi}{ag-p\xi\xi}$ pro xx in

$\sqrt{a \div \frac{p-f}{2g} xx}$, & fiet tandem per debitam reductionem

$$\frac{-ax^2 dx \cdot \frac{p-f}{2g} |^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{ag \div pxx}{\eta} |^0}{\eta \sqrt{a \div \frac{p-f}{2g} xx}} = \frac{2a^3 g^2 \xi^2 d\xi}{\eta \cdot \frac{p-f}{2g} |^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{ag \div p\xi\xi}{\eta} |^0 \cdot \sqrt{a \div \frac{p-f}{2g} \xi\xi}} = \frac{2a^3 g^2 \xi^2 d\xi}{\eta}.$$

$\frac{a \div \frac{p-f}{2g} xx}{\eta} \cdot \frac{p-f}{2g} |^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{ag \div pxx}{\eta} |^0$. Sunt igitur tres areae $\int \xi^2 d\xi$.

$\frac{a \div \frac{p-f}{2g} \xi\xi}{\eta} \cdot \frac{p-f}{2g} |^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{ag \div p\xi\xi}{\eta} |^0$, $\int \xi^2 d\xi \cdot a \div \frac{p-f}{2g} \xi\xi \cdot \frac{p-f}{2g} |^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{ag \div p\xi\xi}{\eta} |^{-1}$, &

$\int \xi^2 d\xi \cdot a \div \frac{p-f}{2g} \xi\xi \cdot \frac{p-f}{2g} |^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{ag \div p\xi\xi}{\eta} |^{-2}$ quarum prima & tertia dantur

per sectiones conicas, sicut ab antecedentibus constat, ergo dabitur intermedia, cui ductæ in $-\frac{2a}{\eta}$ æqualis est area invenienda

$$\int \frac{az^{\frac{1}{2}\eta-2} dz}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}, \text{ per casum secundum vel tertium Prop. 8. Brevitatis causa}$$

caussa series non adposuimus ad Prop. 8. per quas areae curvarum omnium ex certis datis secundum conditiones illas, quas continet Prop. 8. inveniri possint. Contenti fuimus ibi modum ostendisse per quem hujusmodi series facile inveniri queant. Sufficit itaque heic tantummodo invenisse illas areas, per quas area proposita secundum modum prius expositum per applicationem Prop. 8. dabitur. Comparisonem pro inveniundo illo valore, quem auctor indicat, quivis sic instituere potest.

$$\text{Species 2. } \frac{az^{\frac{3\eta}{2}-1} dz}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} = ydz. \quad \text{Ponendo } \sqrt{\frac{2aez^\eta}{fz^\eta-pz^\eta+2e}} = x, \text{ \&}$$

$$\sqrt{\frac{2aez^\eta}{fz^\eta+pz^\eta+2e}} = \xi, \text{ similem viam eundo ac in specie priori perve-$$

nietur ad duas areas, quæ per areas sectionum conicarum dantur, & quæ sunt ejus conditionis, ut ex illis datis per prop. 8. area quæsitæ habeatur.

Cognitis areis curvarum harum duarum specierum, reliquarum omnium, quæ fingi possunt ad hanc formam pertinentes, ut

$$\frac{az^{\frac{5\eta}{2}-1} dz}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}, \frac{az^{\frac{7\eta}{2}-1} dz}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}, \text{ vel etjam } \frac{az^{\frac{1}{2}\eta-1} dz}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}, \frac{az^{\frac{3}{2}\eta-1} dz}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}},$$

quadraturæ inveniuntur per casum primum Prop. 7.

FORMA VII.

$$\text{Species 1. } \frac{adz}{z} \cdot \sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} = ydz. \quad \text{Ponatur } z^\eta = x, \text{ \& sumen-}$$

do fluxiones $\eta z^{\eta-1} dz = dx$, unde $\frac{adz}{z} = \frac{adx}{\eta x}$, & ob id $\frac{adz}{z}$.

$$\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} = \frac{ax^{-1}dx}{\eta} \cdot \sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}. \quad \text{Adjiciatur unitas ad ex-}$$

ponentem -1 ipsius x extra vinculum radice, ut secundum propositionem 10. perveniatur ad figuram simplicissimam, cum qua figura propo

proposita comparari poterit, cum index ipsius x sub vinculo radicis sit unitas, & hoc modo habetur $\frac{adx}{\eta} \cdot \sqrt{e+fx+gx^2}$, quæ proinde est fluxio areæ sectionis conicæ ductæ in $\frac{a}{\eta}$, cujus ordinatim applicata est $\sqrt{e+fx+gx^2}$. Quoniam autem in ordinata curvæ quadrandæ sint tria nomina sub vinculo radicis, neque area $\int \frac{ax^{-1}dx}{\eta} \cdot \sqrt{e+fx+gx^2} = \alpha$, ex area $\int \frac{adx}{\eta} \cdot \sqrt{e+fx+gx^2} = \beta$, per aream sectionis conicæ data, sola per propositionem septimam inveniri potest, sed quærenda est adhuc una area, quæ detur, ita ut ex duabus areis datis area invenienda haberi queat. Fiat igitur $\frac{1}{z^\eta} = \xi$, unde sumendo fluxiones erit $\frac{adz}{z} = -\frac{ad\xi}{\eta\xi^2}$, & proinde $\frac{adz}{z} \cdot \sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} = -\frac{ad\xi}{\eta\xi^2} \cdot \sqrt{e\xi^2+f\xi+g} = -\frac{a\xi^{-2}d\xi}{\eta} \cdot \sqrt{g+f\xi+e\xi^2}$. Ponatur in area sectionis conicæ β prius inventa $\frac{1}{\xi}$ pro x , cum $x = z^\eta$, & migrat illa in hanc $-\int \frac{ad\xi}{\eta\xi^3} \cdot \sqrt{g+f\xi+e\xi^2}$. Et quoniam est $d\xi \cdot \sqrt{g+f\xi+e\xi^2}$ fluxio areæ sectionis conicæ, cujus ordinata est $\sqrt{g+f\xi+e\xi^2}$ habentur tres areæ $\int d\xi \cdot \sqrt{g+f\xi+e\xi^2}$, $\int \xi^{-2}d\xi \cdot \sqrt{g+f\xi+e\xi^2}$, & $\int \xi^{-3}d\xi \cdot \sqrt{g+f\xi+e\xi^2}$, quarum prima & tertia dantur per sectiones conicas, ut ex antecedentibus constat, unde intermedia inveniendæ per casum primum prop. 7. habebitur comparationem instituendo cum duabus primis æquationibus seriei X. Datis enim areis A & D , solæ B & C sunt illæ incognitæ, quas involvunt duæ primæ illæ æquationes, quæ proinde areæ B & C dabuntur per illas æquationes, quarum C est illa heic inveniendæ. Cum prius modum comparandi exposuerimus, neque illi describendo jam immoramur, comparatione autem peracta ille prodit valor, quem auctor indicat.

Species 2. $az^{\eta-1}dz \cdot \sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} = ydz$. Sit ut prius $z^\eta = x$, unde $\eta z^{\eta-1}dz = dx$, & $az^{\eta-1}dz \sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} = \frac{adx}{\eta}$ in

$\sqrt{e+fx+gxx}$, quæ posterior fluxio divisa per $\frac{a}{\eta}$ est area sectionis conicæ, cujus ordinata æqualis est ipsi $\sqrt{e+fx+gxx}$. Area igitur inveniendæ æqualis est area illius sectionis conicæ ductæ in $\frac{a}{\eta}$.

Species 3. $az^{2\eta-1} dz. \sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} = ydz$. Hujus fluxionis integrale ex inventis quadraturis duarum præcedentium figurarum, per seriem *X* invenitur. Ponendo namque ut prius $z^\eta = x$ erit $az^{2\eta-1} dz = \frac{axdx}{\eta}$. $\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} = \sqrt{e+fx+gx^2}$. Sunt igitur tres areae $\int x^0 dx. \sqrt{e+fx+gxx}$, $\int x^{-1} dx. \sqrt{e+fx+gx^2}$, & $\int x dx. \sqrt{e+fx+gx^2}$, quarum duæ priores sunt specierum antecedentium, unde dabitur tertia. Reliquarum specierum quadraturæ hujus formæ similiter derivantur ab antecedentibus, ut in hac jam ostensum est. Determinationes autem sectionum conicarum quarum ordinatæ sunt $\sqrt{e+fx+gx^2}$, formam octavam sequentur.

FORMA VIII.

Species 1. $\frac{az^{\eta-1} dz}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}} = ydz$. Fiat $z^\eta = x$, unde fiet $\frac{az^{\eta-1} dz}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}} = \frac{adx}{\eta. \sqrt{e+fx+gx^2}}$. Et quoniam $dx. \sqrt{e+fx+gx^2}$ est fluxio areae se-

ctionis conicæ, cujus ordinata est $\sqrt{e+fx+gx^2}$, nec non $xdx. \sqrt{e+fx+gx^2}$ fluxio areae cujus integrale datur per speciem tertiam formæ præcedentis, erunt tres areae $\int dx. \sqrt{e+fx+gxx}^{\frac{1}{2}}$, $\int x dx. \sqrt{e+fx+gxx}^{\frac{1}{2}}$, $\int dx. \sqrt{e+fx+gxx}^{-\frac{1}{2}}$, quarum prima & secunda dantur, ergo tertia datur per casum secundum propositionis septimæ. Est namque unitas differentia inter factoris surdi exponentis in areis datis & illum in area inveniendæ. Comparationem igitur instituendo cum serie *Z*, in qua $\int dx. \sqrt{e+fx+gxx}^{\frac{1}{2}} = A$, $\int x dx. \sqrt{e+fx+gxx}^{\frac{1}{2}} = B$, area autem $\int dx. \sqrt{e+fx+gxx}^{-\frac{1}{2}} = P$ area *P* inveniendæ habetur per æquationem primam seriei *Z*.

Species 2. $\frac{az^{2\eta-1}dz}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^2}} = ydz$. Ponendo ut prius $z^\eta = x$, erit

$\frac{az^{2\eta-1}dz}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^2}} = \frac{axdx}{\eta \cdot \sqrt{e+fx+gxx}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e+fx+gxx}}^{\frac{1}{2}}$. Datis igitur areis $\int dx \cdot \sqrt{e+fx+gxx}^{\frac{1}{2}}$
 $= A$ & $\int xdx \cdot \sqrt{e+fx+gxx}^{\frac{1}{2}} = B$, dabitur area $\int xdx \cdot \sqrt{e+fx+gxx}^{\frac{1}{2}}$
 $= C$ per seriem Z , cujus æquatione prima invenietur C seu area qua-
 renda illa quam habet auctor.

Species 3. $\frac{az^{3\eta-1}dz}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^2}} = ydz$. Fiat ut prius $z^\eta = x$, eritque

$\frac{az^{3\eta-1}dz}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^2}} = \frac{ax^2dx}{\eta \sqrt{e+fx+gxx}}$. Datis igitur duabus areis specierum
 præcedentium dabitur hæc $\int \frac{ax^2dx}{\eta \sqrt{e+fx+gxx}}$ per seriem X .

Et sic ulterius.

Ad hanc formam etiam referri possunt figuræ sequentes

$\frac{adz}{z \sqrt{e+fz^\eta+gz^2}}$, $\frac{az^{-\eta-1}dz}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^2}}$, $\frac{az^{-2\eta-1}dz}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^2}}$, &c., nam ponendo

$z^\eta = x$, erit $\eta z^{\eta-1}dz = dx$ & $z^{-1}dz = \frac{z^{-\eta}dx}{\eta}$, seu $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{\eta x}$, &

$\frac{adz}{z \sqrt{e+fz^\eta+gz^2}} = \frac{adx}{\eta x \sqrt{e+fx+gxx}}$. Dantur jam areæ $\int \frac{xdx}{\sqrt{e+fx+gxx}}$

& $\int \frac{dx}{\sqrt{e+fx+gxx}}$ per speciem secundam & primam hujus formæ, unde
 de area $\int \frac{x^{-1}dx}{\sqrt{e+fx+gx^2}}$ dabitur per seriem X . Ut, si integranda esset

quantitas differentialis $\frac{dy}{y \sqrt{1-rr+2ry-yy}}$, id fieri posset per hanc for-
 mam.

mam. Est autem $\sqrt{1-rr+2ry-yy}$ ordinatim applicata circuli, cujus abscissa aR (Fig. 14.) $=y$, rad. $AH=1$, $aA=r$.

Quadraturas figurarum hujus formæ reduci ad areas sectionum conicarum, ex æquatione generali pro lineis secundi ordinis hac $vv = e + fx + gxx$ constat. Hanc æquationem generalem ideo dicimus, quia quæcunque sit æquatio ad sectionem conicam, illa mutando axem & abscissarum initium semper ad hanc formam reducetur. Ordinatam igitur v sectionis conicæ quantitas $\sqrt{e+fx+gxx}$ semper exprimet, & propterea erit $dx \cdot \sqrt{e+fx+gxx}$ semper fluxio areae sectionis conicæ, qualem etiam eam esse supposuimus in formis duabus præcedentibus, & ex hac hypothese areas figurarum propositarum per areas sectionum conicarum tanquam datas determinandi modum ostendimus. Sectio autem conica, cujus ordinata v est $\sqrt{e+fx+gxx}$, describitur, centro A & femiaxi transverso Aa æquali ipsi $\sqrt{\frac{ff}{4} - eg}$,

parametro autem æquali ipsi $\sqrt{\frac{ff}{4} - eg}$ describendo Hyperbolam, (Fig. 11.), si figura est hyperbola, sumendoque in ejus axi punctum aliquod a ita ut sit $Aa = \frac{f}{2g}$, & $aB = x$. Si autem figura est Ellipsis, Centro A , iisdemque, femiaxi transverso Aa & parametro, ac in hyperbola illa describatur, sumatur autem in axi punctum a (Fig. 12.) ita ut sit $Aa = -\frac{f}{2g}$, & $aB = x$. Ordinatam $\sqrt{e+fx+gxx}$ esse ad hyperbolam si coefficientis g ipsius xx est quantitas affirmativa, ad Ellipsin autem si est negativa, per naturam æquationis $vv = e + fx + gxx$ intelligitur. Proposita igitur quacunque curva quadranda, quæ ad hanc formam vel præcedentem reducitur, coefficientis affirmativa ipsius xx sub vinculo radicis indicium est illius curvæ quadraturam per quadraturam hyperbolæ obtineri, coefficientis vero negativa indicium est illam quadraturam per aream Ellipseos haberi. Quanam præterea positio tribuenda sit puncto a seu initio abscissarum ex æquatione pro sectione conica in quovis casu facile cognoscitur.

FORMA IX.

$$\text{Species 1. } \frac{az^{n-1}dz \cdot \sqrt{e+fz^n}}{g+bz^n} = ydz. \quad \text{Ponatur } \sqrt{\frac{a}{g+bz^n}} = x, \text{ cujus æqua.}$$

æquationis fumendo fluxiones erit $\frac{az^{\eta-1}dz}{g+bz^{\eta}} = \frac{-adx}{\eta bz}$. Per eandem æ-

quationem etjam colligitur esse $fz^{\eta} = \frac{af-fgx^2}{bx^2}$, unde $\sqrt{e+fz^{\eta}} = \frac{1}{x}$

$\sqrt{\frac{af}{b} + \frac{eb-fg}{b}x^2}$. Hinc habetur $\frac{az^{\eta-1}dz \cdot \sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+bz^{\eta}} = \frac{-ax^{-2}dx}{b\eta}$.

$\sqrt{\frac{af}{b} + \frac{eb-fg}{b}xx}$. Quoniam vero vero est $dx \sqrt{\frac{af}{g} + \frac{eb-fg}{b}xx}$, flu-

xio areæ sectionis conicæ, ejus ordinata $v = \sqrt{\frac{af}{g} + \frac{eb-fg}{b}xx}$, & cu-
jus constructio colligitur conferendo cum calculo Formæ 5, invenietur
 $\int x^{-2}dx \sqrt{\frac{af}{b} + \frac{eb-fg}{b}xx}$ per seriem X' , & proinde area invenienda.

Species 2. $\frac{az^{2\eta-1}dz \cdot \sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+bz^{\eta}} = ydz$. Reducitur species proposita per

divisionem in sequentem, $\frac{a}{b}z^{\eta-1}dz \cdot \sqrt{e+fz^{\eta}} = \frac{ga}{b} \cdot \frac{z^{\eta-1}dz \cdot \sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+bz^{\eta}}$.

Membri prioris integrale habetur per formam 3 tabulæ prioris, membri
autem posterioris integrale invenitur per speciem 1. hujus formæ. Si-
mili modo plures species ad hanc formam pertinentes resolvuntur.

FORMA X.

Species 1. $\frac{az^{\eta-1}dz}{g+bz^{\eta} \cdot \sqrt{e+fz^{\eta}}} = ydz$. Ponatur $\sqrt{\frac{a}{g+bz^{\eta}}} = x$, & habebi-

tur fimiliter calculum instituendo a c in specie 1. Formæ 9.

$\frac{az^{\eta-1}dz}{g+bz^{\eta} \cdot \sqrt{e+fz^{\eta}}} = \frac{-adx}{\eta b \cdot \sqrt{\frac{af}{b} + \frac{eb-fg}{b}x^2}}$, cujus integrale conferendo cum

iis quæ dicta sunt de forma 2. invenietur.

Species 2. $\frac{az^{2\eta-1}dz}{g+bz^\eta \cdot \sqrt{e+fz^\eta}} = ydz.$ Dividendo $\frac{az^{2\eta-1}dz}{\sqrt{e+fz^\eta}}$ per $g+bz^\eta$

invenitur $\frac{az^{2\eta-1}dz}{g+bz^\eta \cdot \sqrt{e+fz^\eta}} = \frac{az^{\eta-1}dz}{b \cdot \sqrt{e+fz^\eta}} - \frac{\frac{ag}{b} \cdot z^{\eta-1}dz}{g+bz^\eta \cdot \sqrt{e+fz^\eta}},$ cujus membri posterioris integrale habetur per speciem primam hujus formæ, membri autem prioris per Formam quartam Tab. prioris.

FORMA XI.

Species 1. $az^{\eta-1}dz \cdot \sqrt{\frac{e+fz^\eta}{g+bz^\eta}} = ydz.$ Ponatur $\sqrt{g+bz^\eta} = x,$ unde

$az^{\eta-1}dz = \frac{2axdx}{b\eta},$ & quoniam per eandem æquationem est $z^\eta = \frac{-g+x^2}{b}$ & ob id $e+fz^\eta = \frac{eb-fg}{b} + \frac{fxx}{b},$ erit substituendo hos valores

$$az^{\eta-1}dz \cdot \sqrt{\frac{e+fz^\eta}{g+bz^\eta}} = \frac{2adx \cdot \sqrt{\frac{eb-fg}{b} + \frac{fxx}{b}}}{\eta \cdot (-g+xx)} = \frac{2adx}{\eta} \cdot \sqrt{\frac{eb-fg}{b} + \frac{fxx}{b}}.$$

$\frac{1}{-g+xx} = \frac{1}{xx} - \frac{1}{g+xx}.$ Ad hanc fluxionem integrandam comparanda, ea est cum Propositione 8, & habetur $\sqrt{\frac{eb-fg}{b} + \frac{fxx}{b}} = R,$ nec non $\frac{1}{-g+xx} = S.$ Addatur itaque unitas ad indicem ipsius $\frac{1}{-g+xx}$ & erit $\frac{1}{-g+xx} = \frac{1}{-g+xx} + \frac{1}{-g+xx} = \frac{2}{-g+xx},$ unde fluxio proposita in hoc casu erit $\frac{2adx}{b}.$

$\sqrt{\frac{eb-fg}{b} + \frac{fxx}{b}},$ quæ est sectionis conicæ cujus ordinata $v =$

$\sqrt{\frac{eb-fg}{b} + \frac{fxx}{b}}$ ductæ in $\frac{2a}{\eta},$ & cujus constructionem ex iis quæ prius dicta sunt colligere licet. Cum vero R & S sint simul quatuor nominum sub vinculo radicis oportet adhuc unam aream dari, prius quam area

curvæ propositæ inveniri queat per Prop. 8. Hinc ponatur $\sqrt{b+gz^{-\eta}} = z,$ cujus æquationis fluxiones sumendo, atque sic ex illa æquatione querendo

rendo valores terminorum fluxionis propositæ, orietur per hanc redu-

ctionem $az^{n-1}dz \cdot \sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}} = \frac{2adz}{n} \cdot \sqrt{\frac{gf-eb}{g}} \cdot \frac{e\zeta\zeta}{g} \cdot \sqrt{\zeta\zeta-b}^{-1}$. Ad-

dendo unitatem ad indicem factoris $\zeta\zeta-b$ fiet ille 0, & in hoc casu ha-

betur $\frac{2adz}{n} \cdot \sqrt{\frac{gf-eb}{g}} + \frac{e\zeta\zeta}{g}$, quæ est fluxio sectionis conicæ ductæ in

$\frac{-2a}{n}$, ope æquationis $\frac{x^2-g}{b} = \frac{g}{\zeta\zeta-b}$, mutetur fluxio $dx \sqrt{\frac{eb-fg}{b}} + \frac{fxx}{b}$

in aliam sibi æqualem cujus abscissa est ζ , & per debitam reductionem

erit $dx \cdot \sqrt{\frac{eb-fg}{b}} + \frac{fxx}{b} = g d\zeta \cdot \sqrt{\frac{gf-eb}{g}} + \frac{e\zeta\zeta}{g} \cdot \sqrt{\zeta\zeta-b}^{-2}$. Sunt igi-

tur tres areae $\int d\zeta \cdot \sqrt{\frac{fg-be}{g}} + \frac{e\zeta\zeta}{g} \cdot \sqrt{\zeta\zeta-b}^0$, $\int d\zeta \cdot \sqrt{\frac{fg-be}{g}} + \frac{e\zeta\zeta}{g} \cdot \sqrt{\zeta\zeta-b}^{-1}$

& $\int d\zeta \cdot \sqrt{\frac{fg-be}{g}} + \frac{e\zeta\zeta}{g} \cdot \sqrt{\zeta\zeta-b}^{-2}$, ex quarum prima & tertia, areis sci-

licet sectionum conicarum, ut jam ostensum est, intermedia invenien-

da dabitur per Prop. 8.

Species 2. $az^{n-1}dz \sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}} = ydz$. Ponatur ut prius $\sqrt{g+bz^n} = x$,

unde habetur $az^{n-1}dz = \frac{2axdx}{bn}$, est vero $e+fz^n = \sqrt{\frac{eb-fg}{b}} + \frac{fxx}{b}$, er-

go $az^{n-1}dz \cdot \sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}} = \frac{2adx}{bn} \cdot \sqrt{\frac{eb-fg}{b}} + \frac{fxx}{b}$, cujus integrale est area

sectionis conicæ prius determinatæ ducta in $\frac{2a}{bn}$.

Species 3. $az^{2n-1}dz \cdot \sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}} = ydz$. Sit ut prius $\sqrt{g+bz^n} = x$,

& per reductionem consimilem illi. prius adhibitæ, invenietur

$az^{2n-1}dz \sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}} = 2an dx \cdot \sqrt{\frac{eb-fg}{b}} + \frac{fxx}{b} \cdot \sqrt{xx-g}^1$. In specie au-

tem

tem prima hujus formæ inventa est area $\int dx \cdot \sqrt{\frac{eb-fg}{b} + \frac{fxx}{b} \cdot \frac{xx-g}{b}} - 1$

& est $\int dx \cdot \sqrt{\frac{eb-fg}{b} + \frac{fxx}{b} \cdot \frac{xx-g}{b}}^0$ area sectionis conicæ cujus ordi-

nata est $\sqrt{\frac{eb-fg}{b} + \frac{fxx}{b}}$, ergo ex his duabus areis invenietur propo-

sita per Prop. 8.

Auctor nullam aliam propositionum 7, 8, 9, 10, hujus Tractatus de Quadratura curvarum in his formis Tab. Posterioris applicationem ad formas inveniendas ostendit, quam illam per quam areæ curvarum, quæ reduci possunt ad comparisonem cum figuris sectionum conicarum, obtineri queant. Me autem vel non monente manifestum est, usum hujus Methodi Auctoris multo esse ampliorem. Scilicet, si curva quadranda reductionem hujusmodi non admitteret, ut comparari posset cum lineis secundi ordinis, præstat eam nihilominus per methodos ab auctore exhibitas reducere ad formas, quæ cum aliis minus complicatis comparari queant figuris, quibus ut datis assumtis modo consimili ac in antecedentibus ostensum est, areæ curvarum propositarum per prop. 7 & 8. inveniri possunt. Usus hujusmodi reductionis in eo consistit, quod facilius judicetur de figuris illis simplicioribus, an absolute quadrari queant, nec ne, & per quas series in casu posteriori illarum areæ exprimi queant, quibus ut datis assumtis, areæ curvarum magis compositarum ex hisce dabuntur.

Ad finem sic perductis hisce annotationibus, quas conducere existimamus ad faciliorem & pleniorum Tractatus de Quadratura curvarum intelligentiam, animus quidem fuit subjungere expositionem quandam methodorum præcipuarum, quas alii invenerunt Mathematici tum in quadrandis curvis, tum in integrandis æquationibus differentialibus, idque in eorum gratiam, qui ampliorem hujus calculi cognitionem sibi parare capiunt. Hæc autem in aliam occasionem, si Numini ita placuerit, differimus, hac vice contenti, si Mathematicum cul-

tores desideratum ex hacce nostra opera sentiant
usum.







NEWTONI
PRINCIPIA
PHILOSOPHICÆ



TOM. III. P. I. ET II.



FA 2017