GIOL Y GOYANES

TOPOGRAFIA

1

TRATADO

DE

TOPOGRAFÍA.

TRATADO

DE

TOPOGRAFÍA,

DEDICADO

Á S. A. R. EL SERMO. SR. PRÍNCIPE DE ASTÚRIAS, HOY S. M. EL REY DON ALFONSO XII, Y ADMITIDA LA DEDICATORIA POR REAL ÓRDEN DE 7 DE FEBRERO DE 1862, EN VIRTUD DE INFORME FACULTATIVO,

POR EL ILMO. SEÑOR

D. ISIDRO GIOL Y SOLDEVILLA,

Comendador de la Real órden española de Isabel la Católica. Caballero de la Cruz de primera clase de la órden civil de María Victoria, y Vocal de la Asamblea de la misma. Caballero de la Real y Militar órden de San Fernando, Jefe honorario de Administracion de primera clase, Director de Caminos vecinales y Canales de riego, Profesor de Matemáticas, Arquitectura, Dibujo y Comercio, Vocal que ha sido de varios Tribunales de oposiciones á las cátedras de Matemáticas vacantes en los Institutos y Catedrático libre de Acotaciones y Topografía en el Instituto de San Isidro de Madrid, y en otros varios Establecimientos,

Y

D. JOSÉ GOYANES Y SOLDEVILLA,

Director de Caminos vecinales y Canales de riego.

Obra declarada de texto en primer lugar en todas las ternas, por el Real Consejo de Instruccion pública y adoptada en casi todas las Escuelas especiales facultativas civiles y militares.

3.ª EDICION CORREGIDA Y AUMENTADA.

TOMO I.

MADRID.

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE M. MINUESA,

calle de Juanelo, núm. 19.

1884.

NOTAS.

1.ª Un número encerrado entre paréntesis, así (25), dá á conocer que la materia de que se trata está fundada en lo dicho en el párrafo 25, el que se deberá tener presente para la mejor inteligencia.

2.ª Las citas de Matemáticas se refieren á los tratados y ediciones siguientes de la obra elemental del Sr. D. Juan Cortázar, y en su defecto á cualquiera de las posteriores:

Aritmética, 19.ª edicion.
Álgebra, 16.ª edicion.
Geometría, 13.ª edicion.
Trigonometría, 10.ª edicion.

3.ª Las citas de Acotaciones se refieren á la segunda edicion de nuestro Tratado publicado en 1873.

4.ª Los párrafos que llevan esta señal * pueden suprimirse en una primera lectura.

Á LOS LECTORES.

En el prólogo de las anteriores ediciones de esta obra poníamos lo siguiente:

«En la formacion del presente TRATADO DE TOPOGRAFÍA nos hemos separado de la marcha generalmente seguida por los autores, y vamos á hacer una leve reseña de las principales innovaciones que en él hemos introducido.

Suponemos en primer lugar que nuestros lectores reunen los suficientes conocimientos de Aritmética, Álgebra y Geometría elemental, por cuya razon hemos prescindido de ocuparnos de teoría alguna que pertenezca á estas materias; pero como muchas veces podrá el lector no recordar los principios en que se funden las demostraciones que tengamos que exponer, se han referido las correspondientes citas al curso de Matemáticas elementales de nuestro compatriota el Sr. D. Juan Cortázar. Lo mismo decimos con respecto á la Trigonometría rectilínea, si bien con el deseo de poner al alcance de las personas menos iniciadas en el cálculo, la parte inmediatamente aplicable á la resolucion de los triángulos, nos hemos ocupado de esta cuestion en el primer capítulo de este Tratado, indicando el empleo de las líneas trigonométricas naturales.

Debemos advertir tambien, que no siendo posible profundizar en el estudio de la Topografía sin el conocimiento completo de las Acotaciones, que son su verdadera introduccion, nos referiremos muchas veces con este objeto á la segunda edicion de este Tratado que hemos publicado en 1873.

En segundo lugar, la falta de método que hemos observado en la mayor parte de los autores que hemos consultado, presentando confusamente las teorías más sencillas y luminosas, nos ha inducido á establecer un órden riguroso en la exposicion de la doctrina, procurando presentarla con claridad y extension, y generalizando las cuestiones con el fin de que insensiblemente pueda el lector imponerse en el manejo de los distintos instrumentos y en la ejecucion de toda clase de operaciones topográficas, desde las más sencillas hasta las que ofrecen mayores dificultades.

Tambien hemos querido remediar la falta que constantemente hemos notado en cuantas obras se han dado á luz, de la descripcion clara y detallada de los instrumentos topográficos más modernos, así franceses como ingleses y alemanes. Esta circunstancia ha ocupado especialmente nuestra atencion; pues no siendo posible que todas las personas que se dediquen al estudio de la Topografía puedan tenerlos á su disposicion, hemos creido necesario tratar con mucho detenimiento una parte tan esencial como es la que constituyen las descripciones, verificaciones y correcciones de tantos instrumentos, y algunos tan complicados como los que hoy están en uso. Hemos querido, por lo tanto, ocuparnos de esta materia por completo, y desconfiamos de haberlo conseguido de una manera satisfactoria, pero en cambio no hemos tratado de eludir las dificultades que se presentan, diciendo que la vista de un instrumento hace más que todas las explicaciones que puedan hacerse en los libros; opinion de algunos autores, en contra de la cual existen razones bastante poderosas para que creamos que van un tanto descaminados.

Hemos procurado además presentar la Topografía á la altura á que se halla en la actualidad, por lo que sólo hemos prescindido de las cuestiones puramente geodésicas.

Concluiremos manifestando á nuestros lectores que con esta obra no nos hemos propuesto otra mira que la de exponer metódicamente los principios en que se fundan las operaciones topográficas y la resolucion de los problemas que puedan presentárseles en la práctica, constituyendo un verdadero *Manual* que pueda ser consultado con algun fruto por los geómetras en las muchas ocasiones en que carezcan de los medios de ilustrarse con los consejos de personas más instruidas ó más prácticas; y como, á pesar de todo nuestro buen deseo y de los esfuerzos y sacrificios de todo género que nos hemos impuesto, creemos no haberlo conseguido, acogeremos con el respeto y la consideracion que se merecen, las observaciones que se dignen hacernos las personas instruidas en las ciencias que se relacionen con la parte de cuyo estudio nos ocupamos, ó en la práctica de las operaciones topográficas.

¡Ojalá podamos cooperar con nuestro imperfecto trabajo al desarrollo de unos conocimientos de tanta importancia y utilidad, y sin embargo, tan poco generalizados en nuestro país, hoy que el desarrollo de todas las obras públicas y particulares, la necesidad de la formacion del Catastro y el aumento considerable que de dia en dia experimenta la propiedad y la riqueza, los hacen de todo punto indispensables!»

En esta edicion se han hecho muchas adiciones y correcciones, tanto para introducir en ella los adelantos de esta ciencia, como para corresponder al favor que nos ha dispensado y nos sigue dispensando el público ilustrado, al cual, como se ha visto, no invocábamos en vano en nuestra primera edicion. La importancia de esta obra es de tal naturaleza, que se recomienda por sí misma, y el Gobierno nos dispensó la honra de declararla de texto en primer lugar, tanto en la Península como en Ultramar, para recompensarnos el servicio prestado á la patria llenando un vacío que existía indudablemente, con la falta de una obra especial de Topografía, escrita con arreglo á los adelantos del dia, en una época en que esta clase de estudios es indispensable para multitud de profesiones, y de tan inmensa utilidad, pues es evidente, que en la imperiosa necesidad de la formacion del Catastro y del fomento de las Obras públicas, como lo son los ferro-carriles, los puertos y carreteras de todas clases los caminos vecinales, los canales de navegacion y de riego y las conducciones de aguas potables, todas estas importantes obras tienen por base principal la *Topografía*, en las dos partes de que se compone, *Planimetría* y *Nivelacion*, y es indudable que dichas obras son los prodigiosos agentes de la industria, de la agricultura y del comercio, estando en razon de su mayor desarrollo el grado de la riqueza pública y particular, y por consiguiente el engrandecimiento de las naciones.

Ahora nos cumple hacer presente que al publicar la primera edicion del presente *Tratado de Topografía*, á pesar del esmero con que nos dedicamos á su ejecucion, lo hicimos con aquella desconfianza propia de los que escriben por primera vez, y tienen que competir con un gran número de obras pertenecientes al mismo objeto y que circulan con general aceptacion. Necesario era por lo tanto hacer un trabajo, que por su originalidad en el método, su sencillez y claridad, á la par que su extension y rigor, pudiera obtener del público una marcada preferencia; y así ha sucedido en efecto; la favorable acogida que la ha dispensado y que acreditan las innumerables cartas de personas dignísimas, pertenecientes á todas las facultades, y que obran en nuestro poder, su adopcion expontánea igualmente como texto en Establecimientos del Gobierno, donde se estudia con toda extension y profundidad esta ciencia, y que por su brillante organizacion figuran como los primeros, los elogios que de él han hecho pública y privadamente distinguidos y laboriosos profesores, dan á conocer que hemos conseguido el objeto que nos propusimos.

Expondremos solamente á continuacion, como una de las pruebas favorables de la opinion pública, los artículos que los ilustrados redactores del periódico *La Revista de Obras Públicas*, Ingenieros de caminos y canales, han publicado en sus columnas.

En el número 16 del 15 de Agosto de 1864, con motivo de la publicacion del tomo primero, se lee lo siguiente:

«Tratado de Topografía, por D. Isidro Giol y Soldevilla, y D. José Goyanes y Soldevilla.—Tomo I.—Planimetría.

En anteriores números hemos anunciado á nuestros lectores la publicacion de esta obra, cuyo primer tomo acaba de terminarse. Constituye un tratado completo de planimetría, ilustrado con un atlas de 56 láminas perfectamente dibujadas y litografiadas; examinándose en las 747 páginas del Tratado con gran extension, claridad y buen método todas las materias relativas á esta importante parte de la Topografía. Han puesto, sobre todo sus autores, especial cuidado en lo que comprende el conocimiento y uso de los instrumentos, entrando en detalles que no se encuentran por lo general áun en los tratados más extensos de Topografía hasta el dia publicados. El de los Sres. Giol y Goyanes está á la altura de su objeto, y no olvida ninguno de los adelantos hechos en la materia, siendo el más completo de todos los que conocemos. Por esta razon no vacilamos en recomendarlo á nuestros lectores, que hallarán en él cuanto puedan necesitar para la resolucion de los variados problemas topográficos, tan interesantes hoy por la importancia que van adquiriendo nuestras obras públicas, y la necesidad de la formacion del Catastro.

Para dar una idea del método y de la extension con que están tratadas todas las diferentes materias, insertamos á continuacion una reseña de los 20 capítulos que comprende el primer tomo:

Cap. 1.° Nociones de Trigonometría rectilínea.—2.° Definicion de la Topografía. Del globo terrestre y líneas principales que en él se consideran.—3.° De la superficie terrestre y de su representacion geométrica.—4.° Nociones de óptica. Anteojos.—5.° De los instrumentos en general y de sus partes principales.—6.° Instrumentos angulares Brújula. Declinatoria.—7.° Plancheta.—8.° Escuadra.—9.° Grafómetro. Pantómetra.—10. Teodolito. Círculo repetidor.—11. Goniómetros y Goniógrafos fundados en las propiedades de la luz.—12. Construccion de los ángulos obtenidos con los Goniómetros.—13. Alineaciones. Trazado y medicion de las líneas en el terreno.—14. Instrumentos para la medida indirecta de las distancias.—15. Levantamiento de los planos topográficos. Problemas preliminares.—16. Levantamiento de los planos de terrenos de corta extension.—17. Levantamiento de los planos de terrenos de mediana extension.—18. Levantamiento de los planos de terrenos de grande extension. Triangulaciones.—19. Cálculo de las superficies.—20. Planímetros.

Concluiremos felicitando á los Sres. Giol y Goyanes por su excelente trabajo, que sin duda encontrará muy buena acogida entre todos los que tienen, por su profesion, que ocuparse de las cuestiones topográficas, y excitándoles á completarlo con el segundo tomo, que contendrá el Tratado de Nivelacion.»

En el número 16 del 15 de Agosto de 1865, con motivo de la publicacion del tomo segundo y último, despues de exponer el título de la obra, dice así:

«En el número del 15 de Agosto de 1864 de nuestra Revista, dimos noticia de la publicacion del tomo primero de la obra, cuyo título encabeza estas líneas, recomendándola eficazmente á nuestros lectores. El tomo segundo, que comprende los conocimientos de Topografía relativos á la nivelacion, es un extenso tratado de esta clase de operaciones, y completa y cierra dignamente la obra de los Sres. Giol y Goyanes. Haremos, como respecto del primer tomo, un ligero extracto del índice del segundo, por el cual se podrá formar idea de las materias que contiene y del órden con que están presentadas:

Capítulo 1.° Ideas generales.—2.° Nivelacion por alturas. Instrumentos.—3.° Problemas de nivelacion.—4.° Práctica de la nivelacion por alturas.—5.° Perfiles.—6.° Trazado de las curvas horizontales.—7.° Nivelacion por pendientes.—8.° Nivelacion barométrica.—9.° Medida de alturas ó altimetría.—10. Representacion del terreno.—11. Copia y reduccion de planos y perfiles.

Acompaña al Tratado un atlas de 24 láminas, donde se representan con suma claridad y detalle en 255 figuras, los instrumentos y la marcha que se sigue en las diferentes operaciones de nivelacion.

Concluimos felicitando á los señores Giol y Goyanes por su excelente trabajo, que prueba una vez más su inteligencia y celo por los progresos científicos.»

Otros periódicos, entre ellos *El Diario Español*, en su número 3.846 del 10 de Diciembre de 1864, han dedicado tambien largos artículos al elogio de nuestra obra, y por todos cuantos la examinan y estudian es considerada en general como una *obra de consulta*, á causa de su mucha extension y de la multitud de conocimientos que encierra.

Ahora bien, es evidente que esté resultado lo acredita la circunstancia de que cuantos autores han escrito despues de nosotros, tanto nacionales como extranjeros, han encontrado en sus páginas las fuentes de los más importantes conocimientos de esta ciencia, adoptando sus definiciones, sus teorías y la mayor parte de su doctrina, y no desdeñándose de citar en los prólogos de sus obras, que la nuestra ha sido una de las que han tomado por modelo, y á nosotros nos toca rendir un tributo de gracias á tan sábios é ilustrados profesores.

Es, pues, indudable que nosotros hemos sido los que hemos tenido la gloria de despertar en España el gusto y la aficion á un estudio de tanta importancia y trascendencia, y cuyas aplicaciones son tantas y de tan frecuente uso. Ni podia ser otra cosa; la claridad y rigor que hemos adoptado en la exposicion de la doctrina, su extension, y sobre todo la manera que hemos tenido de tratar todo lo que á los instrumentos se refiere, harán siempre que nuestra obra sea considerada tambien como una *obra clásica* de la época en que ha sido escrita.

Por todo lo expuesto se comprende, que hemos contribuido de una manera eficaz á ese creciente desarrollo que ha tomado en nuestra patria la Topografía; y un ejemplo notable es que nuestras obras fueron adoptadas de texto en la que fué Escuela especial de Topógrafos desde su creacion, habiendo sido siempre, despues de extinguida esta, señaladas aquellas de texto en la *Gaceta* para las convocatorias á exámen en el Instituto Geográfico y Estadístico, y tambien desde la creacion de este, para el ingreso en el cuerpo de Topógrafos, tanto para oficiales del mismo como para topógrafos terceros; y estando reputados hoy los dignos indivíduos de dicho cuerpo, no solo como los primeros geómetras de España, sino tambien como los primeros de toda Europa, alguna parte nos cabe en esa gloria, puesto que en nuestros libros han adquirido sus primeros conocimientos. Nosotros aprovechamos esta ocasion para rendir nuestro homenaje y dar un tributo de gracias á la primera lumbrera de la ciencia, al eminente sábio y profundo geómetra el Excmo. é Ilmo. Sr. General Don Cárlos Ibañez é Ibañez de Ibero, Director general del *Instituto Geográfico y Estadístico*, y Presidente de la Comision internacional de Geodesia, y á todos los ilustrados indivíduos que componen el brillante cuerpo de Topógrafos.

Antes de concluir, debo manifestar al público la dolorosa pérdida que ha experimentado la ciencia con el fallecimiento de mi señor hermano y colaborador, D. José Goyanes y Soldevilla, de inolvidable recuerdo, y cuya ilustracion y modestia eran bien notorias.

El Gobierno ha premiado en mí nuestros desvelos, concediéndome la cruz de primera clase de la órden civil de María Victoria, con los honores de Jefe de Administracion de primera clase, en virtud del informe de la Real Academia de Ciencias, y la encomienda de la Real órden española de Isabel la Católica.

Ruego encarecidamente al público me dispense esta molesta digresion, así como los errores y faltas en que haya podido incurrir en esta tercera edicion, que espero acogerá, como siempre, con su acostumbrada benevolencia.

Madrid: Enero de 1884.

Isidro Giol y Soldevilla

OBRAS PUBLICADAS.

	PRECIOS. Madrid.	Provincs.
Tratado de las Acotaciones, por D. Isidro Giol y Soldevilla y D. José Goyanes y Soldevilla.—Un tomo en 4.° en rústica. Consta de 53 páginas y 8 láminas con 106 figuras, hechas con todo esmero. 2.ª edicion corregida..........	3.50	4
Tratado de Topografía, por los mismos.—Dos gruesos tomos en 4.° en rústica, cada uno con su atlas por separado, compuestos de muchas láminas perfectamente dibujadas y litografiadas. 3.ª edicion, corregida y aumentada..........	40	42
Curso elemental de Topografía, por los mismos.—Un tomo en 4.° en rústica, de 286 páginas y 14 láminas con 292 figuras perfectamente dibujadas y litografiadas. 5.ª edicion, corregida......	8.50	9
Tratado de Agrimensura, por D. Isidro Giol y Soldevilla.—Un tomo en 4.° en rústica. Consta de 352 páginas y 16 láminas, con 334 figuras perfectamente dibujadas y litografiadas. 2.ª edicion.....	6	7
Manual de la juventud, ó prontuario de los estudios que son preciso hacer para seguir las diferentes carreras, por D. Isidro Giol y Soldevilla y D. Agapito Gonzalez Callejo.—Un tomo en 4.° en rústica, que consta de 256 páginas. 1.ª edicion......	3	4
Elementos de vendajes, apósitos y aparatos; Anatomía quirúrgica y operaciones, por D. Isidro Giol y del Valle, doctor en Medicina y Cirugía. 2.ª edicion. Consta de tres cuadernos, que se venden por separado, á saber:		
El primer cuaderno..........	2	2.50
El segundo idem..........	3	3.50
El tercero idem..........	2	2.50

Todas estas obras se hallan de venta en las principales librerías y en casa de D. Isidro Giol y Soldevilla, calle de Bordadores, núm. 2, 4 y 6, cuarto 3.°, centro.

Se sirven los pedidos de provincias á vuelta de correo, remitiendo el importe anticipado en letras ó libranzas del giro mútuo, á favor de dicho Sr. Giol y Soldevilla.

TRATADO
DE TOPOGRAFÍA.

PLANIMETRÍA

CAPÍTULO PRIMERO.

Nociones de trigonometría rectilínea.

Preliminares.—Líneas trigonométricas.—Arcos suplementarios.—Valores particulares de algunas líneas trigonométricas.—Propiedades de los triángulos rectángulos.—Propiedades de los triángulos oblicuángulos ó generales.—Tablas de líneas trigonométricas naturales.—Resolucion de los triángulos rectángulos.—Resolucion de los triángulos oblicuángulos ó generales.

1. **Preliminares.**—La *trigonometría* es la ciencia que trata de la resolucion de los triángulos por medio del cálculo. Todo triángulo consta de seis elementos: tres lados y tres ángulos. Se dice que se resuelve un triángulo, cuando se deducen los valores de tres de sus elementos desconocidos, de las relaciones que los ligan á otros tres que se conocen.

Los elementos que se buscan son las *incógnitas* del problema, y los elementos conocidos son los *datos*, entre los cuales es preciso que haya un lado; pues si fuesen dados los tres ángulos, se sabe (Geom. Teor. 60), que corresponden á infinitos triángulos semejantes.

2. No pudiendo referirse á una misma unidad los ángulos y los lados de un triángulo, se emplean en lugar de los primeros ciertas líneas, que tienen relaciones sencillas con los ángulos y con los lados, y que pueden referirse á la misma unidad que estos.

3. **Líneas trigonométricas.**—Las líneas trigonométricas principales son:

el seno, la tangente, la secante, el seno verso,
el coseno, la cotangente, la cosecante, el coseno-verso.

Para dar á conocer la existencia de estas líneas, trazaremos una circunferencia con un rádio arbitrario y tiraremos los diámetros AA', FF' (figura 1.ª) perpendiculares entre sí. Consideremos ahora un arco A B menor que un cuadrante. Llamemos al punto A *orígen* del arco, y *extremo* del mismo al punto B, y convengamos en contar desde A, y en el sentido A B F...... los arcos que hemos de considerar. Esto supuesto, se llama *seno* del arco A B ó del ángulo correspondiente A O B, á la perpendicular B C, bajada desde el extremo B del arco, al rádio O A que pasa por el orígen. La magnitud del seno, así como la de todas las demás líneas trigonométricas, se refiere al rádio tomado por unidad.

Tangente trigonométrica del mismo arco ó ángulo, es la parte A D de la tangente geométrica al círculo en el orígen, comprendida entre este punto y el D, en que encuentra á la prolongacion del rádio que pasa por el extremo del arco.

La *secante* O D es el rádio que pasa por el extremo, prolongado hasta su encuentro con la tangente.

El *seno-verso* es la distancia A C, que media entre el orígen y el pié del seno.

El *coseno* del arco A B es el seno B E del arco complementario B F, suponiendo el orígen de este arco en F y el extremo en el mismo punto B.

Como se tiene B E = C O, se deduce que el coseno de un arco A B, es tambien la *distancia del centro del círculo al pié del seno*.

La *cotangente* es la tangente F G del complemento del arco.

La *cosecante* O G es la secante del complemento.

El *coseno-verso* es el seno-verso F E del complemento.

Recíprocamente, las líneas B C, A D, O D, que son el seno, tangente y secante del arco A B, son el coseno, cotangente y cosecante del arco complementario F B.

4. **Arcos suplementarios.**—El arco A B′ correspondiente al ángulo obtuso A O B′, tiene el orígen en A y el extremo en B′. Su *seno* es la perpendicular B′ C′ bajada desde el extremo B′ del arco á la prolongacion del rádio que pasa por el orígen.

La parte A D′ de tangente geométrica tirada por el orígen A, y comprendida desde este punto hasta el encuentro de la tangente con la prolongacion del rádio O B′ que pasa por el extremo B′ del arco A B′ es la *tangente trigonométrica* de este arco ó de su ángulo correspondiente.

La *secante* del arco A B′ es la distancia O D′ del centro al extremo de la tangente.

El *seno-verso* es la distancia A C′ del orígen al pié del seno.

El arco complementario de A B′ es el exceso F B′ del arco sobre un cuadrante.

El *coseno* de A B′ es el seno B′ E del arco complementario F B′, ó la distancia O C′ del centro al pié del seno.

La *cotangente*, la *cosecante* y el *coseno-verso* del arco A B′, son la tangente F G′, la secante O G′ y el seno-verso F E del arco F B′.

5. Los *arcos* A B y A B′ *son suplementarios*. En efecto, siendo O F perpendicular á A A′ por construccion, tambien lo será á su paralela B B′,

y por consiguiente los arcos F B y F B′ serán iguales (Geom. Teor. 42).

Los arcos A B y A′ B′, complementarios de los F B y F B′, serán tambien iguales, y como A B′ y A′ B′ son suplementarios, tambien lo serán los A B′ y A B.

6. El *seno* B′ C′ del arco suplementario A B′ es igual en magnitud al B C del arco A B.

En efecto, los triángulos rectángulos O C B, O C′ B′, tienen iguales las hipotenusas O B, O B′, por rádios de un mismo círculo, y los ángulos C O B, C′ O B′, iguales, por serlo los arcos correspondientes (Geom. Teorema 47, Recíp. 1.º); luego se tendrá B C = B′ C′. Además, ambos son positivos, por estar sobre el diámetro A A′; luego:

Los senos de dos arcos ó de dos ángulos suplementarios son iguales en valor absoluto y en signo.

7. Las tangentes A D, A D′, son tambien iguales en valor absoluto; pues los triángulos rectángulos O A D, O A D′ tienen el cateto A O comun, y los ángulos A O D, A O D′ iguales, por serlo los arcos A B y A Q = A′ B′; luego será A D = A′ D′. La tangente A D es positiva por estar contada desde el orígen hácia la parte superior de A A′, y la A D′ negativa, por estarlo hácia la parte inferior; luego:

Las tangentes de dos ángulos suplementarios son iguales en valor absoluto, y de signo contrario.

8. Las secantes O D, O D′, son tambien iguales, por la igualdad demostrada de los triángulos O A D, O A D′; pero de la definicion de la secante se deduce, que para trazarla habremos de tirar la O B′, desde O hasta el extremo B′ del arco, y que para llegar al extremo de la tangente, será preciso retroceder de B′ á D′. Como O B′ está contada partiendo del centro hácia el extremo B′ del arco respectivo, lo mismo que la secante O D, se comprende que O B′ es positiva, y B′ D′ contada en sentido contrario, será negativa. Por tanto tendremos:

$$\text{secante de } A\,B' = +\,O\,B' - B'\,D';$$

pero $-B'\,D' = -B'\,O - O\,D'$; luego será

$$\text{secante de } A\,B' = +\,O\,B' - B'\,O - O\,D' = -\,O\,D';$$

luego:

Las secantes de dos ángulos suplementarios son iguales en valor absoluto, y de signo contrario.

9. Los cosenos O C, O C′ de los arcos suplementarios A B y A B′, son tambien iguales en magnitud. En efecto, los triángulos rectángulos O B C, O B′ C′ son iguales (6), y dan por lo tanto O C = O C′. Como el primero está á la izquierda de F F′, y el segundo á la derecha del mismo diámetro, aquel será positivo y este negativo; luego:

Los cosenos de dos ángulos suplementarios son iguales en valor absoluto, y de signo contrario.

10. **Valores particulares de algunas líneas trigonométricas.**— *El seno de un ángulo, ó del arco correspondiente, es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo.*

Si se prolonga el seno B C (fig 2) del arco B E, ó del ángulo correspondiente B A E, hasta encontrar en D á la circunferencia, la perpendicular A E á la cuerda B D, dividirá á ésta y al arco correspondiente en dos partes iguales (Geom. Teor. 42); luego el seno del ángulo B A E ó del arco correspondiete B E, es igual á la mitad B C de la cuerda B D, que subtiende el arco B E D, duplo del B E.

11. *Líneas trigonométricas del arco de* 0°.—Si suponemos que los arcos están descritos con el radio O A (fig. 1.ª), que gira de izquierda á derecha, alrededor del punto O, suponiendo además que el radio vale 1, tendremos para el arco de 0°;

$$\text{Sen. } 0^{\circ} = 0\,; \qquad \cos\ 0^{\circ} = 1\,; \qquad \text{tang}\ 0^{\circ} = 0; \qquad \sec.\ 0^{\circ} = 1.$$

12. *Líneas trigonométricas del arco de* 30°.—Como el seno del arco de 30° es la mitad de la cuerda del arco de 60°, y esta cuerda es igual al radio (Geom. Teor. 82. Nota), el seno de 30° será igual á la mitad del radio, y tendremos:

$$\text{Sen. } 30^{\circ} = \frac{R}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Como sen. 30° = cos. 60° (4), será cos 60° = 0,5.

13. *Líneas trigonométricas del arco de* 45°.—Siendo A O D (fig. 3) un ángulo de 45°, su complemento A D O en el triángulo rectángulo A O D será tambien de 45°; luego (Geom. Teor. 19—1.°) A D = O A, y se tendrá:

$$\text{Tang. } 45^{\circ} = R = 1.$$

Como se tiene tang. 45° = cot. 45° (3), será tambien cot. 45° = 1.

14. *Líneas trigonométricas del arco de* 90°—Para el arco de 90° (fig. 1.ª), tendremos:

$$\text{Sen. } 90^{\circ} = 1;\ \cos.\ 90^{\circ} = 0;\ \text{tang. } 90^{\circ} = \infty;\ \text{por ser O F paralela á A D}\ \ \text{Sec. } 90^{\circ} = \infty.$$

15. *Líneas trigonométricas de los arcos comprendidos entre* 0° *y* 90°.—El seno crece á medida que crece el arco y varía desde 0 á 1.

El coseno disminuye desde 1 á 0.

La tangente crece de 0 á ∞.

La secante tambien desde 1 á ∞.

16. *Líneas trigonométricas del arco de* 180°:

$$\text{Sen. } 180^{\circ} = 0;\ \cos.\ 180^{\circ} = -1;\ \text{tang. } 180^{\circ} = 0;\ \sec.\ 180^{\circ} = -1.$$

17. *Líneas trigonométricas de los arcos comprendidos entre* 90° *y* 180°.— El seno disminuye desde 1 á 0, á medida que el arco crece.

El coseno crece en valor absoluto desde 0 á 1.

La tangente disminuye en valor absoluto desde ∞ á 0.

La secante disminuye en valor absoluto desde ∞ á 1.

18. **Propiedades de los triángulos rectángulos.**—Haciendo centro en el vértice B (fig. 4) de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo A B C, con un radio igual á la unidad, y trazando el arco G D correspondiente á dicho ángulo, las perpendiculares D E, F G al cateto A B desde los extremos del arco, serán, como hemos dicho, el seno y la tangente del ángulo B. El coseno de este ángulo será la línea B E.

Comparando los triángulos semejantes B E D, B A C, tendremos

$$\mathrm{B\,E : D\,E :: B\,C : C\,A},$$

y llamando a, b, c, á los lados del triángulo A B C, respectivamente opuestos á los ángulos A, B, C, y teniendo en cuenta que el radio B D es la unidad, la proporcion anterior se convertirá en la siguiente:

$$1 : \text{sen. B} :: a : b \qquad [a];$$

de donde resulta

$$b = a \text{ sen. B} \qquad [1];$$

que nos dice, que *en todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiera es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al cateto.*

19. Los mismos triángulos semejantes dan tambien la proporcion

$$\mathrm{B\,D : B\,E :: B\,C : B\,A}, \qquad \text{ó}$$

$$1 : \text{cos. B} :: a : c \qquad [b];$$

de donde se tiene

$$c = a \text{ cos. B} \qquad [2];$$

que nos dice, que *en todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiera es igual á la hipotenusa multiplicada por el coseno del ángulo comprendido por estos lados.*

20. Los triángulos semejantes B G F, B A C dan la proporcion

$$\mathrm{B\,G : G\,F :: B\,A : A\,C}; \qquad \text{ó}$$

$$1 : \text{tang. B} :: c : b \qquad [c];$$

de donde

$$b = c \text{ tang. B} \qquad [3];$$

que nos dice, que *en todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiera es igual al producto del otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero.*

21. Propiedades de los triángulos oblicuángulos ó generales. — *En un triángulo cualquiera, los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Desde el vértice C (figs. 5 y 6) de uno de los ángulos del triángulo A B C, se baja una perpendicular á la base, y si esta cae dentro del ángulo, como en la fig. 5, tendremos en el triángulo rectángulo D A C, (18)

$$\text{C D} = b \text{ sen. A};$$

y en el B D C,

$$\text{C D} = a \text{ sen. B};$$

de estas ecuaciones se deduce

$$b \text{ sen. A} = a \text{ sen. B};$$

de donde resulta la proporcion

$$a : b :: \text{sen. A} : \text{sen. B} \qquad [d]$$

Si la perpendicular cae fuera del triángulo (fig. 6), se tendrá en el triángulo rectángulo C A D,

$$\text{C D} = b \text{ sen. C A D};$$

pero como es sen. C A D = sen. C A B (6), ó sen. A, refiriéndonos al triángulo A B C, será

$$\text{C D} = b \text{ sen. A}.$$

En el triángulo rectángulo C B D se tiene tambien

$$\text{C D} = a \text{ sen. B}.$$

De estas dos ecuaciones se obtiene tambien del mismo modo la proporcion [d].

22. *En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el duplo del producto de estos dos lados por el coseno del ángulo opuesto al primero.*

El triángulo A B C (fig. 5) se tiene (Geom. Teor. 72)

$$\overline{\text{B C}}^2 = \overline{\text{A C}}^2 + \overline{\text{B A}}^2 - 2 \text{ B A} \times \text{D A}; \quad \text{ó}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, c \times \text{D A};$$

pero D A = b cos. A, (19) y sustituyendo en la ecuacion anterior,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \text{ cos. A} \qquad [4].$$

En el triángulo obtusángulo A B C (fig 6) se tiene tambien (Geometría Teor. 73).

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2 + 2\,AB \times AD,$$

$$ó \qquad a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c \times AD,$$

tambien se tiene (19),

$$AD = b \cos.\, CAD;$$

pero cos. C A D = — cos. C A B (9), ó — cos. A, refiriéndonos al triángulo A B C; luego se tendrá

$$AD = b \times -\cos.\, A = -\,b \cos.\, A.$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion que da el valor de a, se tendrá

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c \times -\,b \cos.\, A, \qquad ó$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos.\, A.$$

23. **Tablas de lineas trigonométricas naturales.**—Para la resolucion de los triángulos, se necesita conocer los valores de las líneas trigonométricas de los ángulos de 0° á 180° Estos ángulos se aprecian ordinariamente en grados y minutos. Las tablas de Chevallot contienen los valores de las líneas trigonométricas de los arcos del primer cuadrante, creciendo de minuto en minuto. Estos valores están referidos al radio tomado por unidad, y tienen hasta siete cifras decimales. Las tablas están dispuestas como las de los logaritmos de las líneas trigonométricas de Lalande. Para encontrar las líneas correspondientes á los arcos menores que 45°, se buscan los grados en el renglon superior, y se recorre de arriba abajo la columna encabezada con el nombre de la línea trigonométrica que se busca, hasta llegar al número, que en la misma columna está en la línea horizontal que marca el número de minutos, en la primera columna vertical de la izquierda. Este número será el valor de la línea trigonométrica de que se trata

Si el arco pasa de 45°, se hallará el valor de la línea trigonométrica en cuestion, recorriendo de abajo arriba la columna que marca en el renglon inferior el nombre y el número de grados de la línea trigonométrica, hasta llegar al renglon que señala el número de minutos, en la columna de la derecha,

Tratemos, por ejemplo, de hallar el coseno del ángulo de 31° 20′.

Empezariamos por buscar la hoja, cuyas columnas están encabezadas con los nombres de las líneas trigonométricas del arco de 31°, y recorreriamos la columna **Cosen. 31°** hasta llegar al renglon á que corresponde el núm. 20, que expresa los minutos, en la primera columna de la izquierda: el número 0,8541564 que así hallaríamos es el coseno de 31° 20'.

Para hallar la tangente de 58° 22', buscaríamos la hoja que tiene en su renglon inferior los nombres de las líneas trigonométricas del arco de 58°, y recorreríamos de abajo arriba la columna correspondiente al nombre Tang. 58°, hasta hallarnos enfrente del núm. 22, que expresa los minutos en la primera columna de la derecha. El número 1,6233599 que encontraríamos, es la tangente de 58° 22'.

A continuacion copiamos la hoja en que se encuentran las líneas que hemos hallado, con el objeto de que se vea la disposicion de las tablas, y se puedan hallar los valores de las indicadas como ejemplos, y las de otros nuevos que pueden proponerse, para los arcos expresados en grados y minutos, desde 31° 0' hasta 31° 60' ó 32°, y tambien desde 58° 0' hasta 58° 60' ó 59°; ejercicios que creemos convenientes para adquirir práctica en el manejo de las tablas. El problema inverso, hallar el arco á que corresponde una línea trigonométrica dada, se resuelve con facilidad, hallando en las tablas dicha línea trigonométrica ó aquella cuyo valor se acerque más al que buscamos, y viendo el arco á que corresponde.

′	Sen. 31°	Tang 31°	Cotan. 31°	Cosen. 31°	
0	0,5150381	0,6008606	1,6642795	0,8571673	60
1	0,5152874	0,6012566	1,6631834	0,8570174	59
2	0,5155367	0,6016527	1,6620884	0,8568675	58
3	0,5157859	0,6020490	1,6609945	0,8567175	57
4	0,5160351	0,6024454	1,6599016	0,8565674	56
5	0,5162842	0,6028419	1,6588097	0,8564173	55
6	0,5165333	0,6032386	1,6577189	0,8562671	54
7	0,5167824	0,6036354	1,6566292	0,8561168	53
8	0,5170314	0,6040323	1,6555405	0,8559664	52
9	0,5172804	0,6044294	1,6544529	0,8558160	51
10	0,5175293	0,6048266	1,6533663	0,8556655	50
11	0,5177782	0,6052240	1,6522808	0,8555149	49
12	0,5180270	0,6056215	1,6511963	0,8553642	48
13	0,5182758	0,6060192	1,6501128	0,8552135	47
14	0,5185246	0,6064170	1,6490304	0,8550627	46
15	0,5187733	0,6068149	1,6479490	0,8549118	45
16	0,5190219	0,6072130	1,6468686	0,8547609	44
17	0,5192705	0,6076112	1,6457893	0,8546099	43
18	0,5195191	0,6080095	1,6447111	0,8544588	42
19	0,5197676	0,6084080	1,6436338	0,8543076	41
20	0,5200161	0,6088067	1,6425576	0,8541564	40
21	0,5202646	0,6092054	1,6414824	0,8540051	39
22	0,5205130	0,6096043	1,6404082	0,8538537	38
23	0,5207613	0,6100034	1,6393351	0,8537023	37
24	0,5210096	0,6104026	1,6382630	0,8535508	36
25	0 5212579	0,6108019	1,6371919	0,8533992	35
26	0,5215061	0,6112014	1,6361218	0,8532475	34
27	0,5217543	0,6116011	1,6350528	0,8530958	33
28	0,5220024	0,6120008	1,6339847	0,8529440	32
29	0,5222505	0,6124007	1,6329177	0,8527921	31
30	0,5224986	0,6128008	1,6318517	0,8526402	30
	Cosen. 58°	Cotan. 58°	Tang 58°	Sen. 58°	′

′	Sen. 31	Tang. 31°	Cotan. 31°	Cosen. 31°	
30	0,5224986	0,6128008	1,6318517	0,8526402	30
31	0,5227466	0,6132010	1,6307867	0,8524884	29
32	0,5229945	0,6136013	1,6297227	0,8523360	28
33	0,5232424	0,6140018	1,6286597	0,8521838	27
34	0,5234903	0,6144024	1,6275977	0,8520316	26
35	0,5237381	0,6148032	1,6265368	0,8518793	25
36	0,5239859	0,6152041	1,6254768	0,8517269	24
37	0,5242336	0,6156052	1,6244178	0,8515744	23
38	0,5244813	0,6160064	1,6233599	0,8514219	22
39	0,5247290	0,6164077	1,6223029	0,8512693	21
40	0,5249766	0,6168092	1,6212469	0,8511166	20
41	0,5252241	0,6172108	1.6201920	0,8509639	19
42	0,5254716	0,6176126	1,6191380	0,8508111	18
43	0,5257191	0,6180145	1,6180850	0,8506582	17
44	0,5259665	0,6184166	1,6170330	0,8505052	16
45	0,5262139	0,6188188	1,6159820	0,8503522	15
46	0,5264612	0,6192211	1,6149320	0,8501991	14
47	0,5267085	0,6196236	1,6138829	0,8500459	13
48	0,5269558	0,6200263	1,6128349	0,8498927	12
49	0,5272030	0,6204291	1,6117878	0,8497394	11
50	0,5274502	0,6208320	1,6107417	0,8495860	10
51	0,5276973	0,6212351	1,6096966	0 8494325	9
52	0,5279444	0,6216383	1,6086525	0.8492790	8
53	0,5281914	0,6220417	1,6076094	0,8491254	7
54	0,5284384	0,6224452	1,6065672	0,8489717	6
55	0,5286853	0 6228488	1,6055260	0 8488179	5
56	0,5289322	0,6232526	1,6044858	0,8486641	4
57	0,5291790	0 6236566	1,6034465	0,8485102	3
58	0,5294258	0,6240607	1,6024082	0,8483562	2
59	0 5296726	0,6244650	1,6013709	0,8482022	1
60	0,5299193	0,6248694	1.6003345	0,8480481	0
	Cosen. 58°	Cotan. 58°	Tang. 58°	Sen. 58°	′

24. Resolucion de los triángulos rectángulos.—Se conoce siempre uno de los ángulos, que es el recto.

PRIMER CASO.—*Dados los dos catetos* c *y* b (fig. 7); *hallar la hipotenusa* a *y los ángulos* B *y* C.

Tendremos (20) $b = c$ tang B; de donde

$$\text{tang. B} = \frac{b}{c}.$$

$b = a$ sen. B (18); de donde

$$a = \frac{b}{\text{sen. B}}$$

$$C = 90^\circ - B.$$

Ejemplo. Sean $b = 85{,}5$; $c = 114$; efectuaremos los cálculos siguientes:

Cálculo de B. $\text{tang. B} = \dfrac{85{,}5}{144} = 0{,}75;$

la tangente de las tablas que más se acercan á este valor es 0,7499119, que corresponde á 36° 52′; luego se tendrá

$$B = 36^\circ\, 52'.$$

Cálculo de a. $a = \dfrac{85{,}5}{\text{sen. } 36^\circ\, 52'} = \dfrac{85{,}5}{0{,}5999} = \dfrac{85{,}5}{0{,}6} = 142{,}5.$

Cálculo de C. $C = 90^\circ - 36^\circ\, 52' = 53^\circ\, 8'.$

25. SEGUNDO CASO.—*Dada la hipotenusa* a *y un cateto* c, *hallar el otro cateto* b, *y los ángulos agudos* B *y* C.

Se tiene (18) $c = a$ sen C; de donde

$$\text{sen. C} = \frac{c}{a}.$$

El seno de C corresponde á dos ángulos suplementarios (6); y por lo tanto, el valor de C es indeterminado en general; pero en el caso de la resolucion de un triángulo rectángulo, esta indeterminacion no tiene lugar, pues el ángulo C es necesariamente agudo

$$B = 90^\circ - C.$$
$$b = a \text{ sen B}.$$

Ejemplo. Sea $a = 142{,}5$; $c = 114$; tendremos:

Cálculo de C. Sen. $C = \dfrac{114}{142{,}5} = 0{,}8$; que corresponde en las tablas

á 53° 8′; luego será

$$C = 53^\circ\, 8'.$$

Cálculo de B. $B = 90^\circ - 53^\circ\,8' = 36^\circ\,52'$.

Cálculo de b. $b = 142{,}5 \times \text{sen. } 36^\circ\,52' = 142{,}5 \times 0{,}6 = 85{,}5$.

26. TERCER CASO.—*Dado un cateto* b *y un ángulo agudo* B, *hallar el ángulo* C, *la hipotenusa* a *y el cateto* c.

Se tiene $C = 90^\circ - B$;

$$c = b \text{ tan. } C \ (20);$$

$b = a \text{ sen. } B$ (18); de donde

$$a = \frac{b}{\text{sen. } B}.$$

Ejemplo. Sea $b = 85{,}5$; $B = 36^\circ\,52'$.

Tendremos.

Cálculo de C. $C = 90^\circ - 36^\circ\,52' = 53^\circ\,8'$.

Cálculo de c. $c = 85{,}5 \times \text{tang. } 53^\circ\,8' = 85{,}5 \times 1{,}33 = 113{,}72$; ó $c = 114$.

Cálculo de a. $a = \dfrac{85{,}5}{\text{sen. } 36^\circ\,52'} = \dfrac{85{,}5}{0{,}6} = 142{,}5$.

27. CUARTO CASO.—*Dada la hipotenusa* a *y un ángulo agudo* B, *hallar el otro ángulo* C, *y los dos catetos* b *y* c.

Se tiene $C = 90^\circ - B$

$$b = a \text{ sen. } B. \quad (18)$$

$$c = a \text{ sen. } C.$$

Ejemplo. Sea $a = 142{,}5$; $B = 36^\circ\,52'$.

Cálculo de C. $C = 90^\circ - 36^\circ\,52' = 53^\circ\,8'$.

Cálculo de b. $b = 142{,}5 \times \text{sen. } 36^\circ\,52' = 142{,}5 \times 0{,}6 = 85{,}5$.

Cálculo de c. $c = 142{,}5 \times \text{sen. } 53^\circ\,8' = 142{,}5 \times 0{,}8 = 114$.

28. **Resolucion de los triángulos oblicuángulos ó generales.**—PRIMER CASO.—*Dados dos lados* a *y* b (fig. 8) *y el ángulo comprendido* C, *hallar el tercer lado* c, *y los ángulos* A *y* B.

Tenemos (22), $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos. C$, ó

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos. C}.$$

Suponiendo que se tiene $a < b$ ó $a < c$, se calculará el ángulo A por la proporcion

$$a : c :: \text{sen. } A : \text{sen. } C;$$

de donde resulta

$$\text{sen. } A = \frac{a \text{ sen. } C}{c}.$$

Como por haber supuesto $a < b$ ó $a < c$, resulta $A < B$ ó $A < C$ (Geom. Teor. 19-Recíproco 2.º), el ángulo A es necesariamente agudo; así su valor será el del ángulo que dan las tablas.

Por último se tiene

$$B = 180^\circ - (A + C). \quad \text{(Geom. Teor. 14).}$$

Ejemplo.—Sean $a = 332,0$; $b = 305,8$; $C = 73^\circ\ 19'$. Tendremos que resolver el triángulo, ejecutando los cálculos siguientes:

Cálculo de c:

$$c = \sqrt{332^2 + 305,8^2 - 2 \times 332 \times 305,8 \times \cos.\ 73^\circ\ 19'}$$

$$c = \sqrt{332^2 + 305,8^2 - 2 \times 332 \times 305,8 \times 0,287}$$

$$c = \sqrt{110224 + 93513,6 - 58299,2}$$

$$c = \sqrt{145438,4} = 381,36, \text{ ó aproximadamente}$$

$$c = 381,4.$$

Cálculo de A:

$$\text{sen. } A = \frac{332 \times \text{sen. } 73^\circ\ 19'}{381,4};$$

$$\text{sen. } A = \frac{332 \times 0,9579}{381,4} = \frac{318,02}{381,4} = 0,83382$$

Se busca en las tablas el seno 0,83382, y se encuentra que el que más se acerca á este valor es el 0,83388, que corresponde al arco de 56° 30′; será por consiguiente

$$A = 56^\circ\ 30'.$$

Observacion. En el triángulo que resolvemos, se tiene $a < c$; luego el ángulo A será agudo, y su valor el dado por las tablas.

Cálculo de B:

$$B = 180^\circ - (56^\circ\ 30' + 73^\circ\ 19') = 180^\circ - 129^\circ\ 49' = 50^\circ\ 11'.$$

29. Segundo caso.—*Dado un lado* a *y los ángulos adyacentes* B *y* C *hallar* A, c *y* b.

Tendremos desde luego

$$A = 180^\circ - (B + C).$$

Los valores de c y b se hallarán (21) por las proporciones

$$c : a :: \text{sen. } C : \text{sen. } A;$$

$$b : a :: \text{sen. } B : \text{sen. } A;$$

de los cuales se deducen los valores

$$c = \frac{a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A};$$

$$b = \frac{a \text{ sen. } B}{\text{sen. } A}.$$

Ejemplo —Sea $a = 332$; $B = 50° 11'$; $C = 73° 19'$.
Cálculo de A:

$$A = 180° - (50° 11' + 73° 19') = 180° - 123° 30' = 56° 30'.$$

Cálculo de c:

$$c = \frac{332 \times \text{sen. } 73° 19'}{\text{sen. } 56° 30'} = \frac{332 \times 0,9579}{0,8339} = \frac{332}{0,8339} \times 0,9579 =$$

$398,13 \times 0,9579 = 381,4.$
Cálculo de b.

$$b = \frac{332 \times \text{sen. } 50° 11'}{\text{sen. } 56° 30'} = \frac{332 \times 0,7681}{0,8339} = \frac{332}{0,8339} \times 0,7681 =$$

$$398,13 \times 0,7681 = 305,8.$$

30. Tercer caso —*Dados los tres lados* a, b *y* c, *hallar los tres ángulos* A, B *y* C.

Suponiendo que sea c el lado mayor, hallaremos el ángulo mayor C por la ecuacion

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos. C; \text{ de la que se deduce}$$

$$c^2 - a^2 - b^2 = -2\,a\,b \cos. C;$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2\,a\,b \cos. C, \text{ y}$$

$$\cos. C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}, \text{ la que nos dará el valor del ángulo C.}$$

El ángulo A se hallará por la proporcion

$$c : a :: \text{sen. } C : \text{sen. } A; \text{ de donde}$$

$$\text{sen. } A = \frac{a \text{ sen. } C}{c}.$$

El valor de A deducido de esta ecuacion, será el del ángulo agudo que dan las tablas, pues siendo $A < C$ á causa de ser $a < c$, el ángulo A es necesariamente agudo.

El valor de B se obtendria por la ecuacion

$$B = 180° - (A + C).$$

Ejemplo —Sea $a = 332$; $b = 305,8$; $c = 381,4$; resolveremos el problema, ejecutando los cálculos siguientes:
Cálculo de C:

$$\cos. C = \frac{332^2 + 305,8^2 - 381,4^2}{2 \times 332 \times 305,8} = \frac{110224 + 93513,6 - 145465,96}{203051,2} =$$

$$\frac{58271,64}{203051,2} = 0,28698.$$

Buscando en la columna de los cosenos el valor que más se aproxima al valor hallado, se encuentra 0,28708 que corresponde á 73° 19′; luego será

$$C = 73^\circ\,19'.$$

Cálculo de A:

$$\text{sen. } A = \frac{332 \times \text{sen. } 73^\circ\,19'}{381,4} = \frac{332 \times 0,9579}{381,4} = \frac{318,08}{381,4} = 0,83382;$$

que corresponde al ángulo de 56° 30′; luego será

$$A = 56^\circ\,30'.$$

Cálculo de B:

$$B = 180^\circ - (56^\circ\,30' + 73^\circ\,19') = 180^\circ - 129^\circ\,49' = 50^\circ\,11'.$$

31. Cuarto caso.—*Dados dos lados* a, b, *y el ángulo* A, *opuesto á uno de ellos* a, *hallar el otro lado* c *y los ángulos* B *y* C.

Se tiene desde luego la proporcion

$a : b :: \text{sen. } A : \text{sen. } B$; de la que se deduce

$$\text{sen. } B = \frac{b \text{ sen. } A}{a} \quad [5]$$

Este problema tiene en general dos soluciones, correspondientes á los dos triángulos A C B, A C B′ (fig. 9), que resultan de la resolucion gráfica del triángulo. En efecto, si se toma una magnitud A C igual al lado b, y en uno de sus extremos se construye el ángulo A, haciendo despues centro en C con un radio a, el arco que con él tracemos cortará al otro lado del ángulo, en dos puntos B y B′. El triánglo A C B satisface á las condiciones pedidas, y el ángulo m es el ángulo agudo que dan las tablas para el valor de B. El triángulo A C B′ tambien satisface, y el ángulo m' es el suplemento del m que dan las tablas.

Por la construccion que hemos indicado, se vé fácilmente que el problema es determinado cuando se tiene $a > b$ ó $a = b$.

Cuando es $a < b$, puede tener las dos soluciones que hemos visto, en las cuales se tiene $a' >$ C D y $a >$ CD, siendo C D la perpendicular al lado desconocido del triángulo que se resuelve, tirada desde el punto C.

Si se tiene $a =$ C D se hallará la única solucion A C D, y el ángulo C D A, cuyo valor se busca, es un ángulo recto. El seno de este ángulo es la unidad, lo que supone que en la fórmula [5] se tiene $a = b$ sen. A. En efecto, siendo el triángulo A C D rectángulo en D, se tiene (18) [1] C D= b sen. A.

Si el lado a es menor que la perpendicular C D, el problema es imposible.

El tercer ángulo C se deduce de la ecuacion

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

El lado c, de la proporcion

$c : a :: \text{sen. } C : \text{sen. } A$; de donde se tiene

$$c = \frac{a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A}.$$

Ejemplo.—Sea $a = 332$; $b = 305,8$; $A = 56^\circ 30'$.

Cálculo de B.

$$\text{sen } B = \frac{305,8 \times \text{sen. } 56^\circ 30'}{332} = \frac{305,8 \times 0.8339}{332} = 0,76809.$$

Este seno corresponde en las tablas á un ángulo de $50^\circ 11'$; luego será

$$B = 50^\circ 11'.$$

Si se sabe que el ángulo B es agudo, el valor hallado para B, será el que resuelve el problema.

Cálculo de C.

$$C = 180^\circ - (56^\circ 30' + 50^\circ 11') = 180^\circ - 106^\circ 41' = 73^\circ 19'.$$

Cálculo de c.

$$c = \frac{332 \times \text{sen. } 73^\circ 19'}{\text{sen. } 56^\circ 30'} = \frac{332 \times 0,9579}{0,8339} = \frac{318,08}{0,8339} = 381,4.$$

Si se sabe que el ángulo B es obtuso, su valor será $129^\circ 49'$, suplemento del ángulo agudo dado por las tablas. El cálculo del triángulo, se haria entonces del mismo modo, empleando este valor de B para calcular C.

Cuando no se sabe si B es agudo ú obtuso, el problema tiene las dos soluciones correspondientes á los dos ángulos suplementarios.

32. Para la resolucion de los triángulos por las tablas de líneas trigonométricas naturales, hemos tomado los datos que propone el señor Cortázar en su tratado de trigonometría, con objeto de que nuestros lectores vean el partido que puede sacarse de las mencionadas tablas, para las operaciones que no requieren una gran precision.

Hemos llevado á la apreciacion de los lados de los triángulos hasta decímetros, y la de los ángulos hasta minutos; que es tambien lo que aprecian los instrumentos más generalmente usados en las operaciones topográficas ordinarias; para los límites que así hemos fijado, basta en general tomar con solo cuatro ó cinco cifras decimales, los valores que dan las tablas para las líneas trigonométricas.

33. La resolucion de los triángulos por medio de las líneas trigonométricas naturales, solo exige el conocimiento de las operaciones más comunes de la aritmética, y está por consiguiente al alcance de las per-

sonas que enteradas de ellas, no poseen el cálculo logarítmico. Esta es la razon que hemos tenido para consignar las precedentes nociones elementales de trigonometría rectilínea.

Para los cálculos que exijan mayores conocimientos de esta ciencia ó el empleo de los logaritmos, nos referiremos, como hemos indicado, al tratado del Sr. Cortázar.

En todo caso, los triángulos rectángulos y los oblicuángulos de los casos segundo y cuarto, se resuelven muy sencillamente por las líneas trigonométricas naturales. Los otros dos casos de triángulos oblicuángulos, exigen por este medio cálculos aritméticos más complicados, que si se resolvieran por logaritmos.

CAPITULO II.

Definicion de la Topografía.—Del globo terrestre y líneas principales que en él se consideran.

Definicion de la Topografía.—Figura de la tierra.—Secciones y líneas principales que se consideran en el globo terrestre.—Dimensiones principales del globo.—Forma que se atribuye á la tierra en las aplicaciones.—Línea vertical.—Determinacion de la vertical.—Perpendículo.—Plomada.—Plano vertical.—Línea horizontal.—Plano horizontal.—Determinacion de la horizontal.—Nivel de perpendículo ó de albañil.—Nivel de aire.—Determinacion de un plano horizontal.—Propiedades de las líneas y de los planos horizontales y verticales.—Líneas de máxima pendiente de los planos y de la superficie del terreno.—Determinacion de una vertical por los niveles.—Meridiana.—Trazado de la meridiana.—Determinacion geográfica de un punto de la superficie terrestre.—Longitudes y latitudes geográficas.

34. **Definicion de la Topografía.**—*Se llama Topografía la ciencia que se ocupa de la representacion geométrica de una parte de la superficie terrestre.*

Por los procedimientos que enseña la topografía, se determina la posicion relativa de varios puntos de esta superficie, se calculan las distancias que median entre ellos, y se representan sobre un plano en posiciones análogas á las que realmente ocupan.

35. **Figura de la tierra.**—La tierra es un cuerpo aislado de los demás del universo, y su superficie es convexa.

La convexidad de la tierra se demuestra por la observacion de un buque que se aleja de la costa; pues se ocultan sucesivamente á la vista, el casco, los palos con sus velas y los topes, precisamente en el órden inverso en que dejarian de verse si la tierra fuese plana, en razon al volúmen de estas distintas partes de la embarcacion. Del mismo modo, para los que observan desde un buque, los últimos objetos que se dejan de percibir en tierra son las veletas de las torres y las cimas de las montañas.

* La figura de la sombra que la tierra proyecta sobre la luna en los eclipses de este astro, es tambien una prueba de la convexidad de nuestro globo.

* Los viajes marítimos han confirmado hasta la evidencia este principio, deducido anteriormente de las observaciones mencionadas

El convencimiento de la verdad del principio que nos ocupa, condujo al inmortal Colon al descubrimiento de la América; pues le sugirió la idea de que navegando hácia el occidente, pasaria á las Indias orientales, evitándose doblar el cabo de Buena-Esperanza, que ofrecia muchas dificultades y peligros

Un español, Juan Sebastian Elcano, natural de Guetaria en Guipúzcoa, fué el primero que realizó un viaje alrededor del mundo, saliendo de Sanlúcar el 27 de Setiembre de 1519, caminando al occidente y volviendo á entrar en este puerto el 7 de Setiembre de 1522, como si hubiera venido del oriente Remitimos para más ámplios detalles al Compendio de Matemáticas de nuestro sábio Vallejo, cuarta edicion, tomo segundo, página 362, nota, en la que consigna interesantes noticias acerca de esta notable expedicion, que hace mucho honor á la Nacion Española. El 28 de Mayo de 1861 se inauguró en Guetaria la estátua del ilustre marino; ereccion acordada en las juntas de Guipúzcoa, por la iniciativa del diputado Sr. Balzola.

Probada la convexidad, se ha creido por mucho tiempo que la tierra era de forma esférica; pero las aplicaciones de la teoria del péndulo y las mediciones hechas por muchos sábios, para justificar las observaciones de Huyghens y Newton, han venido á demostrar que es un *elipsóide de revolucion, aplanado*.

36. **Secciones y líneas principales que se consideran en el globo terrestre** —El diámetro N S (fig. 10), alrededor del cual gira la tierra en su movimiento diurno, se llama *eje de la tierra*. El eje N S es el diámetro menor del elipsóide terrestre El punto medio C del eje es el *centro de la tierra*.

Los extremos del eje se llaman *polos*; uno de los cuales N, recibe el nombre de *polo norte* ó *boreal*, y el otro S, el de *polo sur* ó *austral*

37. Toda seccion N M S Q, que se considera causada en la superficie de la tierra por un plano que pasa por el *eje*, se llama *seccion meridiana* ó *meridiano*.

El plano secante recibe el nombre de *plano meridiano*

El meridiano es la elipse generatriz del elipsóide terrestre. El meridiano N E S O está representado en su verdadera magnitud El eje menor de toda seccion meridiana es el eje mismo de la tierra.

38. La seccion O M E Q hecha en la superficie de la tierra por el plano perpendicular al eje en el centro C, es un círculo llamado *ecuador*, porque divide al elipsóide en dos partes iguales.

El diámetro O E ó M Q del ecuador es tambien el eje mayor de la seccion meridiana.

Si el plano secante es perpendicular al eje en otro punto B que el centro de la tierra, la seccion es tambien un círculo P, y recibe el nombre de *paralelo*, por serlo al ecuador. Los paralelos disminuyen á partir del ecuador hasta el polo, en el cual se reducen á un punto.

39. Se llama *horizonte sensible* ó *aparente*, el plano tangente á la superficie de la tierra en un punto de la misma. *Horizonte racional*, es la seccion hecha por un plano que es paralelo al horizonte sensible, y que pasa por el centro de la tierra.

40. **Dimensiones principales del globo terrestre**.—Hácia el año de 1690, el sábio francés Mr. Picard fué el primero que se ocupó en medir con precision un arco de meridiano terrestre, y eligió el comprendido entre Malvoisine y Amiens. Encontró 57060 toesas para el desarrollo del arco de un grado.

Huyghens y Newton, establecieron como ya hemos dicho (35), que la tierra era un elipsóide aplanado, para lo cual se fundaron en observaciones astronómicas. De ellas dedujo el primero de estos dos sábios, que el aplanamiento del elipsóide era de $\frac{1}{578}$, y el segundo encontró $\frac{1}{230}$.

En 1736, una comision de sábios, entre los que se encontraban los franceses Mr. Godin, Bouguer y la Condamine, y los españoles D. Jorge Juan y D. Antonio Ulloa, fué enviada al Perú con encargo de hallar el desarrollo de un arco de meridiano. Encontraron 56733 toesas para el del arco de un grado.

Maupertuis y otros, encontraron en 1737 el desarrollo de 57419 toesas para el arco de un grado en Laponia.

Los resultados obtenidos fueron por consiguiente:

Desarrollo del arco de un grado de meridiano en el Perú.	56753	toesas.
En Francia.	57060	id.
En Laponia.	57419	id.

Estos resultados justificaron plenamente las observaciones de Huyghens y Newton. En efecto, el desarrollo del arco de un grado de meridiano, para un elipsóide aplanado, aumenta desde el ecuador hasta el polo.

La comision de pésas y medidas, apoyándose en las observaciones hechas en 1790 por MM. Delambre y Méchenin, estableció las siguientes dimensiones del globo terrestre:

Radio del ecuador ó semi-eje mayor del elipsóide.	6376159m
Semi-eje menor del elipsóide.	6356234m
Radio medio.	6366200m.

El aplanamiento del globo, que es el cociente que resulta de dividir la diferencia de los radios del elipsóide por el semi-eje mayor, es segun las dimensiones establecidas $\frac{1}{320}$.

Para la formacion de la carta de Francia, se ha supuesto con éxito satisfactorio que el aplanamiento era de $\frac{1}{309}$.

41. **Forma que se atribuye á la tierra en las aplicaciones.** — A pesar del aplanamiento del globo terrestre, no hay inconveniente en considerar *esférica* á la tierra, toda vez que el cálculo ha dado á conocer, que la separacion del *círculo osculador*, ó que tiene mayor número de puntos comunes con una seccion meridiana, es próximamente $0^{mm},01$ á la distancia de un miriámetro del punto de contacto.

Estas diferencias son inapreciables, en la mayor parte de los casos que ocurren en las aplicaciones ordinarias de la topografía.

42. Cuando la tierra se supone esférica, el meridiano N A S Q (fig. 11) y el ecuador O M E Q, son círculos máximos de la esfera; y el semieje N C de la tierra, así como el radio C O del ecuador, son radios de la misma. El valor de este radio es 6366200^{m}, hallado para el radio medio del elipsóide (40).

En geografía, el meridiano de un punto M es la semicircunferencia máxima N M S. La N Q S, es el *antimeridiano* del mismo punto.

El ecuador O M E Q divide á la esfera en dos partes iguales llamadas *hemisferios*, cada uno de los cuales recibe al nombre de su polo respectivo.

La parte N O M E Q es el *hemisferio norte ó boreal*, y la S O M E Q, el *hemisferio sur ó austral*.

43. *Las desigualdades que presenta la superficie terrestre, no influyen en la forma general que afecta.*

Para hacerlo ver, nos fijaremos en una de las mayores alturas conocidas del globo, que es la del Dawalagiri, el más elevado de los picos del Himalaya en Asia, cuya altura es de $7821^{m},56$. Exagerando esta altura, la supondremos de 8000 metros, y calcularemos la que le corresponderia en el globo representado por una esfera, cuyo radio fuese 1 metro, por la proporcion

$$6366200 : 8000 :: 1 : x;$$

de la que resulta

$$x = \frac{8000}{6366200} = \frac{80}{63662} = \frac{40}{31831} = 0,00126.$$

Claramente se vé, que desigualdades que apenas exceden de milímetro y cuarto, no afectan sensiblemente la forma general de la superficie de una esfera cuyo radio es un metro, y puede comprenderse del mismo modo que tampoco alteran la de la tierra las alturas y depresiones que presenta su superficie.

44. **Línea vertical.** —Se llama *línea vertical* ó simplemente *vertical* de un punto cualquiera *m* (fig. 12), á la recta *m* C que dicho punto determina con el centro de la tierra.

La *m* C se considera indefinidamente prolongada, y es la vertical comun á los infinitos puntos por los cuales pasa; ya estén en la superficie terrestre, como el A, ya fuera del globo, como el *m*, ó en el interior de su masa, como el *n*.

El punto Z, extremo superior de Z N′, en el *zenit* de todos los puntos de la vertical que consideramos, y el extremo inferior N′ es el *nadir* de los mismos. Estos extremos son los puntos en los cuales parece que la vertical encuentra á la aparente bóveda celeste.

45. *Por un punto cualquiera del espacio puede siempre pasar una vertical* (44); *pero no puede pasar más que una.*

Porque si pasasen dos, como tienen otro punto comun, que es el centro de la tierra, se confundirian en una sola (Geom. párrafo 3.° axioma 4.°).

46 **Determinacion de la vertical.—Perpendiculo.—Plomada.—** La línea vertical es tambien la direccion que toma un punto material ó un cuerpo grave, cuando se le abandona á su propio peso en un medio poco resistente, como la atmósfera que rodea nuestro globo. Esta propiedad suministra el medio de determinar la vertical de un punto *m* (fig 12), fijando en él uno de los extremos de un cordon *c* (fig. 13) que lleva sujeto al otro extremo un peso *p*, el cual generalmente es un cono de metal. El sencillo aparato constituido por el cordon y el peso, se llama *perpendículo*. Dispuesto como hemos indicado, el peso atraido al centro de la tierra por la accion de la gravedad, hace tomar al cordon la direccion vertical.

Cuando se hace uso del perpendículo, no se consigue que el cordon tome esta posicion, sino despues de una série de oscilaciones. Para que se halle más pronto en reposo, se la lleva ligeramente con la mano á la posicion hácia la cual se le vé que tiende.

Cuando al aparato descrito acompaña un cilindro *n* (fig. 14) llamado *nuez*, cuya altura es igual al diámetro de la pesa *p*, recibe el nombre de *plomada*.

Con frecuencia se suele llamar tambien plomada al perpendículo.

47. Dos verticales cualesquiera V, V′ (fig. 15), cortándose en el centro de la tierra (44) determinan un plano, cuya interseccion con la superficie de la esfera es una circunferencia máxima (Geom. 83).

El desarrollo del arco P Q P′ de esta circunferencia, comprendido entre las verticales de dos puntos P y P′ de la superficie terrestre, se llama la *distancia geográfica* entre dichos puntos.

Esta distancia es el arco correspondiente al ángulo de las verticales.

48. Para hallar el valor del ángulo *x* que determinan las verticales V, V′ (fig. 15), de dos puntos P, P′ de la superficie terrestre, se hallarán desde luego los ángulos *m* y *n* que forman las verticales con las rectas P *e*, P′ *e′*, que dichos puntos determinan con una misma estrella, situada en la prolongacion del plano de las verticales.

Conocidos estos ángulos, y tirando por C una paralela C *r* á las rectas

P e, P′ e', que se suponen paralelas, en razon á la inmensa distancia á que se halla su punto de encuentro, tendremos la igualdad

$$x + n' = m \qquad \text{(Geom. Teor. 8. Recíp.); de donde}$$

$$x = m - n';$$

y como además se tiene $n' = n$, (Geom. Teor. 8. Recíp.) obtendremos la ecuacion

$$x = m - n.$$

Ejemplo: Sea $m = 43^\circ\ 28'\ 20''$,

$$n = 40^\circ\ 24'\ 57'';$$

resultará

$$x = 3^\circ\ 3'\ 23''.$$

49. Conocido el valor del ángulo que forman las verticales de dos puntos P, P′ de la superficie terrestre, puede hallarse la *distancia geográfica* x entre estos puntos (Geom. Problema 40. 3.°) por la proporcion

$$360^\circ : 2\,\pi\,R :: a : x;$$

en la cual $2\,\pi\,R$ es el desarrollo de la circunferencia máxima de la tierra, siendo $\pi = 3{,}1415926\ldots$ y $R = 6366200$ (42); y a el arco dado, expresado en grados, minutos y segundos.

La proporcion anterior puede simplificarse, y deducirse de ella una fórmula fácil de aplicar en la práctica: dividiendo la primera razon por 2, resulta

$$180 : \pi\,R :: a : x;$$

de donde

$$x = \frac{\pi\,R\,a}{180} = \frac{\pi\,R}{180} \times a;$$

poniendo en vez de π y de R sus valores, resultará

$$x = \frac{3{,}1415926 \times 6366200}{180} \times a; \qquad \text{y por último}$$

$$x = 111111{,}2 \times a.$$

Si suponemos $a = 1^\circ$, resultará

$$x = 111111{,}2.$$

* Empleando el cálculo logarítmico será

$$\log.\ x = \log.\ 3{,}1415926 + \log.\ 6366200 + \text{ct.}^\circ\ \log.\ 180 + \log.\ a - 10.$$

Aplicando esta fórmula al mismo caso particular, y observando que se tiene $a = 1$, y $\log. a = 0$, obtendremos:

$$\log. x = \log. 3{,}1415926 + \log. 6366200 + \text{ct.}^{\text{o}} \log. 180 - 10.$$

Disposicion del cálculo:

$$\begin{aligned} \log. 3{,}1415926 &= 0{,}4971499 \\ \log. 6366200 &= 6{,}8038802 \\ \text{ct.}^{\text{o}} \log. 180 &= 7{,}7447275 \\ \hline \text{Suma} &= 15{,}0457576; \\ \log. x &= 5{,}0457576; \text{ de donde resulta} \\ x &= 111111{,}2 \end{aligned}$$

50. Aun cuando todas las verticales concurren en el centro de la tierra (44), se consideran paralelas, atendiendo á la gran distancia á que se hallan del punto de interseccion, relativamente á lo que distan entre sí, cuando se las considera en la superficie terrestre y en los límites que comprenden las operaciones topográficas. Para ver hasta qué punto podemos extender esta consideracion, tratemos de determinar la distancia que debe haber entre dos puntos P, P' (fig. 16) de la superficie terrestre, para que el ángulo que formen sus verticales sea una cantidad dada bastante pequeña, un minuto por ejemplo.

Sea R, el rádio terrestre

a, la desviacion de las verticales, y

x, la recta que une los puntos dados P, P' de la superficie esférica de la tierra.

En al triángulo isósceles C P P' se tiene en general (21)

$$x : R :: \text{sen. } a : \text{sen. } b \quad [1];$$

y como además es

$$2\,b = 180 - a \quad \text{(Geom. Teo. 14 y Recíp. 1.º del 19), resulta}$$

$$b = \frac{180^\circ - a}{2}.$$

Sustituyendo este valor de b en la proporcion [1] será:

$$x : R :: \text{sen. } a : \text{sen. } \frac{180^\circ - a}{2}; \quad \text{de donde}$$

$$x = \frac{R \text{ sen. } a}{\text{sen } \frac{180^\circ - a}{2}} \; [2].$$

Ahora bien, tenemos R = 6366200, y suponiendo $a = 1'$, será

$$\text{sen. } a = \text{sen. } 1' = 0{,}0002909, \text{ y}$$

$$\text{sen. } \frac{180^\circ - a}{2} = \text{sen. } \frac{180^\circ - 1'}{2} = \text{sen. } \frac{179^\circ \ 59'}{2} = \text{sen. } 89^\circ \, 59' \, 30'' =$$

$$0{,}9999999, \text{ ó próximamente sen. } \frac{180^\circ - a}{2} = 1;$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion [2], obtendremos:

$x = 6366200 \times 0{,}0002909 = 1851{,}93$, ó próximamente

$$x = 1852,$$

* Empleando el cálculo logarítmico, será

$\log. x = \log. 6366200 + \log. \text{ sen. } 1' - 10$

Disposicion del cálculo:

$$\begin{aligned} \log. 6366200 &= \ \ 6{,}8038802 \\ \log. \text{ sen } 1' &= \ \ 6{,}4637261 \\ \hline \text{Suma } &= 13{,}2676063; \\ \log. x &= \ \ 3{,}2676063; \text{ de donde resulta} \\ x &= \ \ 1852 \end{aligned}$$

Se vé pues, que á 2000m, la separacion de dos verticales es poco mayor de un minuto, y que para distancias menores que 1.800m, no llega á valer esta cantidad.

51. **Plano vertical.**—Todo plano que pasa por una vertical se llama *plano vertical.*

52. *Por una vertical pueden pasar infinitos planos verticales.*

Pues lo son (51) los infinitos planos que pueden pasar por ella.

53. Un plano vertical se determina:

1.° *Por una vertical y un punto fuera de ella.*—Pues el plano que la recta y el punto determinan (Geom. Teor. 110) es vertical (51).

2.° *Por una vertical y otra recta cualquiera que la corte.*—Pues las dos determinan la posicion de un plano (Geom. Teor. 110, Corol. 1.°) el cual será vertical (51).

3.° *Por dos verticales cualesquiera.*—Pues el plano que ambas determinan (47) es vertical (51).

54. Para determinar prácticamente uno de los infinitos planos verticales, que pasan por un punto a (fig. 17) del espacio, y por la vertical marcada por una plomada $b\ c$, se coloca el ojo del observador en d, de

manera que el hilo de la plomada cubra el punto *a*. Entonces la visual *d a*, determina con la recta *b c* el plano que se pide (53, 2.º)

Para determinar el plano vertical que pasa por dos puntos *a*, *e*, (figura 17), se hace pasar por uno de ellos *e* la plomada, y queda el caso reducido al anterior.

Todo punto que quede cubierto para el observador por el cordon de la plomada, estará en el plano vertical hallado.

Otro perpendículo cuyo cordon quede cubierto por el del anterior, determinará una vertical situada en el plano, y tambien estará en él otra recta cualquiera cuyos puntos queden igualmente cubiertos.

55. **Línea horizontal**.—Toda recta *a b* (fig. 12) que es perpendicular á una vertical se llama *línea horizontal*.

Todas las perpendiculares *a b*, *c d*, que se pueden tirar por A á la vertical de este punto, son horizontales y determinan un plano perpendicular á la vertical (Geom. Teor 113).

56. **Plano horizontal**.—Todo plano que es perpendicular á una vertical se llama *plano horizontal*. Como el horizonte sensible es perpendicular al rádio en el punto en que toca á la superficie de la tierra (39), será un plano horizontal

57. *Las perpendiculares levantadas en un punto de una vertical determinan la posicion de un plano horizontal*.—Porque todas ellas están en un mismo plano perpendicular á dicha recta (Geom. Teor. 113) el cual es horizontal (56).

58. Como dos solas horizontales que pasasen por el punto dado, bastarian para determinar la posicion del plano, se deduce que: *dos horizontales que se cortan determinan la posicion de un plano horizontal*.

59. *El horizonte racional y todos los planos paralelos al horizonte sensible, ó á un plano horizontal cualquiera, son planos horizontales*.—Pues siendo paralelos entre sí, serán perpendiculares (Geom. Teor 172. Recíproco) al radio que pasa por el punto en que el horizonte sensible es tangente á la tierra; luego serán planos horizontales (56).

60. Toda recta que no es horizontal ni vertical se llama *recta inclinada ó de pendiente*

61. Todo plano que no es horizontal ni vertical, se llama *plano inclinado*

62. **Determinacion de la horizontal**.—La horizontal se determina con el auxilio de instrumentos conocidos con el nombre de *niveles*, entre los que describiremos el nivel de perpendículo ó de albañil y el nivel de aire; que son los que para conseguir el expresado objeto se usan en la planimetría.

63 **Nivel de perpendiculo ó de albañil**.—Se compone este instrumento de dos reglas de madera *a b*, *a c* (fig. 18) ensambladas entre sí, y con un travesaño *e f* á caja y espiga. Estas reglas forman un ángulo, que generalmente es recto, aun cuando no es condicion precisa que lo sea, y sus longitudes *a b*, *a c* son iguales, así como las distancias *e a*, *f a*

de los extremos del travesaño al vértice del ángulo. Tanto este vértice como los extremos *b* y *c* de las reglas deben estar armados de cantoneras metálicas, y las superficies inferiores de las cantoneras *b* y *c*, dispuestas además de manera que puedan adaptarse en toda su extension á una misma superficie perfectamente plana.

De un punto *m* de la bisectriz del ángulo *b a c* de las reglas, está suspendido el cordon de un perpendículo *p*.

El travesaño está dividido en partes iguales por una hendidura estrecha *n*, practicada en direccion perpendicular á la longitud del travesaño. Esta hendidura se llama *línea de fé*.

64. La línea *b c* (fig. 19) que determinan los extremos de las reglas es perpendicular á la bisectriz del ángulo *b a c*.

En efecto, siendo $a\,e = a\,f$, así como $e\,d = d\,f$, por la construccion del aparato, la *a d* será perpendicular á la *e f* (Geom, Teor. 24).

Siendo *e a* y *a f* iguales, así como *a b* y *a c*, la razon que existe entre *a e* y *a b* es evidentemente igual á la de *a f* y *a c*: luego *e f* y *b c* son paralelas (Geom. Teor. 55 Recíproco); y como *e f* es perpendicular á *a d*, tambien *b c* lo será; pero *a d* es la bisectriz del ángulo *b a c*, puesto que los ángulos *e a d*, *d a f* son iguales á causa de la igualdad de los triángulos *e a d*, *d a f* (Geom. Teor 15 Recíproco); luego *b c* es perpendicular á la bisectriz del ángulo *b a c*.

En virtud de este principio, cuando el aparato esté dispuesto de manera que el cordon de la plomada coincida con la línea de fé, coincidirá tambien con la bisectriz del ángulo *b a c*, y siendo entonces vertical esta línea, su perpendicular *b c* será horizontal (53).

65. *Verificacion y correccion de un instrumento en general.*—La *verificacion* ó *comprobacion* de un instrumento, es la operacion por medio de la cual se averigua si todas sus partes están dispuestas de manera que llenen las condiciones necesarias para los usos á que se le destina. La *correccion* ó *rectificacion* tiene por objeto disponerlas convenientemente para los mismos usos, cuando la verificacion da á conocer que no lo están.

66. *Verificacion del nivel de perpendículo.*—Para verificar el nivel, se le dispone sobre una regla *b c* (fig. 19) de manera que las cantoneras coincidan perfectamente con la superficie de la regla, y se mueve todo el sistema así constituido hasta tanto que el cordon de la plomada coincida exactamente con la línea de fé.

Dejando fija la regla en esta posicion, se invierte el nivel de manera que el extremo *b* vaya á ocupar el lugar que ocupaba el *c* en la primera posicion, y al contrario.

Si entonces la plomada coincide exactamente con la línea de fé, el nivel cumple con las condiciones á que debe satisfacer.

En efecto, si suponemos que gira el nivel alrededor de *a h* como eje, siendo $a\,b = a\,c$ será $b\,h = h\,c$ (Geom. Teor. 21. Recíp 1.°) y como *h* permanece invariable, *c* irá á parar á *b*, y *b* á *c*. Por la misma razon *f* irá á parar á *e*, y *e* á *f*. Recíprocamente, si al hacer la semirevolucion indicada, la plomada coincide con la línea de fé, las reglas serán iguales, y *d* será el punto medio del travesaño.

67. *Correccion de nivel de perpendículo*.—Supongamos que las reglas sean iguales, y que la línea de fé esté trazada en *d'* (fig. 20) fuera del punto medio del travesaño. Colocado el nivel sobre una regla *r*, y moviéndola hasta que la plomada coincida con la línea de fé *d'*, el aparato presentará la disposicion que se vé en la figura. Si hacemos dar una semirevolucion al nivel alrededor de *a h*, perpendicular bajada del punto *a* á la regla *r*, el punto *b* irá á parar á *c* y recíprocamente; el *d'* irá á parar á *d''*, y la plomada no coincidirá ya con la línea de fé. Esta circunstancia nos indica que el nivel está *descorregido*. Para efectuar la correccion observaremos que los puntos *d'* y *d''* equidistan del punto *d*, interseccion del travesaño y el eje *a h* del giro.

Marcando pues el punto del travesaño, que ha venido á ocupar la posicion *d'*, dividiendo la *d' d''* en dos partes iguales y marcando el punto medio *d*, habremos obtenido la verdadera línea de fé.

Observamos ahora que siendo *a h* perpendicular á la regla *r* en todas las posiciones que se dan al aparato, así como el cordon del perpendículo á la horizontal *s*, los ángulos *m* y *n* son constantemente iguales, y por lo tanto moviendo juntamente la regla y el nivel hasta que el cordon de la plomada pase por *d*, el ángulo *m* se hará nulo, así como su igual *n*, y la regla *r* coincidiendo con la horizontal *s*, habrá tomado la posicion horizontal; entonces el instrumento cumplirá con las condiciones á que debe satisfacer.

El procedimiento que acabamos de indicar para la correccion del nivel, es tambien el que emplean los constructores para marcar la línea de fé.

Si las reglas son desiguales, pero la línea de fé está en el centro del travesaño, el nivel tomará la posicion representada en la fig. 21. Al dar la semirevolucion alrededor de *a h*, el punto *c* irá á parar á *c'*, *b* á *b'* y *d'* á *d''*, y por tanto tampoco coincidirá la plomada con la línea de fé. Tambien en este caso hallaremos *d*, dividiendo *d' d''* en dos partes iguales; y moviendo despues la regla *r* hasta que el cordon del perpendículo pase por *d*, la regla *r* tomará la posicion *s*, del mismo modo que en el caso anterior.

Si el nivel no llena ninguna de las condiciones prescritas, tomará la disposicion representada en la fig. 22, y se correjirá del mismo modo que en los casos anteriores.

Debemos observar, que en los dos últimos casos que hemos considerado, el eje *a h* del giro, que es la verdadera direccion del cordon del perpendículo, para marcar la horizontalidad de la recta que une los extremos inferiores de las reglas, no coincide con la bisectriz del ángulo que ellas forman.

68. De lo expuesto deduciremos la siguiente regla práctica para la verificacion y correccion del nivel de albañil.

Se coloca el nivel sobre una regla, de manera que las caras inferiores de las cantoneras en que terminan las reglas del nivel coincidan en toda su extension con el plano de la regla auxiliar, y se mueve el sistema así constituido, hasta tanto que el cordon de la plomada marcando libremente la direccion vertical, coincida exactamente con la línea de fé. Permaneciendo fija invariablemente la regla, se dá una semirevolucion al nivel, de manera que cada una de las cantoneras ocupe el lugar que correspondia á la otra en la primera posicion, y si entonces el cordon del perpendículo coincide con la línea de fé, el instrumento es exacto. Si no, se marca la interseccion del cordon con el travesaño, y dividiendo en dos partes iguales el espacio comprendido entre la primitiva línea de fé y la que hemos trazado, se obtendrá la verdadera línea de fé.

69. **Nivel de aire**.—Este nivel, llamado tambien de *ampolla* ó de *burbuja* y debido á Thévenot, se compone de un tubo *a b* (fig. 23) de longitud variable, y ligeramente convexo en su parte superior, lleno de agua ó de alcohol, á excepcion de una pequeña porcion *m* ocupada por una ampolla ó burbuja de aire, y cerrada por sus dos extremos á la lámpara. Este tubo está encerrado en una guarnicion metálica *a b* (fig. 24) descubierta por su parte superior, y fija por medio de los soportes *s* sobre una regla tambien metálica, cuya cara inferior, opuesta á la curva que hemos mencionado, es perfectamente plana.

Algunas veces, en vez de aire, el tubo del nivel sólo contiene agua y un espacio vacío que ocupa el vapor del mismo líquido. Estos tubos se construyen cerrándolos por uno de los extremos, llenándolos de líquido que se hace hervir á la lámpara, y cerrando despues el otro extremo; cuando la temperatura baja, el líquido disminuye de volúmen, y se produce un vacío que no tarda en ocupar el vapor del agua, el cual viene á hacer las veces del aire en los otros *niveles*.

En vez de agua, es preferible que el líquido sea éter ó bien alcohol ó espíritu de vino, generalmente coloreado para que se destaque más la burbuja. Estos líquidos tienen la ventaja de no congelarse á las más bajas temperaturas ordinarias, siendo así que el agua lo verifica á la de 0° de la escala termométrica, temperatura muy frecuente en nuestros climas.

70. *Teoría*.—Se funda este instrumento en la propiedad física que poseen dos fluidos de densidades diferentes, los cuales contenidos en una misma capacidad, se colocan de modo que el ménos denso ocupa la parte superior.

71. Si el tubo *a b* (fig. 24) es completamente cilíndrico, y suponemos que su eje está horizontal, la ampolla de aire, específicamente más ligera que el líquido encerrado en el tubo, tenderá á ocupar la generatriz superior del mismo, ó más probablemente se formarian una ó más pequeñas burbujas, cada una de las cuales permaneceria en un punto cualquiera de la generatriz; puesto que estando todos ellos á igual altura, no habria razon para que se fijase en uno de ellos con preferencia á otro. Entonces la menor inclinacion que se diera al eje, obligaria á la burbuja á ocupar el extremo *a* ó *b*, que resultase más elevado.

Recíprocamente, cuando la burbuja estuviese en la parte superior del tubo, la generatriz superior sería horizontal. Pero se comprende tambien lo difícil que sería encontrar y fijar esta posicion única que nos manifiesta la horizontalidad; y por tanto esta excesiva sensibilidad del aparato le haria de un uso sumamente incómodo. Para obviar este inconveniente, se ha dado á la generatriz superior la curvatura que hemos indicado (69).

72. Adoptada esta disposicion, la teoría del instrumento se funda en la propiedad física establecida y en la propiedad geométrica de que *la tangente á un arco de círculo vertical en el punto más elevado es horizontal.*

Para demostrar esta última propiedad, sea *v* (fig. 25) la vertical de un punto *a* (44); y haciendo pasar por esta vertical un plano cualquiera, que será vertical (51), tracemos en él desde *a* como centro, y con un radio arbitrario una circunferencia.

La vertical y la circunferencia se cortarán evidentemente en el punto más elevado *m* y en el más bajo de la curva, y la tangente *t* á la circunferencia en el punto *m*, siendo perpendicular al rádio vertical *a m* (Geometría. Teor. 41. Recíp.), será horizontal (55).

Todas las cuerdas paralelas á la tangente, como la *c d*, siendo perpendiculares á la vertical (Geom. Teor. 6. Recíp.), serán tambien horizontales.

73. Si colocamos un tubo circular *m* (fig. 26) sobre una regla inclinada A C, la ampolla tenderá á ocupar la parte superior del tubo. La tangente *t* al punto más elevado *n* de la ampolla será horizontal, y vertical su normal *b* (72). Sea *m* el punto medio del arco, y *r* la normal en este punto al arco del tubo, la cual será perpendicular á A C (Geom. Teor. 24); pues pasando *r* por el centro del arco segun su definicion, y equidistando *m* de los extremos del arco, tiene *r* dos puntos equidistantes de estos extremos.

De lo expuesto se deduce la igualdad de los ángulos *c s*, siendo *s* el que forma la regla A C con la horizontal A B; pues tienen sus lados respectivamente perpendiculares. Si marcamos el punto medio *n* de la ampolla en esta posicion, y colocamos el tubo con sus extremos diametralmente invertidos, la ampolla ganará la parte superior, y el punto *n* ocupará la posicion *n''*. Marcando ahora el punto *n'* medio de la ampolla, demostraríamos del mismo modo que antes la igualdad de los ángulos *c'* y *s*. Luego *c* y *c'* serán iguales, y como *r* es constante, tambien lo serán los arcos correspondientes *m n* y *m' n'*, ó lo que es lo mismo, los *n'' m'* y *m' n'*. Luego el punto medio del tubo será el punto medio del arco comprendido entre las marcas hechas *n''* y *n'*. Haciendo ahora mover la regla A C alrededor de A, hasta que el punto medio de la ampolla coincida con *m'* (fig. 27), el ángulo *c'* se habrá hecho nulo, como tambien el *s*, y la regla A C habrá tomado la posicion horizontal A B. La tangente *t''* la conserva siempre (72).

De aquí se deduce, que *cuando el punto medio de la ampolla está en* m', *medio del tubo, la línea* A B *que determinan los extremos del mismo es horizontal.*

74. *Division.*—Fácilmente se vé, que estando en m' el centro de la burbuja, y siendo $n'' m' = m' n'$, los extremos de la ampolla equidistarán de n'' y n'; lo que proporciona el medio de determinar la posicion horizontal de A B. Con este objeto se ven los índices i (fig 24) en los tubos de algunos niveles. Otros (fig. 28) presentan divisiones simétricas con respecto al punto medio m, grabadas en el cristal del tubo. Cuando los extremos de la ampolla equidistan de dos divisiones simétricas, la A B es horizontal.

75. *Límite de la curvatura del tubo.*—La excesiva sensibilidad que, como hemos visto (71), tendría un nivel cuyo tubo fuese cilíndrico, ha sido la causa de que se construyan con la curvatura indicada (69). Es claro que á medida que esta curvatura aumente, disminuye la sensibilidad, y que hay, por consiguiente, un cierto rádio de curvatura, que puede dar la que se desee.

Para medir esta sensibilidad, llamemos r al rádio de curvatura del nivel, y a al arco que recorre la burbuja para la inclinacion de $1''$ dada á la regla A B (fig. 27); tendremos que

siendo el arco de 1°, $\frac{2\pi r}{360^\circ}$, y el de $1'$, $\frac{2\pi r}{360 \times 60}$, el de $1''$ será

$$a = \frac{2\pi r}{360 \times 60 \times 60} = \frac{\pi r}{180 \times 60 \times 60} = \frac{\pi}{648000} \times r \, \frac{3{,}1416}{648000} \times r$$

$$= 0{,}000004848 \times r.$$

Tambien se tiene, despejando r en la ecuacion

$$a = \frac{3{,}1416}{648000} \times r,$$

$$r = \frac{648000}{3{,}1416} \times a = 206265 \times a.$$

Si suponemos que la burbuja recorre un arco de $0^{m}{,}0003$ de longitud para un segundo de inclinacion, será

$$r = 206265 \times 0{,}0003 = 61{,}88.$$

La mayor parte de los niveles de los instrumentos topográficos tienen un rádio menor, y solo en instrumentos de gran precision, como los usados en los observatorios, se encuentran niveles cuyo rádio de curvatura excede de 60 metros.

76. *Verificacion del nivel de aire.*—Sea m (fig. 29) el punto medio de la curva superior $a\,b$ de un nivel armado, y $a\,c$, $b\,d$, las perpendiculares

tiradas desde los dos extremos del tubo á la cuerda $c\ d$, y supongamos que se tenga $a\ c = b\ d$. Coloquemos el nivel de manera que el centro de la ampolla esté en m.

Siendo $a\ c$ y $b\ d$ iguales por hipótesis, y paralelas por construccion (Geom. Teor. 6) $a\ b$ y $c\ d$ serán paralelas (Geom. Teor. 30) y como la normal $m\ n$ es perpendicular á la $a\ b$ y la divide en dos partes iguales (73), tambien lo será, y dividirá del mismo modo á su paralela $c\ d$ (Geom. Teor. 54).

En este supuesto, si hacemos dar al instrumento una semirevolucion completa alrededor de $m\ n$ como eje, el punto b irá á ocupar la posicion del punto a y al contrario; d irá á parar á c y c á d, y el punto m, permaneciendo invariable por estar en el eje del giro, el centro de la ampolla coincidirá aún con el punto medio del tubo.

77. De aquí deduciremos la siguiente regla práctica para la verificacion del nivel de aire:

Colóquese el nivel sobre una regla móvil y hágase girar esta, hasta que la burbuja esté equidistante de los índices. Fija invariablemente la regla, se invierte por completo el nivel colocándole de nuevo sobre ella de modo que cada uno de los extremos del nivel ocupe exactamente el lugar que en la primera posicion ocupaba el otro, y si entonces la burbuja permanece equidistante de los índices, el instrumento cumple con las condiciones que se requieren para su uso.

78. *Correccion del nivel de aire.*—Si al dar la semirevolucion que hemos indicado, el centro de la ampolla no coincidiese exactamente con el punto medio m del tubo, lo cual se conoceria en que los extremos de la burbuja no quedaban equidistantes de los índices, era señal de que el instrumento no llenaba las condiciones á que debe satisfacer y seria preciso *corregirle*.

La descorreccion puede provenir de que m no esté en el centro del tubo, ó de que las líneas $a\ c$, $b\ d$, (fig. 29) sean desiguales, ó finalmente de que se verifiquen á la vez estas circunstancias sin compensacion. Consideraremos estos tres casos.

Primer caso. Siendo $a\ c = b\ d$ pero $a\ m$ y $m\ b$ desiguales, podemos prescindir de la parte $a\ c\ d\ b$ del instrumento, pues la posicion de $c\ d$ respecto al horizonte, será siempre la de su paralela $a\ b$, y estamos en el caso de la fig. 26. Supongamos que en este caso, movemos el plano A C hasta que el centro de la ampolla ocupe el lugar del punto n marcado en el tubo. Dando al instrumento una semirevolucion, ocupará la ampolla la posicion n', y n la n'' (73) y dividiendo $n''\ n'$ en dos partes iguales, el punto medio m' dividirá el tubo exactamente, y el instrumento quedará corregido.

Este mismo procedimiento se emplea para dividir el tubo ó marcar los índices (74), que ocuparian las posiciones correspondientes á n'' y n'. Si se quieren obtener más divisiones, se marcarán del mismo modo otros dos puntos simétricos haciendo variar la inclinacion de la regla A C. Si se compara la distancia de dos puntos tomados á un lado del tubo con la de los simétricos al otro lado y resultan iguales, repitiéndose para otros puntos y obteniendo el mismo resultado, se hará la division y se probará además que el tubo está bien calibrado.

79. *Segundo caso.* Supongamos que se tiene $am = mb$ (fig. 30); pero $ac > bd$. Llevada la ampolla al punto medio m, ab será horizontal; pero cd tendrá cierta inclinacion al horizonte á causa de la desigualdad de ac y bd. Si levantamos una perpendicular en á la cd en el punto medio de esta recta, y damos una semirevolucion completa al instrumento alrededor de en, todos los puntos ocuparán nuevas posiciones simétricas de las primitivas con respecto á este eje, y el instrumento ocupará la posicion $c\,b'\,m'\,n\,a'\,d$. Dividiendo en dos partes iguales la distáncia mm', y marcando el punto medio n, bastará mover la regla hasta que el centro de la ampolla coincida con n, y entonces cd coincidirá con la horizontal h; pues haciéndose nulo entonces el ángulo r, su igual s se anulará tambien.

80. Esta correccion exige que se alteren los índices ó marcas que el tubo presenta (74), y es preferible hacer iguales las distancias ac y bd. Con este objeto, se han dado al aparato, entre otras, las disposiciones que representan las figuras 28, 31, 32 y 33. En el nivel de la fig. 28, se puede hacer subir ó bajar el extremo a por el movimiento del tornillo t. Este tornillo apoya su extremo en la regla, y al girar háce avanzar á su tuerca, que está en la pieza s; el tubo entonces se mueve en sentido vertical alrededor de la charnela b.

El tubo de la fig. 31 se pone en movimiento, haciendo girar alrededor de su eje el tornillo t, por medio de la llave f, que tiene una cavidad prismática; la cual se hace ajustar con la espiga e.

Tambien pueden moverse los dos extremos haciendo que ambos se apoyen en tornillos. Así están dispuestos los niveles de las figuras 32 y 33, que tambien pueden tener un solo tornillo y charnela. Los tornillos de la fig. 32 tienen sus tuercas fijas en la regla cd, y se ponen en movimiento por medio de palanquetas que se introducen en cavidades cilíndricas practicadas en los tambores t. En la fig. 33 los tornillos t son fijos, y las tuercas están practicadas en las roldanas ó tambores r, r', que se mueven tambien con palanquetas. Para hacer subir uno de los extremos, se afloja la roldana r' y se hace subir la r por medio de las palancas hasta la altura conveniente. La roldana eleva la espiga e. Cuando se ha conseguido esto, se oprimen ambas roldanas contra la espiga, para hacerla conservar la posicion adquirida. Para hacerle bajar, se movería r en sentido contrario.

81. *Tercer caso.* Cuando el tubo está mal dividido y los apoyos ac y bd (fig. 30) son desiguales, se corrije el nivel como en el caso anterior.

82. Fundados en lo expuesto estableceremos la siguiente regla para la correccion del nivel de aire.

Si al hacer la verificacion (77), *se observa una desviacion en la burbuja al colocar el nivel de la segunda posicion, se la hace correr la mitad de esta desviacion, subiendo ó bajando al extremo* a *del tubo por el movimiento del tor-*

nillo t (figs 28 y 31), *ó por los dos tornillos de las figs.* 32 *y* 33. *Despues se horizonta el nivel por el movimiento de la regla*

Se lleva el nivel á su posicion primera dándole una semirevolucion, y si aun se observa alguna desviacion en la burbuja, se la hace recorrer del mismo modo la mitad le la desviacion observada y se horizonta despues por el movimiento de la regla.

Se invierte de nuevo, y se continúa del mismo modo hasta que en las dos posiciones opuestas del tubo, la ampolla esté equidistante de los índices. Entonces la regla será horizontal, y el instrumento estará corregido (77).

Si no tuviese tornillo (fig. 24), la correccion se reduciría á dividirle de nuevo, ó á marcar convenientemente los índices (78).

83. **Determinacion de un plano horizontal.**—Para determinar un plano horizontal por medio de un nivel, se coloca este sobre el plano, el cual se mueve hasta que el nivel marque la horizontal *ab* (figuras 34 y 35). Se le coloca despues en direccion de otra recta *cd*, que generalmente es perpendicular á *ab*, y se horizonta la *cd*. El plano será entonces horizontal (58).

Si el instrumento está corregido, y la operacion bien ejecutada, el nivel debe quedar horizontal en cualquiera otra posicion en que se le coloque sobre el plano.

84. **Propiedades de las rectas y los planos horizontales y verticales.**—La posicion vertical de una recta ó un plano es *absoluta*, toda vez que tiene que satisfacer á la condicion de pasar por el centro de la tierra, y se comprende que existen infinitas rectas y planos que no pueden satisfacerla.

No sucede lo mismo con la posicion horizontal; puesto que segun las definiciones establecidas (55 y 56), esta posicion es *relativa* á una vertical determinada: así es que toda recta y todo plano puede ser horizontal; puesto que desde el centro de la tierra, siempre se puede tirar una perpendicular á la recta ó al plano, y como esta perpendicular es vertical, la recta ó el plano de que se trata será horizontal.

Una recta inclinada, un plano inclinado relativamente á la vertical ó al plano horizontal de un punto, puede ser horizontal con respecto á la perpendicular tirada á la recta ó al plano desde el centro de la tierra.

85. Estas consideraciones han obligado á referir á la vertical de un punto dado las posiciones de las rectas y de los planos, por ser la vertical la posicion que más fácilmente se determina en la naturaleza (46).

En este sentido, consideraremos como *verticales* todas las rectas paralelas á una vertical determinada; en lo que por otra parte no hay error de consideracion (50).

86. Llamaremos *recta horizontal* á toda recta que sea perpendicular á la misma vertical ó á cualquiera de sus paralelas; y *plano horizontal* á todo el que sea perpendicular del mismo modo á una de estas verticales.

87. Toda recta que no sea vertical ni horizontal, en el sentido que hemos considerado, diremos que es una *recta inclinada*, y *un plano incli-*

nado todo aquel que en el mismo concepto no sea horizontal ni vertical.

88. Así se consideran tambien estos elementos en la Geometría descriptiva y en las construcciones, y del mismo modo los consideraremos nosotros en la Topografía.

89. Partiendo de las definiciones que acabamos de dar, estableceremos algunos principios relativos á las propiedades de las líneas y los planos que consideramos; sobre todo á las que tienen aplicacion á los instrumentos y á las operaciones topográficas.

90. *Todo plano horizontal es perpendicular á las verticales de sus diferentes puntos.*

Porque segun su definicion (56) es perpendicular á una vertical; luego lo será á las demás (Geom. Teor. 122. Recíp.) que hemos dicho (50) pueden considerarse como paralelas á la primera, en los límites que comprenden las operaciones topográficas.

91. *Toda recta perpendicular á un plano horizontal es vertical.*

Porque si no lo fuese, tirando la vertical correspondiente al pié de la perpendicular, esta vertical sería perpendicular al plano (90); lo que no puede ser (Geom. Teor. 114).

92. *Dos planos horizontales cualesquiera son paralelos.*

Porque si no lo fuesen se cortarian, y levantando la vertical correspondiente á uno de los puntos de la interseccion, los planos dados serian perpendiculares á esta vertical (90); lo que no puede ser (Geometría Teor. 116).

93. *Por un punto de una vertical puede pasar un plano horizontal; pero no puede pasar más que uno solo.*

Pues el plano perpendicular á la vertical en el punto dado es horizontal (56): y si pasasen dos, serían perpendiculares á la vertical dada (90); lo que no puede ser (Geom. Teor. 116).

94. *Por un punto cualquiera del espacio puede pasar un plano horizontal; pero no puede pasar más que uno solo.*

Porque el plano perpendicular en el punto dado á la vertical del mismo, es horizontal (56); y por el punto dado que pertenece á esta vertical no puede pasar más que un plano horizontal (93).

95. *Toda recta situada en un plano horizontal es horizontal.*

Porque el plano es perpendicular á la vertical de uno cualquiera de los puntos de la recta dada (90), y la vertical lo es tambien á dicha recta, que pasa por su pié en el plano (Geometría, párrafo 54 y Teor. 112); luego la recta dada es horizontal (55).

96. *Por una recta horizontal puede pasar un plano horizontal.*

En efecto, tomando un punto cualquiera de la recta, y hallando la vertical que le corresponde, una cualquiera de las perpendiculares que se pueden tirar á la vertical en dicho punto, será una horizontal (55), que con la dada, determina el plano horizontal (58), que pasa por esta.

97. *Toda recta horizontal es perpendicular á las verticales de sus diferentes puntos.*

En efecto, por la recta dada puede pasar un plano horizontal (96), y la vertical de un punto cualquiera de la recta, será perpendicular al plano (90), y tambien á la recta dada que pasa por su pié en este plano. Lo mismo se demostraria de la vertical de otro punto cualquiera de la recta dada.

98. *Si una recta horizontal tiene un punto situado en un plano horizontal, los tendrá todos.*

Porque la vertical del punto que tienen comun la recta y el plano dados, siendo perpendicular al plano (90), éste contendrá á todas las perpendiculares á la vertical en dicho punto (Geom. Teor. 113), que son las horizontales que pasan por él; luego contendrá á la horizontal dada.

99. *La vertical de un punto situado en un plano vertical está contenida en el plano.*

Porque si dicha línea no se hallase contenida en el plano, siempre seria posible tirar por el punto dado, y en el plano vertical tambien dado, una paralela á la vertical que determina la posicion de este plano (51); la cual se podria considerar tambien como la vertical correspondiente á este punto (85), y entonces tendríamos dos verticales distintas correspondientes á un mismo punto, lo que no puede ser (45).

100. *Una recta que solo tiene un punto en un plano horizontal no puede ser horizontal.*

Porque si lo fuese, tendria todos sus puntos en el plano (98); lo que es contra el supuesto.

101. *Todo plano perpendicular á una horizontal es vertical.*

Porque tirando la vertical del punto de interseccion de la recta y el plano, esta vertical será perpendicular á la horizontal dada (97); luego estará contenida en el plano que es el lugar geométrico de todas las perpendiculares tiradas á la horizontal en dicho punto; luego el plano será vertical (51).

102. *Toda recta perpendicular á un plano vertical es horizontal.*

En efecto, por ser perpendicular al plano, lo será á la vertical del punto de interseccion, la cual está contenida en el plano (99) y pasa por el pié de la recta dada; luego esta es horizontal (55).

103. *Por un punto cualquiera* e (fig. 36) *de un plano inclinado* MN *puede pasar una horizontal situada en el plano.*

Si hacemos pasar por *e* el plano horizontal que á este punto corresponde (94), su interseccion *ab* con el plano MN será horizontal (95) y estará situada en el plano dado.

104. *Corolario.—Por un plano inclinado pueden pasar muchas horizontales.*

105. *Todas las horizontales de un mismo plano inclinado son paralelas.*

Pues siendo horizontales, estarán situadas en los planos horizontales que pueden pasar por ellas (96), y son por consiguiente, las intersecciones de estos planos con el dado; luego son paralelas (92) y (Geometría Teor. 128).

106. *Dos horizontales paralelas determinan la posicion de un plano* (Geometría Teor. 110 Cor. 2.º); *pero este puede no ser horizontal;* porque las horizontales dadas pueden pertenecer á un mismo plano inclinado (105).

107. *Por un mismo punto de un plano inclinado ó vertical no puede pasar más que una horizontal situada en el plano.*

Supongamos que pasa otra cualquiera.

Tirando por la primera el plano horizontal que puede pasar por ella (96), la segunda recta no podrá tener en el plano horizontal otro punto que el dado; luego no podrá ser horizontal (100)

108. *Toda recta* ab (fig 36) *paralela á una horizontal* cd *es horizontal.*

Haciendo pasar por estas rectas el plano MN que determinan (Geometría Teor. 110 Cor 2.º), y suponiendo que *ab* no fuese horizontal, tirando por uno de sus puntos *e* la horizontal *fg* que le corresponde en el plano (103), la *fg* sería paralela á *cd* (105): lo que no puede ser (Geom. párrafo 17).

109. *Toda recta paralela á un plano horizontal es horizontal.*

En efecto, tirando por un punto cualquiera del plano dado una paralela á la recta dada, la línea tirada estará contenida en el plano (Geometría Teor. 125), y será por lo tanto horizontal (95), luego la recta dada, paralela á ella, será tambien horizontal (108).

110. *Una recta* ab (fig 37), *cuyos puntos están á la misma altura de un plano horizontal* MN *es horizontal.*

En efecto, siendo iguales por hipótesis las distancias *mn*, *or*, *st* de los distintos puntos de la recta al plano, y además paralelas (Geom. Teor. 122), será *ab* paralela á *nt*; y por consiguiente será horizontal (108).

111. Como dos puntos determinan la posicion de una recta, bastará que tenga dos puntos equidistantes del plano horizontal para deducir que es horizontal.

112. **Líneas de máxima pendiente de los planos y de la superficie del terreno.**—La inclinacion ó pendiente de una recta se refiere al ángulo que forma con el plano horizontal de uno de sus puntos (94). Este ángulo es el de la recta dada con su proyeccion sobre el plano horizontal, el cual es el menor de los que forma con las que pasan por su pié en el plano (Geom. Teor. 134).

Se mide por la tangente trigonométrica que corresponde á este ángulo, la cual se llama *pendiente* de la recta, y es el cociente que resulta de dividir el desnivel d entre dos puntos cualesquiera de la recta, por la distancia l de las proyecciones de los mismos puntos sobre el plano horizontal. Llamando p á esta pendiente, tendremos la ecuacion

$$p = \frac{d}{l} \qquad \text{(Acotaciones, 25).}$$

113. La pendiente de un plano es la que corresponde á la línea de máxima pendiente de uno cualquiera de sus puntos

Se llama línea de máxima pendiente de un punto *a* (fig. 38) situado en un plano inclinado P á la línea *ab*, cuya pendiente es mayor que la de otra línea cualquiera *ac*, que pasa por *a* en el mismo plano.

114. La perpendicular *ab* tirada desde *a* á una de las horizontales *de* del plano P es la línea de máxima pendiente que corresponde en el plano al punto *a* (Acotaciones 41).

115. Para trazar en un plano la línea de mayor pendiente que corresponde á un punto dado, no hay más que bajar una perpendicular desde dicho punto á una horizontal cualquiera del plano.

116. La línea de máxima pendiente tiene la propiedad de ser la que entre todas las que pasan en el plano por el punto dado *a* (fig. 39), forma un ángulo con la vertical del mismo punto, que es menor que el que forma con la misma vertical otra cualquiera de las rectas que pueden pasar por *a* en el plano P.

Bajando desde un punto *m* de la vertical *v* del punto *a* una perpendicular *mn* al plano dado P, el pié *n* de esta perpendicular será la proyeccion del punto *m* sobre el plano, y *an* la proyeccion de la vertical sobre el plano; luego esta recta formará el menor ángulo con la vertical (Geometría Teorema 134), y será además la línea de máxima pendiente del plano, correspondiente al punto *a*.

En efecto, el plano que determinan las rectas *ma*, *mn* es vertical (51), y además perpendicular al plano P (Geom Teor. 141).

Haciendo pasar por la horizontal *cd* del plano P en el punto *a* (103) el plano horizontal Q (96), el plano de las *am* y *mn* será tambien perpendicular á este plano horizontal (Geom. Teor. 141), pues *am* es perpendicular al plano Q (90).

Siendo el plano de las rectas *am* y *mn*, perpendicular á los P y Q, lo será á su interseccion *cd* (Geom. Teor. 143), y *cd* lo será á la *an* que pasa por el pié de aquella en el plano á que es perpendicular; luego *an* será la línea de máxima pendiente del plano P en el punto *a* (114).

117. De aquí resulta, que para determinar la línea de máxima pendiente de un punto *a* (fig. 40) sobre el plano P, se tira desde un punto *r* de la vertical de *a*, la perpendicular *rm* al plano.

El pié *m* de esta perpendicular unido con el punto *a* nos da la línea de máxima pendiente.

118. Tambien puede determinarse levantando en *a* la perpendicular *as* al plano, y bajando desde un punto cualquiera *s* de ella una plomada hasta que encuentre al plano en un punto *n*, que unido con el *a* resuelve el problema.

119. La línea de máxima pendiente de un punto situado en una superficie curva, es la del plano tangente en este punto á la superficie (Acotaciones 108).

120. Un cuerpo colocado sobre una superficie plana ó curva, la cual tiene una inclinacion suficiente para vencer el rozamiento del cuerpo con la superficie, cae siguiendo en su movimiento la direccion marcada

por la línea de máxima pendiente. Esta direccion es la línea que recorren las aguas que caen sobre un terreno inclinado, ó sobre la cubierta de un edificio.

121. De esta propiedad se deduce otro medio práctico para hallar la línea de máxima pendiente de un punto. Se fija en él el extremo del cordon de una plomada, y abandonando el peso á la accion de la gravedad, recorrerá en su caida la línea de máxima pendiente de la superficie, la cual quedará completamente determinada por la direccion del cordon de la plomada.

122. **Determinacion de una vertical por los niveles.**—Sea *r* (figura 41) una recta perpendicular por construccion al plano P. Dando á este plano la posicion horizontal por medio de la horizontalidad de las rectas *ab* y *cd* (83), la recta *r* será vertical (91).

123. Tambien puede determinarse de otro modo la posicion vertical de una recta perpendicular por construccion á un plano dado.

Sea *vv'* la vertical de un punto *a* (fig. 42) y P el plano perpendicular en él á la vertical, el cual será horizontal (56).

Sea *ab* una recta que pasa por *a* en el plano, y *cd* una perpendicular á *ab* en el mismo plano. Las rectas *ab* y *cd* serán horizontales (95), y si suponemos que estas rectas giran alrededor de *vv'*, todos sus puntos describirán circunferencias situadas en el plano P. Así es, que siendo *cd* la horizontal determinada por un nivel, se conservará horizontal en todas las posiciones que puede tomar alrededor del eje de rotacion.

124. Pero si el eje del giro es inclinado, como el *mn* (fig. 43), el plano P' perpendicular á él, tambien lo será; pues si fuese horizontal, la *mn* seria vertical (91); y si fuese vertical, la *mn* seria horizontal (102); todo contra el supuesto.

Sea entonces *bb'* la línea de máxima pendiente del plano inclinado P'

Girando el sistema de las rectas *ab* y *cd* alrededor del eje *mn*, cuando la *ab* coincida con la línea máxima pendiente, la *cd* será horizontal (114 y 116). Tambien lo será cuando ocupe la posicion *c'd'*; pero en todas las demás posiciones será inclinada.

Si la línea *cd* es el eje de un nivel, este marcará la horizontalidad en las dos posiciones *cd* y *c'd'*, que determinan el plano P' (106).

Para dar á este plano la posicion horizontal, observaremos que estando las líneas *vv'*, *mn*, *bb'* en un mismo plano (116) bastará hacer girar la *mn* en este plano hasta que se confunda con la vertical *vv'*, en cuyo caso la *bb'*, perpendicular constantemente á *mn*, será horizontal (55), y determinará con una de las *cd* ó *c'd'*, que se conservarán horizontales, la horizontalidad del plano P' (58).

Para conseguirlo, basta colocar el eje del nivel en la direccion *c''d''*, perpendicular á las horizontales, y mover el plano P' de modo que sin salir la *bb'* del plano vertical de las *mn* y *vv'*, el nivel *c''d''* marque la horizontalidad.

125. **Meridiana.**—Se llama *meridiana* de un punto A (fig. 12) de la

superficie terrestre, á la interseccion *ab* del *plano meridional* y el *plano horizontal* que corresponden al mismo punto.

La meridiana se determina en la naturaleza por la sombra mínima de las que un objeto vertical elevado arroja sobre un plano horizontal, en cierto espacio de tiempo próximo á las doce del dia.

126. **Trazado de la meridiana.**—Como esta sombra mínima no se determina fácilmente con exactitud, indicaremos los procedimientos que se siguen en la práctica para el trazado de la meridiana.

1.° *Por la sombra arrojada.*—Sobre una superficie lo más horizontal que sea posible, se elige un punto *a* (fig. 44), y haciendo centro en él se trazan varios arcos concéntricos hácia el norte, ó bien varias circunferencias completas: se fija despues en *a* una varilla *ab* de hierro ó de madera con la punta aguzada para clavarla fácilmente en el terreno, y se dá á esta varilla una posicion perfectamente vertical. Observando entonces la sombra que la varilla arroja sobre el plano, se verá que á la salida del sol se dirige al occidente y tiene una longitud indefinida; que á medida que el sol se eleva sobre el horizonte, la sombra se dirige hácia el este, precisamente en sentido contrario á la marcha del sol, pero sin dejar de ser occidental, y que vá sucesivamente disminuyendo en longitud; que llegará un caso en que el extremo de la sombra tocará á la primera curva en un punto *n*, el cual se marcará con cuidado; despues irá pasando por las demás circunferencias, y los puntos *o*, *p*, en que las corta se marcan tambien del mismo modo. Al medio dia la sombra llega, como hemos dicho, á tener su longitud mínima, en un momento que pasa desapercibido para el observador: despues vuelve á crecer, haciéndose oriental, y su extremo vá tocando sucesivamente á las mismas circunferencias en los puntos *q*, *r*, *s*, que se tiene cuidado de marcar con la posible exactitud. Dividiendo despues cada uno de los arcos *ns*, *or*, *pq* en dos partes iguales, y uniendo los puntos de division, la recta *am* que los une será la meridiana del punto *a*.

127. 2.° *Por las proyecciones de un rayo de luz sobre un plano horizontal.*—Se dispone un plano P (fig. 45), de manera que esté perfectamente horizontal (83). Este plano debe estar provisto de un soporte *c* terminado en un disco *b* con un agujero sumamente pequeño destinado á dar paso á la luz solar, y dispuesto de manera que pueda recibirla en una posicion próximamente perpendicular á un rayo de luz al Mediodía. Se determina por medio de una plomada la proyeccion *a* del agujero de la placa sobre el plano P, y desde *a* como centro se trazan en el plano varios arcos como en el caso anterior. El problema está reducido entonces á marcar los puntos *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, en los cuales el rayo de luz toca sucesivamente á los arcos trazados, y unir por medio de una línea *am* los puntos medios de los arcos *ns*, *or*, *pq*.

128. Siguiendo los procedimientos indicados, se obtiene la recta *am*, que se aproxima á la verdadera meridiana lo suficiente para la aplicacion que de ella se hace á la topografía; pero no se la obtiene con exactitud,

en razon á que el sol no describe en su movimiento aparente círculos paralelos al ecuador, sino arcos de eclíptica: de donde resulta que cuando las sombras son iguales, lo son tambien las alturas del sol sobre el horizonte, pero no sus distancias al meridiano, y por consiguiente tampoco lo son los ángulos que las direcciones de las sombras forman con la meridiana. Si se quiere obtener ésta con mayor exactitud, debe trazarse en los solsticios, porque en esta época la declinacion del sol va á mudar de sentido, y puede considerarse como nula.

129. Si en otra época del año queremos obtener la verdadera meridiana, podemos servirnos de la tabla formada por Mr. Mollet, en la que expresa lo que las observaciones hechas despues del medio dia deben adelantarse ó retardarse el dia primero de cada mes, pudiéndose calcular proporcionalmente el adelanto ó el retraso que corresponde á otro dia cualquiera del mes, lo que no producirá errores de consideracion.

TABLA DE MR. MOLLET, QUE EXPRESA EL ADELANTO Ó RETRASO CON QUE DEBE HACERSE LA OBSERVACION DE LA TARDE EL DIA 1.° DE CADA MES PARA EL TRAZADO DE LA MERIDIANA.

En 1.° de Enero debe adelantarse	9″
En 1.° de Febrero	29″
En 1.° de Marzo	36″
En 1.° de Abril	31″
En 1.° de Mayo	19″
En 1.° de Junio	6″
En 1.° de Julio debe retardarse	4″
En 1.° de Agosto	15″
En 1.° de Setiembre	32″
En 1.° de Octubre	36″
En 1.° de Noviembre	30″
En 1.° de Diciembre	15″

Para ver la aplicacion de esta tabla, supongamos que la observacion se hace en 1.° de Abril, en cuyo dia la observacion debe adelantarse 31″, segun la tabla: marcaríamos el punto s' (fig. 46), en que el extremo de la sombra toca al arco trazado, y contando despues 31″, se marca tambien el s'' en que la sombra corta al mismo arco: tomando la cuerda $s's''$ y llevándola desde s' al otro lado del arco, obtendremos el punto s, y el arco ns sería el que dividiríamos en dos partes iguales para el trazado de la meridiana, como en los casos anteriores.

Si la observacion se hiciese en 1.° de Noviembre, marcaríamos el punto s' y el s'' 30″ despues: el arco ns'' sería en este caso el que debia dividirse.

130. 3.° *Por la observacion de la estrella polar.*—La estrella polar se

determina por medio de la constelacion *abcd* (fig. 47), conocida con el nombre de *Osa mayor*, y vulgarmente con el de *el carro*, la cual se compone de siete estrellas muy brillantes, cuatro de las cuales forman un cuadrilátero, que constituye por su semejanza el cuerpo de la osa ó la caja del carro, y las otras tres una línea quebrada, semejante tambien á la cola de la osa ó á la lanza del carro.

Considerando tirada una recta por las estrellas *a* y *b* del cuadrilátero que se hallan más distantes de la lanza *cd*, la prolongacion de la recta *ab* pasa muy cerca de la estrella *polar* P, la cual termina otra constelacion llamada la *Osa menor*, compuesta tambien de siete estrellas y semejante en su forma á la primera, pero colocada en una situacion contraria. La estrella polar es la más brillante de la constelacion de que forma parte, y parece estar fija en un mismo punto del cielo, y que las demás giran alrededor de ella, describiendo circunferencias tanto mayores cuanto más distantes se hallan de la polar, y en sentido de oriente á occidente

Si, como aparece á primera vista, la estrella polar ocupase exactamente el punto alrededor del cual parecen girar las estrellas, estaria en la prolongacion del eje terrestre, y entonces trazaríamos la meridiana de un punto *a* (fig. 48), haciendo pasar por él una plomada, y determinando el plano vertical que pasa por la plomada y la estrella polar (54), el cual lo estará por el cordon de la plomada y la visual *bp* Este plano, pasando por la vertical de *a*, pasará por el centro de la tierra (44), y como además pasa por *p*, que segun hemos visto, está en la prolongacion del eje, pasará por el eje terrestre; luego será el plano meridiano del punto *a* (37)

Colocando otra plomada *c*, cuyo cordon quede cubierto por el de la primera, se hallará tambien en el plano meridiano (54), y la recta que une las proyecciones de estas plomadas sobre el plano horizontal de *a*, será la meridiana de este punto (125).

131. La estrella polar, no hallándose situada exactamente en la prolongacion del eje de la tierra, describe alrededor del polo celeste una pequeña circunferencia, y por lo tanto la operacion explicada deberá hacerse en el momento en que pasa por el meridiano El paso de la estrella se verifica 13' despues del momento en que la estrella polar y la *c* (figura 47) de la Osa mayor quedan cubiertas por el cordon de la plomada *a'*.

Por lo tanto se trazará la meridiana, observando la hora exacta en que una plomada cubre á las dos estrellas, contando á partir de él 13', y alineando entonces dos plomadas con la estrella polar.

132. Tambien puede trazarse aproximadamente la meridiana, alineando dos plomadas cuando una de ellas cubra á la vez á la estrella polar y á la que está más próxima á la *c* en el cuadrilátero de la Osa mayor.

133. **Determinacion geográfica de un punto de la superficie terrestre.—Longitudes y latitudes geográficas.**—Un punto cualquiera A (fig. 11) de la superficie terrestre se determina geográficamente por el meridiano y el paralelo que pasan por él.

El meridiano de un punto se fija con relacion al de otro punto notable designado de antemano, el cual se llama *primer meridiano*. En España se considera como primer meridiano el que pasa por el observatorio astronómico de Madrid, ó por el de la Isla de Hierro en las Canarias. Los franceses señalan el de París, y los ingleses el del observatorio de Greenwich.

134. La distancia del meridiano de un punto al primer meridiano se llama *longitud geográfica*, y se cuenta en grados, minutos y segundos, desde 0° á 180° del ecuador ó de un paralelo cualquiera. La longitud es *oriental* ó *este*, *occidental* ú *oeste*, segun se cuente hácia uno ú otro de estos puntos cardinales.

Todos los puntos situados en el primer meridiano tienen longitud cero.

135. La *latitud geográfica* de un punto es la distancia de su paralelo respectivo al ecuador, contada en grados, minutos y segundos de meridiano. La latitud es *norte* ó *boreal*, *sur* ó *austral* segun el hemisferio á que el punto pertenece.

Los puntos situados en el ecuador tienen latitud cero, y los polos 90° grados.

136. *Determinacion de la longitud de un punto.*—Dando la tierra una revolucion completa alrededor de su eje en el espacio de 24 horas, y estando divididos los paralelos y el ecuador en 360°, en el espacio de una hora pasarán por delante del sol 15° de paralelo ó de ecuador; luego una hora de tiempo equivale á 15° de longitud.

De aquí se deducen los medios de determinar la longitud de un punto con relacion á otro del primer meridiano ó de longitud conocida. Se reducen á determinar la hora que señala un cronómetro situado en cada uno de los dos puntos en el momento de verificarse un fenómeno físico que desde ambos pueda observarse. Este fenómeno puede ser natural, como un eclipse por ejemplo, ó artificial, como la inflamacion de una cantidad de pólvora en un paraje elevado qne pueda ser visto desde los dos puntos de observacion.

Multiplicando la diferencia en horas que den los cronómetros por 15 se tendrá la diferencia en la longitud de ambos puntos; estando más al este aquel cuyo cronómetro marque una hora más avanzada.

Si entre los dos puntos existe una línea telegráfica directa, pueden observarse los cronómetros en el momento de recibir en una de las estaciones una señal telegráfica hecha en la otra, pues el tiempo de trasmision es casi inapreciable.

Ejemplo.—El cronómetro de un punto que llamaremos A señala las 8 y 15′ de la mañana, en el mismo instante en que el de otro punto B señala las 10 y 27′ de la mañana; la diferencia de horas será

$$10^{h}27' - 8^{h}15' = 2^{h}12',$$

que reducido á minutos, será 132′.

La diferencia de longitudes la hallaremos por la proporcion

$$60' : 15^\circ :: 132' : x^\circ \quad [a];$$

de la cual resulta

$$x = \frac{15^\circ \times 132}{60} = \frac{1^\circ \times 132}{4} = \frac{132^\circ}{4} = 33^\circ.$$

Observando que la primera razon de la proporcion [a] es constante, y que en el quebrado $\frac{132^\circ}{4}$ el número de grados que expresa el numerador es el de minutos que compone la diferencia de las horas, estableceremos por regla general que para hallar la diferencia de las longitudes, con menos error que un minuto, se reducirá á minutos la diferencia de las horas, y el resultado se dividirá por el número constante de 4. El cociente será la diferencia de longitudes expresada en grados.

Si en el ejemplo propuesto A está en el primer meridiano, la longitud de B será 33° *este*.

Si A tiene la longitud 20° 36′ *este* la de B será (20° 36′ + 33°) *este*, ó 53° 36′ *este*.

Cuando no se puede obtener directamente la diferencia de longitudes de dos puntos, ya porque no es posible elegir otro visible desde los dados, para las señales con pólvora, á causa de la mucha distancia que media entre ellos, ó porque no lo permitan los accidentes del terreno, ya porque no haya línea telegráfica directa entre dichos puntos, se señalan puntos intermedios, cuyas diferencias sucesivas se determinan; la suma de las diferencias obtenidas será la de los puntos extremos.

137. *Determinacion de la latitud de un punto de la superficie terrestre.*

La latitud de un punto es igual á la altura del polo sobre el horizonte del mismo punto.

Sea A (fig. 49) el punto que se considera, y A S E N el meridiano del mismo: el plano meridiano que contiene á esta seccion, contiene al eje de la tierra y al polo celeste P, que se halla en la prolongacion de este eje.

Las intersecciones del plano meridiano con los horizontes racional y sensible, que son paralelos entre sí (39) serán las rectas H y h tambien paralelas (Geom. Teor. 128).

El rádio terrestre A C, perpendicular al horizonte sensible (Geom. Teorema 172 Recíp.), es perpendicular á A h que pasa por su pié en este plano; y por consiguiente á su paralela C H; luego el ángulo A C H es recto.

Tambien lo es el O C P, por ser P C perpendicular el ecuador (38) y por consiguiente á la recta O E que pasa por su pié en el plano del ecuador.

Luego los ángulos l y q, tienen el mismo complemento A C P, y por lo tanto son iguales.

Pero l es la latitud de A (135), y q es el ángulo que forma el eje terrestre con el horizonte del punto A, esto es, la *altura del polo sobre el horizonte* de A, y por tanto se verifica el principio enunciado.

138. Para hallar, pues, la latitud de un punto, bastará conocer el ángulo PCH; pero este ángulo es sensiblemente igual al PAh (Geom. Teorema 11) pues las rectas AP y CP pueden considerarse como paralelas en razon á la inmensa distancia de su punto de encuentro.

El ángulo PAh es el que la recta que une el punto A con la estrella polar forma con su proyeccion sobre el horizonte sensible del punto A.

Si se quiere hallar más exactamente la latitud de A, será preciso medir los ángulos m y n que forman las rectas Ap, Ap' tiradas desde A á los puntos p, p', en los cuales la polar se halla en el meridiano, con la proyeccion comun de dichas rectas, que será la meridiana de A.

Entonces llamando x á la verdadera latitud, tendremos las igualdades

$$m = x + \mathrm{PA}p\,;$$

$$n = x - \mathrm{PA}p'\,;$$

y como se tiene $\mathrm{PA}p = \mathrm{PA}p'$, por girar la estrella polar alrededor de P, sumando las igualdades anteriores, resultará:

$$m + n = 2x\,;$$

de donde

$$x = \frac{m+n}{2}.$$

Si queremos hallar la latitud de Madrid, por ejemplo, y hemos observado los ángulos

$$m = 42^\circ\, 12',$$

$$n = 38^\circ\, 38', \qquad \text{resultará}$$

$$x = \frac{42^\circ\, 12' + 38^\circ\, 38'}{2} = \frac{80^\circ\, 50'}{2} = 40^\circ\, 25'.$$

que es la latitud de Madrid.

139. Conocidas las longitudes y latitudes de dos puntos A, B (fig. 50) de la superficie terrestre, podemos hallar la distancia geográfica (49) entre estos puntos sin necesidad de conocer el ángulo de sus verticales.

En efecto, la diferencia de las longitudes correspondientes á estos puntos es el arco $m\,n$, que mide el ángulo plano $m\,o\,n$, correspondiente al diedro de los planos meridianos, y tambien al ángulo C del triángulo esférico ABC, que forma el polo norte C con los puntos dados. Los arcos a y b son los complementos de las latitudes mA, nB, de los mismos puntos; y por lo tanto en el triángulo esférico ABC conocemos dos lados a, b y el ángulo comprendido C, y podremos hallar el valor del tercer lado c, que es el arco AB, cuyo valor queremos hallar.

Supongamos que A tiene la longitud 0, y 40° 25′ de latitud *norte*, que corresponden á Madrid, y B tiene la longitud 6° 21′ *este* y la latitud 39° 34′ *norte* de Palma de Mallorca; vamos á hallar la distancia geográfica entre estos dos puntos.

Tendremos en el triángulo ABC

$$a = 90^\circ - 39^\circ\ 34' = 50^\circ\ 26'$$

$$b = 90^\circ - 40^\circ\ 25' = 49^\circ\ 35'$$

$$c = 6^\circ\ 21', \text{ que es la diferencia de longitudes.}$$

Hallaremos el valor de c que buscamos (Trig. 54. Primer caso), llamando φ á un ángulo auxiliar, cuyo valor se deduce de la ecuacion

$$\text{tang}, \varphi = \text{tang. } a \cos. \text{C} \qquad [3],$$

y sustituyendo el valor obtenido para φ en la ecuacion

$$\cos\ c = \frac{\cos.\ a \cos.\ (b - \varphi)}{\cos.\ \varphi} \qquad [4]$$

Hallaremos el valor de φ sustituyendo valores en la fórmula [3], y será

$$\text{tang. } \varphi = \text{tang. } (50^\circ\ 26') \cos.\ (6^\circ\ 21') \qquad [5]$$

y buscando en las tablas de Chevallot los valores de las líneas trigonométricas del segundo miembro, será

$$\text{tang. } \varphi = 1{,}21023 \times 0{,}99386;$$

efectuando el producto indicado

$$\text{tang } \varphi = 1{,}20280,$$

que corresponde en las tablas al ángulo de 50° 16′; luego será

$$\varphi = 50^\circ\ 16'.$$

Sustituyendo valores en la fórmula [4] resultará

$$\cos.\ c = \frac{\cos.\ (50^\circ\ 26')\ \cos.\ (49^\circ\ 35' - 50^\circ\ 16')}{\cos.\ 50^\circ\ 16'}\ ;$$

pero $\cos.\ (49^\circ\ 35' - 50^\circ\ 16') = \cos.\ (-0^\circ\ 41') = \cos.\ (0^\circ\ 41')$; por lo que la fórmula anterior se convertirá en

$$\cos.\ c = \frac{\cos.\ (50^\circ\ 26')\ \cos.\ (0^\circ\ 41')}{\cos.\ (50^\circ\ 16')} \qquad [6];$$

y sustituyendo valores numéricos, tendremos

$$\cos.\ c = \frac{0{,}63698 \times 0{,}99993}{0{,}63922}, \qquad \text{ó}$$

$$\cos.\ c = \frac{0{,}6369354114}{0{,}63922} = 0{,}99643,$$

cuyo valor corresponde al ángulo $4^\circ\ 51'$, luego será

$$c = 4^\circ\ 51'.$$

* Aplicando el cálculo logarítmico á la ecuacion [5] tendremos

$$\log.\ \text{tang.}\ \varphi = \log.\ \text{tang.}\ (50\ 26' + \log.\ \cos.\ (6^\circ\ 21') - 10.$$

Disposicion del cálculo.

$$\begin{array}{rr}
\log.\ \tan.\ (50^\circ\ 26') = & 10{,}0828662 \\
\log.\ \cos.\ (6^\circ\ 21') = & 9{,}9973273 \\
\hline
\text{Suma} = & 20{,}0801935; \\
\log.\ \text{tang.}\ \varphi = & 10{,}0801935; \\
\varphi = & 50^\circ\ 16'.
\end{array}$$

El valor de c le hallaremos por la fórmula [6], en la cual tomando logaritmos, será

$$\log.\ \cos.\ c = \log.\ \cos.\ (50^\circ\ 2'6) + \log.\ \cos.\ (0^\circ\ 41') - \log.\ \cos.\ (50^\circ\ 16').$$

Disposicion del cálculo.

$$\begin{array}{rr}
\log.\ \cos.\ (50^\circ\ 26') = & 9{,}8041228 \\
\log.\ \cos.\ (0^\circ\ 41') = & 9{,}9999691 \\
\hline
\text{Suma} = & 19{,}8040919 \\
\log.\ \cos.\ (50^\circ\ 16') = & 9{,}8056472 \\
\hline
\log.\ \cos.\ c = & 9{,}9984447;
\end{array}$$

$$c = 4^\circ\ 51'.$$

140. Para hallar la distancia x nos valdremos de la fórmula

$$x = 111111{,}2 \times a \qquad (49).$$

Para aplicar esta fórmula, observaremos que a cuyo valor es $4^\circ\,51'$, reducido á fraccion de grado vale

$$\frac{4 \times 60 + 51}{60} = \frac{291}{60}, \quad \text{y que será por lo tanto}$$

$$x = 111111{,}2 \times \frac{291}{60}, \qquad \text{ó}$$

$$x = \frac{111111{,}2 \times 291}{60} = \frac{32333359{,}2}{60}, \qquad \text{ó finalmente}$$

$$x = 538889{,}3;$$

cerca de 539^{km}.

CAPITULO III.

De la superficie terrestre y de su representacion geométrica.

Formacion y aspecto de la superficie terrestre.—Relieve del terreno.—Representacion de una parte de la superficie terrestre.—Division de la Topografía en Planimetría y Nivelacion, y objeto que se propone cada una de estas partes.—Límite de los planos topográficos.—Señales para marcar en el terreno las líneas y ángulos de los polígonos.—Piquetes.—Jalones.—Banderolas.—Reduccion de las distancias al horizonte.—Reduccion de los ángulos al horizonte.—Reduccion de los ángulos al centro de la estacion.—Escalas.—Escala numérica de metros.—Escala gráfica ordinaria.—Escala gráfica de trasversales.—Escala de pasos.—Orientacion de los planos.

141. **Formacion y aspecto de la superficie terrestre.**—Es muy probable que la corteza del elipsóide terrestre se formase por enfriamientos sucesivos de capas concéntricas, y que la fuerza expansiva de las partes todavía fluidas, que el calórico central dilataba en el interior de la masa, produjera levantamientos en las partes sólidas de la superficie, alteràra la homogeneidad que esta presentaba, y facilitàra el movimiento de las aguas situadas en la superficie del globo. Esta masa de aguas, acrecida con la de las lluvias, hubo de abrirse paso á través de los obstáculos que se oponian á su marcha, y surcando el suelo, contribuyó con su accion erosiva á modificar la superficie terrestre, imprimiéndola por grados el variado aspecto con que hoy se presenta á nuestra consideracion, sin perder por eso la forma general, que le hemos atribuido (35).

142. Las porciones de la superficie terrestre, que en virtud de lo expuesto presentan una elevacion notable, relativamente á los terrenos circundantes, han recibido el nombre genérico de *montañas*. La parte A (fig. 51; lám. 4) más elevada de una montaña se llama su *cima*, la BB′ más inmediata al suelo que la rodea *pié* ó *base*, y la superficie lateral CC′ *falda*, *ladera*, *vertiente* ó *flanco* de la montaña.

Cuando una montaña se presenta aislada, podemos considerarla como un cono más ó menos irregular, y entonces la cima será el vértice del cono, el pié de la base del mismo, y la falda su superficie lateral.

Si la montaña termina en una superficie más ó menos plana AB (fig. 52; lám. 4), en cuyo caso puede considerarse como un cono truncado, la superficie AB, que sustituye á la cima, recibe el nombre de *meseta*, y el de *paramera* cuando es muy extensa y elevada. Citaremos como ejemplo la *paramera de Avila*. Si la cima es aguda, como la de la fig. 53 (lámina 4), se llama *pico*, y *aguja* siempre que es aguda y prolongada (figura 54; lám. 4).

Las montañas menos elevadas se llaman *cerros*, *colinas* y *oteros*, por su respectivo órden descendente de altura sobre los terrenos colindantes.

143. Rara vez se presentan las montañas aisladas como las que acabamos de considerar; pues á consecuancia del levantamiento, ya indicado, de diferentes porciones de la corteza sólida del globo, los terrenos elevados debieron tomar una forma análoga á la del sólido ABNM (fig. 55; lámina 4), presentando una arista superior AB, que se llama la *cresta*, y puede compararse con el caballete de un tejado, una *base* MN, y cuatro faldas, dos mayores ABNO. ABPM que se designan con el nombre de *vertientes*, y dos menores AMO, BNP, que se denominan *extremidades*.

La accion enérgica y contínua de las aguas alteró la forma de la cresta AB (fig. 56; lám. 4), segregando las porciones *m*, *n*, y presentando así cortaduras ó depresiones, á las cuales bajando las aguas de las porciones *o*, *p*, *q* no segregadas, y continuando su accion erosiva, dieron orígen á otros tantos surcos, que partiendo de las primitivas depresiones *s*, *t*, conducian las aguas á otras localidades más bajas del terreno.

Estas montañas reciben el nombre de *cordilleras* ó *sierras*. La línea *osptq*, que sustituye á la cima se llama *divisoria*; porque divide las aguas pluviales, dirigiéndolas por las grandes vertientes opuestas.

Los puntos más altos *o*, *p*, *q*, conservan el nombre de *cimas*, y á los más bajos *s*, *t* se les llama *depresiones* ó *gargantas*.

144. Las grandes porciones de terreno más bajas que las montañas, y hácia las cuales corren las aguas, que estas recogen, se llaman en general *llanuras*. Cuando tienen mucha extension se llaman *páramos*, y en algunos países *sábanas* ó *pampas*. Si son de una extension regular *valles*, y *vegas* ó *cañadas* si la tienen menor.

Las más notables depresiones de las cordilleras proporcionan el paso mas fácil y pronto de un valle á otro, y se llaman *puertos*, y *desfiladeros* cuando son muy bajos y están flanqueados por cimas escarpadas.

145. Las aguas corrientes, que aparecen en la superficie terrestre, se designan con los nombres de *rios* ó *arroyos*. Los rios corren por el fondo de los valles ó por lo más bajo de las llanuras, y reciben las aguas de los rios de órden inferior y las de los arroyos.

Las aguas de estos proceden de *manantiales* ó *fuentes* y siguen su curso enriquecidas con todas las que se les reunen de otras corrientes de órden inferior. Las aguas pluviales, que no se evaporan ni son absorbidas por el suelo, siguen las vertientes de las montañas, y aumentan el caudal de los rios ó arroyos.

Todo el terreno que envia sus aguas corrientes á un rio, constituye lo que se llama su *cuenca, hoya* ó *region hidrográfica*.

Los rios secundarios y los arroyos tienen tambien su *cuenca* de un órden inferior.

Todo rio va á parar á otro de un órden superior ó al mar.

En el primer caso la reunion de ambos rios se llama su *confluencia*, y el rio de menor importancia, por la extension de su curso ó por el caudal de sus aguas, se llama *afluente* del rio principal.

Si el rio llega hasta el mar, se llama *ria* la parte de su corriente próxima á la costa, y *desembocadura* el paraje en que encuentra al mar en la línea de la costa.

Las aguas no corrientes que cubren una porcion de la superficie de un continente ó de una isla, se llaman *lagos*, y *lagunas* si son de corta extension.

Pantanos son los parages en que el terreno está constantemente encharcado.

146. **Relieve del terreno.**—La configuracion de un terreno accidentado parece á primera vista un agrupamiento confuso de montañas y una série de llanuras, surcadas todas por rios y arroyos ramificados sin sugecion á ley alguna determinada; pero una observacion detenida dá á conocer ciertas leyes, que rigen en la forma que presenta el terreno, y son consecuencias de las que han presidido á su formacion. Tambien se echa de ver la posibilidad de someter los accidentes que caracterizan su forma á una fácil clasificacion y nomenclatura.

Al mar afluyen los grandes rios, que recogen las aguas de cuencas separadas entre sí por las cordilleras de primer órden.

La línea tirada por las cimas y depresiones de la cordillera, es una divisoria de primer órden. A veces la divisoria está formada por una llanura, ó propiamente dicho, una *paramera*, que sustituye á la série de cimas y depresiones de la cordillera.

Los rios, de que acabamos de hacer mencion, atraviesan las grandes llanuras. A ellas van á reunir sus aguas los de segundo órden, entre cada dos de los cuales hay una divisoria de segundo órden.

Los rios de este órden reciben á su vez las aguas de los de tercero, los cuales tienen su correspondiente divisoria; y así continuando hasta un número indefinido de estos órdenes, los últimos de los cuales están constituidos por las pequeñas corrientes que forman las aguas pluviales en las mas pequeñas quebradas del terreno.

Haremos, sin embargo, más palpable esta clasificacion partiendo de dos rios ó arroyos A, A′ (fig. 57; lám. 4) de un mismo órden cualquiera, situados á uno y otro lado de una cordillera, que presenta la *cresta* ó *divi-*

soria DD, formada por una série alternativa de cimas y de depresiones.

De estas depresiones parten las corrientes de segundo órden *a*, *a'*. El terreno comprendido entre dos de estas corrientes es una cordillera de segundo órden, cuya cresta ó divisoria *dd* parte de la cima comprendida entre las depresiones en que nacen los arroyos *a* y *a'*.

Las cordilleras de segundo órden reciben por lo general el nombre de *ramales* ó *estribaciones* de la principal, y siguen una direccion próximamente normal á esta; observándose que se acercan tanto más á serlo, cuanto menos inclinada al horizonte es la divisoria principal.

De cada una de las divisorias de segundo órden *dd*, *d'd'*.... parten las divisorias y las corrientes de tercer órden, próximamente normales á las respectivas divisorias y corrientes del segundo; de las de tercero se derivan las de cuarto órden; y así continuando hasta los órdenes inferiores.

147. Las dos verticales L, L' de una misma divisoria DD, llevan el nombre de *laderas*, y las dos laderas L' y L'' correspondientes á dos divisorias contiguas DD, D'D' de un mismo órden, forman la cuenca del rio ó arroyo A, el cual viene á ser la interseccion de las dos vertientes ó laderas, y recibe el nombre de *valle* ó *talweg*; palabra tomada del aleman y que significa *camino del valle*.

La ladera L'' se llama *derecha* con respecto al arroyo A, y la L' es la *ladera izquierda* del mismo arroyo; denominaciones referidas á la posicion de sus márgenes, respecto á un observador que las recorriese en la direccion de la corriente.

Lo que acabamos de establecer es general para todas las corrientes, cualquiera que sea el órden á que pertenezcan.

148. Los *talwegs* de los órdenes primeros forman los lechos de los rios y arroyos de aguas constantes; los de los órdenes medios los arroyos que solo las tienen en invierno; y los de los últimos solo conducen las procedentes de las lluvias.

La reunion de las divisorias de todos los órdenes constituye el *sistema orográfico* de la region ó terreno que se describe topográficamente, y la de los *talwegs* el *sistema hidrográfico* de la misma.

La determinacion y representacion de los dos sistemas en sus posiciones relativas da á conocer por completo la forma de la superficie terrestre en la extension que se considera.

149. **Representacion de una parte de la superficie terrestre.** — El sistema que se sigue en la Geometría descriptiva para la representacion de los cuerpos por medio de dos proyecciones no es aplicable á la superficie del terreno, cuya variada forma debe aparecer cual es á primera vista, sin tener que detenerse en la consideracion de las distintas proyecciones de los infinitos puntos que la componen. Como además, con el empleo de los dos planos de proyeccion en los cuales se han de representar las proyecciones horizontales y verticales en la misma relacion, resultarian muy confusas las proyecciones verticales por las pequeñas diferencias de altura de la mayor parte de los puntos del terreno con re-

lacion á su distancia horizontal, se vé desde luego la imposibilidad de representar su forma por este medio.

Pudiera seguirse un método geométrico, y bajo tal punto de vista exacto, cual era el de suprimir las proyecciones verticales, representándolas por números que indicasen sus cotas, para saber sus distancias relativas al plano horizontal de proyeccion, escribiendo dichas cotas al lado de los puntos destinados á la representacion de las proyecciones horizontales. El plano horizontal sobre el cual se consignan las dos proyecciones de la manera indicada se llama *plano acotado*. Este medio, pues, tan sencillo como exacto, es el adoptado para conseguir con prontitud formarse idea de las ondulaciones caprichosas y variadas formas de la superficie del terreno; si bien es necesario advertir la manera de hacer uso de este medio para lograr el objeto que nos proponemos.

Es cierto, en efecto, que para representar el terreno, cuanto mayor sea el número de sus puntos que acotemos, mayor será la exactitud de la operacion, y bajo el punto de vista teórico este método es tan completo cual pudiera desearse; pero en la práctica no sería posible poner en obra los resultados de la teoría, pues no bastaría el plano á contener tantos números, y este infinito número de cotas produciría tal confusion, que lejos de formarnos idea de la figura en conjunto del terreno, no lo podríamos lograr ni áun de la más pequeña de sus partes. Será, pues, necesario modificar este sistema, no acotando todos los puntos, sino aquellos de más importancia, y tales que al figurar en el plano las líneas de diferentes formas determinadas por ellos, logremos, no sólo la claridad, sino tambien hacernos cargo del terreno al primer golpe de vista, tal cual nos le presenta la naturaleza, con sus infinitos accidentes, sus variadas ondulaciones y caprichosas formas. Como, por otra parte, el determinar sólo cierto número de cotas es más sencillo que el determinarlas todas, y además se logra así el objeto que nos proponemos, esta cuestion resuelta por completo es de la mayor importancia, y convencidos de ello, hemos publicado nuestro *Tratado de las Acotaciones*, cuyo estudio recomendamos eficazmente, si ha de sacarse fruto en el de la Topografía, y donde hallarán nuestros lectores expuesto con método y claridad cuanto puedan necesitar para comprender la representacion de una parte de la superficie terrestre, que es el objeto que nos hemos propuesto, y que en virtud de lo acabado de exponer, podemos decir que se consigue, acotando cierto número de puntos que nos determinen un sistema de líneas situadas en la superficie del terreno, tales que sus proyecciones horizontales nos representen con claridad todas las inflexiones y desigualdades que presenta su superficie.

Si además de estudiar nuestro *Tratado de Acotaciones*, que ha de ser la verdadera guía de la Topografía, supuesto que todas las operaciones que se practican en ésta no tienen otra tendencia que llenar las condiciones de su definicion, que dijimos era la ciencia que tenía por objeto la representacion geométrica de una parte de la superficie terrestre, consulten nuestros lectores el *Tratado de Dibujo topográfico*, del Sr. Morales, citado en el prólogo de dicho *Tratado de Acotaciones*, que manifiesta los distintos métodos que pueden seguirse en el desempeño artístico de esta última é interesante parte de la representacion del terreno, y que consisten en completar la ilusion de verle como en la misma naturaleza, con los efectos de luz y sombra y demás circunstancias, creemos que conseguirán penetrarse por completo del objeto de esta cuestion importantísima.

150. **Division de la Topografía en Planimetría y Nivelacion, y objeto que se propone cada una de estas partes.**—De todo lo dicho acerca de la representacion del terreno, se deduce que para lograr ésta es necesario dividir las operaciones en dos partes bien distintas: una que tiene por objeto la determinacion de las posiciones que guardan entre sí las proyecciones horizontales *a, b, c, d, e* (fig. 58; lám. 5), de los puntos A, B, C, D, E, más notables del terreno que se trata de representar, para obtener su proyeccion horizontal *abcde*, y que se llama *planimetría*; y la otra, que se ocupa de hallar las distancias respectivas ó cotas de los mismos puntos relativamente al plano horizontal PN de proyeccion, y que se distingue con el nombre de *nivelacion* ó *altimetría*.

151. *Objeto de la planimetría.*—Si la figura del terreno fuese un triángulo, se sabe que sus tres vértices determinan un plano, que llamaremos el plano de los objetos situados en dichos vértices; pero si fuese, como sucede generalmente, un polígono ABCDE, imaginando unidos por medio de rectas los puntos A, B, C, D, E, resultará un polígono ABCDE, cuyos lados no están en general situados en un mismo plano, y sería, por lo tanto, muy difícil y casi imposible coordinar sobre el papel operaciones efectuadas sobre planos de diferente inclinacion; esta es una de las razones porque en la planimetría se ha convenido en considerar las proyecciones de los vértices de los polígonos sobre un plano horizontal determinado de antemano. Estas proyecciones, unidas por rectas, nos dan tambien las proyecciones horizontales de los lados del polígono.

En efecto, si proyectamos todos los vértices A, B, C, D, E, sobre un plano horizontal PN, situado por debajo de todos ellos, el polígono *abcde* será la proyeccion del ABCDE. Los puntos *a, b, c*...... serán las proyecciones de los puntos notables que se quiere determinar, las rectas *ab, bc*...... serán las proyecciones de las distancias AB, BC.... entre estos puntos, y los ángulos *a, b, c, d, e* serán tambien las proyecciones horizontales de los ángulos A, B, C, D, E, ó sean los ángulos planos correspondientes á los diedros que forman entre sí los planos verticales que pasan por las rectas AB, BC, CD, DE y AE, lados del polígono, y cuyas aristas son las verticales correspondientes á los puntos A, B, C, D, E.

Además de la razon expuesta para solo considerar la proyeccion horizontal del terreno, hay tambien la de que no influye en la valoracion de su superficie el tomar por ésta su proyeccion horizontal; pues en la agricultura se tiene en cuenta la circunstancia de que en un terreno inclinado AB (fig. 59; lám. 5) no aparecen los árboles en direcciones *a, b, c*, etc., perpendiculares á la línea inclinada AB, sino que tienen las posiciones verticales a', b', c', etc., perpendiculares (90) á la proyeccion horizontal AC, llamada *base productiva* de la línea inclinada AB: por consiguiente, la superficie real de un terreno no producirá mayor número de plantas mayores que su proyeccion horizontal, áun cuando ésta es menor; pues si bien un terreno inclinado contiene en más cantidad las mieses, yerbas y plantas rastreras que su correspondiente proyeccion horizontal, la experiencia ha probado que la diferencia es bien pequeña, si bien en los casos que convenga puede tenerse en cuenta Por otra parte, un terreno inclinado tiene las desventajas de ser arrastradas por las lluvias la tierra vegetal y las simientes, ser más costoso el labrarlas, más penoso para el ganado, que padece mucho por las violentas posturas fuera de su aplomo, en que va con frecuencia, y estos terrenos, unas veces sin bañarles el sol, otras abrasados por herirles de plano, no son ciertamente más apropósito que aquellos que se aproximan á ser planos situados en posiciones horizontales.

Los franceses llaman *cultellation* á la operacion que tiene por objeto sustituir á la superficie inclinada AB, la horizontal correspondiente AC; porque parece, en efecto, que se ha cortado la superficie inclinada con un cuchillo.

Consideraremos, por lo tanto, en planimetría la proyeccion horizontal *abcde* (fig 58) del polígono ABCDE del terreno, trazada sobre el plano PN; y como no seria posible presentar esta proyeccion en su verdadera magnitud, se traza sobre el plano, representado por el papel *pmno*, una figura $a'b'c'd'e'$ semejante á la proyeccion horizontal *abcde* del polígono ABCDE del terreno Este es el objeto que se propone la planimetría

152 *Objeto de la nivelacion.*—Por medio de las operaciones de que se ocupa esta parte de la Topografía, se determinan las alturas A*a*, B*b*, C*c*, etcétera, de los puntos A, B, C, D, E, sobre el plano horizontal PN, refiriéndolas á una misma unidad, obteniendo de este modo las cotas de dichos puntos (Acotaciones, 3.). Estas cotas escritas al lado de las proyecciones horizontales *a, b, c, d, e*, nos manifiestan las diferentes alturas de los vértices del polígono, dándonos una completa idea de la forma del terreno que se quiere representar; para lo cual se escriben dichas cotas en los puntos a', b', c', d', e', de la figura semejante construida en el papel.

La figura $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ que así se obtiene, semejante á la proyeccion horizontal del polígono del terreno é igualmente acotada, se llama su *plano geométrico* ó *topográfico*.

153. Las proyecciones acotadas de los lados que constituyen la proyeccion del polígono del terreno, sirven para la determinacion de las curvas de nivel, que representan por completo la superficie que se considera (Acotaciones. 129.).

154. **Límite de los planos topográficos.**—La topografía limita el terreno de cuya representacion se ocupa, á una extension en la cual no es preciso tener en cuenta la esfericidad de la tierra, para obtener la debida

exactitud. Cuando la extension del terreno que debe representarse es tal, que no puede prescindirse de tener en consideracion la forma de la tierra, sin cometer graves errores, las operaciones, que exigen además el empleo de instrumentos de mayor precision, y que conducen á cálculos superiores á los conocimientos elementales de las matemáticas, entran en el dominio de la *Geodesia*.

En las operaciones geodésicas se refiere la posicion de los puntos notables del terreno á la superficie de las aguas tranquilas del océano; pero en la corta extension que ha de comprender un plano topográfico se sustituye sin error sensible á la superficie oceánica el plano tangente á la misma.

En efecto, partiendo de la hipótesis de que la tierra es esférica, y de que su rádio es 6366200m (42), propongámonos hallar los valores de la tangente QQ′ (fig. 16; lám. 2) y de la cuerda PP′ correspondientes al arco de círculo máximo comprendido entre dos puntos P y P′, en la suposicion de que este arco es de 1°. En el triángulo rectángulo QSC se tiene (20)

$$QS = SC \times \text{tang}\ \frac{a}{2};$$

y como es $SC = 6366200$, y $\frac{a}{2} = 30'$, resulta

$$QS = 6366200 \times \tan\ 0°\ 30' \qquad [1].$$

En el triángulo PLC se tiene (18)

$$PL = PC \times \text{sen}\ \frac{a}{2};$$

pero tambien se tiene $PC = 6366200$, y $\frac{a}{2} = 30'$;

luego sustituyendo, resultará

$$PL = 6366250 \times \text{sen}\ 0°\ 30' \qquad [2].$$

Sustituyendo en la fórmula [1] el valor de tang. 0° 30′, será

$$QS = 6366200 \times 0{,}0087269, \qquad \text{ó}$$
$$QS = 55557;$$

de donde

$$QQ' = 111114.$$

Sustituyendo en la fórmula [2] el valor de sen. 0° 30′, obtendremos

$$PL = 6366200 \times 0{,}0087265,$$

ó aproximadamente

$$PL = 55555:$$

de donde resulta

$$PP' = 111110.$$

Comparando los valores hallados para QQ′ con el desarrollo 111111^m que corresponde el arco de 1° (49), se vé que la mayor diferencia, que es la que resultaria de tomar la tangente por el arco, es de 3^m; y teniendo en cuenta que la dimension mayor de un plano topográfico nunca llega á valer el desarrollo obtenido, se comprende que en los casos ordinarios el error es insignificante, y por lo tanto la situacion de los puntos del terreno se refiere en Topografía al plano tangente al elemento medio del segmento esférico.

* Los valores hallados para QQ′ y PP′ se obtienen del mismo modo aplicando el cálculo logarítmico.

Tomando logaritmos en la fórmula [1], se obtiene

$$\log. QS = \log\ 6366200 + \log.\ \text{tang.}\ 0^\circ 30' - 10.$$

Disposicion del cálculo.

$$\begin{aligned} \log\ 6366200 &= \ 6{,}8038802 \\ \log\ \text{tang}\ 0^\circ 30' &= \ 7{,}9408584 \\ \hline \text{Suma} &= 14{,}7447386; \end{aligned}$$

$$\log\ QS = 4{,}7447386$$

$$y\ QS = 55557;$$

De donde resulta $QQ' = 111114^m$.

Tomando logaritmos en la fórmula [2], resultará

$$\log.\ PL = \log.\ 6366200 + \log.\ \text{sen.}\ 0^\circ 30' - 10$$

Disposicion del cálculo.

$$\begin{aligned} \log\ 6366200 &= \ 6{,}8038802 \\ \log\ \text{sen.}\ 0^\circ 30' &= \ 7\ 9408419 \\ \hline \text{Suma} &= 14{,}7447221; \end{aligned}$$

$$\log.\ PL = 4{,}7447221;$$

$$PL = 55555.$$

De donde

$$PP' = 111110.$$

155. Concretándonos al objeto que se propone la Planimetría, nos ocuparemos sucesivamente:

1.° De las señales empleadas para marcar ó señalar en el terreno las líneas y ángulos de los polígonos.

2.° De la determinacion de la proyeccion horizontal de las líneas ó lados de los polígonos, ó sea de la *reduccion de las líneas al horizonte*.

3.° Del modo de hallar las proyecciones horizontales de los ángulos de los polígonos, ó sea de la *reduccion de los ángulos al horizonte*.

4.° Y como muchas veces la posicion de los vértices de un polígono por ser una veleta, el pico de una montaña, etc., no permite al observador colocarse en ellos, y tiene que situarse en sus inmediaciones para tomar otros ángulos, por medio de los cuales se pueda luego determinar el que se busca, trataremos tambien de la resolucion de esta cuestion conocida con el nombre de *reduccion de los ángulos al centro de la estacion*.

156. **Señales para marcar en el terreno las líneas y ángulos de los polígonos.**—Sirven para este objeto los piquetes, jalones y banderolas.

157. **Piquetes.**—Se llaman así unas estacas de madera *a* (fig. 60; lámina 5) de distintos tamaños, pero que generalmente no llegan á medio metro de longitud, y de cuatro á seis centímetros de grueso, y aguzadas por un extremo, si bien es mejor armar uno de estos con un regaton de hierro *b* terminado en punta para introducirla en el terreno, y el otro extremo lleva un cincho ó anillo de hierro *r*, á fin de que no se hienda á los golpes del mazo *m* que se usa para clavarla. Otras veces se usan tambien clavos grandes de hierro *c*; y cuando el terreno es duro para clavar unos y otros hasta lograr enterrarlos, se remueve por medio del zapapico *z*, se clava el piquete con el mazo, y se apisona despues la tierra que le rodea, colocando encima, ó á su inmediacion si se ha enterrado todo, un monton de tierra, piedras ó ladrillos para poder encontrarle cuando sea necesario. El uso de estos piquetes es para fijar de una manera estable los extremos de las líneas, y colocados en los vértices de los polígonos fijan tambien sus ángulos.

158. **Jalones.**—Enterrados los piquetes ó sobresaliendo muy poco del terreno no serian visibles á cierta distancia, por lo cual se usan, cuando se opera, otros de forma cilíndrica y de mayor longitud, la cual ordinariamente es de dos metros, y se colocan en los puntos donde se hallaban los piquetes. Para hacerlos aun más visibles, se les pone en la parte superior una tablilla pintada de colores ó bien un pedazo de tela encarnada (fig. 61; lám. 5): los ejes de los jalones, cuando estos se han colocado bien verticalmente, determinan la vertical del punto del terreno en que se clavan, pudiendo así sustituir cualquier punto de esta al del terreno.

159. **Banderolas.**—Cuando la altura de los jalones excede de los dos metros, reciben el nombre de *banderolas* (fig. 62; lám. 5) y sirven para colocarlas en los puntos que se hallan tan bajos, que no puede el observador distinguir punto alguno de la vertical determinada por un jalon. Muchas

veces hay necesidad en la práctica de empalmar unos con otros los jalones y banderolas.

Los jalones y banderolas suelen ser de *majagua*, madera americana.

Plantar en el terreno un jalon, una banderola, etc., es clavarle en tierra verticalmente; lo que puede comprobarse por medio de la plomada.

160. **Reduccion de las distancias al horizonte.**—La distancia de un punto A (fig. 63; lám. 5) á otro B, medida con la inclinacion que tiene la recta AB que los une, debe reducirse, como hemos dicho (151), á su proyeccion horizontal. Suponiendo el plano horizontal que pasa por A, y bajando desde B una perpendicular á él, el pié C de esta perpendicular será la proyeccion de B, y la AC la proyeccion de AB. En el triángulo rectángulo ABC, tenemos (19)

$$AC = AB \cos. A.$$

Llamando l_m á la distancia medida, l_r á su proyeccion, y p al ángulo A, que AB forma con el horizonte, y que es por tanto (Acotaciones. 25) la pendiente de AB, la fórmula anterior se convertirá en

$$l_r = l_m \cos. p. \quad [3].$$

Por tanto, empleando las tablas de líneas trigonométricas naturales, estableceremos la regla siguiente:

Para reducir á su proyeccion horizontal una distancia medida con la inclinacion del terreno, se multiplica la longitud de dicha línea por el coseno de su pendiente.

Ejemplo Sea $l_m = 120^m,4$ y $p = 20°\,26'$; será

$$l_r = 120^m,4 \times \cos\ 10°\,26';$$

$$l_r = 120,4 \times 0\,9834663 = 118,40934252 \quad ó \quad 118,41,$$

apreciando hasta centímetros.

En la práctica suele tomarse el coseno con cuatro ó cinso cifras decimales, aumentando una unidad á la cifra del último órden decimal cuando la siguiente es 5 ó mayor que 5.

Tomando cuatro cifras en el ejemplo propuesto, sería

$$l_r = 120,4 \times 0,9835 = 118,41340 \qquad ó$$

118,41 como anteriormente.

* Empleando el cálculo logarítmico, restableceríamos el rádio en la fórmula [3] y tendríamos

$$l_r = \frac{l_m \cos. p}{r}, \text{ y tomando logaritmos}$$

$$\log. l_r = \log. l_m + \log. \cos. p - 10; \quad \text{ó sustituyendo valores,}$$

$$\log. l_r = \log. 120{,}4 + \log. \cos. 10^\circ 26' - 10;$$
$$\log. l_r = 2{,}0806265 + 9{,}9927595 - 10;$$
$$\log. l_r = 2{,}0733860.$$

De donde se deduce

$$l_r = 118{,}4093 \quad \text{ó}$$
$$l_r = 118{,}41.$$

161. Para la reduccion de las distancias al horizonte, se ha calculado tambien una tabla que dá la distancia á que se reduce la longitud constante de 100 metros para las pendientes de grado en grado desde 0° hasta 45°.

Se vé, en efecto, que una línea AB (fig. 64; lám. 5) de 100^m, que tiene la pendiente cero, es igual en magnitud á su proyeccion. Si se hace girar á la recta AB hasta que forme con su posicion primitiva un ángulo de un grado, ocupará una posicion AB′, y si calculamos trigonométricamente (160) la longitud de su proyeccion Ab′, y despues la Ab″, que corresponde á la posicion AB″ en que forma un ángulo de dos grados con AB, y así sucesivamente hasta 45°, se habrá formado la tabla á que nos referimos, y que presentamos á continuacion.

TABLA

de reduccion al horizonte de una longitud de 100 metros para las inclinaciones con respecto al mismo horizonte, que varían de grado en grado desde 0° haste 45°.

GRADOS DE INCLINACION.	DISTANCIA REDUCIDA.	GRADOS DE INCLINACION.	DISTANCIA REDUCIDA.
1	99,985	24	91,354
2	99,940	25	90,631
3	99,863	26	89,881
4	99,757	27	89,101
5	99,619	28	88,295
6	99,452	29	87,462
7	99,255	30	86,600
8	99,027	31	85,717
9	98,769	32	84,805
10	98,481	33	83,867
11	98,163	34	82,904
12	97,815	35	81,915
13	97,437	36	80,902
14	97,030	37	79,863
15	96,593	38	78,801
16	96,126	39	77,347
17	95,631	40	76,604
18	95,106	41	75,470
19	94,552	42	74,314
20	93,969	43	73,135
21	93,358	44	71,934
22	92,718	45	70,710
23	92,051		

Esta tabla no pasa de 45°, pues hasta este límite alcanzan las pendientes que el terreno presenta más comunmente.

Tambien se observa que á medida que la pendiente aumenta, disminuye la longitud de la proyeccion de la recta dada de magnitud constante, lo que tambien manifiesta la fig. 64.

Para el uso de esta tabla distinguiremos dos casos:

1.° Que la pendiente dada sea un número exacto de grados.

2.° Que esté expresada en grados y minutos.

Si tenemos, por ejemplo, $l_m = 120^m,4$ y $p = 10°$, observaremos que siendo las distancias reducidas proporcionales á las distancias medidas, para una misma pendiente, hallaremos el valor de l_r para el ángulo de 10°, estableciendo la proporcion general

$$100 : 98,481 :: l_m : l_r ; \qquad \text{de donde resulta}$$

$$l_r = \frac{98,481 \times l_m}{100} \qquad \text{ó}$$

$$l_r = 0,98481 \times l_m \qquad [4]$$

Como en el caso actual se tiene $l_m = 120,4$, tendremos

$$l_r = 0,98481 \times 120,4 = 118,571124 , \qquad \text{ó}$$

apreciando l_r hasta centímetros

$$l_r = 118,57.$$

En el segundo caso, se empleará la fórmula [4] despues de haber calculado la proyeccion de 100 metros para el ángulo dado.

Si suponemos pues, $l_m = 120,4$, y $p = 10° \, 26'$, admitiremos que las diferencias de los arcos son proporcionales á las diferencias de las proyecciones para la longitud constante de 100^m; principio que no es exacto, pero que puede admitirse en la práctica sin error sensible. En su consecuencia, hallaremos la diferencia 0,318 que existe entre las proyecciones de dicha longitud constante, correspondientes á las inclinaciones de 10° y 11°, que comprenden en las tablas, á la inclinacion dada 10° 26'; y llamando x á la diferencia entre la proyeccion correspondiente á 10°, que dan las tablas, y la que resulta para 10° 26', hallaremos su valor por medio de la proporcion

$$60' : 0,318 :: 26' : x; \qquad \text{de donde resulta}$$

$$x = \frac{26 \times 0,318}{60} = 0,1378$$

Siendo esta cantidad la diferencia entre la reducida de 10° que conocemos, y la de 10° 26′ que se busca, y debiendo ser ésta menor, restaremos 0,1378 de la reducida correspondiente á 10°, y obtendremos 98,343 para la reducida que corresponde á 100m para la pendiente de 10° 26′.

Formaremos, pues, la proporcion

$$100 : 98,343 :: 120,4 : h_r; \qquad \text{de donde}$$

$$h_r = \frac{98,343 \times 120,4}{100}\ 0,98343 \times 120,4 = 118,404972; \qquad \text{ó}$$

118,40 que sólo se diferencia en un centímetro del valor calculado por el coseno del ángulo (160).

162. **Reduccion de los ángulos al horizonte** —Tres puntos, A, B, C (fig. 65; lám. 5), del terreno, determinan un plano, en general inclinado al horizonte. Supongamos conocida la longitud de los tres lados de este triángulo, y medido el ángulo BAC ó S, formado en el plano de los objetos A, B y C por las rectas AB y AC. Concibiendo un plano horizontal que pase por A, y hallando las proyecciones respectivas b y c de los puntos B y C sobre este plano, las rectas Ab, Ac, que unen estas proyecciones con el punto A, formarán un ángulo bAc ó s, el cual será la proyeccion del ángulo S medido.

La determinacion del ángulo s, deducida del ángulo observado, es lo que se llama la *reduccion de un ángulo* S *al horizonte*. Para llevarla á cabo, es preciso conocer de antemano los ángulos m y n que los lados del ángulo dado forman con el horizonte, y son los que cada uno forma con su proyeccion sobre el plano horizontal.

Con los datos adquiridos conoceremos el lado Ab del triángulo bAc, pues en el triángulo rectángulo BAb, tenemos (19)

$$Ab = AB \cos.\ m.$$

En el triángulo CAc, tambien rectángulo, tenemos del mismo modo

$$Ac = AC \cos.\ n.$$

Además los mismos triángulos rectángulos darán (18)

$$Bb = AB \text{ sen. } m$$

$$Cc = AC \text{ sen. } n.$$

De estos valores deduciremos el de

$$BD = Bb - Cc;$$ siendo BC conocido, tendremos

$$DC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BD}^2};$$

y como se tiene $bc = DC$, y además hemos hallado los valores de Ab y Ac, obtendremos el de s, deduciéndole (30) de la fórmula

$$\cos.\ s = \frac{\overline{Ab}^2 + \overline{Ac}^2 - \overline{bc}^2}{2\ Ab \times Ac}; \quad [5]$$

Ejemplo.—Sea $AB = 140^m,2$;

$$AC = 119,4;$$
$$BC = 135,7;$$

y los ángulos

$$S = 62^\circ\ 25';$$
$$m = 20^\circ\ 16';$$
$$n = 14^\circ\ 40'.$$

Tendremos en primer lugar

$$Ab = 140,2 \times \cos.\ 20^\circ\ 16';$$

$$Ab = 140,2 \times 0,9380906;$$

$$Ab = 131,5.$$

Despues

$$Ac = 119, \times \cos.\ 14^\circ\ 40';$$

$$Ac = 119,4 \times 0,9674152;$$

$$Ac = 115,5.$$

Para hallar el tercer lado del triángulo, calcularemos los lados Bb y Cc, y tendremos:

$$Bb = 140,2 \times \text{sen.}\ 20^\circ\ 16' = 140,2 \times 0,3463900 = 48,56;$$

$$Cc = 119,4 \times \text{sen.}\ 14^\circ\ 40' = 119,4 \times 0,2531952 = 30,23$$

De aquí resultará

$$BD = 48,6 - 30,2 = 18,4.$$

Calcularemos el lado DC haciendo

$$DC = \sqrt{135,7^2 - 18,4^2} = \sqrt{18414,49 - 338,56} = \sqrt{18075,93} = 134,4.$$

Por último, tendremos el valor de

$$\cos.\ s = \frac{131,5^2 + 115,5^2 - 134,4^2}{2 \times 131,5 \times 115,5} =$$

$$\frac{17292,3 + 13340,3 - 18063,4}{30376,5} = \frac{12569\ 2}{30376,5} = 0,4137803;$$

luego será

$$s = 65^\circ\ 33'.$$

* Aplicando los logaritmos á este problema, efectuaremos los cálculos siguientes:

Cálculo de Ab.

$$Ab = \frac{AB\ \cos.\ m}{r};$$

$$\log\ Ab = \log\ AB + \log.\ \cos.\ m - 10;$$

$$\log.\ Ab = \log.\ 140,2 + \log.\ \cos.\ 20^\circ\ 16' - 10;$$

$$\begin{aligned} \log.\ 140,2 &= \ \ 2,1467480 \\ \log.\ \cos.\ 20^\circ\ 16' &= \ \ 9,9722448 \\ \hline \text{Suma} &= 12,1189928; \end{aligned}$$

$$\log.\ Ab = 2,1189928;$$

$$Ab = 131,5.$$

Del mismo modo obtendríamos

$$\begin{aligned} Ac &= 115,5, \\ Bb &= \ \ 48,6, \\ Cc &= \ \ 30,2. \end{aligned}$$

Cálculo de CD

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DB}^2 ;$$

$$CD = \sqrt{(BC + DB)(BC - DB)};$$

y dando valores,

$$CD = \sqrt{(135,7 + 18,4)\ (135,7 - 18,4)};$$

$$CD = \sqrt{154,1 \times 117,3};$$

$$\log\ CD = \frac{\log.\ 154,1 + \log.\ 117,3}{2}$$

$$\log.\ 154,1 = 2,1878026$$
$$\log.\ 117,3 = 2,0692980$$
$$\text{Suma} = 4\ 2571006;$$

$$\log.\ CD = 2,1285503;$$

de donde resulta

$$CD = 134,4:$$

y como se tiene $cb = CD$, resultará

$$cb = 134,4.$$

Cálculo de s.

Para aplicar el cálculo logarítmico á la ecuacion [5], hallarémos en primer lugar los términos del numerador, para lo cual tendremos

$$Ab^2 = 131,5^2;$$

$$\log\ Ab^2 = 2 \log.\ 131,5;$$

$$\log.\ 131,5 = 2,1189258;$$

$$\log\ Ab^2 = 4,2378516;$$

$$Ab^2 = 17292,3;$$

y de un modo análogo,

$$Ac^2 = 13340,3;$$

$$bc^2 = 18063,4.$$

El denominador se obtiene por el cálculo siguiente:

$$\begin{aligned} \log.\ 2 &= 0\ 3010300 \\ \log.\ Ab &= 2{,}1189258 \\ \log.\ Ac &= \underline{2\ 0625820} \\ \text{Suma} &= 4{,}4825378; \end{aligned}$$

de donde resulta

$$2 \times Ab \times Ac = 30376{,}5.$$

Sustituyendo en la fórmula los valores hallados, é introduciendo el rádio, obtendremos:

$$18063{,}4 = 17292\ 3 + 13340{,}3 - 30376{,}5 \frac{\cos.\ s}{r};$$

y sucesivamente:

$$18063{,}4 = 30632{,}6 - 30376{,}5 \frac{\cos.\ s}{r};$$

$$18063{,}4 - 30632{,}6 = -30376{,}5 \frac{\cos.\ s}{r};$$

$$12569{,}2 = \frac{30376{,}5 \cos.\ s}{r};$$

$$12569{,}2r = 30376{,}5 \cos.\ s.$$

$$\cos.\ s = \frac{12569{,}2r}{30376{,}5};$$

$$\log\ \cos\ s = \log.\ 12569{,}2 + 10 - \log.\ 30376{,}5;$$

$$\log.\ \cos.\ s = \log.\ 12569{,}2 + C^{to}.\ \log.\ 30376{,}5.$$

Disposicion del cálculo.

$$\begin{aligned} \log.\ 12569{,}2 &= 4{,}0993076 \\ C^{to}\ \log\ 30376{,}5 &= \underline{5{,}5174622} \\ \log.\ s &= 9{,}6167698 \end{aligned}$$

De donde resulta

$$s = 65^{\circ}\ 33'.$$

163. Si uno de los puntos, tal como el B (fig. 66; lám. 5) está por encima del plano horizontal de A, y otro por debajo, se hallarán los catetos Bb y Cc, como en el caso anterior, y entonces se tendrá

$$Bd = Bb + bd = Bb + Cc.$$

Como además se conoce BC, se calculará fácilmente el triángulo BCd, y se obtendrá el cateto Cd, que es igual al cb, cuyo valor se necesita para el cálculo del ángulo bAc.

164. Tambien se puede resolver este problema, considerando la vertical del punto A (fig. 67; lám. 5) y los ángulos b y c, que forman con ella las líneas AC y AB. Estos ángulos b y c son los complementos respectivos de los m y n que las mismas líneas forman con el horizonte, y los cuales deben haberse determinado préviamente.

Silos arcos a, b y c, están trazados con igual rádio, y cada uno en el plano de las dos líneas que forman el ángulo correspondiente, dichos arcos serán los lados de un triángulo esférico cuyo vértice estará en A.

El ángulo opuesto al lado a, será el ángulo P que tiene la misma medida que el diedro cuya arista es AV, y cuyas caras son los planos CAV, BAV. Por otra parte, la medida de este ángulo diedro es el ángulo s, puesto que siendo AV perpendicular al plano de los lados del ángulo s, será perpendicular á estos lados.

Tendremos por lo tanto (Trig. párf. 54, Tercer caso.—Fórmula (a')).

$$\cos.\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a)}{\text{sen. } b \text{ sen } c}}$$, en la cual se ha hecho

$$a + b + c = 2p;$$

de donde se deduce

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Como en el caso que consideramos, el ángulo opuesto al lado a es el s que tratamos de hallar, tendremos

$$\cos.\frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a)}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}}.$$

Restableciendo el rádio en esta fórmula, será

$$\frac{\cos\dfrac{s}{2}}{r} = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a)}{\text{sen. } b \text{ sen } c}};$$

Multiplicando ambos miembros por r, é introduciendo este factor en el radical del segundo miembro, resulta

$$\cos.\frac{s}{2}=\sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a)\, r^2}{\text{sen. } b \text{ sen } c}};$$

y tomando logaritmos

$$\log.\cos.\frac{s}{2}=\frac{\text{lg. sen. } p+\text{lg. sen. } (p-a)+2\,\text{lg. } r-\text{lg. sen. } b-\text{lg. sen. } c}{2}$$

$$\text{ó } \log.\cos.\frac{s}{2}=\frac{\text{lg. sen. } p+\text{lg. sen } (p-a)+20-\text{lg. sen. } b-\text{lg. sen. } c}{2}$$

ó finalmente,

$$\log.\cos.\frac{s}{2}=\frac{\text{lg. sen. } p+\text{lg. sen. } (p-a)+\text{c}^{\text{to}}.\,\text{lg. sen. } b+\text{c}^{\text{to}}.\,\text{lg. sen } c}{2} \quad [6].$$

De esta fórmula se deduce $\frac{s}{2}$, hallando el arco que corresponde al logaritmo expresado por el segundo miembro, y por consiguiente el valor del ángulo s.

Ejemplo primero. Supongamos que se tiene

$$\begin{gathered} S=a=62^\circ\, 25';\\ b=90^\circ-m=90^\circ-20^\circ\, 16'=69^\circ\, 44';\\ c=90^\circ-n=90^\circ-14^\circ\, 40'=75^\circ\, 20'; \end{gathered}$$

$$p=\frac{62^\circ\, 25'+69^\circ\, 44'+75^\circ\, 20'}{2}=\frac{207^\circ\, 29'}{2}=103^\circ\, 44'\, 30''.$$

Será por lo tanto

$$\log.\cos\frac{s}{2}=$$

$$\frac{\text{lg. sen. } 103^\circ 44' 30''+\text{lg. sen. } (103^\circ 44' 30''-62' 25')+\text{c}^{\text{to}}.\,\text{lg. sen. } 69^\circ 44'+\text{c}^{\text{to}}.\,\text{lg. sen. } 75^\circ 20'}{2}$$

Pero $\log.\ \text{sen. } 103^\circ\, 44'\, 30''=\log.\ \text{sen. } 76^\circ\, 15'\, 30''$ (6), y
$\log.\ \text{sen. } (103^\circ\, 44'\, 30''-62'\, 25')=\log.\ \text{sen. } 41^\circ\, 19'\, 30''$,
y la fórmula se convertirá en

$$\log.\cos.\frac{s}{2} =$$

$$\frac{\text{lg. sen. } 76^\circ\ 15'\ 30'' + \text{lg. sen. } 41^\circ\ 19'\ 30'' + \text{cto. lg. sen. } 69^\circ\ 44' + \text{cto. lg. sen. } 75^\circ\ 20'}{2}$$

Disposicion del cálculo.

log. sen. 76° 15′ 30″	=	9,9873877
log. sen. 41° 19′ 30″	=	9,8197607
cto. log. sen. 69° 44′	=	0,0277552
cto. log. sen 75° 20′	=	0,0143871
Suma	=	19,8492907

luego se tiene

$$\log.\cos.\frac{s}{2} = 9{,}9246453.$$

De donde resulta

$$\frac{s}{2} = 32^\circ\ 47'; \qquad \text{y finalmente}$$

$$s = 65^\circ\ 34'.$$

Este valor se diferencia en $1'$ del que hemos hallado (162); lo cual puede provenir de que entonces le hemos obtenido por la resolucion de una série de triángulos, en los cuales hemos despreciado fracciones pequeñas de lados y de ángulos, lo que ha debido influir en la exactitud del resultado; al paso que ahora hemos calculado s directamente. Esto indica la preferencia que debemos dar al procedimiento últimamente expuesto.

Ejemplo segundo.

Sean

$$S = 62^\circ\ 37';$$
$$m = 1^\circ\ 56';$$
$$n = 11^\circ\ 43'.$$

Tendremos

$$a = 62^\circ\ 37';$$
$$b = 90^\circ - 1^\circ\ 56' = 88^\circ\ 4';$$
$$c = 90^\circ - 11^\circ\ 43' = 78^\circ\ 17';$$

$$p = \frac{62^\circ\ 37' + 88^\circ\ 4' + 78^\circ\ 17'}{2} = \frac{228^\circ\ 58'}{2} = 114^\circ\ 29';$$

Aplicando la fórmula [6] al ejemplo que nos ocupa, tendremos

$$
\begin{array}{rr}
\log.\ \text{sen.}\ 114^\circ\ 29' = \log\ \text{sen}\ 65^\circ\ 31' = & 9{,}9590805 \\
\log.\ \text{sen.}\ (114^\circ\ 29' - 62^\circ\ 37') = \log\ \text{sen}\ 51^\circ\ 52' = & 9{,}8957406 \\
c^{to}\ \log\ \text{sen}\ 88^\circ\ 4' = & 0{,}0002473 \\
c^{to}\ \log\ \text{sen}\ 78^\circ\ 17' = & 0{,}0091446 \\
\hline
\text{Suma} = & 19{,}8642130
\end{array}
$$

$$\log.\ \cos.\ \frac{s}{2} = 9.9321065$$

De donde resulta

$$\frac{s}{2} = 31^\circ\ 43'$$

y finalmente

$$s = 62^\circ\ 26'$$

165. *Resolucion gráfica.*—Sea S (fig. 68; lám. 5) el ángulo formado por las rectas *ab*, *ac*, en el plano inclinado que determinan. Supongamos que estas rectas cortan en los puntos *b* y *c* al plano horizontal correspondiente á un punto *h* de la vertical de *a*. El ángulo *s* formado por las rectas *hb*, *hc*, proyecciones de las *ab* y *ac* sobre este plano, es la proyeccion del ángulo S. Para determinarle, se hallarán las proyecciones *hb*, *hc*, deducidas de los triángulos rectángulos *ahb*, *ahc*, en cada uno de los cuales se conoce la hipotenusa y un ángulo agudo *m'* ó *n'*, que es complemento del *m* ó *n*, que respectivamente forma con el horizonte cada una de las rectas dadas.

La resolucion gráfica del problema está reducida á trazar las rectas *ab'*, *ac* (fig. 69; lám. 5), que forman ángulos iguales á los *m'* y *n'* con otra recta *ah*, la cual representa la vertical del vértice del ángulo dado; lo que dará las magnitudes *ab'*, *ac* de los lados que forman en el espacio el ángulo S, y tambien sus proyecciones respectivas *hb'*, *hc* : construir el triángulo *acb''*, formando sobre *ac* y en el punto *a* el ángulo S, y llevando *ab'* á *ab''* por un arco de círculo; con lo que se obtendrá el tercer lado *cb''*, que es el lado horizontal comun á los dos triángulos: y por último, trazar desde *c* y *h* con los rádios *cb''* y *hb'* dos arcos de círculo que se cortarán en un punto *b*, el cual unido con los *h* y *c* da el triángulo horizontal *bhc*. Este triángulo, formado por las proyecciones de los lados del ángulo S y el lado comun á los dos triángulos, contiene al ángulo *s* que se busca, y que es siempre el opuesto á dicho lado comun.

166. En el caso que acabamos de resolver, las dos rectas *ab'* y *ac* son inferiores al plano horizontal que puede hacerse pasar por el vértice *a* del ángulo S. Cuando ambas rectas fuesen superiores al mismo plano, resolveríamos el problema tirando por un punto cualquiera *h* (fig. 70; lám. 5) de la vertical de *a*, una perpendicular á esta vertical, y hallando sus in-

tersecciones *b* y *c* con las rectas trazadas en *a* formando con la horizontal *ad* los ángulos *m* y *n*, que los lados del ángulo S forman con el horizonte. Con las rectas *ab*, *ac* y el ángulo S se construye el triángulo *abc''*, como en el caso anterior, y se tiene la magnitud *bc''* del tercer lado. Con esta magnitud y las proyecciones *ab'*, *ac'* de las rectas *ab* y *ac* se construye el triángulo *ab'c'''*, que dará el ángulo *s* reducido.

167. Si uno de los lados del ángulo es superior y otro inferior al plano horizontal, como en la fig. 66 (lám. 5), es preciso construir el triángulo ABC formado por el ángulo S y los lados AB, AC; lo que dará el lado BC, cuya proyeccion *cb*, forma con las proyecciones A*b*, A*c* de las AB y AC un triángulo en el cual se halla el ángulo *s* que se busca. El lado *bc* es un cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa és el tercer lado BC del primer triángulo, y el cateto conocido la suma de distancias de B y C al plano horizontal de A.

Para verificar la construccion, se forman á uno y otro lado de la horizontal *ad* (fig. 71; lám. 6) los ángulos *m* y *n* que los lados del ángulo S forman con el horizonte. Se hallan despues las intersecciones *b*, *c* de los mismos lados con las paralelas á *ad* tiradas desde dos puntos cualesquiera *h*, *h'*, de la vertical de *a* lo que dará las rectas *ab* y *ac* que se proyectarán sobre *ad* en *ab'* y *ac'*. Construyendo el triángulo *abc''* con las rectas *ab* y *ac* y el ángulo S, como en los casos anteriores, el tercer lado *bc''* será la magnitud de la recta que une en el espacio los puntos en que los lados del ángulo S cortan á los planos horizontales de los puntos *h* y *h'*.

Construyendo una semicircunferencia sobre *bc''* como diámetro, y llevando sobre ella á partir de uno de los extremos *c''*, la distancia *c'' c'''*, igual á la recta *hh'*, suma de distancias de *b* y *c* al plano horizontal de *a*, el cateto *bc'''* será la proyeccion que se busca; con la cual y las proyecciones *ab'* y *ac'*, se construye como en los casos anteriores el triángulo *ab'c*IV, que da el ángulo *s* que tratábamos de hallar.

168. El triángulo horizontal que contiene al ángulo reducido *s* admite en todos los casos dos soluciones, segun se tome como base una ú otra de las proyecciones *ab'* ó *ac'*; pero ambas dan el mismo valor para el ángulo reducido *s*.

169. **Reduccion de los ángulos al centro de la estacion.**—En el curso de las operaciones topográficas ocurre á veces, como hemos indicado (155—4.º), tener que hallar el valor de un ángulo cuyo vértice es inaccesible. Entre los puntos notables que se hallan en el terreno que se pretende representar, y cuya posicion debe determinarse con la posible exactitud, existen algunos en los cuales no pueden establecerse los instrumentos topográficos para ejecutar las operaciones necesarias; pero que estando perfectamente determinados, y prestándose por su disposicion á ser observados con facilidad desde otros puntos, es de la mayor importancia su eleccion para figurar entre los principales del plano. Tales son las veletas de las torres, y los picos elevados que presentan las cordilleras.

Sea, por ejemplo C (fig 72; lám. 6) uno de estos puntos, y supongamos que tratamos de hallar el valor del ángulo que forman en él las rectas CA, CB, tiradas á otros dos puntos A, B, del terreno, los cuales ocupan posiciones ya determinadas. No pudiendo el observador situarse en C, es preciso elegir otro punto de estacion lo más próximo á C que sea posible; y desde el cual se vean los A y B.

Este problema se resuelve fácilmente, eligiendo un punto D en uno de los lados CA del ángulo, tirando por él una paralela DE al otro lado CB, y midiendo el ángulo m, el cual será igual al ángulo c cuyo valor tratábamos de hallar (Geom. Teor. recíp. del 8).

Si no se quiere ó no se puede tomar el punto D en uno de los lados, se elige otro cualquiera D′, se trazan desde él las rectas D′E′ y D′F respectivamente paralelas á los lados CA y CB del ángulo en C, y se mide el ángulo m' que forman las rectas trazadas. El valor de este ángulo es el del c que buscábamos. (Geom. Teor. 11 —1.º).

170. Tambien puede hallarse eligiendo un punto D (fig. 73; lám. 6) en uno de los lados, trazando una recta DP que marque la direccion del punto elegido á otro punto fijo distante P, y midiendo el ángulo m que forma esta recta con el lado CB en que se encuentra el punto D. Determinando el punto D′ en que la recta DP corta al otro lado del ángulo C, se pasa á medir el ángulo m' que con este lado forma la misma recta DP. La diferencia $m - m'$ de los ángulos observados da el valor del ángulo en el centro. En efecto, considerando tirada por D′ la D′E paralela á CB, se tiene

$$c = c' = s - m';$$

y como se tiene $s = m$, sustituyendo este valor, tendremos

$$c = m - m'.$$

171. Los procedimientos que acabamos de indicar, por más sencillos que parezcan, distan de la exactitud que se obtiene por el empleo del cálculo.

Para resolver por este medio el problema de la reduccion de un ángulo al centro de la estacion, consideraremos los varios casos que pueden ocurrir, y que provienen de las distintas posiciones que puede tener el punto elegido con respecto á las líneas CA, CB.

Primer caso.—Que el punto D (fig. 74; lám. 6) esté en la prolongacion de uno de los lados del ángulo C, tal como en la de CA.

En este caso, el ángulo c exterior al triángulo BCD da (Geom. Teor. 14, Corolario 1.º)

$$c = m + n \qquad [1].$$

Luego, *cuando el punto de estacion* D *se elige en la prolongacion de uno de los lados* CA *del ángulo* C *que se quiere reducir, el valor del ángulo* c *en el* *centro, se deduce añadiendo al ángulo* m *observado desde el punto de estacion* D, *el del ángulo* n *bajo el cual se vería desde el extremo* B *del otro lado del ángulo, la distancia* d *que media entre el centro y el punto de estacion.*

Para aplicar la fórmula [1] se tendrá en cuenta que el ángulo m se obtiene directamente, y el valor del n por la resolucion del triángulo BCD; para ello, se conoce el ángulo en m, que se ha medido, y se puede medir el lado $CD = d$, como tambien el $CB = a$, si no se conoce su magnitud por las operaciones anteriores.

Entonces, en el triángulo BDC tendremos (21)

$$a : d :: \text{sen.}\ m : \text{sen.}\ n;$$

de donde

$$\text{sen.}\ n = \frac{d\ \text{sen.}\ m}{a}.$$

Buscando en las tablas el seno del arco m, multiplicándole por d, y dividiendo el producto por a, se obtendrá el seno de n, y viendo en las tablas el arco á que este seno corresponde, se tendrá el valor del ángulo n.

Si tomamos el valor hallado para sen. n por el desarrollo del arco n, lo que no produce un error de consideracion, toda vez que siendo el arco n muy pequeño se confunde sensiblemente con su seno, la fórmula [1] se convertirá en

$$c = m + \frac{d\ \text{sen.}\ m}{a} \qquad [a]$$

Esta fórmula será cierta, si además de lo expuesto, c y m expresan los desarrollos de estos arcos.

Para pasar de esta fórmula á la [1] que dá el valor de c expresado en grados, se efectúa el cálculo indicado en el término $\frac{d\ \text{sen.}\ m}{a}$, lo que dará el valor del desarrollo del arco n ó del seno del mismo arco, por medio del cual se obtiene el valor de n expresado en grados y sus divisores. Este valor sumado con el número de grados del arco m, dá el valor en grados del arco c que se busca.

172. *Segundo caso.*—Que el punto D (fig. 75; lám. 6) se halle situado en uno de los lados CA del ángulo C.

El ángulo m, externo al triángulo BDC, tiene un valor

$$m = c + n;$$

de donde resulta

$$c = m - n \qquad [2]$$

Luego en el caso de hallarse D en uno de los lados CA del ángulo C, *el valor del ángulo en el centro se obtiene restando del ángulo observado, el ángulo bajo el cual se vería desde el extremo* B *del otro lado del ángulo, la distancia* d *que media entre el centro y el punto de estacion.*

Observaremos, para aplicar la fórmula [2], que el ángulo m se ha medido directamente, y que el valor de n se halla por la resolucion del triángulo DCB, en el cual se conoce el ángulo en v que es el suplemento del ángulo m, y se pueden medir los lados DC y CB. Este último será en algunos casos conocido por las operaciones anteriores. Tenemos pues

$$a : d :: \text{sen. } v : \text{sen. } n;$$

y como sen. $v =$ sen m (6), será

$$a : d :: \text{sen. } m : \text{sen. } n;$$

de donde resulta

$$\text{sen. } n = \frac{d \text{ sen. } m}{a}.$$

Sustituyendo este valor de sen. n en la fórmula [2] resultará

$$c = m - \frac{d \text{ sen. } m}{a} \qquad [b].$$

173. *Tercer caso.*—Cuando el punto de estacion D (fig. 76; lám. 6) está fuera del espacio angular comprendido por los lados CA y CB, y la prolongacion de la recta DC que une el punto de estacion con el centro, pasa por dentro del ángulo, se tienen las dos ecuaciones

$$c' = m' + n';$$

$$c'' = m'' + n.$$

Sumando estas ecuaciones, resultará

$$c' + c'' = m' + m'' + n' + n;$$

y como $c' + c''$ es el valor del ángulo c que se busca, y $m' + m''$, el m del ángulo observado, se convertirá esta última ecuacion en

$$c = m + (n' + n) \qquad [3].$$

Luego en este caso, *se obtendrá el valor del ángulo en el centro, añadiendo al valor del ángulo observado* m, *la suma de los que corresponden á* *los ángulos* n, n', *bajo los cuales se vería desde los extremos* A *y* B *de los lados del ángulo* C, *la distancia que hay entre el centro y el punto de estacion.*

Para aplicar la fórmula [3], tendríamos conocido por la observacion el ángulo m, y el valor de n' se deduciria de la proporcion

$$b : d :: \text{sen. } m' : \text{sen. } n';$$

de donde resulta

$$\text{sen. } n' = \frac{d \text{ sen. } m'}{b}.$$

El ángulo n, se obtendría por la proporcion

$$a : d :: \text{sen. } m'' : \text{sen. } n;$$

de donde

$$\text{sen. } n = \frac{d \text{ sen. } m''}{a}.$$

En estas dos últimas fórmulas se conocen por la observacion los ángulos m' y m'', y se podría medir la distancia d, así como los lados a y b, sino son préviamente conocidos.

Sustituyendo los valores de sen. n' y sen. n en la fórmula [3] se convierte en

$$c = m + \frac{d \text{ sen. } m'}{b} + \frac{d \text{ sen. } m''}{a} \qquad [c].$$

174. *Cuarto caso.*—Que el punto de estacion D (fig. 77; lám. 6) se halle en el interior del ángulo ACB.

Prolongando la CD, tendremos

$$m' = c' + n';$$

$$m'' = c'' + n,$$

y sumando estas ecuaciones, resultará

$$m' + m'' = c' + c'' + n' + n;$$

pero se tiene $m' + m'' = m$, ángulo observado, $c' + c'' = c$, ángulo en el centro; y sustituyendo en la última ecuacion, resultará

$$m = c + n' + n;$$

y despejando c

$$c = m - (n' + n) \qquad [4];$$

que nos dice; *que hallaremos el ángulo en el centro* c, *cuando se ha elegido un punto de estacion* D *en el interior del ángulo, restando del ángulo observado* m, *la suma de los ángulos* n, n', *bajo los cuales se vería la distancia* d *que media entre el centro y el punto de estacion, desde los extremos* A *y* B *de los lados del ángulo en el centro.*

Para aplicar la fórmula [4] hallaremos directamente el ángulo $m = m' + m''$.

Para hallar n' tendremos en el triángulo ADC

$$b : d :: \text{sen.}\ t' : \text{sen.}\ n';$$

y como sen $t' =$ sen m' (6), tendremos

$$b : d :: \text{sen.}\ m' : \text{sen.}\ n';$$

de donde

$$\text{sen.}\ n' = \frac{d\ \text{sen.}\ m'}{b}.$$

Para hallar n tendríamos tambien

$$a : d :: \text{sen.}\ t'' : \text{sen.}\ n,$$

y como es sen. $t'' =$ sen. m'', resulta

$$a : d :: \text{sen.}\ m'' : \text{sen.}\ n;$$

de donde

$$\text{sen.}\ n = \frac{d\ \text{sen.}\ m''}{a}.$$

Sustituyendo en la fórmula [4] los valores de sen. n' y sen. n se convertirá en

$$c = m - \left(\frac{d\ \text{sen.}\ m'}{b} + \frac{d\ \text{sen.}\ m''}{a}\right). \quad [d]$$

175. *Quinto caso.*—Que el punto de estacion D (fig. 78; lám. 6) se halle fuera del espacio angular comprendido por los lados CA y CB, y que la prolongacion de CD esté fuera del mismo espacio angular.

Tendremos como en los casos anteriores

$$M = c + n';$$

$$M = m + n;$$

de donde resulta

$$c + n' = m + n;$$

y despejando c,

$$c = m + n - n' \qquad [5];$$

ecuacion que resuelve el problema, y nos dice: *que para hallar el valor del ángulo en el centro, cuando el punto de estacion se ha elegido fuera del ángulo en el centro, y la prolongacion de la recta que une estos puntos no pasa por el interior de dicho ángulo, habrá que añadir al ángulo observado* m, *el ángulo* n *bajo el cual se veria desde el extremo B del lado CB del ángulo en el centro, más próximo al punto de estacion, la distancia entre éste y el centro del ángulo, y restando de esta suma el ángulo* n′ *bajo el cual se vería la misma distancia desde el extremo A del otro lado del ángulo en el centro.*

Para aplicar la fórmula, se tiene en el triángulo DCB

$$a : d :: \text{sen. } s : \text{sen } n;$$

de donde resulta:

$$\text{sen. } n = \frac{d \text{ sen. } s}{a}.$$

El lado d se mide directamente, y tambien el lado a si no es conocido, y el ángulo s es la suma de los t y m que se miden tambien directamente.

En el triángulo ACD se tiene

$$b : d :: \text{sen. } t : \text{sen } n';$$

de donde

$$\text{sen. } n' = \frac{d \text{ sen. } t}{b};$$

el lado b se mide directamente, si no es conocido de antemano; y en cuanto al ángulo t ya hemos dicho que se mide tambien directamente.

Sustituyendo en la fórmula [5] los valores hallados para sen. n y sen. n', resultará

$$c = m + \frac{d \text{ sen. } s}{n} - \frac{d \text{ sen. } t}{b} \qquad [6].$$

* Esta fórmula es general Para hacerlo ver, daremos valores á los ángulos s y t, designando en todos los casos por s el ángulo cuyo arco

correspondiente se cuenta de izquierda á derecha á partir del lado DC hasta el DB, y por el t, el contado en el mismo sentido desde la misma línea hasta el lado DA, suponiendo siempre al punto B situado á la derecha de A.

Supongamos en primer lugar que el punto D se acerca á ocupar una posicion en la cual se halla en prolongacion de AC: los ángulos s y m se acercan á ser iguales, y el ángulo t disminuye hasta que D se encuentra en dicha prolongacion, en cuyo caso se tiene

$$s = m, \quad \text{y} \quad t = 0,$$

la fórmula general se convertirá en

$$c = m + \frac{d \text{ sen. } m}{a};$$

fórmula [a] del primer caso (171).

Se vé con efecto en la fig. 74 (lám. 6) que los ángulos s y t tienen gráficamente los valores que les hemos atribuido.

Si suponemos $s = 180^\circ + m$, y $t = 180^\circ$ (fig. 79; lám. 6), el término $\frac{d \text{ sen. } t}{b}$ se reducirá á cero (16), y la fórmula [6] se convertirá en

$$c = m + \frac{d \text{ sen. } (180^\circ + m)}{a},$$

y como se tiene

$$\text{sen } (180 + m) = \text{sen } - m = - \text{sen. } m \text{ (Trig. 5), resultará}$$

$$c = m + \frac{d \times - \text{sen. } m}{a}; \qquad \text{ó}$$

$$c = m - \frac{d \text{ sen. } m}{a};$$

que es la fórmula [b] del segundo caso que hemos considerado (172).

Si hacemos $s = m''$, y $t = 360^\circ - m'$ (fig. 80; lám. 6), tendremos sucesivamente

$$\text{sen. } t = \text{sen } (360^\circ - m');$$

$$\text{sen. } t = \text{sen } \big(180^\circ + (180^\circ - m')\big) = \text{sen. } \big(-(180^\circ - m')\big) =$$

$$- \text{sen. } (180^\circ - m'); \qquad \text{pero}$$

$$\text{sen. } (180^\circ - m') = \text{sen. } m'; \qquad \text{y}$$

$$- \text{sen } (180^\circ - m') = - \text{sen. } m';$$

luego sustituyendo en el último valor de sen. t, tendremos

$$\text{sen. } t = - \text{sen. } m'.$$

Sustituyendo los valores hallados para s y t, en la fórmula general [6], tendremos

$$c = m + \frac{d \operatorname{sen.} m''}{a} - \frac{d \times - \operatorname{sen.} m'}{b}; \qquad \text{ó}$$

$$c = m + \frac{d \operatorname{sen.} m''}{a} + \frac{d \operatorname{sen.} m'}{b};$$

que es la fórmula [c] del tercer caso (173).

Si suponemos $s = 180° + m''$ (fig. 81; lám. 6), tendremos

$$\operatorname{sen.} s = \operatorname{sen.} (180° + m'') = \operatorname{sen.} (- m'') = - \operatorname{sen.} m''$$

Además, siendo $t = 180° - m'$, será

$$\operatorname{sen.} t = \operatorname{sen} (180° - m') = \operatorname{sen.} m'.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula general [6] se tendrá

$$c = m + \frac{d \times - \operatorname{sen.} m''}{a} - \frac{d \operatorname{sen.} m'}{b}; \qquad \text{ó}$$

$$c = m - \frac{d \operatorname{sen.} m''}{a} - \frac{d \operatorname{sen.} m'}{b}; \qquad \text{ó}$$

$$c = m - \left(\frac{d \operatorname{sen.} m''}{a} + \frac{d \operatorname{sen.} m'}{b} \right);$$

que es la fórmula [d] del cuarto caso (174).

176. *Ejemplo*.—Supongamos que hemos resuelto el triángulo ABC (fig. 78; lám. 6) midiendo el lado AB y los ángulos A y B, habiendo resultado las medidas siguientes:

$$\mathrm{AB} = 295^{\mathrm{m}},6,$$
$$\mathrm{A} = 62° \ 15',$$
$$\mathrm{B} = 57° \ 6';$$

y que hemos hallado por el cálculo (29) los valores siguientes:

$$\mathrm{C} = 60° \ 39',$$
$$\mathrm{AC} = 284^{\mathrm{m}},8,$$
$$\mathrm{BC} = 300^{\mathrm{m}},2.$$

Si ahora queremos comprobar el ángulo C, cuyo vértice C es inaccesible, al mismo tiempo que elegir y situar un punto D, que sustituya al C, para ejecutar operaciones ulteriores, aplicaremos la fórmula [6], para lo cual mediremos directamente los ángulos m y t, asi como la distancia $DC = d$. Supongamos que los valores hallados son:

$$m = 61^\circ\ 11',$$
$$t = 66^\circ\ 44',$$
$$s = 127^\circ\ 55',$$
$$b = 15^m,3.$$

Observando además que conocemos los valores a y b, que son los lados BC y AC del triángulo ABC, sustituiremos valores en la fórmula [6], y resultará

$$c = m + \frac{15,3 \times \text{sen. } 127^\circ\ 55'}{300,2} - \frac{15,3 \times \text{sen. } 66^\circ\ 44'}{284,8}.$$

En esta fórmula c y m expresan los desarrollos de estos mismos arcos, como hemos visto (171); y los términos

$$\frac{15,3 \times \text{sen. } 127^\circ\ 55'}{300,2}, \quad \text{y} \quad \frac{15,3 \times \text{sen. } 66^\circ\ 44'}{284,8},$$

son los desarrollos de los arcos n y n'; toda vez que ellos expresan los valores de sen n y sen n', y siendo muy pequeños, los arcos se confunden sensiblemente con sus senos.

Para pasar de esta fórmula á la [5] que dá el valor de c en grados, tendremos

$$\text{sen. } n = \frac{15,3 \times \text{sen. } 127^\circ\ 55'}{300,2};$$

y observando (6), que sen. $127^\circ\ 55' = $ sen $52^\circ\ 5'$, será

$$\text{sen. } n = \frac{15,3 \times \text{sen. } 52^\circ\ 5'}{300,2} \qquad [7];$$

y efectuando operaciones, resultará

$$\text{sen. } n = \frac{15,3 \times 0,78891}{300,2} = \frac{12,070325}{300,2} = 0,040207$$

que corresponde en las tablas á un arco de 2° 18′; luego será

$$n = 2^\circ\ 18'$$

El término $\dfrac{15{,}3 \times \text{sen. } 66^\circ\ 44'}{284{,}8}$ es el seno de n', y tendremos

$$\text{sen } n' = \frac{15{,}3 \times \text{sen. } 66^\circ\ 44'}{284{,}8} \qquad [8]$$

Sustituyendo valores, resultará

$$\text{sen. } n' = \frac{15{,}3 \times 0{,}91868}{284{,}8} = \frac{14{,}055804}{284{,}8} = 0{,}049353,$$

que corresponde en las tablas á un arco de 2° 50′; luego será

$$n' = 2^\circ\ 50'$$

Sustituyendo los valores m, n y n' en la fórmula [5] resultará

$$c = 61^\circ\ 11' + 2^\circ\ 18' - 2^\circ\ 50'; \qquad \text{ó}$$

$$c = 60^\circ\ 39'$$

Este valor de c es tambien el que resultó para C en la resolucion del triángulo ABC

* Los valores de n y n', se podrán hallar empleando el cálculo logarítmico, para lo cual tomando logaritmos en la fórmula [7], resultará

$$\text{log. sen. } n = \text{log. } 15{,}3 + \text{log. sen } 52^\circ\ 5' + \text{C}^{\text{to}} \text{ log. } 300{,}2 - 10;$$

Disposicion del cálculo

$$\begin{array}{rr} \text{log. } 15{,}3 = & 1{,}1846914 \\ \text{log sen. } 52^\circ 5' = & 9{,}8970249 \\ \text{C}^{\text{to}} \text{ log. } 300{,}2 = & 7{,}5225893 \\ \hline \text{Suma} = & 18{,}6043056 \end{array}$$

$$\text{log. sen. } n = 8{,}6043056;$$

$$n = 2^\circ\ 18'$$

Tomando logaritmos en la fórmula [8] tendremos

$$\log. \text{sen. } n' = \log. 15{,}3 + \log. \text{sen. } 66^\circ\ 44' + \text{C.}^{\text{to}} \log. 284{,}8 - 10;$$

Disposicion del cálculo.

$$\begin{aligned} \log.\ 15{,}3 &= \ \ 1{,}1846914 \\ \log.\ \text{sen.}\ 66^\circ\ 44' &= \ \ 9{,}9631625 \\ \text{C.}^{\text{to}}\ \log.\ 284{,}8 &= \ \ 7{,}5454600 \\ \hline \text{Suma} &= 18{,}6933139\ ; \end{aligned}$$

$$\log.\ \text{sen. } n' = 8{,}6933139\ ;$$

$$n' = 2^\circ\ 50'.$$

177. Entre otros muchos casos, que en la práctica pueden ocurrir, de tener que hallar el valor de un ángulo C (fig. 78; lám. 6) desde otro punto D, diferente del vértice, supongamos que habiendo deducido de operaciones anteriores los lados CA, CB de un triángulo ABC, necesitamos resolver este triángulo, siendo inaccesibles todos los vértices, y que la medida del lado AB presenta dificultades. En este caso resolveremos el triángulo, midiendo el ángulo C desde un punto D, del mismo modo que en el caso anteriormente considerado, con lo que tendremos los elementos necesarios para su resolucion (28).

178. Cuando las distancias a y b son muy grandes, y el punto D se puede elegir á pocos metros de C, el error $n - n'$, que generalmente es de pocos segundos, se desprecia en las operaciones ordinarias de la topografía, pero no en las operaciones geodésicas.

179. *Correccion nula.*—En el caso particular de ser $n = n'$, el punto D está en la circunferencia que determinan los tres puntos A, B, C (fig. 82; lámina 6). En efecto, los ángulos iguales n y n', teniendo sus vértices respectivos B y A en la circunferencia, serán ángulos inscritos, y como además, sus lados se cortan dos á dos, en virtud de la construccion que se hace para reducir el ángulo al centro de la estacion, y es evidente que dos de ellos lo hacen en el punto C, el punto D en que los otros dos se cortan, pertenecerá tambien á la misma circunferencia.

Entonces la correccion es nula, pues el ángulo m observado es igual al c del centro de la estacion, toda vez que ambos tienen la misma medida (Geom. Teor. 50). Esto resulta tambien de la fórmula [5]; pues siendo $n = n'$, se reduce á $c = m$.

La condicion de ser D un punto de la circunferencia puede siempre conseguirse, midiendo el ángulo t, si no se conoce por observaciones ó cálculos anteriores, y buscando por tanteo un punto D tal, que las líneas tiradas desde él á los puntos A y C formen un ángulo $t' = t$.

180. La exactitud del cálculo de la reduccion de un ángulo al centro de la estacion (176) depende de la exactitud en la medida de los ángulos m, s y t, así como de la de la distancia d.

Las observaciones del ángulo t (fig. 78; lám. 6) y de la distancia d suelen ofrecer dificultades. Si C no se puede divisar desde D, no se podrá apreciar t directamente, y si no se puede llegar desde el punto D hasta el pié de la vertical de C, no se podrá medir directamente la distancia d.

Consideraremos varios casos de los que con frecuencia suelen ocurrir.

Sea C (fig. 83; lám. 6) el centro de una torre redonda. Tiremos desde D las tangentes DE, DF á la torre, y tomemos en ellas desde el mismo punto las distancias iguales DG, DH. Uniendo los puntos G y H y dividiendo la GH en dos partes iguales, el punto medio L será un punto de la recta CD; pues está por construccion en la bisectriz del ángulo de las tangentes, y esta bisectriz es la CD.

Determinado el punto L, se puede medir el ángulo LDA $= t$.

La distancia d se hallará añadiendo el rádio CM de la torre á la DM que se puede medir.

El rádio r, podrá medirse directamente en algunos casos. Si no, se mide la circunferencia, y se deduce el valor del rádio (Geom. Teor. 97). En caso de que no se pudiese tampoco medir fácilmente la circunferencia, se traza una recta AB (fig. 84; lám. 6) en una direccion cualquiera, y se determinan los piés A, B de las perpendiculares á ella AC, BD, que son tangentes al mismo tiempo á la torre. Se divide AB en dos partes iguales, y se mide su mitad AE, que es igual á r.

181. El valor del ángulo t, se determina, sin trazar la bisectriz, midiendo los ángulos z, z' (fig. 85; lám. 6) que la recta DA forma con las tangentes DE y DF. Si representamos por x el valor del ángulo que cada tangente forma con la bisectriz del ángulo de las tangentes, toda vez que estos ángulos son iguales, tendremos las ecuaciones

$$t = z - x;$$

$$t = z' + x;$$

y sumando estas ecuaciones

$$2t = z + z';$$

de donde resulta

$$t = \frac{z + z'}{2}. \quad [9]$$

El valor del radio se deduce del triángulo CED, en el que se tiene (20)

$$\text{CE} = \text{ED tang. EDC};$$

y como se tiene CE $= r$, y EDC $= x$, resultará

$$r = \text{ED tang } x$$

El valor de x se deduce de los ángulos ya conocidos z y z'. En efecto, se tiene

$$2x = z - z';$$

de donde

$$x = \frac{z - z'}{2};$$

sustituyendo en la fórmula, resultará

$$r = \text{ED} \tan g \frac{z - z'}{2} \quad [10].$$

Las ecuaciones [9] y [10] resuelven el problema: bastará medir los ángulos z y z' y la tangente DE.

El valor del rádio puede deducirse tambien de las propiedades de las secantes y las tangentes.

En la fig. 85 (lám. 6) se tiene (Geom. Teor. 76)

$$\text{DH} : \text{ED} :: \text{ED} : \text{DG};$$

de donde resulta

$$\text{DG} = \frac{\overline{\text{ED}}^2}{\text{DH}}.$$

Se tiene además

$$\text{GH} = \text{DG} - \text{DH};$$

y poniendo en vez de GH su valor $2r$, y de DG el que acabamos de hallar, será

$$2r = \frac{\overline{\text{ED}}^2}{\text{DH}} - \text{DH} = \frac{\overline{\text{ED}}^2 - \overline{\text{DH}}^2}{\text{DH}};$$

de esta ecuacionse deduce el valor del rádio

$$r = \frac{\overline{\text{ED}}^2 - \overline{\text{DH}}^2}{2\text{DH}}.$$

El de la distancia que se busca se compondrá de DH y el rádio sacado de la última ecuacion; será pues

$$d = DH + \frac{\overline{ED}^2 - \overline{DH}^2}{2DH} = \frac{\overline{2DH}^2 + \overline{ED}^2 - \overline{DH}^2}{2DH}; \quad \text{ó}$$

$$d = \frac{\overline{DH}^2 + \overline{ED}^2}{2DH}.$$

182. Si el centro de estacion lo fuese de una torre cuadrada, y solo pudiéramos elegir para la observacion puntos tales como D (fig 86; lámina 6), desde los cuales solo se viese un lado EG de la torre, mediríamos las distancias DE, DG del punto de estacion á los extremos del lado que se vé, y midiendo además la De que hay desde el D hasta el punto e tomado á arbitrio en DE, determinaríamos el punto g de la otra línea por la proporcion

$$DE : DG :: De : Dg = \frac{DG \times De}{DE}.$$

Sobre ge, construiríamos un cuadrado, y hallaríamos el punto medio c de la diagonal ef.

Entonces podriamos medir el ángulo cDA, que es el t que buscábamos.

La distancia DC $= d$ se hallaría por la proporcion

$$De : DE :: Dc : DC = \frac{Dc \times DE}{Dc}.$$

Si no se pudiese ejecutar fácilmente la construccion anterior, ó el cuadrado ef resultase muy pequeño, resolveríamos el triángulo DEG, despues de haber medido como ántes los lados DE, DG, y además el ángulo D.

Deduciríamos los valores del ángulo DEG y del lado EG.

Añadiendo 45° al ángulo DEG hallado, tendríamos el valor del ángulo DEC, y como se tiene (Geom Teor. 81) $EF = EG\sqrt{2}$ y $EC = \frac{EF}{2}$, será

$$EC = \frac{EG\sqrt{2}}{2}.$$

Conociendo, pues, el ángulo DEC, y los lados DE y EC, tendremos determinado el triángulo DEC (Geom. Probl. 8).

Resolviendo este triángulo, hallaríamos DC $= d$, y el ángulo CDE, que añadido al EDA, que mediríamos directamente, nos daria el valor de t.

183. Si el centro C estuviese en el de una torre cuadrada (fig. 87; lámina 6), ó en la interseccion de las diagonales de un rectángulo (fig 88; lám 6), elegiríamos un punto D, desde el cual se pudiesen ver los extremos de una misma diagonal, y mediríamos el ángulo EDF y los lados DE y DF.

Estos datos determinarian el triángulo DFE (Geom. Probl. 8): resolviéndole, hallaríamos el valor del ángulo DFC y el del lado FE.

El triángulo DCF sería tambien conocido, pues sabemos el valor de DF, obtenido directamente, el del ángulo DFC por la resolucion del triángulo DFE, y el de $CF = \frac{EF}{2}$.

Resolviendo este triángulo, hallaríamos $CD = d$, y el ángulo CDF; añadiendo á este ángulo el FDA, medido directamente, tendremos el valor de t.

184. Tambien puede resolverse en el caso de ser un rectángulo EFGH (fig. 89; lám. 6), ó un cuadrado, hallando el punto medio p de uno de sus lados, levantando en p una perpendicular al mismo lado EF, y tomando sobre esta perpendicular una magnitud ph igual á la mitad del lado menor FG del rectángulo, ó del lado del cuadrado, en caso de que esta fuese la forma del edificio en que se halla C. Entonces, como Cp es tambien igual á la mitad de GF, tendríamos $ph = Cp$.

Tirando desde D las rectas Dp y Dh, y desde un punto cualquiera m de esta última, una paralela á ph, se halla la interseccion n de esta paralela y la recta Dp, y se toma sobre ella á continuacion de n una magnitud $nr = nm$. El punto r, está en la recta DC, puesto que siendo mr y hC paralelas, y además $hp = pC$, el punto en que la recta que tirásemos de D á C cortase á la mr, satisfaría á la condicion de ser $mn = nr$. (Geometría. Teor. 68).

El ángulo rDA, que mediríamos sería el ángulo t que buscábamos.

La recta $DC = d$ se determina prolongando Dr hasta encontrar en l á EF, y midiendo las distancias Dl y lh.

Se tiene entonces

$$DC = Dl + lC;$$

y como es $lC = lh$ (Geom. Teor. 21.—1.º) y $DC = d$, distancia que se busca, sustituyendo resultará

$$d = Dl + lh.$$

Tambien se puede hallar, midiendo las líneas Dm, Dh y Dr y formando la proporcion

$$Dm : Dh :: Dr : DC;$$

poniendo d en vez de DC, y hallando el cuarto término de la proporcion, se obtendrá

$$d = \frac{\mathrm{D}h \times \mathrm{D}r}{\mathrm{D}m}.$$

185. Si la torre fuese un polígono regular de un número par de lados, se prolongarian los EF, HG (fig. 90; lám. 6), adyacentes á uno FG de los del polígono, y se determinaria su interseccion h. Uniendo este punto con el p, que divide á FG en dos partes iguales, tendríamos $hp = p\mathrm{C}$.

En efecto, los triángulos $p\mathrm{G}h$, $p\mathrm{GC}$, son iguales; pues además de ser rectángulos en p, lo que se deduce fácilmente (Geom. Teor. 42. Nota), tienen el cateto $p\mathrm{G}$ comun, y los ángulos a y c iguales; toda vez que c tiene por medida el arco LG (Geom. Teor. 49), y a el arco $\frac{\mathrm{HM} - \mathrm{LG}}{2}$ (Geom. Teor. 53), ó $\frac{\mathrm{HY} + \mathrm{YM} - \mathrm{LG}}{2}$, y como se tiene YM = LG, resultará para la medida del arco a, $\frac{\mathrm{HY}}{2}$ que es la misma que la del arco c.

De la igualdad de estos triángulos se deduce la $hp = p\mathrm{C}$. Se podrá aplicar por lo tanto á este caso alguno de los procedimientos explicados anteriormente, el del párrafo 184 por ejemplo.

Cuando el polígono regular tiene un número impar de lados, no se puede ejecutar la construccion indicada. En efecto, la medida del ángulo r (fig. 91; lám. 6) es el arco $am = \frac{amb}{2}$. La del ángulo s es

$$\frac{cd - am}{2} = \frac{amb - am}{2} = \frac{amb}{2} - \frac{am}{2};$$

de estos valores se deduce

$$\frac{amb}{2} > \frac{amb}{2} - \frac{am}{2};$$

luego $r > s$, y por tanto los triángulos no son iguales.

Para resolver este caso, se traza una línea $\mathrm{F}h$ (fig. 92; lám. 6), que forme con la FG en el punto F, un ángulo m igual al suplemento del ángulo a, que es mitad del ángulo en el vértice del polígono, el cual se calcula por la fórmula

$$\frac{2R\ (n-2)}{n};$$

que expresa el cociente del valor de todos los ángulos interiores del polígono (Geom. Teor. 26) por el número de ellos.

Se toma en esta línea una longitud r' igual á r, rádio del polígono, lo que determina el punto h. El valor de r, se deduce de la proporcion

$$r : l :: \text{sen } a : \text{sen } b;$$

en la cual l es el lado del polígono, que se mide directamente; el ángulo a, es la mitad del ángulo en el vértice del polígono, y el ángulo

$$b = 180^\circ - 2a.$$

Tendremos, pues

$$r = \frac{l \text{ sen. } a}{\text{sen. } b}.$$

* Tomando los logaritmos, sería

$$\log. r = \log. l + \log \text{ sen. } a - \log. \text{ sen. } b.$$

Determinado el punto h, podemos aplicar el procedimiento (184) para la reduccion del ángulo al horizonte.

186. Si el centro C (fig. 93; lám. 7) no lo fuese de una figura regular, como por ejemplo, cuando es un pico inaccesible de un cerro, será preciso recurrir á otros medios para el cálculo de la distancia d y del ángulo t. Suponiendo que en la ladera del cerro no se encuentre un punto desde el cual se vean á la vez los C y A, elegiremos otro punto E desde el cual se vean C y D y se puedan medir las distancias EC, ED. Midiendo además el ángulo E que estas líneas forman, podemos resolver el triángulo CED (28) lo que nos dará la distancia d y el ángulo m. Formando en D, sobre la recta DE este ángulo, tendremas la direccion de la recta DC, y entonces se mide el ángulo t.

187. **Escalas.**—Ya hemos dicho (152) que el plano de un polígono del terreno es el polígono semejante á la proyeccion horizontal del mismo, y por lo tanto, los ángulos del plano de un polígono han de ser iguales á los de la proyeccion horizontal del terreno, y los lados del polígono, así como toda otra línea que haya de figurar en el plano, han de ser proporcionales á los lados y á todas las demás líneas correspondientes de dicha proyeccion.

Supongamos que ABCD (fig. 94; lám. 7) represente la proyeccion horizontal del polígono del terreno, y *abcd* (fig. 95; lám. 7) el polígono semejante en el papel. Habrá sido necesario, despues de haber tomado en el terreno los ángulos A, B, C, D con instrumentos adecuados, formar en el papel los a, b, c, d respectivamente iguales á los anteriores, por medio de instrumentos tambien apropósito; y medidas las líneas AB, BC, CD, DA, hacer que sus homólogas ab, bc, cd, da, formen con ellas la série de razones iguales

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DA}{da}.$$

Para conseguir esto, se elije una medida de longitud, por ejemplo el metro, para conocer el valor de AB, y en el papel se toma una línea recta de magnitud arbitraria para que represente en el plano la longitud del metro, y si este cabe en la línea AB un cierto número de veces, se hará que la línea ab contenga tambien á la medida arbitraria el mismo número de veces: de manera que llamando en general M la medida para valuar AB, y m la tomada en el papel para determinar ab, tendremos los cocientes iguales $\frac{AB}{M}=\frac{ab}{m}$; de donde cambiando los medios, resulta $\frac{AB}{ab}=\frac{M}{m}$; y por tanto

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DA}{da}=\frac{M}{m};$$

y se habrá conseguido, no solo que las cuatro razones expuestas sean iguales, sino que el cociente $\frac{M}{m}$ nos diga las veces que cada línea del polígono del terreno es mayor que su homóloga en el papel, de modo que si $\frac{M}{m}=3$, es decir, si la medida natural M contiene tres veces á la arbitraria m tomada para el plano, la línea AB del terreno contendrá tres veces á la ab del papel, la BC contendrá tres veces á la bc, etc; ó lo que es lo mismo, que si la medida para el papel es la tercera parte de la medida del terreno, la línea ab del plano será tambien la tercera parte de la AB, la bc tercera parte de la BC, etc. Vemos, pues, que toda la cuestion está reducida á determinar cuántas veces la medida natural M contiene á la arbitraria para el papel m, ó á saber qué parte es m de M, que es lo que se acostumbra á hacer; pues la proporcion $\frac{AB}{ab}=\frac{M}{m}$ podemos escribirla, comparando el consecuente con el antecedente en cada una de las razones, de este modo

$$\frac{ab}{AB}=\frac{m}{M}.$$

188. **Escala numérica de metros.**—El cociente $\frac{m}{M}$ que nos dice la

relacion que existe entre la magnitud de la unidad del plano y la de la unidad real de medida del terreno que representa; ó bien, que indica qué parte es cada línea *ab* del plano de su homóloga AB del terreno, y que expresa por consiguiente la relacion constante entre las líneas gráficas y sus homólogos naturales, es lo que se llama la *razon numérica*, ó más comunmente la *escala numérica de metros* adoptada para representar la figura *abcd* del papel semejante á la ABCD del terreno, ó más simplemente, la *escala* del plano *abcd* Hay la costumbre de que el numerador m de la fraccion $\frac{m}{M}$ represente siempre la longitud real de un metro, y el denominador M que es el número de metros que dicha longitud representa, sea un múltiplo de 10, á fin de que los múltiplos y divisores del metro nos den para el plano las longitudes mayores y menores que M.

Si m (fig. 96; lám. 7) es igual á un decímetro y M á un metro, este cociente significa que la longitud de un decímetro trazado en el papel representa la longitud de un metro en el terreno. Tendremos pues $\frac{m}{M} = \frac{0,1}{1}$, y multiplicando los dos términos de esta fraccion por 10, tendremos $\frac{m}{M} = \frac{1}{10}$, es decir, que el numerador m, que tiene la longitud real de un metro en el plano, representa 10 metros en el terreno. Dividiendo en diez partes iguales la longitud real de un metro tomada en el papel, el cociente 0,1 será la magnitud real que corresponde en la escala asignada, á la línea que ha de representar un metro del terreno. Este valor es efectivamente el que hemos tomado para representarle.

En general, para tener en el papel el valor de un metro, siendo la razon numérica ó la escala numérica de $\frac{1}{M}$, se dividirá la longitud real del metro en M partes iguales, y cada una de estas será el valor del metro en el plano. Si se divide el metro, por ejemplo, en veinte partes iguales, cada division de las que resulten representará un metro en la escala de $\frac{1}{20}$.

Las expresiones, un metro en el papel representa 10 metros del terreno, y un metro en el terreno equivale á 10 en el papel, significan lo mismo.

Si el numerador m, siendo siempre igual á 1, el denominador M fuese igual á 10, 100, 1000, 10000, etc., las escalas $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, etc., indican asimismo que un metro real tomado en el papel, representa respectivamente la longitud de 10, 100, 1000, 10000 metros del terreno, y se llaman escalas decimales.

Las escalas $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{250}$, $\frac{1}{1000}$, se leen diciendo: escala de 1 á 10, escala de 1 á 100, escala de 1 á 250, etc.

Cada una de estas fracciones se puede escribir en forma de entero, efectuando la division, y se tendrá

$$\frac{1}{10}=0,1; \quad \frac{1}{100}=0,01; \quad \frac{1}{250}=0,004; \quad \frac{1}{1000}=0,001:$$

lo que da á entender en el primer caso que el tamaño natural de un decímetro en el papel representa un metro del terreno; en el segundo caso, que el tamaño natural de un centímetro en el papel representa un metro en el terreno; en el tercero, que 4^{mm} representan un metro, y así sucesivamente.

Si llamamos en general l al lado ab (fig. 93; lám. 7) del polígono del papel, L al lado AB (fig 94; lám. 7) del polígono del terreno, y hacemos m igual á un metro, la igualdad $\frac{ab}{M}=\frac{1}{M}$ se convertirá en

$$\frac{l}{L}=\frac{1}{M} \quad [1].$$

Despejando sucesivamente en esta igualdad l y L, tedremos

$$l=\frac{L}{M}. \quad [2], \quad y \quad L=lM \quad [3]$$

Por medio de la fórmula [2] podemos conocer una longitud l, trazada sobre el papel ó *gráfica*, conocida que sea la longitud de su homóloga del terreno ó *natural* y la escala, para lo cual no habrá más que dividir su homóloga natural por el denominador de la escala: y recíprocamente, por medio de la fórmula [3] se podrá saber la longitud de una línea del terreno ó *natural*, conocida la longitud de su homóloga *gráfica* y la escala, lo que se conseguirá multiplicando su homóloga gráfica por el denominador de la escala.

Ejemplo 1.º—Averiguar la longitud de una *línea gráfica*, sabiendo que su homóloga *natural* vale 236 metros, y la *escala* es la de $\frac{1}{1000}$.

La fórmula [2] nos da

$$l=\frac{L}{M}=\frac{236}{1000}=0^{m},236.$$

Ejemplo 2.º—Averiguar la longitud de una *línea natural*, sabiendo que su homóloga *gráfica* vale $0^{m},236$ y la escala es la de $\frac{1}{1000}$.

La fórmula [3] nos da

$$L = lM = 0{,}236 \times 1000 = 236 \text{ metros.}$$

Como la relacion que se adopte entre una línea de una figura del terreno y su homóloga en el papel puede ser cualquiera, se concibe que será infinito el número de escalas. Es más cómodo, sin embargo, adoptar las escalas decimales, y de estas las métricas.

189. **Escala gráfica ordinaria.**—Usando la escala numérica, las operaciones serían demasiado largas, y se evita este inconveniente construyendo figuras que se llaman *escalas gráficas*, y son rectas divididas en partes iguales, representando las unidades de medida del terreno, y que se hallan con éstas en la relacion *numérica* adoptada; permitiendo de este modo apreciar las distancias por medio del compás. Dicha relacion numérica se llama la *razon numérica* de la escala gráfica correspondiente.

Para la construccion de esta escala, se toma siempre en el papel el valor de 100 metros del terreno; de modo que si se trata de la construccion de la escala de $\frac{1}{1000}$, tendremos las siguientes igualdades:

1 metro del terreno	....	$0^{m},001$ en el papel		
10	»	.... 0.01	»	[A]
100	»	 0,1	»	

Tomaremos sobre una recta indefinida (fig. 97; lám. 7) una distancia igual á un decímetro desde A hasta B, se escribirá cero en el punto B y 100 en el A; desde B á la derecha se repetirá esta distancia cierto número de veces y se numerará 100, 200, etc. Hecho esto, la distancia AB se divide en diez partes iguales, que cada una tendrá el tamaño de un centímetro, y se numera de derecha á izquierda, poniendo 10, 20, 30 etc.; lo que nos dice que cada una de estas divisiones ó sea cada centímetro en el papel representa 10 metros en el terreno [A]. Dividiendo ahora el último centímetro en diez partes iguales, cada una de ellas que será un milímetro, representará un metro en el terreno [A].

Tambien se puede multiplicar desde luego la relacion $\frac{1}{1000}$, valor en el papel de un metro del terreno, por 100, y tendremos

$$\frac{1}{1000} \times 100 = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10} = 0{,}1;$$

y sabiendo que 0,1 ó sea un decímetro, es el valor en el papel de 100 metros en el terreno, no habrá más que continuar despues la construccion, como hemos dicho.

La escala de $\frac{1}{1000}$ es muy cómoda y se usa mucho. En el comercio se encuentran unas reglas de boj ó de marfil (fig. 98; lám. 7), de la longitud de dos decímetros perfectamente divididas, las que se llaman *dobles decímetros*, y acompañan generalmente á los estuches de matemáticas. Sirviéndonos del doble decímetro, no solo podemos evitarnos trazar en el papel la escala de $\frac{1}{1000}$, sino que por su medio podemos formar sobre él las demás escalas decimales que se necesiten; lo que es muy cómodo y además mucho más exacto. Supongamos en efecto, qué se trate de formar en el papel la escala de $\frac{1}{2000}$ (fig 99; lám. 7) Tomaremos el valor de 100 metros del terreno en el papel, que será

$$\frac{1}{2000} \times 100 = \frac{100}{2000} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

El cociente obtenido cinco centímetros, que han de representar en el papel 100 metros del terreno, le tomaremos con el compás en el doble decímetro, y colocándole sobre una línea indefinida, no habrá más que repetir la construccion indicada más arriba, y se tendrá formada la escala. Aun es más exacto que con el compás, colocar el canto del doble decímetro en contacto con la recta tirada en el papel, y marcar las distancias de cada cinco centímetros con la punta muy fina de un lápiz; y observando ahora que cada distancia de cinco centímetros vale 50 milímetros, para marcar en la primera de la izquierda las decenas de metros, se dividirán 50 milímetros por 10, y el cociente 5 nos indicará que debemos marcar con el lápiz las distancias *ab*, *bc*, etc., para señalarlas despues con los números 10, 20, etc., y finalmente la última distancia de cinco milímetros dividida por 10, que da $\frac{1}{2}$ milímetro, nos dirá que debemos marcar las divisiones de los cinco milímetros y sus puntos medios, para tener el valor de las unidades de un metro que han de representar las del terreno.

La escala de $\frac{1}{2000}$ nos da, pues, para representar en el plano las mismas cantidades lineales del terreno, longitudes en el papel, mitades de las que da la escala de $\frac{1}{1000}$; pues en efecto, la fraccion $\frac{1}{2000}$ es dos veces menor que la $\frac{1}{1000}$, por tener doble su denominador.

Lo mismo haríamos si valiéndonos del doble decímetro de boj, tratásemos de construir la escala de $\frac{1}{500}$, la cual seria doble de la de $\frac{1}{1000}$, por tener la fraccion $\frac{1}{500}$ su denominador mitad del de la $\frac{1}{1000}$.

190. Para evitar las construcciones y para mayor comodidad y exactitud, se hallan tambien en el comercio *colecciones ó juegos de escalas* de boj y de marfil, que comprenden las usadas más generalmente.

El juego que representa la lámina 8.ª se compone de cuatro reglas, cada una con dos escalas, y comprende las de $\frac{1}{250}$, $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{2000}$, $\frac{1}{2500}$, $\frac{1}{5000}$, $\frac{1}{10000}$ y $\frac{1}{20000}$. Estas escalas llevan cerca del *cero* el denominador de la fraccion que da nombre á la escala, como se ve en las figs. 100, 101, 102 y 103; y en su parte media un boton de metal *b* para manejarlas con facilidad; y como sus cantos son muy finos, y las divisiones están hechas con mucha perfeccion, se adaptan perfectamente á líneas rectas tiradas en papel, sobre las cuales se marcan con un lápiz, cuya punta sea tambien muy fina, las distancias que han de representar las diferentes rectas del dibujo.

La primera escala de $\frac{1}{200}$ (fig 100), nos da para 100 metros del terreno, 0,4 en el papel, por lo que se verá que la longitud del doble decímetro AB señala solo 50 metros.

La segunda escala de $\frac{1}{500}$, da para 100 metros $0^{m},2$, y por eso el doble decímetro CD comprende 100 metros.

La tercera de $\frac{1}{1000}$ (fig 101), nos da un decímetro para 100 metros, y comprende por lo tanto el doble decímetro EF hasta 200 metros.

La cuarta de $\frac{1}{2000}$, da medio decímetro para 100 metros, y comprende por lo tanto el doble decímetro GH hasta 400 metros.

La quinta de $\frac{1}{2500}$ (fig. 102), nos da cuatro centímetros para representar 100 metros, y comprende por lo tanto el doble decímetro IJ hasta 500 metros.

La sexta de $\frac{1}{5000}$, nos da dos centímetros para 100 metros, y comprende por lo tanto el doble decímetro LM hasta 1000 metros.

La sétima de $\frac{1}{10000}$ (fig. 103), nos da un centímetro para 100 metros, y comprende por lo tanto el doble decímetro NO hasta 2000 metros.

La octava de $\frac{1}{20000}$, nos da medio centímetro para 100 metros, y por lo tanto el doble decímetro PQ comprende hasta 4000 metros; y para que no se confunda la numeracion solo se expresa ésta de 200 en 200 metros.

191. **Escala gráfica de transversales** —Para construir esta escala, llamada vulgarmente de *mil partes*, se determina la longitud gráfica que corresponde á la de 100 metros del terreno.

Sobre una recta indefinida AB (fig. 104; lám. 7), se construye la escala ordinaria en la relacion adoptada. Si esta es la de $\frac{1}{5000}$, se tendrá

$$\frac{1}{5000} \times 100 = \frac{100}{5000} = \frac{1}{50} = 0^{m},02,$$

y se llevará con el doble decímetro $0^{m},02$ las veces que se quiera; y las divisiones que así resulten representarán las centenas de metros Con el doble decímetro se dividirá tambien la primera division en diez partes iguales, de las que cada una valdrá diez metros, numerando como se vé en la figura, y levantando en los puntos A y B perpendiculares indefinidas á la AB, se llevará sobre ellas á partir de los mismos puntos A y B diez veces una magnitud arbitraria, y se unirán los últimos puntos de division C y D, por medio de una recta CD, la cual se dividirá del mismo modo que la AB Se tiran paralelas á la AB por los puntas de division de las AC y BD que se numeran, y tambien se tiran por último transversales desde los puntos de division de la CR á los de la AM como se ve en la figura. Por el empleo de las transversales se aprecian exactamente en esta escala hasta los metros que comprende una distancia cualquiera.

La fig 105 (lám 7) indica la construccion de la escala de $\frac{1}{10000}$, en la cual 100 metros del terreno están representados por $0^{m},01$ en el papel. Esta escala aprecia tambien con exactitud hasta metros como la escala anterior.

La fig. 106 (lám 7) es la escala de $\frac{1}{20000}$, en la cual 100 metros están representados por $0^{m},005$, habiéndose tomado una de estas divisiones á la izquierda del cero, y dividido en cinco partes iguales, cada una de las cuales representa 20 metros; resultando ser la aproximacion de dos metros, que en esta escala es suficiente

Se suelen tener tambien en el comercio trazadas en boj y en marfil para mayor comodidad y exactitud, las diversas clases de escalas de transversales que más comunmente suelen usarse.

Para mayor inteligencia en la construccion, demostracion y uso de las escalas ordinarias y de trasversales, véanse los párrafos 16, 17 y 18 de nuestro tratado de Acotaciones.

192. *Trasformaciones de la escala antigua de piés, pulgadas, etc., en escala métrica.*—Para trasformar en escala métrica la escala antigua de piés, pulgadas, etc., y sus múltiplos y divisores, supongamos que la escala de un plano sea de $2\frac{1}{4}$ pulgadas por 100 varas. Se hallará la relacion que existe entre las líneas del plano y las del terreno, para lo cual se reducirán las $2\frac{1}{4}$ pulgadas y las 100 varas á líneas, y resultarán 27 líneas y 43200 líneas, con lo que se tendrá la relacion

$$\frac{27}{43200}=\frac{1}{1600},$$

que significa que una unidad cualquiera en el papel representa 1600 unidades en el terreno; por consiguiente un metro representará 1600 metros, y esta será la *escala numérica métrica*.

Para construir la *escala gráfica métrica*, hallaremos el valor de 100 metros del terreno en el papel, y será

$$\frac{1}{1600}\times 100=\frac{100}{1600}=\frac{1}{16}=0^{m},0625;$$

de modo que dicho valor de los 100 metros estará representado en el papel por la longitud de 62 milímetros y medio. Con este dato se construirá la escala gráfica métrica ordinaria (189) ó la de trasversales (191) segun convenga.

Cuando en la escala de un plano, solo se halla indicado *escala de piés*, y no se puede hallar desde luego la relacion entre las líneas del plano y las del terreno, se procederá en todo gráficamente para conseguirlo, de la manera siguiente:

Se tomará con el compás la longitud de una línea del plano; se llevará esta longitud sobre la escala del mismo, y supongamos que señale 30 piés; se reducirán estos 30 piés á metros, y se hallará $8^{m},359$, y se formará la proporcion

$$8^{m},359 : 30 :: 100^{m} : x$$

de donde resulta

$$x=\frac{30\times 100}{8,359}=\frac{3000}{8,359}=\frac{3000000}{8359}=358,89=358,9$$ próximamente. Este valor 358,9 indica que habrá que tomar con el compás la longitud de 358,9 piés en la escala de piés del plano, para tener en el papel el

valor de 100 metros en el terreno. Una vez conocida la longitud de los 100 metros se formará la escala métrica ordinaria ó la de trasversales.

193. **Escala de pasos.**—El paso del hombre se emplea con frecuencia como unidad para la medida aproximada de una línea topográfica de poca importancia, y para tener ésta en metros hay que determinar la relacion aproximada del paso con el metro.

Para esto se recorre una recta bien determinada y medida de antemano cierto número de veces. Sea 100 metros la medida exacta de la recta, p, p', p'' los números de pasos obtenidos en las distintas veces que se haya recorrido, procurando marchar al paso natural, y n este número de veces; el término medio $\frac{p+p'+p''}{n}$ representará el valor en pasos de los cien metros. Si hubiésemos obtenido que 120 pasos equivalian próximamente á los 100 metros, el valor de un paso en metros sería $\frac{100}{120}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}=0^m,83$, y se tendrá la relacion aproximada 100 pasos $=83$ metros; por medio de la cual se podría determinar el valor en metros de cualquier número de pasos, y el valor en pasos de cualquier número de metros.

Para construir la escala *gráfica* de pasos en una relacion cualquiera, por ejemplo en la de $\frac{1}{5000}$ (fig. 104; lám. 7), construiremos esta escala segun se ha manifestado (191) y se vé en la figura, y se tomaría en ella la distancia que representase 83 metros; la cual sería la magnitud que representaría las centenas en la escala ordinaria de pasos. Se concluiría de trazar la escala como ya hemos dicho, pudiéndose construir tambien la de trasversales.

194. Es de la mayor importancia, tanto para la construccion de las escalas, como para la de los planos, el uso del papel cuadriculado, cuyos cuadrados tienen de lado un milímetro, y son, por lo tanto, milímetros cuadrados; señalándose con trazo más grueso las líneas que forman los centímetros cuadrados.

195. Concluiremos resolviendo los dos siguientes problemas, que son de mucha utilidad.

Problema 1.º—*Conocida la longitud del papel en que se ha de construir la figura semejante á la del terreno, y la mayor dimension de éste, que ha de hallarse situada en el mismo sentido, hallar la razon numérica de la escala.*

En la igualdad [1] del párrafo (188) tendremos que l representará ahora la mayor longitud del papel, L la homóloga del terreno, y M, que es la incógnita, será igual á x, y resultará

$$\frac{l}{L}=\frac{1}{x}; \text{ de donde}$$

$$x = \frac{L}{l};$$

donde vemos que no habrá más que dividir la longitud del terreno por la del papel, y tendremos el denominador de la razon de la escala numérica, cuyo numerador será siempre 1.

Ejemplo.—Sea la longitud del papel igual á $0^m,58$; se rebajarán ocho centímetros, con el fin de dejar por cada lado cuatro de márgen, y será $l = 0^m,5$; sea 1000 metros la mayor dimension del terreno, es decir,

$L = 1000^m$; la ecuacion $x = \frac{L}{l}$ nos dará $x = \frac{1000}{0,5} = \frac{10000}{5} = 2000$;

donde vemos que el denominador de la razon de la escala es 2000, y dicha razon será $\frac{1}{2000}$.

Conocida esta razon, podremos determinar por su medio la longitud de todas las demás líneas del papel, ó construir la escala gráfica correspondiente para la mayor comodidad.

Problema 2.°—*Conocida la mayor dimension del terreno, y la razon numérica de la escala con que se ha de construir la figura semejante en el papel, determinar la longitud de éste para situar la del plano en el mismo sentido.*

En la igualdad [1] del párrafo (188) la incógnita es ahora l y resultará $\frac{x}{L} = \frac{1}{M}$; de donde

$$x = \frac{L}{M};$$

lo que nos dice que no habrá más que dividir la longitud del terreno por el denominador de la razon numérica de la escala.

Ejemplo.—Sea $L = 1000$ metros, y la razon numérica de la escala $\frac{1}{2000}$; la ecuacion $x = \frac{L}{M}$ nos dará

$$x = \frac{1000}{2000} = \frac{1}{2} = 0^m,5;$$

es decir, que la mayor longitud del terreno ocupará medio metro en el papel; y con el objeto de dejar por cada lado cuatro centímetros de márgen, tendrá que tener $0^m,58$ de longitud.

196. La escala adoptada para la construccion del plano de un polígono debe siempre acompañar al dibujo.

197. **Orientacion de los planos.**—Cualquiera que sea el método que se adopte, de los varios que pueden seguirse, y que á su tiempo explicaremos, para tomar en el campo los datos necesarios, á fin de tener los medios suficientes para construir en el papel el plano *abcdef* (figura 107; lámina 9) del polígono del terreno ABCDEF, habremos conseguido obtener siempre la posicion relativa de los puntos A, B, C, D, E y F.

Para tener la posicion absoluta, es necesario conocer la *direccion* que en el terreno tiene uno de los lados del polígono ú otra recta cualquiera relacionada con él. En efecto, si se expresase en el plano que *a* corresponde á la esquina sur de una ermita, el punto A del terreno estaria determinado; pero como á partir de él, la recta AB puede seguir muchas direcciones, AB′, AB″....., los polígonos construidos sobre cada una de estas rectas serían iguales al ABCDEF, pero solo el punto A ocuparía la posicion absoluta que le corresponde; pero si además de conocer A, se supiese que B estaba en línea recta con A y otro punto determinado, por ejemplo, un árbol G notable por cualquier circunstancia, la direccion de AB estaría determinada, y la posicion de B fija además por su distancia conocida al punto A.

Generalmente la posicion de AB se determina por el ángulo *m* que forma con la meridiana NS del punto A, contado desde dicha línea AB hasta la AN que se dirige al norte.

Cuando se ha determinado la direccion de AB, ó se ha trazado la meridiana, se dice que el plano está *orientado*, y esta operacion se conoce con el nombre de *orientacion del plano*.

Al trazar en el papel la figura *abcdef* semejante á la proyeccion horizontal del polígono del terreno ABCDEF (fig. 107; lám. 9), hay la costumbre de dividir el rectángulo *omnp* (fig. 108; lám. 9), que representa el papel colocado en el tablero OMNP, en dos partes iguales, por medio de la recta NS que representa la meridiana siendo el norte el punto N y el sur el S, y tirando en el punto medio C de la NS la perpendicular OE, el punto E marcará el este y el O el oeste. Hecho esto, se situará la linea *ab* homóloga de la AB (fig. 107; lám. 9) de manera que forme con la meridiana NS un ángulo *m′* (fig. 108; lám. 9) igual al *m*, y una vez situada esta línea, la construccion sobre ella de la figura semejante á la proyeccion del terreno, nos dará determinada la posicion del polígono *abcdef*.

En el dibujo se borran despues las líneas NS y OE (fig. 108; lám. 9) y solamente se traza una línea *ns* paralela á la NS en uno de los ángulos del papel, que regularmente suele ser en el que le ponemos en la figura, y que representa la direccion de la meridiana. Se la suele dar la figura de una flecha, siendo la punta *n* la que se dirige al norte. Esta manera de proceder tiene además de la ventaja que presenta por la circunstancia de saber siempre cómo se han de situar en el papel las figuras, la de que por este medio se sabe tambien la posicion de las varias partes del terreno con relacion á los cuatro puntos cardinales.

La orientacion de los planos y el convenio que acabamos de hacer tienen aplicaciones importantes: un agricultor puede servirse de un plâno orientado para conocer los parajes á próposito para la produccion de plantas determinadas; los dueños de fincas ó los fabricantes, para la disposicion que deben dar á las distintas partes de un edificio, á fin de que llene las condiciones necesarias al objeto á que se destina.

En el plano, como ya hemos dicho (196), se traza tambien la escala que ha servido para su construccion, disponiéndola generalmente en la parte inferior del dibujo, como se observa en la figura

CAPITULO IV.

Nociones de óptica.—Anteojos.

Preliminares.—Propagacion de la luz en un medio homogéneo.—Intensidad de la luz.—Reflexion de la luz.—Imágenes producidas por la reflexion.—Teoremas acerca de la reflexion de la luz en los espejos.—Refraccion de la luz.—Indice de refraccion.—Angulo límite.—Reflexion total.—Fenómenos causados por la refraccion.—Refraccion atmosférica.—Refraccion á través de los medios diáfanos terminados por superficies planas.—Refraccion en los prismas.—Refraccion en las lentes.—Imágenes de los objetos vistos á través de las lentes.—Descomposicion de la luz.—Acromatismo.—Instrumentos de óptica.—Anteojo astronómico.—Anteojo terrestre.—Verificacion y correccion de los anteojos.

198. **Preliminares.**—La luz es el agente que produce en nosotros la vision de los objetos, por su accion sobre cierta parte del ojo llamada *retina*.

Optica es la ciencia que trata de dar á conocer las propiedades de la luz.

199. *Cuerpos luminosos, diáfanos, trasparentes ó traslucientes y opacos.*—*Cuerpos luminosos* son todos aquellos que emiten luz, como el sol, y los cuerpos en ignicion. *Diáfanos* los que dan paso á la luz, y á través de los cuales se distinguen los objetos, como el aire, el cristal, el agua. *Trasparentes* ó *traslucientes*, son aquellos á través de los cuales se percibe la luz, sin poder distinguir los objetos, como el cristal mate y el papel recubierto de una capa de aceite, así como el papel vegetal y el papel-tela. *Cuerpos opacos* son todos aquellos á través de los cuales no hay trasmision alguna de luz, como las maderas y los metales. Los cuerpos opacos reducidos á láminas muy delgadas, se hacen traslucientes.

200. **Propagacion de la luz en un medio homogéneo.**—Un *medio* es el espacio lleno ó vacío en el cual se produce un fenómeno. El aire, el agua, por ejemplo, son *medios* en los cuales se propaga la luz. Un medio es homogéneo, cuando en todas sus partes tiene la misma composicion y la misma densidad.

Un punto luminoso emite rayos de luz en direccion de los rádios de una esfera cuyo centro ocupa; de donde se deduce que *la luz se propaga en línea recta en todo medio homogéneo*

En efecto, la llama de una bujía ilumina toda la habitacion en que se encuentra; y la luz solar que atraviesa un agujero practicado en la ventana de una habitacion que se encuentra á oscuras, produce en el aire un trazo rectilíneo, que se hace visible iluminando los cuerpos ligeros que se hallan en suspension en la atmósfera

201. **Intensidad de la luz.**—*La intensidad de la luz está en razon inversa del cuadrado de la distancia.* En efecto; sea l (fig. 109; lám. 9) un punto luminoso. La cantidad de luz emitida en un instante por l, al llegar á la distancia la del mismo punto l, ilumina la superficie s de una esfera cuyo rádio es la, el cual supondremos igual á la unidad; y cuando llega á c, ilumina la superficie de una esfera S, cuyo radio es lc; y como las superficies de dos esferas están en razon directa de los cuadrados de los rádios respectivos (Geom Teor. 206), por lo cual tendremos

$$s : S :: 1 : \overline{lc}^2,$$

resulta, que la superficie S es $\overline{lc}^2$ veces mayor que la s; luego la misma cantidad de luz la iluminará con una intensidad $\overline{lc}^2$ veces menor.

Si suponemos, por ejemplo, $lc = 2$, tendremos

$$s : S :: 1 : 4;$$

y como S es cuatro veces mayor que s, estará iluminada con una intensidad cuatro veces menor.

202. **Reflexion de la luz.**—Cuando un rayo de luz ab (fig. 110; lám. 9), cae sobre una superficie pulimentada mn, se refleja siguiendo una direccion bc determinada por las leyes que siguen:

1.° *El ángulo de reflexion es igual al ángulo de incidencia.*

2.° *El rayo incidente y el rayo reflejo están en un mismo plano normal á la superficie reflectante.*

El rayo de incidencia es ab, el de reflexion bc. Angulo de *incidencia* es el i, que el rayo incidente forma con la normal bd en el punto b en que el primero toca á la superficie. Angulo de reflexion es el r, que el rayo de reflexion forma con la misma normal.

Cuando el rayo incidente db es normal á la superficie mn, el ángulo de incidencia es nulo, y por tanto tambien lo será el de reflexion; el rayo reflejo se confundirá entonces con la normal.

203. La luz no se refleja en su totalidad; parte de ella es absorbida por el cuerpo en cuya superficie tiene lugar la reflexion, si es opaco, ó pasa á través de su sustancia si es trasparente.

204. Hemos dicho (198) que la luz es la causa de la vision de los objetos, por la impresion que causa en la retina. Así es, que vemos los cuerpos luminosos por la luz que directamente nos envian, y los demás por la que reciben de un cuerpo luminoso y nos reflejan; de donde fácilmente puede deducirse que siempre veremos un objeto cualquiera en la direccion del rayo luminoso que nos trae su imágen.

205. **Imágenes producidas por la reflexion.**—La reflexion de la luz da lugar á las imágenes que observamos en los espejos, y en general en las superficies pulimentadas, de los objetos que se hallan delante de ellas. Para formarnos una idea de cómo se forman estas imágenes, supongamos un espejo MN (fig. 111; lám. 9), y delante de él un cuerpo AB. Un punto cualquiera A de este cuerpo emite luz, ya propia si es luminoso, ya reflejada si es opaco (204), en todas direcciones.

Uno cualquiera de los rayos luminosos Ac, al llegar á c se reflejará segun ch, formando los ángulos i, r, iguales (202); luego tambien lo serán sus complementos respectivos m, n; y como se tiene $n = n'$, por opuestos al vértice, será tambien $m = n'$. Tirando la recta Ad, perpendicular al espejo, y prolongándola hasta encontrar en a á la prolongacion de ch, tendremos los triángulos rectángulos Adc, dca, los cuales tienen el lado dc comun, y además $m = n'$, como acabamos de ver; luego será A$d = da$; y como lo mismo demostraríamos respecto de otro rayo cualquiera Ac', resulta que todos los rayos emitidos por A, irán á formar en a la imágen de este punto. Luego la imágen de un punto cualquiera es simétrica respecto del espejo, ó está en la perpendicular bajada desde el punto al espejo, y á una distancia del mismo igual á la del punto dado.

El punto B produciría, segun esto, su imágen en b, y una cosa análoga tendría lugar para los puntos intermedios.

Luego: *la imágen de un objeto producida por un espejo es directa y simétrica del mismo objeto con respecto al espejo.*

Así se observa en la fig. 112 (lám. 9) en la cual AB es oblicua respecto del espejo. Si la inclinacion de éste al horizonte es de 45° (fig. 113; lámina 9), la imágen de un objeto vertical será horizontal, y al contrario.

206. Tambien se explican por la reflexion, las imágenes invertidas de los objetos situados á las orillas de los rios y lagos. En efecto; el punto a (fig. 114; lám. 9) emite uno de sus rayos ab, que se refleja en la superficie del agua segun bc, y va á formar su imágen a' como hemos visto (205). Esta imágen la vemos en la direccion del rayo $a'b$ que nos la trae, y á una distancia de la superficie reflectante mn, igual á la que se encuentra de ella el punto a.

Lo mismo se verificará para todos los puntos del objeto ad, por lo que se observará desde c una imágen invertida $a'd$ del mismo objeto.

207. **Teoremas acerca de la reflexion de la luz en los espe-**

jos (a).—*Si un rayo de luz se refleja sucesivamente en dos espejos el ángulo que forma el rayo incidente de la primera reflexion con el reflejo de la segunda, es doble del que forman los espejos.*—En efecto; el ángulo t (fig 115; lámina 9), que forma el rayo incidente de la primera reflexion con el reflejo de la segunda, externo al triángulo CBA dá (Geom Teor. 14, Corol 1.º)

$$t = a + c;$$

y como se tiene $a = 180^\circ - (m + m')$, ó en virtud de ser $m = m'$ por complementos de ángulos iguales (202), $a = 180^\circ - 2m'$, así como tambien de un modo análogo $c = 180^\circ - 2n$, sustituyendo en la ecuacion anterior, resultará

$$t = 180^\circ - 2m' + 180^\circ - 2n, \quad \text{ó}$$

$$t = 360^\circ - 2\,(m' + n) \qquad [1].$$

Tambien se tiene

$$s = 180^\circ - (m' + n);$$

y multiplicando por 2 ambos miembros de esta ecuacion,

$$2s = 360^\circ - 2\,(m' + n) \qquad [2].$$

De las ecuaciones [1] y [2] resulta

$$t = 2s,$$

conforme al principio enunciado.

Si los espejos presentan la disposicion que se observa en la fig. 116 (lám. 9), en la que el rayo reflejo de la segunda reflexion no corta al incidente de la primera, sino á su prolongacion, el ángulo t es tambien doble del s; pues se tiene

$$t = 180^\circ - \text{CAB} - \text{CBA}:$$

pero $\text{CAB} = m' + m''$, y á causa de ser $m'' = m$, $\text{CAB} = m' + m$, ó

$$\text{CAB} = 2m'.$$

(a) La demostracion de este teorema exige que todas las rectas de la fig. 115 se hallen en un mismo plano, para lo cual los espejos deben ser perpendiculares al plano que consideramos, determinado por las rectas CA, Aa y AB. En efecto; la normal Bc, perpendicular al espejo B, estará entonces situada necesariamente en el plano de las rectas anteriores y los de ambas reflexiones serán uno mismo por tener comunes las rectas AB y Bc.

Tambien se tiene CBA $= c = 180^\circ - (n + n')$, ó

$$CBA = 180^\circ - 2n'.$$

Sustituyendo estos valores en el que acabamos de hallar para t, resulta

$$t = 180^\circ - 2m' - (180^\circ - 2n'); \quad \text{ó}$$
$$t = 180^\circ - 2m' - 180^\circ + 2n' ; \quad \text{ó finalmente}$$
$$t = 2(n' - m') \quad [3].$$

En el triángulo DBA se tiene tambien

$$s = 180^\circ - \text{DAB} - \text{DBA}:$$

pero DAB $= m'$; y DBA $= 180^\circ - n = 180^\circ - n'$; y sustituyendo estos valores en la ecuacion que da el de s,

$$s = 180^\circ - m' - (180^\circ - n');$$

$$s = 180^\circ - m' - 180' + n';$$

ó finalmente

$$s = n' - m';$$

multiplicando esta ecuacion por 2, obtendremos

$$2s = 2(n' - m') \quad [4].$$

De las ecuaciones [3] y [4] resulta como antes

$$t = 2s.$$

208 *Caso particular.*—Si el espejo B (fig 117; lám 9) fuese normal al rayo reflejo AB de la primera reflexion, la segunda tendría lugar segun esta misma línea en el sentido BA (202).

Entonces el ángulo $(i+r)$ de los rayos NA y AB es, como en el caso anterior, doble del s que forman los espejos. En efecto, se tiene

$$i + r = 180^\circ - 2a;$$

y en el triángulo rectángulo ABC,

$$s = 90^\circ - a;$$

y multiplicando esta ecuacion por 2,

$$2s = 180^{\circ} - 2a;$$

luego será

$$i + r = 2s.$$

209. *Si dos espejos*, A, B (fig. 118; lám. 9) *son paralelos, el rayo incidente de la primera reflexion y el reflejo de la segunda son tambien paralelos*.

En efecto, se tiene (Geom. Teor. 3. Cor. 2.º)

$$a + m + c = a' + n + c' \quad [5];$$

y como tambien es $a = c$, $a' = c'$ en virtud de las leyes de la reflexion, y $c = a'$ (Geom. Teor. recíp. del 7) á causa del paralelismo de los espejos A y B, resulta tambien $a = c'$. La ecuacion [5] dará entonces $m = n$; lo que nos dice (Geom. Teor. 7.) que las rectas MA y Bv son paralelas.

Si los espejos son muy pequeños, y están muy próximos, las rectas MA y Bv se confunden sensiblemente, y la imágen M' de un objeto M visto desde v, por la luz que este objeto emite, doblemente reflejada por los espejos A y B, coincide con el mismo objeto visto directamente.

210. Recíprocamente, *cuando la imágen M' de un objeto M visto directamente y por la reflexion de dos espejos, coincide con el mismo objeto, los espejos son paralelos*.

211. **Refraccion de la luz**.—Cuando la luz pasa de un medio á otro de diferente densidad, al llegar á la superficie de separacion de ambos medios, abandona la direccion que llevaba, para seguir otra nueva, sujetándose á las siguientes leyes:

1.ª Cuando un rayo de luz ab (fig. 119; lám. 9) pasa del medio m á otro n de mayor densidad, abandona su primitiva direccion be y toma la bc, al tocar en b á la superficie de separacion s, acercándose á la bf, normal en b á la superficie s. Se llama *rayo incidente* al ab; *rayo de refraccion* á la recta bc; al ángulo i, que el rayo incidente forma con la normal, *ángulo de incidencia*, y al r que el rayo de refraccion forma con la misma normal, *ángulo de refraccion*.

Se vé que cuando la luz pasa de un medio á otro más denso, el ángulo de refraccion es menor que el de incidencia.

2.ª Cuando el rayo de luz pasa de un medio á otro menos denso, el rayo de refraccion se aleja de la normal en el punto de incidencia, y el ángulo de refraccion es mayor que el de incidencia (fig. 120; lám. 9).

3.ª Los rayos normales á la superficie de separacion de los medios no sufren desviacion alguna.

4.ª En todos los casos, el rayo incidente y el de refraccion están en el mismo plano con la normal, el cual es por tanto perpendicular á la superficie de separacion de los medios

5.ª Los *senos* de los ángulos de incidencia y de refraccion están en una relacion constante para unos mismos medios; pero diferente cuando varían estos.

212 Las dos primeras leyes no son absolutas en lo que se refiere á la densidad de los medios, aunque sí bastante generales. Con mayor propiedad se llama *medio más refringente* que otro, á aquel en que la luz, al pasar del primero al segundo, forma un ángulo de refraccion mayor que el de incidencia; y menos refringente cuando este segundo ángulo es menor.

213. **Indice de refraccion**.—Si suponemos que la recta *ab* (figs 119 y 120; lám. 9) se mueve en el plano que determina con la normal, el ángulo de incidencia varía, así como el de refraccion; pero siempre se tendrá la relacion constante $\frac{\text{sen. } i.}{\text{sen. } r}$ (211 — 5.º). Esta relacion es lo que se llama *índice de refraccion*, el cual es $\frac{4}{3}$ para la luz que pasa del aire al agua, y $\frac{3}{2}$ para la que pasa del aire al cristal. Se concibe que para la luz que pasa del agua al aire, el índice será la razon $\frac{3}{4}$, inversa de la primera, así como $\frac{2}{3}$ para la que vá del cristal al aire.

El conocimiento del índice de refraccion puede servirnos para calcular el ángulo de refraccion, que corresponde á un ángulo conocido de incidencia, cuando se conoce tambien el índice de refraccion que corresponde á los dos medios en los cuales se verifica el fenómeno; así como tambien podemos hallar el ángulo de incidencia conocido el de refraccion.

Si suponemos, por ejemplo, que el medio *n* (fig. 120; lám. 9) es cristal y el *m* aire, el índice de refraccion para la luz que pasa de *n* á *m* es $\frac{2}{3}$, como acabamos de ver, y tendremos la ecuacion general

$$\frac{\text{sen. } i}{\text{sen. } r} = \frac{2}{3} \qquad [6]$$

Dando á i diferentes valores, podemos hallar los correspondientes de r Sea por ejemplo $i = 25° \, 16'$ Sustituyendo en la fórmula general, tendremos:

$$\frac{\text{sen. } 25° \, 16'}{\text{sen } r} = \frac{2}{3}$$

y despejando sen. r.

$$\text{sen. } r = \frac{3 \text{ sen. } 25^{\circ} 16'}{2} \qquad [7];$$

$$\text{sen. } r = \frac{3 \times 0{,}42683}{2};$$

$$\text{sen. } r = 0{,}64024;$$

de donde resulta

$$r = 39^{\circ}\ 49'$$

* Aplicando el cálculo logarítmico á la fórmula [7], tendremos:

$$\log \text{ sen } r = \log. 3 + \log. \text{ sen. } 25^{\circ} 16' - \log. 2; \quad \text{ó}$$

$$\log. \text{ sen. } r = \log. 3 + \log. \text{ sen. } 25^{\circ} 16' + \text{c.}^{\text{to}} \log. 2 - 10$$

Disposicion del cálculo

$$\begin{array}{rl} \log. 3 = & 0{,}4771213 \\ \log. \text{ sen. } 25^{\circ} 16' = & 9{,}6302568 \\ \text{c.}^{\text{to}} \log. 2 = & 9{,}6989700 \\ \hline \text{Suma} = & 19{,}8063481; \end{array}$$

$$\log. \text{ sen } r = 9{,}8063481;$$
$$r = 39^{\circ}\ 49'.$$

214. Angulo límite —Reflexion total —Siendo el ángulo r (fig. 120; lám. 9) mayor que el ángulo i, y teniendo en cuenta la relacion que existe entre los senos de estos ángulos, se concibe que creciendo i, r irá tomando valores que se aproximen á 90°. Cuando llegue á este límite, el ángulo i tiene un valor menor que un cuadrante, y este valor ha recibido el nombre de *ángulo límite*. Si el ángulo i crece todavía, crecerá tambien el de refraccion y pasará del medio m al n; entonces la refraccion se convierte en reflexion, y este fenómeno se conoce con el nombre de *reflexion total*.

El ángulo límite se calcula fácilmente, conocidos los medios y el índice de refraccion. Basta para ello dar á r el valor 90° y hallar el correspondiente de i.

Suponiendo que los medios n y m (fig. 120; lám. 9) son como antes, el cristal y el aire, la fórmula [6] (213) nos dará

$$\frac{\text{sen. } i}{\text{sen } 90^{\circ}} = \frac{2}{3};$$

y como sen $90^\circ = 1$, resultará

$$\text{sen } i = \frac{2}{3} = 0{,}6667 \;;$$

de donde

$$i = 41^\circ\ 49'.$$

* Para hallar i por logaritmos, tendríamos

$$\log.\ \text{sen}.\ i = \log\ r + \log\ 2 - \log\ 3; \qquad \text{ó}$$

$$\log.\ \text{sen}\ i = 10 + \log.\ 2 - \log.\ 3;$$

ó finalmente

$$\log.\ \text{sen}\ i = \log\ 2 + \text{C.}^{\text{to}} \log\ 3$$

Disposicion del cálculo.

$$\begin{aligned} \log.\ 2 &= 0{,}3010300 \\ \text{C.}^{\text{to}} \log\ 3 &= 9{,}5228787 \\ \hline \log\ \text{sen}.\ i &= 9{,}8239087; \\ i &= 41^\circ\ 49'. \end{aligned}$$

215. **Fenómenos causados por la refraccion.**—Por efecto de la refraccion, los cuerpos sumergidos en un medio más refringente que el aire, parecen más próximos á la superficie de lo que realmente están. Así, el fondo de un arroyo ó de un rio poco profundo, parecen más elevados de lo que están en realidad: un baston introducido oblícuamente en el agua, parece doblado en el punto en que toca á la superficie del líquido. Lo contrario tendría lugar si el cuerpo estuviese sumergido en un medio ménos refringente que el aire; parecería más distante, que lo está, de la superficie de separacion.

216. **Refraccion atmosférica.**—Si el aire atmosférico, considerado en una corta extension puede mirarse como un medio homogéneo, no sucede lo mismo considerado en su totalidad. Las capas inferiores, sobrecargadas con el peso de las superiores, tienen una densidad mayor, y por consiguiente, las distintas capas tendrán refrangibilidad diferente; siendo más refrangibles las inferiores, y disminuyendo de refrangibilidad á partir de estas hasta las capas superiores. Para ver el efecto de la refraccion en la atmósfera, supongamos en a (fig. 121; lám. 9) un cuerpo luminoso: la luz que emite, al llegar en b á la superficie de separacion de dos capas atmosféricas, se refractará acercándose á la normal bo (211—1.ª), en c sufrirá nueva desviacion, acercándose á la normal co; se refractara

nuevamente en d, y si suponemos en e un observador, éste verá el punto a en a', en la prolongacion del último elemento poligonal de, que es el que le lleva la imágen del punto a. Como las capas de aire son infinitas en número y de espesores infinitamente pequeños, los elementos poligonales se confunden con los de una curva, cuya tangente en e es la línea ea'. De aquí se deduce:

1.° *Que la trayectoria de la luz, ó visual tirada desde* e *á un objeto colocado realmente en* a, *es una curva cóncava hácia la tierra.*

2.° *Que la imágen del objeto se vé más elevada que él.*

Así es, que en la tierra vemos siempre los astros antes de hallarse colocados sobre el horizonte, y despues de hallarse bajo él en el ocaso. En nuestros climas, la refraccion eleva los astros medio grado.

217. A la refraccion atmosférica es debido el fenómeno conocido con el nombre de *espejismo* ó *miraje*. Tiene lugar en las llanuras arenosas del Egipto, y consiste en que la reflexion del calor solar por las arenas, eleva de tal modo la temperatura del aire que se halla en contacto con ellas, que se produce una série de pequeñas capas de aire caliente, dispuestas de manera que las de temperatura más elevada, y por consiguiente, ménos densas, están más próximas al terreno, y siguen á partir de él en el órden de menor á mayor densidad, hasta cierta altura, á partir de la cual siguen el órden de colocacion que con respecto á las densidades hemos indicado (216). La luz que emite un objeto cualquiera colocado en el terreno, al atravesar las capas inferiores de la atmósfera experimenta refracciones sucesivas, separándose cada vez más de las correspondientes verticales (211—2°), hasta que sufre la reflexion total (214), en virtud de la cual el observador percibe una imágen invertida del mismo objeto, como si éste se hallase situado en las orillas de un lago (206).

El *espejismo* ó *miraje* se observa tambien en el mar, y puede tener lugar en un valle profundo cuando la temperatura del aire es muy elevada.

218. **Refraccion á través de los medios diáfanos terminados por superficies planas.**—*Si un rayo de luz se refracta al atravesar un medio de caras planas paralelas, al salir tomará una direccion paralela á la que llevaba antes de penetrar en el segundo medio.*

En efecto, al pasar del ménos denso M (fig. 122; lám. 9), al N, formará el ángulo de refraccion r, seguirá la direccion ab y se refractará nuevamente en b, saliendo al primer medio M. Cualquiera que sea la inclinacion del primer rayo incidente, tenemos que $\frac{\text{sen. } i}{\text{sen. } r}$, es una cantidad constante para la luz que pasa de M á N, y siendo la que pasa de N á M en b $\frac{\text{sen. } i'}{\text{sen. } r'}$, la que pasa de M á N en el mismo punto, será la inversa $\frac{\text{sen. } r'}{\text{sen. } i'}$ (123); luego resulta $\frac{\text{sen. } i}{\text{sen. } r} = \frac{\text{sen. } r'}{\text{sen. } i'}$, y como $r = i'$ por alternos internos entre las normales p y p', será tambien sen. r=sen i'; y siendo iguales los quebrados $\frac{\text{sen. } i}{\text{sen. } r}$ y $\frac{\text{sen. } r'}{\text{sen. } i'}$, será tambien sen. i=sen. r', ó $i=r'$. Tenemos además, $n+r=i$, y $m+i'=r'$ por opuestos al vértice; de donde resulta $n=i-r$; $m=r'-i'$; y como hemos demostrado que es $i=r'$, y $r=i'$, resultará $m=n$; luego las rectas ad, cb son paralelas (Geom. Teor. 7).

219 **Refraccion en los prismas.**—Sea ABC (fig. 123; lám. 9, la seccion recta de un prisma triangular recto de cristal, y ab la direccion de un rayo de luz situado en el plano de la seccion. Al llegar este rayo al punto b, tomará la direccion bc, acercándose á la normal n (211 — 1.ª), y al llegar á c, sufre una nueva refraccion, tomando la direccion cd (211 — 2.ª). En virtud de lo expuesto, el objeto a visto desde d á través del prisma, aparecería en a', punto situado en la prolongacion del rayo de luz cd, que trae la imágen de a.

Las caras CA, CB, en que se verifican las refracciones que acabamos de indicar, forman un ángulo C, que se llama *ángulo refringente del prisma*; el punto C se llama el *vértice* del prisma, y AB la *base* del mismo.

Por lo tanto, los objetos vistos á través de un prisma, aparecen desviados hácia su vértice.

La desviacion de la luz se mide por el ángulo m, que forma la prolongacion del primer rayo incidente ab, con la del segundo de refraccion cd.

220 Conocido el ángulo de ab (fig. 124; lám. 9) con la normal n, se determina fácilmente el ángulo r (213), y por consiguiente la direccion de bc. Para hallar el valor en grados del ángulo i', conocido el ángulo refringente del prisma, tendremos

$$i'+r=180^\circ-t;$$

y tambien (Geom. Teor. 147),

$$s=180^\circ-t;$$

de donde resulta

$$i'+r=s; \qquad \text{ó}$$

$$i'=s-r.$$

Por medio del valor i', conocido, se halla fácilmente (213) el valor de r'.

221. Propongámonos, como un caso particular, determinar la marcha de un rayo de luz ab (fig. 125; lám. 9) perpendicular á la hipotenusa de la seccion ABC de un prisma, en la hipótesis de que esta seccion es un triángulo isósceles rectángulo en C. El rayo ab atravesará la cara AB sin experimentar refraccion (211 — 3.ª); al llegar á c, forma con la normal n un

ángulo de 45°, el cual es mayor que el ángulo límite 41° 49′, hallado (214) para la luz que pasa del cristal al aire, se reflejará por lo tanto segun la direccion *cd*; en *d* se reflejará de nuevo, por la misma razon, y seguirá la direccion *de*, paralela á *ab*, atravesando de nuevo la cara AB sin experimentar refraccion

222. **Refraccion en las lentes.**—Se da el nombre de *lentes* á unos discos de cristal, terminados por superficies esféricas ó por una esférica y otra plana. Las lentes son generalmente de *crown-glass* cristal que no tiene plomo, ó de *flint-glass*, en cuya composicion entra este metal, y es más refringente que el primero. Las lentes son de seis especies diferentes: tres *convergentes*, cuyo espesor es mayor en el centro que en los bordes, y son: la *lente bi-convexa* A (fig 126; lám. 9), la *plano-convexa* B, y el *menisque convergente* C; y tres *divergentes*, más gruesas en los bordes: la *bi-cóncava* D, la *plano-cóncava* E, y el *menisque divergente* F.

223. *Eje principal-Centro óptico.*—Se llama *eje principal* de una lente, la recta CC′ (fig 127; lám. 9), que une los centros C, C′ de curvatura de las superficies que terminan la lente En esta línea se encuentra un punto *o*, que se llama *centro óptico*, y que goza de una propiedad notable: todo rayo luminoso que pasa por él, no experimenta desviacion angular; es decir, que el rayo emergente ó refractado es paralelo al rayo incidente. Para demostrar la existencia de este punto en una lente bi-convexa, tiremos los rádios C*c*, C′*b* paralelos Las tangentes *t* y *t′* en *b* y *c* á las superficies, serán tambien paralelas; pues siendo *t* perpendicular á C′*b*, tambien lo será á su paralela C*c*; y como *t′* lo es tambien por suposicion, resulta que *t* y *t′* son paralelas (Geom Teor. 6), así como los elementos *b* y *c* de las curvas. La refraccion se verifica entonces como en un medio terminado por caras planas, y por tanto los rayos luminosos *ab* y *cd* son paralelos (218).

Para determinar el centro óptico, se tienen los triángulos C*oc*, C′*ob*, semejantes por tener iguales los ángulos en *o*, por opuestos al vértice, así como los C y C′ por construccion; luego tendrémos:

$$Cc : Co :: C'b : C'o;$$

de donde resulta

$$Cc - Co : C'b - C'o :: Cc : C'b; \qquad \text{ó}$$

$$oh' : oh :: Cc : C'b:$$

que nos dice, que las *distancias del centro óptico á las superficies de la lente, son proporcionales á los correspondientes rádios de curvatura.*

Si los rádios son iguales, resulta

$$oh = oh',$$

y por tanto el eje óptico se halla en el punto medio de la parte del eje principal interceptada por las caras de la lente.

224. *Focos en las lentes.*—Se llama foco el punto en que van á reunirse los rayos luminosos despues de la refraccion.

Foco principal.—Un rayo de luz *ab* (fig. 128; lám. 9) paralelo al eje AB, que llega á tocar en *b* á la lente, se refracta dentro de ella, siguiendo la direccion *bc*, que se acerca á la normal F*n* en el punto de incidencia *b*. Al llegar á *c* se refractará de nuevo, separándose de la normal *oc* en *c*, y yendo á cortar al eje en un cierto punto F. Todos los rayos *a*, *a' a'' a'''* (figura 129; lám. 9), paralelos al eje, van á reunirse al mismo punto, cuando el arco *mn* no pasa de 10° á 12°. El punto F será el *foco principal* de la lente, y la magnitud F*b* la *distancia focal principal*. En las lentes ordinarias, que son de crown-glass, el foco principal coincide sensiblemente con el centro de curvatura.

Para determinar el foco principal de una lente bi-convexa, basta exponerla á los rayos solares, que pueden considerarse como paralelos, en razon á la gran distancia á que se halla el sol de nosotros, y de manera que el eje principal sea tambien paralelo á ellos, recibiendo los rayos refractados sobre una superficie mate ó deslustrada; despues se acerca ó separa la lente de la superficie, hasta que el círculo que proyecta la luz sea el más brillante y de menor rádio. La distancia que hay entonces entre la lente y la citada superficie es la distancia focal principal. Teóricamente, el foco sería un punto matemático.

Focos conjugados.—Cuando el punto luminoso está en L (fig. 130; lámina 10), en el eje, y más distante de la lente que el foco principal F, el rayo L*m*, forma con la normal F'*n* el ángulo de incidencia L*mn*, mayor que el *amn* formado en el mismo punto *m* de incidencia por la normal y el rayo *am* paralelo al eje. El ángulo de refraccion será tambien mayor (211.—4.ª), y por tanto el rayo refractado irá á cortar al eje en un punto *l*, más distante de la lente que el foco F'. El punto *l* es el foco conjugado del rayo de luz que parte de L. Se comprende que si el rayo luminoso partiese de *l*, la luz seguiría una marcha inversa, y el foco conjugado de *l* sería el punto L.

Esta reciprocidad hace que L y *l* sean llamados *focos conjugados*.

Si el punto L se acerca á la lente, el ángulo de incidencia aumenta, y sucediendo lo mismo al de refraccion, el foco *l* se aleja de la lente. Cuando L llegase á F, los rayos refractados saldrían paralelos, y el foco conjugado se formaría en el infinito.

Foco virtual.—Si L (fig. 131; lám. 10) se acercase más á la lente, los rayos refractados serían divergentes, y no formarian *foco real*; pero sus prolongaciones cortarían al eje en un punto *l*, al cual se llama *foco virtual*.

225. *Ejes secundarios.*—Toda recta que pasa por el centro óptico, sin pasar por los centros de curvatura, es un *eje secundario*. Puesto que pasa por el centro óptico, el rayo emergente será paralelo al incidente (223), y

en razon al pequeño espesor de las lentes, se pueden considerar como prolongacion el uno del otro; es decir, que el eje secundario será rectilíneo, y sólo entonces será verdadera la definicion que acabamos de dar.

Todo cuanto se ha dicho de los focos con relacion á los puntos situados en el eje principal, puede decirse de los ejes secundarios relativamente á los puntos que están fuera de dicho eje.

Así, si un objeto luminoso ó iluminado está en el foco F (fig. 132; lámina 10) de la lente, los rayos que parten de F se refractarán á la salida de la lente paralelamente al eje principal, y los que parten de *a* paralelamente al eje secundario *oa*.

Recíprocamente, si un rayo *mn* (fig 133; lám 10) es paralelo al eje secundario *oa'*, al refractarse irá á cortar á este eje en un punto *a'*.

Tambien existen focos conjugados.

226. **Imágenes de los objetos vistos á través de las lentes.**—La imágen de un punto es el foco de los rayos de luz, que partiendo de él han atravesado la lente. La imágen de un objeto es el conjunto de los focos de sus distintos puntos. Si los focos son reales, la imágen es real; y virtual, si lo son los focos.

Imágen real.—Sea el objeto AB (fig. 134; lám. 10) situado á mayor distancia de la lente que el foco principal F'. Si consideramos tirado el eje secundario A*o*, todo rayo A*c*, emitido del punto A, sufre dos refracciones, una en *c* y otra en *d*, y vá á cortar al eje secundario en un punto *a*. Los demás rayos emitidos de A van á concurrir sensiblemente en el mismo punto; luego *a* es el foco conjugado del punto A (225).

Si se tira el eje secundario B*o*, tendremos del mismo modo, en uno *b* de sus puntos, el foco conjugado del punto B.

Los puntos intermedios de AB tendrán del mismo modo sus focos respectivos entre *a* y *b*. Luego *ab* será el conjunto de ellos, ó la imágen real conjugada del objeto AB.

El ojo de un observador colocado á mayor distancia de la lente que la imágen *ab*, recibirá la impresion de los rayos luminosos emitidos de A y B como si proviniesen de *a* y *b*. Verá, pues, el objeto invertido, situado en *ab*, delante del foco principal F, y de una magnitud muy pequeña con relacion á la que realmente tiene el objeto.

Imágen virtual.—Si el objeto AB (fig. 135; lám. 10), está entre el foco F y la lente, un rayo de luz emitido de A, sufrirá dos refracciones, una en *c* y otra en *d*, y saldrá divergente con relacion al eje secundario *o*A (225). Prolongando el rayo *de* en sentido contrario, irá á cortar al eje en un punto *a*. Los demás rayos procedentes de A irán á parar al mismo punto, y será entonces *a* el foco virtual del punto A. Tirando el eje secundario *o*B, se encontrará del mismo modo que *b* es el foco virtual del punto B. El ojo del observador colocado en *e*, vé el punto A como si estuviese en *a* y en la prolongacion del rayo *de* que le trae su imágen. Del mismo modo verá el B en *b*, y por lo tanto, la imágen *ab* será virtual, recta y amplificada con respecto al objeto AB.

La lente bi-convexa, empleada para obtener las imágenes virtuales amplificadas de los objetos, constituye el sencillo aparato de óptica, conocido con el nombre de *microscopio simple.*

227. *Relacion que existe entre las distancias de un objeto y de su imágen á las caras de una lente bi-convexa, los rádios de curvatura de estas caras, y el índice de refraccion que corresponde á la sustancia de que está formada.*

Sea M (fig. 136; lám. 10) una lente bi-convexa de cristal, y L un objeto luminoso que presenta su imágen en F, y llamemos:

d, á la distancia LA del objeto á la cara BA de la lente,

d', á la FA' de la imágen F á la otra cara de la lente,

R, al rádio de curvatura CA' de la cara A'D de la lente,

R', al C'A que corresponde á la cara AB,

n, al índice de refraccion para la luz que pasa del aire al cristal (213).

El ángulo i, externo al triángulo LBC', dá

$$i = a + e;$$

y el r', por serlo tambien al CDF,

$$r' = c + b;$$

de donde, sumando, resulta

$$i + r' = a + e + c + b \qquad [1].$$

Sabemos tambien (213) que se tiene

$$\frac{\text{sen. } i}{\text{sen. } r} = n; \quad \text{y} \quad \frac{\text{sen. } r'}{\text{sen. } i'} = n;$$

si suponemos que el arco AB es de un pequeño número de grados, en cuyo caso tambien lo serán los i, r, i', r', y por lo tanto, sensiblemente iguales á sus senos, resultará

$$i = rn; \qquad r' = i'n;$$

que sumados, darán

$$i + r' = rn + i'n; \quad \text{ó}$$

$$i + r' = n\,(r + i') \qquad [2];$$

pero tambien tenemos

$$r + i' = 180^\circ - m;$$

$$c + e = 180^\circ - m$$

de las cuales se deduce

$$r + i' = c + e;$$

la ecuacion [2] se convertirá por lo tanto en

$$i + r' = n\,(c + e);$$

y sustituyendo este valor de $i + r'$ en la ecuacion [1] resultara

$$n\,(c + e) = a + e + c + b;$$

de esta ecuacion se deducen las siguientes:

$$n\,(c + e) - (c + e) = a + b;$$

$$(n - 1)\,(c + e) = a + b \qquad [3]$$

Si suponemos ahora que los arcos a, b, c, d, están trazados con el rádio 1, tendremos

$$a : \mathrm{A}s :: 1 : \mathrm{LA};$$

$$c : \mathrm{A'D} :: 1 : \mathrm{CA'};$$

$$e : \mathrm{AB} :: 1 : \mathrm{C'A};$$

$$b : \mathrm{A'}t :: 1 : \mathrm{FA'}$$

Haciendo $\mathrm{A}s = \mathrm{AB}$, y $\mathrm{A'}t = \mathrm{A'D}$, lo que no produce un error sensible, y sustituyendo en el cuarto término de cada proporcion el valor que al principio le hemos asignado, resultará

$$a : \mathrm{AB} :: 1 : d;$$

$$c : \mathrm{A'D} :: 1 : \mathrm{R};$$

$$e : \mathrm{AB} :: 1 : \mathrm{R'};$$

$$b : \mathrm{A'D} :: 1 : d';$$

de las cuales resultan los valores

$$a = \frac{\mathrm{AB}}{d}, \qquad c = \frac{\mathrm{A'D}}{\mathrm{R}}, \qquad e = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{R'}}, \qquad b = \frac{\mathrm{A'D}}{d'};$$

los cuales sustituidos en la ecuacion [3], nos dan

$$(n-1)\left(\frac{A'D}{R}+\frac{AB}{R'}\right)=\frac{AB}{d}+\frac{A'D}{d'}.$$

Suponiendo $AB = A'D$, lo que se acerca tanto más á la verdad, cuanto más cerca del eje se encuentra el punto L, podremos sacar esta cantidad como factor comun de ambos miembros y suprimirla, lo que nos dará

$$(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=\frac{1}{d}+\frac{1}{d'} \qquad [4].$$

Esta es la fórmula general que establece la relacion enunciada

Si hacemos $d=\infty$, d' será la distancia focal principal, y representándola por f la fórmula [4] se convertirá en

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) \qquad [5].$$

228. Comparado *(a)* las fórmulas [4] y [5], resulta

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{d}+\frac{1}{d'} \qquad [6];$$

bajo la cual se considera comunmente la relacion de la distancia focal principal de la lente, con las distancia focales del objeto y de su imágen.

229. Cuando la imágen es virtual, d' cambia de signo; y la fórmula [6] se convierte en

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{d}-\frac{1}{d'} \qquad [7].$$

230. *Aumento de la lente.*—El aumento de la imágen que produce el microscopio simple (226) es tanto mayor, cuanto mayor es la convexidad de la lente, y más cerca del foco principal está el objeto que se observa.

En efecto, los triángulos semejantes oAB, oab (fig. 135; lám. 10), dan sensiblemente

---

(a) Para todos los valores simultáneos de d y d', la suma $\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}$ es constante é igual á $(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$.

$$\frac{ab}{AB} = \frac{d'}{d};$$

pero la razon $\frac{ab}{AB}$ es el aumento de la lente, el cual se mide tambien por la $\frac{d'}{d}$.

Para hallar este valor, quitando denominadores en la ecuacion [7] tendremos

$$dd' = fd' - df;$$

mudando signos, y trasponiendo,

$$fd' - dd' = df;$$

y despues, tendremos sucesivamente

$$d'(f - d) = df;$$

$$\frac{d'}{d} = \frac{f}{f - d} \quad [8],$$

que expresa el aumento de la lente.

A medida que la convexidad de la lente aumenta, f disminuye; y si dividimos por f el segundo miembro de la ecuacion [8], será $\frac{1}{1 - \frac{d}{f}}$; en esta expresion se ve claramente que á medida que f disminuye, $\frac{d}{f}$ aumenta, $1 - \frac{d}{f}$ disminuye y $\frac{1}{1 - \frac{d}{f}}$ aumenta; y por lo tanto $\frac{d'}{d}$ aumenta. Cuando d aumenta, que es cuando el cuerpo AB se acerca al foco F, disminuye el denominador $f - d$ en la ecuacion [8] y por tanto $\frac{f}{f - d}$, ó sea igual $\frac{d'}{d}$ aumenta; todo conforme al enunciado del teorema.

231. **Descomposicion de la luz.—Acromatismo.**—Un rayo de luz solar, se descompone al atravesar los prismas y las lentes, en otros rayos elementales diversamente coloreados; lo cual es debido á su diferente refrangibilidad. Estos rayos rodean las imágenes de los objetos vistos á través de los prismas y de las lentes, de una *irisacion*, que ofusca la percepcion distinta de sus contornos; y para evitar este inconveniente, se emplean en los instrumentos de óptica *lentes acromáticas*; entendiéndose

por *acromatismo* el fenómeno de la refraccion de la luz sin *dispersion*.

Una lente acromática (fig. 137; lám. 10) se compone de dos lentes, la una cóncavo-convexa de *flint-glass*, y la otra bi-convexa de *crown-glass*.

232 **Instrumentos de óptica.—Anteojo astronómico.**—El anteojo astronómico es un instrumento de óptica destinado á producir la imágen perfectamente determinada de un objeto lejano. Se compone de un tubo cilíndrico A (fig. 138; lám. 10) en el cual entra á frotamiento otro tubo B, que lleva una lente convergente *o*, llamada el *ocular* del anteojo. Este segundo tubo, abierto por uno de sus extremos, está cerrado por el otro, por medio de una placa en la cual hay practicado un taladro *a*, por el cual se dirigen las visuales.

Otro tubo C, provisto de otra lente convergente O, que se llama *objetivo*, por hallarse del lado de los objetos que se miran, puede moverse á lo largo del tubo A, para hacer variable la distancia entre las lentes.

El movimiento del tubo C se verifica por el tornillo exterior M, que lleva en el eje un piñon *m*, cuyos dientes engranan con los de una barra dentada *b* unida al tubo C.

233 *Retículo*.—El *retículo*, cuya seccion en sentido del eje del anteojo, está representada en *r*, se compone de una pieza metálica circular *a* (fig. 139; lám. 10) con un taladro concéntrico, en el cual y en la direccion de dos diámetros perpendiculares entre sí, se hallan colocados dos hilos metálicos sumamente delgados, ó bien dos hilos de tela de araña ó filamentos de seda. Estos hilos se llaman *cerdas* ó *hilos del retículo*. Soldado á esta pieza, hay un anillo circular *b* (fig. 140; lám. 10), la cual representa el reverso del retículo, con cuatro tuercas, en las que entran los tornillos *t*, *t'*. Estos apoyan sus cabezas en el tubo del anteojo, atravesándole por ranuras suficientemente grandes para permitirles algun movimiento lateral, y entran en las mencionadas tuercas practicadas en el anillo *b*. Los tornillos *t* (figs. 139 y 140; lám. 10) sirven para que la cerda *mn*, que debe ser vertical cuando el anteojo esté convenientemente colocado, pueda moverse de derecha á izquierda ó al contrario, aflojando uno de los tornillos *t* y apretando el opuesto. Del mismo modo la cerda *rs* puede subir ó bajar por el movimiento de los tornillos *t'*.

Otros retículos constan solo de una pieza circular *a* (fig. 141; lám. 10) en la que están colocados los hilos, y se pone en movimiento por los tornillos que la tocan por sus extremos, girando en tuercas practicadas al efecto en un anillo saliente que forma parte del tubo del anteojo. En estos retículos es preciso, que la pieza *a* esté sujeta de modo que no salga de un plano normal al eje del tubo.

El retículo de la fig. 142 (lám. 10) solo tiene dos tornillos *t*, *t'*, sustituyendo á los tornillos opuestos, dos resortes en espiral *r*, *r'*. Moviendo el tornillo *t* hácia abajo, la pieza de los hilos baja, oprimiendo el resorte *r*, y moviéndole en sentido contrario, el resorte obra elevando dicha pieza. Del mismo modo se obtiene el movimiento lateral por el tornillo *t'* y el resorte *r'*. Los tornillos quedan cubiertos por unos cilindros huecos *c*, que impiden se toque á la cabeza de los tornillos, y por los cuales se introduce la llave, por medio de la cual se les da movimiento. Esta disposicion del retículo, preferible á las anteriormente indicadas, creemos sea debida al Ingeniero español Sr. D. Angel Mayo.

234. *Imágenes de los objetos vistos á través de un anteojo astronómico.* — Sea AB (fig. 143; lám. 10) un objeto colocado á gran distancia del punto de observacion. Los rayos que parten de este objeto y van á parar al objetivo L, producen (226) una imágen *ab* real, invertida, situada más allá que el foco F de la lente L, y tanto más próxima á este foco, cuanto mayor sea la distancia á que se halla el objeto. Para un astro, la imágen se formaría en el foco F (224). Colocada la imágen *ab* entre el ocular L′ y su foco F′, los rayos de luz que esta imágen emite, y que no son otra cosa que la prolongacion de los rayos que la han formado, atraviesan el ocular L′, sufren una nueva refraccion, y producen la imágen virtual *a′b′* (226) amplificada, recta con respecto á *ab*, é invertida con relacion al objeto AB. Este aparecerá pues invertido, si se le observa desde *m*.

235. *Ocular.* —Aun cuando para la más sencilla explicacion de la formacion de las imágenes en los anteojos, hemos supuesto que el ocular era una sola lente L′, esto no se verifica nunca. Una lente así formada, tendría una *aberracion de esfericidad* muy considerable. El fenómeno conocido con este nombre, consiste en que los rayos emitidos de un punto y refractados en la lente, no concurren en realidad en un mismo punto como teóricamente hemos visto; sino que se cortan en puntos próximos al determinado teóricamente, y forman en el espacio por sus intersecciones, unas superficies brillantes llamadas *cáusticas por refraccion*. La imágen del objeto se presenta entonces confusa. Este fenómeno es sensible cuando el arco *am* (fig. 144; lám. 10) pasa de 10 ó 12°.

Se evita en gran parte este inconveniente, combinando dos lentes de curvaturas convenientes. Así, el ocular que acompaña á casi todos los anteojos usados en los instrumentas topográficos, se compone de dos lentes plano-convexas (fig. 145; lám. 10).

Este ocular es conocido con el nombre de *ocular de Ramsden*.

236. **Anteojo terrestre.** —El anteojo terrestre tiene además del ocular y el objetivo, dos lentes convergentes, cuyo objeto es presentar las imágenes rectas con relacion á los objetos que se miran á través del anteojo.

Los rayos de luz que parten del objeto AB (fig. 146; lám. 10), despues de atravesar el objetivo L y formar cerca de su foco la imágen invertida *ab*, llegan á la lente M, cuyo foco principal está precisamente en F. Siguiendo entonces la marcha de uno de ellos, A*a* por ejemplo, observaremos que al salir de la lente M seguirá una direccion paralela al eje secundario O*a* (225). Sucediendo lo mismo á los demás rayos, vendrán á concurrir en un punto F′, al cual corresponde el foco de otra lente N. El rayo F′*h* paralelo al eje secundario *o′a′*, irá á cortar á este eje, así como los demás rayos que parten de A, en uno de sus puntos *a′*, en el que se producirá una imágen a' del punto A (226). Los rayos que parten de B irán del mismo modo á concurrir en b' y se formará la imágen directa $a'b'$. Colocado el ocular L' de modo que $a'b'$ se forme entre él y su foco principal, es tendrá la imágen $a''b''$ amplificada, y directa respecto del objeto AB.

Las lentes M y N, que solo sirven para hacer directas las imágenes, están fijas en un tubo de cobre, á una distancia constante, é igual á la suma de sus distancias focales principales.

237. Expuesto cuanto llevamos dicho, un anteojo completo como los que ordinariamente se usan, consta de un tubo cilíndrico A (figura 147; lámina 10), en uno de cuyos extremos está unida á rosca la pieza B del objetivo, que armada solo tiene visible el filete *b*. B' presenta el frente de esta pieza, y B'' la seccion normal á su frente. En los anteojos terrestres están fijas además las lentes de que hemos hecho mérito (236).

Dos resaltos *r*, están destinados á fijar el anteojo en unos soportes, con objeto de sujetarle y evitar todo movimiento en sentido de la longitud de su eje.

Un segundo tubo C, interior al A, puede moverse á lo largo de éste, por medio de los tornillos T, que forman una misma pieza con un piñon cubierto por la pieza *m*, y cuyos dientes engranan con los de la rueda dentada *s* del tubo C. El retículo *t* se halla tambien en este tubo.

La pieza O del ocular entra á frotamiento en el tubo C, y en algunos anteojos tiene tambien su tornillo y rueda dentada como en la union de los tubos A y C.

Tambien en el interior de los tubos hay unos anillos ó diafragmas, cuyos planos son normales al eje del tubo, situados en la distancia focal de las lentes, los cuales detienen los rayos excesivamente oblícuos, evitando así en parte la aberracion de esfericidad. El interior del tubo está recubierto de un barniz negro y mate, con objeto de que sean absorbidos los rayos de luz que llegan á las paredes.

Otra pieza D puede adaptarse á frotamiento al extremo *b* del tubo del anteojo, y se usa cuando los rayos del sol vienen á herir el objetivo; por que entonces la luz solar, más viva que la reflejada por el objeto, impide que éste se vea, y molesta la vista del observador.

En los instrumentos topográficos se usan anteojos de las dos clases que hemos descrito. El anteojo astronómico tiene el inconveniente de presentar los objetos invertidos, lo que no influye en la exactitud de las operaciones, y basta poco tiempo para habituarse á su uso: tienen por otra parte la gran ventaja de presentar más claras las imágenes de los objetos, por el menor número de lentes que la luz tiene que atravesar en ellos.

238. *Eje óptico del anteojo.—Visual.—Eje óptico* del anteojo es la recta que une el punto luminoso A (fig. 148; lám. 11), el centro óptico *o* del objetivo, y la imágen *a*. Esta recta, segun los principios enunciados, no sufre refraccion al atravesar la lente. El eje óptico es la línea que se elige para dirigir las visuales. Como *o* es un punto matemático que no está

marcado, la visual se determina por el puntó A y su imágen *a*, con la cual se hace coincidir el cruzamiento de los hilos del retículo. El punto A se llama punto de mira.

Para asegurarse de que el cruzamiento de los hilos está en el mismo plano normal al eje de figura del anteojo en que se encuentra el punto *a*, se separa la vista del centro del taladro del ocular hácia los bordes de éste, cuando lo permite su pequeño diámetro; y si el cruzamiento coincide con el mismo punto de la imágen en todas las posiciones, se hallarán ambos en el mismo plano; si no, estarán en planos diferentes. En efecto, sea T (fig. 149; lám. 11) el tubo del ocular, R el retículo, *c* el cruzamiento de los hilos, *ab* la imágen, y *o*, *o'*, *o''*, las posiciones del ojo del observador: si el plano R no coincide con el de la imágen *ab*, la visual *o'c* irá á cortar á ésta en un punto *h*, y la *o''c* en otro distinto *h'*; lo que no se verificaría si el plano R coincidiese con la imágen. Entonces el punto *c* aparecería siempre coincidiendo con un mismo punto de esta imágen.

239. Para ver claramente un objeto por el intermedio de un anteojo, y hacer que la imágen de un punto del mismo objeto coincida con el cruzamiento de las cerdas del retículo, es preciso que se verifiquen las condiciones siguientes:

1.ª Que la distancia entre el ocular y el objetivo sea tal, que la imágen del objeto se forme á la distancia de la vision distinta; para lo cual se puede hacer variar convenientemente la distancia entre dichas lentes por el tornillo que pone en movimiento el objetivo (232) ó el ocular (237).

2.ª Que la imágen del objeto se forme en el plano del retículo (238). Esta circunstancia depende de la distancia á que este plano se halla del ocular, la cual puede hacerse variar por el movimiento del pequeño tubo del ocular dentro de aquel en que se encuentra situado el retículo (237).

Para conseguir á la vez estas circunstancias, se empieza por dirigir el anteojo á un objeto, y mover el tornillo T (fig. 147; lám. 10) hasta conseguir ver con toda claridad la imágen del objeto, y entonces se observa si las cerdas del retículo se ven asimismo con toda claridad; si no, se mueve el tubo del ocular, hasta que se logre ver distintamente las cerdas, y que al mismo tiempo la imágen perfectamente formada, esté en el plano del retículo (238); lo que se consigue al cabo de algunos tanteos, disponiendo convenientemente la distancia entre las lentes y el *tiro del ocular*. Una vez dispuesto éste como hemos dicho, no debe alterarsse en las observaciones sucesivas para un mismo observador; pero sí será preciso hacer variable la distancia entre las lentes, para observar los objetos desigualmente distantes del punto de observacion.

240. **Verificacion y correccion de los anteojos**.—La verificacion de un anteojo consiste, en asegurarse de que el cruzamiento de las cerdas del retículo está en el eje óptico del anteojo. Este eje, coincide sensiblemente con el eje de rotacion de la superficie cilíndrica, descrita por la revolucion de cada una de las generatrices del tubo del anteojo dentro de los collares ó abrazaderas en que está colocado, cuando forma parte de los

instrumentos topográficos; y de esta circunstancia nos valemos para conseguir que el cruzamiento indicado de las cerdas, se halle en el eje óptico del anteojo. Sea BA (fig. 150; lám. 11) este eje óptico, y supongamos que el cruzamiento de las cerdas está en un punto *a* de este eje, siendo *a* la imágen de otro distante A, situado tambien en el eje. Girando el anteojo entre sus collares, giraría como hemos dicho alrededor del eje óptico, en virtud de la suposicion hecha de que éste coincide con el de revolucion del anteojo. Si suponemos además que el objetivo se mueve, el centro óptico ocupará distintas posiciones, todas como la *o'*, situadas en el eje AB: y girando el instrumento alrededor de esta recta, el cruzamiento de las cerdas no saldrá del punto *a*, que está en el mismo eje, durante una revolucion completa ó un número cualquiera de revoluciones del anteojo dentro de los collares, y la visual quedará perfectamente determinada por el cruzamiento de las cerdas del retículo y el centro del ocular, cualquiera que sea la distancia entre estos puntos.

No se verifica lo mismo cuando el cruzamiento de las cerdas está fuera del eje de rotacion del anteojo dentro de sus collares. En efecto, si ocupa la posicion *a* (fig. 151; lám. 11) fuera del eje, y el objetivo se halla en la posicion *o*, la visual será entonces la línea *ao*, en cuya prolongacion se hallará un punto A', cuya imágen estará en *a* formada en el eje secundario A'*a* (226); pero si el objetivo pasa á la posicion *o'*, el centro óptico se hallará tambien en el eje principal BA, puesto que en su movimiento no abandona esta línea, que es el eje de figura ó de rotacion del anteojo, y la visual será entonces la *ao'*, coincidiendo con *a* la imágen de otro punto A''. Como para observar distintos objetos, varía con su distancia al punto de observacion la posicion del objetivo, se deduce que asimismo se verifica con la direccion de la visual, y ésta por lo tanto es indeterminada.

En este caso, si hacemos girar el anteojo alrededor del eje óptico BA (fig. 152; lám. 11), la imágen *a* del punto A', formada por el eje secundario *a*A' permanecerá fija, y el cruzamiento de las cerdas describirá una circunferencia, cuyo rádio será la distancia *ac*; pareciéndole al observador que dicho cruzamiento describe una circunferencia cuyo rádio es A'A, distancia de A' al eje óptico BA. La recta *ao*, describirá por lo tanto las dos ramas de una superficie cónica, cuyo vértice estará en *o*, y cuyas bases tendrán por diámetros las rectas *aa'*, A'A'', y se comprende que llevando el cruzamiento de las cerdas al centro *c* de la base *aa'*, la visual *co* estará en las mismas condiciones que en la fig. 150 (lám. 11), y quedará completamente determinada.

241. Para ver como puede conseguirse que el cruzamiento de las cerdas esté en el eje de rotacion, supongamos que uno de los hilos *mm* (figura 153; lám. 11) del retículo, no pase por este centro *o*, interseccion de los diámetros imaginarios *ab*, *cd*, que suponemos tambien perpendiculares entre sí. Hagamos que dicho hilo cubra exactamente á una recta cualquiera *rs*. Si hacemos girar al anteojo entre sus collares, el punto *o* permanecerá fijo, y al fin de una semirevolucion exacta, el punto *x* vendrá

á parar á x' (240), y por tanto ox' quedará en prolongacion de ox, y mm ocupará la posicion $m'm'$ paralela á la anterior (Geom. Teor. 6); entonces la recta $xx' = 2ox$ marcará el doble de la distancia de la cuerda mm al diámetro ab. Haciendo pues que aquella recorra la mitad ox' de dicha distancia, vendrá $m'm'$ á ocupar la posicion del diámetro ab del círculo. Del mismo modo, haciendo coincidir el otro hilo con la misma recta rs, puede llevársele á ocupar la posicion del diámetro imaginario cd. Entonces, el punto de interseccion de los hilos estará en el centro de la seccion del tubo, y por consiguiente en el eje de rotacion del anteojo entre sus collares, y se habrá obtenido la coincidencia de este eje con el eje óptico (240). Así, durante una revolucion completa ó un número cualquiera de revoluciones del anteojo, el cruzamiento de las cerdas cubrirá un mismo punto de mira.

242. En virtud de lo que acabamos de exponer, podemos establecer la siguiente regla práctica para la verificacion y correccion del anteojo.

Se dirige la visual á un punto lejano, y se vé si durante una revolucion completa del anteojo entre sus collares, el cruzamiento de las cerdas cubre exactamente á dicho punto. Entonces la visual coincidirá con el eje óptico. Si esto no se verificase, sería necesario rectificar el anteojo.

Para la rectificacion, se dirige el anteojo á una recta bien determinada, como una junta ó arista de sillería, ó mejor á una línea rs (fig. 153; lám. 11) *marcada sobre un tablero, que se coloca á bastante distancia, y se hace coincidir con ella una de las cerdas* mm *del retículo.*

Se da una semirevolucion exacta al anteojo entre sus collares, lo que se habrá conseguido, cuando la segunda posicion del hilo coincida exactamente con la primera, en cuyo caso el hilo será un diámetro y estará corregido; ó cuando aquella le sea paralela: si esto último se verifica, se la hace mover, valiéndose de los tornillos del retículo (233); *hasta que ocupe otra posicion equidistante de las dos primeras. Se corrige del mismo modo el otro hilo, y para cerciorarse de que la rectificacion está bien hecha, se observa de nuevo, si durante una revolucion completa del anteojo, el cruzamiento de las cerdas cubre á un mismo punto cualquiera.*

Los dos hilos pueden corregirse valiéndose de una misma recta, y esta puede tener una posicion cualquiera; ó bien de una recta distinta para cada hilo, por ejemplo, el horizontal por el dintel de una puerta ó ventana, que se halle bastante distante, y el vertical por medio de una plomada.

Para llevar uno de los hilos del retículo á la posicion en la cual es un diámetro, es preciso conservar la idea de la distancia que debe recorrer, toda vez que en general la segunda posicion no está marcada; lo cual hace que sólo se consiga la correccion despues de varios tanteos. Se consigue disminuir su número, y casi siempre se obtiene de una vez la correccion, marcando sobre una regla AB (fig. 154; lám. 11) las dos posiciones mm, nn opuestas del hilo, y trazando sobre la misma regla la posicion media ab.

CAPITULO V.

De los instrumentos en general y de sus partes principales.

Preliminares.—Anteojos.—Alidadas.—Alidadas de metal con pínulas.—Alidadas de metal con anteojo.—Alidadas de madera.—Planos de los instrumentos angulares.—Determinacion gráfica de los ángulos.—Limbos.—Medida de los ángulos simples.—Verificaciones y rectificaciones de los limbos.—Medida de los ángulos múltiplos ó repeticion de los ángulos.—Nonius ó Vernier.—Nonius recto.—Nonius circular.—Apreciacion de los nonius en general.—Tornillos.—Aparatos de union de los instrumentos con sus piés.—Cubos ó mangos huecos.—Rodillas.—Plataformas.—Piés de los instrumentos.—Bastones ó chuzos.—Trípodes.

243. **Preliminares.**—Los instrumentos topográficos empleados en la planimetría, son unos aparatos destinados á la determinacion de las longitudes, y de los ángulos que forman entre sí las rectas que unen puntos determinados del terreno.

Para la medida de la recta que une dos de estos puntos, se emplea otra magnitud lineal determinada, que se elige por unidad. Cuando esta puede aplicarse sobre dicha recta en el sentido de toda su longitud, la medida se llama *directa*, y ya se sabe que la relacion entre la unidad y la recta que se trata de medir, da á conocer la medida que se busca. Existen tambien instrumentos, conocidos con el nombre general de *telémetros*, palabra griega, que significa *medida á lo lejos*, por medio de los cuales pueden obtenerse las medidas de las líneas de una manera *indirecta*, es decir, sin la aplicacion directa de una unidad lineal cualquiera.

Los instrumentos que se emplean para hallar *gráficamente* los valores de los ángulos, se conocen con el nombre de *goniógrafos*; y se llaman *goniómetros* los que dan dichos valores expresados en grados y sus divisiones.

Unos instrumentos angulares dan los valores de los ángulos reducidos á su proyeccion horizontal, y otros los dan en el plano de los objetos. En este último caso, será preciso reducirlos al horizonte (162).

244. Antes de dar á conocer por completo los instrumentos, creemos conveniente ocuparnos del estudio de algunas de las partes principales que entran en su composicion, y que siendo comunes á muchos de ellos, simplifican extraordinariamente la descripcion de un instrumento cualquiera; reducida entonces casi siempre, á la disposicion particular y á la relacion que guardan entre sí las distintas partes que le forman, y que ya son conocidas elementalmente.

245. **Anteojos.**—Los anteojos que hemos descrito (232) y (236) entran á formar parte de los instrumentos topográficos de más importancia, y tienen por objeto el que se puedan dirigir visuales á puntos distantes, los cuales no serian claramente perceptibles á simple vista. Unas veces los anteojos están fijos, y otras tienen movimiento alrededor del eje óptico (240) dentro de los collares ó abrazaderas en que van colocados; pudiendo tambien girar en un plano perpendicular á un eje dado, el cual puede tener varias posiciones. Si este eje es horizontal, por ejemplo, el eje óptico del anteojo se moverá en un plano vertical, y en un plano horizontal cuando el eje sea vertical.

246. **Alidadas**.—Colocado un instrumento angular cualquiera en el vértice de un ángulo formado por las rectas que unen este punto con otros dos dados del terreno, y tratándose de determinar el valor del mismo ángulo, se concibe la necesidad de que los instrumentos estén provistos de unas piezas rectas, que puedan formar entre sí un ángulo de la misma magnitud que el del terreno, y las cuales deben servir al mismo tiempo para distinguir y fijar con claridad los extremos de los lados que forman el ángulo á que nos referimos.

Se concibe tambien, que dichas piezas deberán ir colocadas en los instrumentos, sobre planos á los cuales se les pueda hacer tomar varias posiciones para que puedan coincidir, cuando sea necesario, con el que determinan los lados del ángulo del terreno, á fin de que estos insistan sobre el plano del instrumento. Nos ocuparemos ahora de las piezas que satisfacen á estas condiciones, y que se designan con el nombre de *alidadas*.

El principio elemental en que se fundan consiste, en suponer que dos líneas rectas de igual longitud AB y CD (fig. 155; lám. 11) se hallan unidas por su punto medio O, de modo que si suponemos que la CD se halla coincidiendo con la AB, y empieza despues á separarse de ella, girando alrededor del punto O, las rectas AO y OC podrán ir formando entre sí ángulos m de todas magnitudes.

Si concebimos que las rectas AB y CD (fig. 156; lám. 11) están trazadas sobre reglas de madera ó metal, provistas de los medios necesarios para que podamos dirigir visuales á los objetos, estas reglas así dispuestas, serán verdaderas alidadas, puesto que satisfacen á las condiciones que hemos indicado; y podrán formar parte de los instrumentos, colocándolas de modo que dichas líneas AB y CD formen los diferentes ángulos; por cuya razon se llama á estas rectas *líneas de fé ó de colimacion*.

Para tomar un ángulo MON, se puede suponer que la línea de fé AO coincide con uno de los lados OM, estando el punto O en el vértice, y que permanece fija, mientras que la CO, la cual puede suponerse que coincide tambien en su primera posicion con la MO, se mueve en el plano de las OM y ON, alrededor del punto O, hasta que toma la direccion de esta última. Fácilmente se ve que se tendrá en *m* el ángulo que se trataba de conocer.

La AB se llama entonces *alidada fija*, y la CD *alidada giratoria* alrededor del punto fijo O.

Una sola alidada puede bastar para la medida del ángulo *m*, haciéndola tomar las dos posiciones sucesivas AB, CD (fig. 156; lám. 11) en las cuales coincide con los lados OM, y ON del ángulo *m*. Esta *alidada* se llama entonces *giratoria alrededor de un punto cualquiera de su línea de fé*, porque puede tomarse como centro cualquiera de ellos, con tal que se apoye en el vértice O del ángulo que se mide.

Llamaremos por lo tanto *alidadas*, á *las partes de los instrumentos topográficos que tienen por objeto, hallar el valor del ángulo que forman entre sí las rectas que unen un punto dado cualquiera, con otros dos tambien determinados*.

247. *Diferentes clases de alidadas*.—Las alidadas más generalmente usadas, son de metal con pínulas ó anteojo, y de madera. Todas ellas pueden dividirse además en fijas, giratorias alrededor de su punto céntrico ó al de un punto cualquiera de su línea de fé. Nos ocuparemos sucesivamente de estas diferentes clases de alidadas.

248. **Alidadas de metal con pínulas**.—*Alidada giratoria alrededor de un punto cualquiera de la línea de fé*.—Se compone de una regla de metal AB (fig. 157; lám. 11), ordinariamente de $0^m,55$ de longitud, en cuyos extremos se elevan perpendicularmente á ella, otras dos reglas P, P′, cuya altura suele ser $0^m,2$, llamadas *pínulas*, las cuales se hallan unidas á la AB por las charnelas *c* y *c′*. Unas clavijas *t* y *t′* sirven para mantener las pínulas en la posicion perpendicular á la regla AB, oprimiendo los rebordes *a*, *a′* en que terminan las pínulas, los cuales son perpendiculares á las mismas y forman cuerpo con ellas. Dando un cuarto de revolucion á las clavijas, dejan de oprimir los rebordes respectivos; y entonces las pínulas pueden unirse á la regla AB, doblándolas por las charnelas *c*, *c′*. En esta disposicion se prestan á encerrarse cómodamente en una caja rectangular, lo que facilita el trasporte de la alidada.

Las pínulas tienen por objeto determinar la direccion de las visuales que deben tirarse á los extremos de los lados de los ángulos que se han de medir; para lo cual, cada una de ellas presenta una hendidura longitudinal bastante estrecha, *e*, *e′* y un rectángulo vaciado *r*, *r′* y dividido en dos partes iguales por una cerda, la cual se halla en prolongacion de la hendidura practicada en la misma pínula, de manera que ambas forman una misma recta

El rectángulo *r* de una de las pínulas corresponde á la hendidura *e'* de la otra, y el *r'* de esta á la hendidura *e* de la primera.

Para dirigir las visuales se toma siempre como ocular la hendidura de la pínula que se halla del lado del observador, y como objetivo la cerda que se le opone en la otra pínula.

Las pínulas deben tener bastante altura para distinguir los puntos muy elevados ó muy deprimidos con respecto al plano de la regla. Esta debe ser más estrecha en la parte *mn*, hácia la cual presenta un canto rebajado, con objeto de trazar cómodamente por ella líneas de lápiz sobre el plano en que la alidada debe insistir, cuando se hace uso de ella para la medida de los ángulos.

La recta determinada por la hendidura y la cerda de cada una de las pínulas debe ser perpendicular al plano de la regla. De aquí se deduce (Geom. Teor. 122) que ambas son paralelas y determinan un plano, perpendicular tambien al de la regla (Geom. Teor. 141), llamado *plano de colimacion*, el cual debe contener á la recta *mn*. Todas estas circunstancias han de concurrir en una alidada bien construida.

El canto rebajado de la regla suele tener grabada una escala, y á muchas alidadas acompaña un nivel de aire (69) fijo á la regla AB para que se la pueda dar la posicion horizontal.

249. *Usos*.—Supongamos la alidada AB (fig. 158; lám. 11) colocada sobre un plano horizontal Q, y tratemos de medir el ángulo MON que forman las rectas OM, ON, tiradas desde el punto O á los M y N, que suponemos en la prolongacion del plano horizontal Q. Si fijamos el vértice O del ángulo MON, y colocamos la alidada AB de manera que apoyándose en O el canto de la regla, la visual tirada por la hendidura de la pínula *cd* y la cerda de la *ab*, vaya á parar al punto M, el canto de la regla se hallará precisamente en la direccion del lado OM del ángulo que tratamos de medir.

En efecto, el plano de las rectas *ab* y *cd* contiene á la visual y al punto M que forma parte de ella, así como al canto de la regla (248) y á las verticales OP y *v* de los puntos O y M.

Haciendo despues que la alidada ocupe la posicion A'B', con iguales condiciones que en la anterior, el plano de las *a'b'* y *c'd'* contendrá del mismo modo á la línea de fé y á las verticales OP y *v'* de los puntos O y N.

Entonces la OP, interseccion de dos planos perpendiculares al Q, será tambien perpendicular á este plano y á las rectas O*b* y O*b'* que pasan por su pié, y como el plano Q es horizontal, la OP será vertical (91), y el ángulo *b*O*b'*, el ángulo correspondiente al diedro MOPN de los planos *cd*M, *c'd'*N; esto es, el ángulo que se trata de determinar (151).

250. Si los puntos M y N no estuviesen en la prolongacion del plano

Q, la visual dirigida por *cd* y *ab* al M determinaría del mismo modo un plano vertical, que tendría tambien por traza sobre el plano Q la misma recta O*b*; y siendo O*b*′ la traza sobre el mismo plano del vertical determinado por *a′b′* y *c′d′*, que contiene al punto N, resultaría como antes que *b*O*b*′ sería el ángulo plano correspondiente al diedro que forman los dos planos verticales, y por tanto el de los objetos, reducido á su proyeccion horizontal. En ambos casos este ángulo se designa con el nombre de *ángulo azimutal*.

251. El plano Q puede disponerse verticalmente, en cuyo caso las líneas determinadas por las cerdas y las hendiduras de las pínulas serán horizontales (102). Si en esta posicion disponemos la alidada, de modo que la línea de fé coincida con la horizontal O*m* (fig. 159; lám. 11) del punto O en el plano, y la visual dirigida por las pínulas va á parar á un punto M, haciendo girar despues á la alidada hasta que la visual vaya á parar á otro punto N, el ángulo MON, que la visual ON forma con la horizontal OM, determinado como hemos visto (249 y 250), se llama *ángulo de elevacion ó altura*, por hallarse el punto N sobre la horizontal.

Si de un modo análogo medimos el ángulo MOP, que forma con la misma horizontal la visual tirada al punto inferior P, el ángulo MOP se llama *ángulo de depresion*.

El ángulo ZON, que forma la visual ON con la vertical ZO, y que es complemento del ángulo de elevacion MON, se llama *ángulo zenital*.

Si quisiéramos referir la direccion de la visual OP á la vertical OZ, la determinaríamos por el ángulo ZOP, cuyo exceso sobre el ángulo ZOM es el ángulo de depresion MOP.

Observaremos que para referir á la vertical un ángulo de elevacion MON, basta restarle de 90°, y resultará el ZON; y si el ángulo es el de depresion MOP, se deben añadir 90° á su valor, con lo cual se obtendrá el ZOP.

252. Si cuando los lados del ángulo no tienen las posiciones indicadas, movemos el plano sobre que insiste la alidada, hasta tanto que los extremos de los lados de dicho ángulo, se hallen en la prolongacion del mismo plano, y empleamos un procedimiento análogo á los que acabamos de indicar para su medida, el ángulo resultará determinado en el plano de los objetos.

253. *Verificaciones y correcciones.—Primera.*—La primera verificacion que debe hacerse con la alidada, consiste en averiguar si el canto de la regla es una línea recta (Geom. 33).

Correccion.—Si la enunciada circunstancia no se verifica, debe desecharse la alidada por inútil para trabajos que exijan alguna exactitud.

Segunda verificacion.—Que las cerdas sean perfectamente verticales cuando la regla AB (fig. 157; lám. 11) es horizontal. Se coloca la alidada sobre un plano horizontal, y dirigiendo una visual por una de las hendiduras á una plomada en su posicion de equilibrio, se observa si la cerda de la pínula opuesta cubre en toda su extension al cordon de la plomada.

Invirtiendo despues la alidada, se dirige la visual por la hendidura á la misma plomada, y se observa si la cerda opuesta coincide tambien con el mismo cordon, en cuyo caso las cerdas serán verticales.

Correccion.—Si alguna de las cerdas, ó ambas á la vez, no satisfacen á la condicion que acabamos de enunciar, deberá desecharse tambien la alidada.

Tercera verificacion.—Que el plano de colimacion (248) tenga por traza sobre el plano de la regla, la línea de fé determinada por el canto de la misma. Se dirige la visual desde *v* (fig. 160; lám. 11) á un punto lejano *p*, ó á una plomada ó jalon colocado verticalmente, y se traza una línea de lápiz *mn* por *el canto de la regla*, sobre el plano horizontal en que insiste la alidada *ab*: se dá despues una semirevolucion á la alidada, de modo que cada uno de sus extremos pase á ocupar el lugar que correspondía al otro en la primera posicion, haciendo que en esta última *a' b'*, se ajuste la línea de fé á la recta *mn* trazada de lápiz. Si en esta segunda posicion se dirige una nueva visual desde *v*, y la cerda de la pínula *a'* cubre exactamente al punto ó á la vertical que antes, ambos planos de colimacion contendrán al objeto *p*, y tendrán comunes las verticales de los puntos *m* y *n*: luego serán un solo plano, cuya traza sobre aquel en que insiste la alidada será la línea de fé ó de colimacion *mn*.

Correccion.—Si las pínulas tuviesen movimiento lateral, podría corregirse la alidada por tanteos, moviendo aquellas en la cantidad que fuese necesario, y repitiendo la verificacion enunciada; pero las alidadas que se usan no presentan esta disposicion, y por otra parte el *error de colimacion* no influye en la medida de los ángulos.

En efecto, sea AB (fig. 161; lám. 11) la direccion de la línea de fé de la alidada, y AC la traza del plano de colimacion; el ángulo *e* que estas líneas forman será el error de colimacion. Al dirigir la visual á un objeto situado en el plano vertical que tiene por traza la línea AC′, la línea de fé de la alidada ocupará la posicion AB′. Entonces el ángulo BAB′ trazado sobre el plano, será igual al CAC′ de los planos de colimacion; pues el primero se compone del ángulo *m* y el error *e′* de colimacion, y el segundo del mismo ángulo *m* y el ángulo de error *e*, igual al *e′*, pues se conserva invariable la separacion del canto de la regla y la traza del plano de colimacion.

Es preciso tener presente, que para hacer que así suceda, conviene señalar una de las pínulas, á fin de que sirva constantemente de ocular; el error de colimacion se comete entonces en el mismo sentido.

254. Cuando la alidada está afectada del error de colimacion, las líneas trazadas con lápiz guardan entre sí, como hemos visto, la misma posicion relativa que los planos de colimacion, pero no la misma posicion absoluta; y cuando se determinan por medio de los ángulos medidos con ella, las direcciones de varias rectas del terreno, se halla la posicion absoluta de estas rectas por medio de la orientacion del plano (197).

255. *Alidada de metal con pínulas, giratoria alrededor de su punto cén-*

trico.—Esta alidada está sujeta á girar siempre alrededor de un punto, que es el punto medio de la línea de fé, y el cual se hace que coincida con el vértice del ángulo que se trata de medir. En esta alidada, la línea de fé, que divide á la regla en dos partes iguales en sentido de su longitud, se señala con un *cero;* y cuando hablemos en lo sucesivo del cero de la alidada, se entenderá que nos referimos á la línea de fé.

256. *Alidada fija.*—La regla de esta alidada forma parte de un plano del instrumento en que se encuentra, y el plano de colimacion tiene por traza sobre el primero, una línea determinada de éste, la cual será un diámetro cuando el plano sea circular. La alidada fija se destina por lo regular, á fijar la direccion del primer lado del ángulo que se quiere medir. La del segundo lado se obtiene por medio de una alidada giratoria alrededor de su punto céntrico. Combinadas así estas alidadas, sus planos de colimacion deben ser uno mismo, cuando la línea de fé de la segunda coincida exactamente con la de la primera; lo cual se verificará, si coincidiendo dichas líneas, se encuentra una posicion desde la cual aparecen cubiertas á la vez todas las cerdas como si fuesen una sola.

257. **Alidadas de metal con anteojo.**—Estas alidadas pueden tener el anteojo fijo, ó movible en un plano vertical, y en ambos casos la regla puede ser fija, giratoria alrededor de su punto céntrico, ó al de un punto cualquiera de su línea de fé.

258. *Alidada de anteojo movible, giratoria alrededor de un punto cualquiera de su línea de fé.*—Se compone de una regla (AB, A'B') (figura 162; lámina 11) como la alidada de pínulas (248), y un anteojo (*om*, *o'm''*) abrazado por un collar (*c*, *c'*, *c''*); dentro del cual puede moverse aquel alrededor de su eje óptico. Tambien puede el anteojo sacarse del collar, el cual está dividido en dos partes, que pueden separarse, girando alrededor de una charnela *b''*, cuando se sacan las clavijas (*a*, *a'*, *a''*), y volverlo á colocar invertido, de manera que el ocular vaya á ocupar el lugar que antes correspondía al objetivo y al contrario. Cuando se unen ambas mitades del collar por medio de las clavijas, solo puede darse al anteojo el movimiento que hemos indicado alrededor de su eje óptico.

Al collar está invariablemente unido un eje horizontal (*t*, *t''*), el cual debe ser á la vez perpendicular á la direccion del canto de la regla, y al eje óptico del anteojo. El eje horizontal (*t*, *t''*), gira dentro del collar ó anillo (*n*, *n''*) en que termina el soporte cilíndrico (*s*, *s'*, *s''*) elevado perpendicularmente á la regla de la alidada, pudiéndose de este modo hacer girar tambien al anteojo en sentido vertical.

Al girar el anteojo alrededor del eje horizontal (*t*, *t''*), el eje óptico del anteojo describe un plano vertical, cuya traza sobre el plano de la regla, debe ser la línea de fé de la alidada.

259. Observaremos que la figura 162 (lám. 11), representa la alidada que hemos descrito, por sus proyecciones sobre dos planos, y la seccion causada por un plano perpendicular á la direccion de la regla y que pasa por el eje del soporte vertical.

Igual sistema de representacion emplearemos para los instrumentos ó algunas de sus partes principales, siempre que lo creamos conducente á su más clara inteligencia. Algunas veces, sin embargo, sustituiremos á la seccion, otra proyeccion del aparato sobre un plano vertical perpendicular á los dos primeros.

Debemos advertir además, que las mismas letras diferentemente acentuadas en cada una de las proyecciones, representan una misma parte del aparato que se describe; dejando sin acento las letras de la proyeccion horizontal, escribiendo con un solo acento las de la vertical, y con dos las del corte vertical ó tercera proyeccion.

Unas veces pondremos una sola proyeccion, ya la vertical como en la fig. 28 (lám. 2), ya la horizontal como el anteojo de la 147 (lám. 10), ó bien la perspectiva como en las figs. 24 (lám. 2) y 157 (lám 11). Otras añadiremos á la proyeccion ó proyecciones, la seccion del aparato, como hemos hecho en la fig. 138 (lám. 10), ó algunos detalles, como en la ya citada 147 (lám. 10), considerada en su totalidad.

Tambien añadiremos la figura en perspectiva á las proyecciones que representen el aparato que se describa, cuando creamos de esta manera completar la idea que de él debemos formarnos; teniendo siempre en cuenta su importancia, para elegir el sistema de representacion más conveniente.

260. *Usos.*—La alidada de que nos ocupamos se emplea del mismo modo que la de pínulas (249) para la medida de los ángulos; siendo el plano de colimacion el que describe el eje óptico del anteojo alrededor del eje horizontal.

La circunstancia de poderse mover el anteojo en sentido vertical, facilita la medida de los ángulos azimutales (250); pues permite ver fácilmente puntos muy elevados ó muy deprimidos con respecto al plano de la regla; así como tambien facilita la de los ángulos de altura y depresion, y los zenitales.

261. *Verificaciones y correcciones. Primera.*—Que el canto de la regla que se toma como línea de fé, sea una línea recta (Geom. 33).

262. *Segunda verificacion.*—Que el eje óptico sea perpendicular al de rotacion, para que aquel describa un plano, y no una superficie cónica.

Sea ABCD (fig. 163; lám 11) la seccion causada en el tubo del anteojo por el plano que determinan el eje óptico *ab* del mismo, y el GF de rotacion. Supongamos dirigida una visual al pié V de un jalon distante, y que en primer lugar es *ab* perpendicular á GF. Girando el anteojo alrededor de su eje óptico, dentro del collar, al cabo de una semirevolucion completa en sentido de F á E (fig. 164; lám. 11), el punto F vendrá á ocupar la posicion primitiva del E, y este la de aquel; la línea OF (figura 163; lám. 11) no habrá salido de un plano perpendicular en O al eje de rotacion OV, y los ángulos VOF, VOE serán rectos. Además, durante todo el movimiento, el cruzamiento *c* (fig 164; lám. 11) de las cerdas, cubrirá exactamente al punto V.

Pero si el eje óptico del anteojo, ocupa una posicion $a'b'$, oblícua á GF (fig. 163; lám. 11), la visual irá á parar al pié de un jalon V'; y cuando se haga girar al anteojo dentro de su collar, la recta $a'b'$ describirá las dos ramas de una superficie cónica de revolucion, cuyo vértice comun estará en O, y cuyo eje será la recta ab, perpendicular en O á la GF. Al cabo de una semirevolucion exacta, F vendrá á parar á E, el eje óptico $a'b'$ tomará la posicion $a''b''$, y la visual no irá á parar á V', siendo necesario colocar otro jalon V'' en la direccion de la nueva visual. El ángulo V'OV'' será entonces la traza de la superficie cónica sobre el plano de la seccion, en el cual se encuentra el eje de rotacion ab, y por lo tanto, daremos al eje óptico la verdadera posicion que le corresponde, colocándole en la direccion ab de la bisectriz del ángulo V'OV''.

Si lo permite la construccion de la alidada, como sucede en la que acabamos de describir, se puede hacer esta verificacion, dirigiendo una visual al objeto V, y dando una semirevolucion al anteojo alrededor del eje horizontal de rotacion GF. Si ab fuese perpendicular á este eje, describiría en su movimiento un plano, y al cabo de una semirevolucion exacta, el punto b vendría á ocupar la primitiva posicion del a, y recíprocamente. Si entonces sacamos el anteojo de su collar y le colocamos de nuevo en él, de modo que el ocular quede del lado del observador, el eje óptico ocupará exactamente la misma posicion que al principio, puesto que O permanecerá fijo, y por lo tanto ab quedará aún perpendicular á GF (Geom. Teorema 1). Así, dirigiendo una nueva visual por el anteojo, ésta irá á parar al mismo punto V.

Pero, si el eje óptico fuese $a'b'$, al girar alrededor de GF, describirá las dos ramas de una nueva superficie cónica, cuyo vértice sería tambien el punto O, su eje el horizontal de rotacion GF, y que tendria por trazas en el plano de la seccion las rectas $a'b'$, $a''b''$; así, al cabo de una semirevolucion completa, la $a'b'$ ocuparía la posicion $a''b''$. Al sacar el anteojo del collar para traer el ocular al lado del observador, el eje óptico ocuparia la misma posicion $a''b''$, y ya no se descubriria el jalon V', sino un nuevo jalon V'', siendo como en el primer caso el error, la mitad del ángulo V'OV'', y la direccion de la bisectriz VO la verdadera posicion que deberá darse al eje óptico ab.

Correccion.—Para corregir la alidada, cualquiera que sea el método empleado para la verificacion, se hará uso de los tornillos E, F (fig. 164; lámina 11) del retículo, situados á derecha é izquierda del anteojo, aflojando uno de ellos y apretando el opuesto, en el sentido que sea necesario (233), hasta lograr que el cruzamiento c de las cerdas del retículo, cubra exactamente al pié V (fig. 163; lám. 11) de un jalon colocado en la direccion de la bisectriz del ángulo V'OV'', que forman en el punto O, interseccion del eje óptico con el de rotacion, las visuales OV', OV''.

Para determinar en la práctica la posicion de este punto V, basta dividir en dos partes iguales la distancia V'V'' de los dos jalones primeramente colocados. En efecto; los triángulos OVV', OVV'', son sensiblemente iguales (Geom. Teor. 15. Recíp.), por serlo tambien las líneas OV′, OV″, cuya longitud es, por otra parte, sumamente grande comparada con la de los lados VV′, VV″, y dan los ángulos VOV′, VOV″, sensiblemente iguales. Debemos observar, que despues de corregida la alidada, es conveniente repetir la verificacion.

263. Reasumiendo lo que acabamos de exponer, podemos establecer la siguiente regla práctica para la verificacion y correccion de que nos ocupamos.

Se dirige la visual al pié de un jalon colocado á bastante distancia, y se da una semirevolucion completa al anteojo alrededor de su eje óptico, ó bien al del eje horizontal de rotacion, cuidando en este último caso, de invertirle despues para traer el ocular del lado del observador. Si en la posicion obtenida de cualquiera de estas dos maneras, la visual va á parar al mismo punto que en la primitiva, el eje óptico será perpendicular al de rotacion, y el plano descrito por el primero será perpendicular al segundo. Si no, se colocará otro jalon en el punto en que termine la segunda visual, y un tercero á la mitad de la distancia que separa á los dos primeros, aflojando despues uno de los tornillos horizontales del retículo y apretando el opuesto, hasta que el cruzamiento de las cerdas vaya á parar al pié del tercer jalon.

264. *Tercera verificacion.*—Que el plano descrito por el eje óptico del anteojo sea vertical.—Esta verificacion exige que el eje de rotacion, sea perpendicular al eje del soporte *s′* (fig. 162; lám. 11), y por tanto paralelo al plano de la regla. Para cerciorarse de que el plano descrito es vertical, se dirigirá la visual á una vertical determinada por el cordon de una plomada, ó la esquina de un edificio, y haciendo girar al anteojo alrededor del eje de rotacion, se observará si el cruzamiento de las cerdas, cubre constantemente en su movimiento puntos de la misma vertical, en cuyo caso el plano descrito será vertical. En efecto; el punto de interseccion del eje de rotacion y el eje óptico, fijo de posicion durante todo el movimiento, determiná con la vertical en que nos hemos fijado, un plano, que será vertical (53—4.º), y en el cual tiene dos puntos cada una de las visuales, que son: el cruzamiento de las cerdas del retículo, y un punto del cordon de la plomada.

Para disponer una de las cerdas verticalmente, no habrá entonces más que hacer girar el anteojo dentro de su collar y alrededor de su eje óptico, hasta que dicha cerda cubra perfectamente al cordon de la plomada. Esto nos asegura al mismo tiempo de la horizontalidad de la otra cerda; puesto que ambas son perpendiculares entre sí por construccion.

Si no se verifica que el cruzamiento de las cerdas cubra á la plomada durante todo su movimiento, el plano que describe el eje óptico no será vertical.

Correccion.—En este último caso, la alidada no tiene correccion y deberá desecharse por defectuosa en su construccion.

265. *Cuarta verificacion.*—Que el plano vertical que describe el eje óptico del anteojo, tenga por traza sobre el plano de la regla la línea de fé.—

Esta verificacion es enteramente la misma que la de la alidada de pínulas (253—3.ª), teniendo en cuenta que al dirigir la segunda visual, es preciso volver el ocular al lado del observador. Cuando en las dos posiciones que se dan al anteojo, la visual va á parar á puntos de una misma vertical, los dos planos que pasan por el eje óptico del anteojo en las dos posiciones indicadas, y que segun la correccion anterior son verticales, tienen comunes las líneas determinadas por el cordon de la plomada y la línea de lápiz trazada por el canto de la regla; luego son un solo y mismo plano vertical (53—2.º), que tiene por traza sobre el plano de la regla, el canto rebajado de la misma. El error de colimacion de que estaria afectada la alidada, si no tuviese lugar la verificacion de que nos ocupamos, no influye tampoco en la exactitud de la medida de los ángulos, por las razones expuestas en la alidada de pínulas (253—3.º Verif.); y como la alidada de anteojo tiene siempre el ocular del lado del observador, no hay el temor de cambiarla de posicion, como sucede en la de pínulas.

266. *Alidada de anteojo movible, giratoria alrededor del punto céntrico de la línea de fé.*—Esta alidada se halla sujeta á girar alrededor de un punto fijo, como la descrita (255).

267. *Alidada fija de anteojo movible.*—La regla de esta alidada forma parte de un plano del instrumento en que se encuentra, como en la descrita (256), quedando siempre el anteojo por la parte inferior del plano del instrumento, para que no impida el movimiento de la giratoria de anteojo movible alrededor del punto céntrico, la cual se coloca en la parte superior, debiendo ser uno mismo los planos de colimacion de ambas alidadas, cuando coinciden exactamente las líneas de fé de las mismas; lo cual se verificará, si teniendo lugar la última circunstancia que acabamos de indicar, los cruzamientos de las cerdas en ambos anteojos dirigidos á una vertical, coinciden con puntos de esta línea.

268. *Alidadas de anteojo fijo.*—Estas alidadas pueden ser, fijas, giratorias alrededor de su punto céntrico ó al de cualquiera de los de su línea de fé, y forman parte de los instrumentos que aprecian los ángulos en el plano de los objetos.

269. **Alidada de madera.**—Se compone esta alidada de un paralelepípedo de madera AB (fig. 165; lám. 11), terminado por dos placas de metal p, p', representadas aisladamente en P y P' (fig. 166; lám. 11), cada una de las cuales va provista de un taladro cónico t, t', que sirve de ocular, y un rectángulo vaciado r, r', que está dividido en dos partes iguales por una cerda ó un filete estrecho de la misma placa, el cual hace las veces de objetivo. El centro de cada uno de los taladros, está en la prolongacion de la cerda ó filete de la misma placa, y las dos rectas así determinadas, constituyen el plano de colimacion de esta alidada, que es movible en sentido perpendicular al eje de rotacion ef (fig. 165; lám. 11).

La línea de colimacion en estas alidadas, es una de las aristas mn, la cual debe ser paralela al plano de colimacion.

270. *Usos.*—Esta alidada se usa como la de anteojo movible (260),

pudiendo tener tambien las mismas disposiciones (258, 266 y 267).

271. *Verificaciones y correcciones.*—Las verificaciones de la alidada de madera, son las mismas explicadas para la de anteojo movible (261). Para la segunda, se dirige del mismo modo la visual á un punto V (fig. 163; lámina 11), por t y r' (fig. 165; lám. 11), dando una semirevolucion á la alidada alrededor de su eje de rotacion ef, y viendo si la visual dirigida entonces por t' y r va á parar al mismo punto.

Si el plano de colimacion de la alidada tuviese la posicion $a'b'$ (figura 163; lám. 11) en la direccion del punto V', despues de la semirevolucion alrededor de su eje de rotacion, tomaría la $a''b''$ en direccion á V'', y el error seria la mitad del ángulo V'OV'', como en el caso de la alidada de anteojo.

La cuarta verificacion solo puede tener lugar, cuando la alidada tiene la disposicion de la que hemos descrito en el párrafo 258.

Correcciones.—Si la alidada de madera no reune las condiciones exigidas, no hay medio de corregirla.

272. En algunos instrumentos, la forma particular de su superficie permite establecer, formando parte de ella, las pínulas de las alidadas, sujetas por lo demás á llenar todas las condiciones enunciadas. Tal sería, por ejemplo, si se tratase de una superficie cilíndrica de base circular, en cuyo caso se colocarían las hendiduras y cerdas en sentido de dos generatrices situadas en un plano que pasase por el eje del cilindro, y que seria el de *colimacion*, logrando tener de este modo la alidada fija. Si el cilindro estuviese dispuesto de manera que pudiese girar alrededor de su eje, dicha alidada ejercería las funciones de la giratoria alrededor de su punto céntrico; pudiendo disponerse tambien sobre un cilindro fijo, otro movible de la misma base, de modo que el eje de este fuese la prolongacion del eje del anterior, con lo cual se tendrían combinadas las alidadas fija y giratoria, en disposicion de poder tomar con ellas los diferentes ángulos.

En la superficie de un prisma recto octogonal, las hendiduras y cerdas se situarán en sentido de las líneas verticales que dividen en dos partes iguales á dos caras diametralmente opuestas.

273. **Planos de los instrumentos angulares.**—Siendo el objeto principal de muchos instrumentos, la determinacion de los ángulos planos que los objetos forman entre sí, hemos visto al tratar de las alidadas, la necesidad de suponer que operábamos sobre un plano, el cual, si bien podíamos colocarle en una posicion cualquiera, advertíamos que la más comun es la posicion horizontal, para obtener así las proyecciones horizontales de los ángulos de los objetos. Se comprende pues, que los instrumentos angulares deberán llevar una parte terminada en una superficie plana, la cual pueda servirnos para formar en ella los ángulos, y debe reunir además la circunstancia de poderse colocar en todas las posiciones que se quiera, y situarse á una altura conveniente y cómoda para el observador.

Llamaremos por lo tanto *planos de los instrumentos angulares* á los aparatos destinados á presentar una superficie plana, sobre la cual insistan los lados de los ángulos que se trata de determinar, ó más generalmente sus proyecciones horizontales.

274. Determinacion gráfica de los ángulos —El plano de que nos hemos ocupado (273), puede ser la superficie de un tablero liso, perfectamente construido, regularmente de forma cuadrada, sobre el cual, con el auxilio de las alidadas, pueden determinarse como hemos visto (249) los valores gráficos de los ángulos.

275. Limbos.—Para obtener los valores de los ángulos expresados en grados, minutos y segundos, se emplean los *limbos*, que son unos discos de metal ABCD (fig. 167; lám. 11), en cuya superficie va trazado un círculo de menor rádio *abcd*, concéntrico con el que limita el disco formando el borde, con lo cual resulta la corona ABCD*bcda*, destinada á contener la division en grados, medios grados, etc. Algunas veces el disco suele llevar espacios vaciados *a*, *a'*,...... (fig. 168; lám. 11).

El centro *o* comun á las circunferencias ABCD, *abcd*, es el *centro del limbo*.

276. Medida de los ángulos simples —Ya sabemos (Geom. Teorema 49, nota) que para medir los ángulos, se toma por unidad el ángulo recto, y para medir los arcos el cuadrante que es su arco correspondiente; así como tambien, que para facilitar la medida en la práctica, se divide la circunferencia en 360 partes iguales llamadas grados: siendo conocida tambien la division de estos en minutos y segundos.

Modernamente, se ha dividido la circunferencia en 400 grados, cada grado en 100 minutos, y cada minuto en 100 segundos; y segun el sistema decimal, un ángulo ó arco de 128 grados, 9 minutos y 8 segundos, se escribirá, suponiendo que el grado es la unidad, $128^{\circ},0908$ y con relacion al ángulo recto tomado por unidad, $1^{r},280908$.

La division antigua de la circunferencia en 360 partes iguales, llamada *sexagesimal*, presenta más ventajas que la moderna ó *centesimal*, por tener el número 360 mayor número de divisores que el 400.

En los instrumentos que sirven para la medida de los ángulos, no se halla aun generalizada la division moderna; pero es fácil expresar cada medida tomada con relacion á la division sexagesimal, en la division centesimal, y recíprocamente. En efecto, un grado de la division sexagesimal valdrá $\frac{400}{360} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9} = 1,1111$.......... de la centesimal; y un grado de la division centesimal, será $\frac{360}{400} = \frac{9}{10} = 0,9$ de la division sexagesimal.

Tratemos, por ejemplo, de convertir 36° de la division sexagesimal en grados centesimales; tendremos

$$36^{\circ} \times 1\frac{1}{9} = 40^{\circ}.$$

Recíprocamente, para reducir 40 grados de la division centesimal á la sexagesimal, se tendrá $40 \times 0{,}9 = 36^{\circ}$.

Se obtiene el mismo resultado de un modo más sencillo, siguiendo las siguientes reglas:

Para reducir un número cualquiera de grados de la division sexagesimal á grados de la division centesimal, no hay más que añadir al número dado su novena parte.

Ejemplo. Reducir 25° 15′ 20″ de la division sexagesimal á grados de la division centesimal.

Convirtiendo los minutos y segundos en decimales, se tiene

	25°,255556;
añadiendo la novena parte,	2,806173,
se obtiene	28°,061729;

cuyo resultado se lee: veintiocho grados, seis minutos, diez y siete segundos, y veintinueve centésimas de segundo.

Recíprocamente, para reducir un número de grados de la division centesimal á grados de la division sexagesimal, no hay más que restar del número dado su décima parte.

Ejemplo. Reducir 28°,061729 de la division centesimal á grados de la division sexagesimal.

Número dado	28°,061729;
quitando su décima parte,	2,806173,
se obtiene	25°,255556.

Convirtiendo los decimales en minutos y segundos, resulta por último 25° 15′ 20″ próximamente.

277. *Diferentes graduaciones de los limbos.*—La corona ABCD*bcda* (fig. 167; lám. 11) se subdivide en otras varias de igual ancho, por medio de circunferencias concéntricas, segun la division que se quiere establecer.

Si las menores divisiones del limbo han de ser grados, por ejemplo, se dividirá la corona del limbo en otras tres (fig. 169; lám. 11). En la primera, á partir del centro se señalan los grados, en la segunda las magnitudes que comprenden cinco grados, y en la tercera las que comprenden diez; cuya numeracion por decenas es la que establece de izquierda á derecha, ó de derecha á iquierda (fig. 170 lám. 11), aunque tambien se acostumbra en algunos casos, ponerla de ambos modos como se ve en la fig. 171 (lám. 12).

Si las menores divisiones del limbo han de ser medios grados, tercios ó cuartos de grado, se dividirá la corona del limbo en una corona más que en el caso anterior: en la primera corona se señalarán las menores divisiones, es decir, los medios grados (fig. 171; lám. 12), tercios (figura 172; lám. 11), ó cuartos de grado (fig. 173; lám. 11); en la segunda los grados, en la tercera las magnitudes de 5º, y en la cuarta las de 10º. Las rectas que marcan las divisiones en las distintas coronas del limbo, pasarían por el centro si las prolongásemos, y están por consiguiente en sentido de los rádios del círculo.

Los limbos que acompañan á algunos instrumentos son semicirculares, y en algunos la sexta, octava, etc., parte del círculo, y se llaman *sextantes*, *octantes*, etc.

En estos limbos, se sigue el mismo método para la graduacion. Véase en la fig. 174 (lám. 12) el limbo semicircular de doble graduacion, una de izquierda á derecha y otra de derecha á izquierda, en el cual suponemos que las divisiones menores son grados. Para más facilidad, llamaremos *primera graduacion* á la que va de izquierda á derecha, y *segunda graduacion* á la que va de derecha á izquierda. Si á estos limbos se les pusiese la graduacion en el sentido que indica la fig. 175 (lám. 12), serían mucho más cómodos como veremos en lo sucesivo; pues de este modo harían veces de limbos de círculo entero.

278. *Generacion de los ángulos*.—Antes de exponer el uso de estos limbos, creemos conveniente hablar de la manera de concebir originados los ángulos, segun los hemos de considerar en las operaciones topográficas, á fin de guardar la misma marcha en la manera de apreciarlos, explicando los limbos más á propósito para no incurrir en equivocaciones y dejar determinados los ángulos exactamente.

Los ángulos pueden considerarse originados por el movimiento de una recta OA (fig. 176; lám. 12), que partiendo de una posicion inicial OA, y girando alrededor de un punto fijo O, es susceptible de tomar infinitas posiciones en las que formará distintos ángulos con la primitiva. En esta, el valor del ángulo será 0, puesto que no hay abertura ó separacion alguna entre los lados que le forman. Todas las posiciones desde A á B corresponderán á ángulos agudos. En B el ángulo es de 90º. Desde B á C los ángulos son obtusos. En C el ángulo se compone de dos rectos ó 180º, y entonces los dos lados están sobre una misma recta ó son prolongacion el uno del otro. De C á D están todos los ángulos comprendidos entre 180º y 270º. De D á A los comprendidos entre 270º y 360º. En A se vé que el ángulo 360º, y el ángulo 0º son uno mismo.

Todo ángulo mayor que 360º, es igual al que resulta de restar 360º de su valor; y cuando un ángulo comprende muchas circunferencias, su valor ó la direccion de la línea generatriz de los ángulos, se determina por el resíduo que se obtiene de dividir el número que expresa sus grados por 360.

Así, la línea que formase con OA un ángulo de 385º 10′, sería la misma que la que le formase de 385º 10′—360º=25º 10′.

Si fuese de 726º 40′, sería la misma que la que le formase de 6º 40′, resíduo que dá el cociente $\frac{726^\circ\ 10'}{360^\circ}$.

Los ángulos contados desde OA en el sentido contrario ADCB les consideraremos como negativos, para distinguirlos de los primeros.

La direccion de una línea OC' marcada por el ángulo negativo $-$ AOC' $= -149^\circ\ 56'$, es la misma que determina el ángulo positivo $360^\circ - 149^\circ\ 56' = 210^\circ\ 4'$.

El ángulo negativo $- 726^\circ\ 10'$ daría para la generatriz la misma direccion que el $360^\circ - 6^\circ\ 10' = 353^\circ\ 50'$.

Los ángulos considerados como acabamos de decir, y medidos por el arco que la generatriz ha recorrido á partir de la posicion inicial que hemos designado, se llaman *ángulos de direccion*.

279. *Empleo de los limbos para la medida de los ángulos*.—Si en el plano del limbo suponemos una alidada fija, de cualquiera de las clases que hemos descrito, cuya línea de fé coincida con el diámetro (0°—180°) y una alidada giratoria alrededor del centro del limbo, podríamos apreciar, no solo el valor gráfico de los ángulos (249), sino tambien su valor en grados y sus divisiones. En efecto, sea AOM (fig. 177; lám. 12) el ángulo que nos proponemos medir; haciendo que el centro del limbo se coloque en la vertical del punto O, y disponiendo el plano del limbo en el plano de los objetos ó en la posicion horizontal, segun quisiésemos determinar el ángulo en dicho plano de los objetos ó su proyeccion horizontal, como ya hemos hecho en las alidadas (252) y (250), moveríamos el limbo alrededor de su centro, hasta que la visual dirigida por la pínula fija fuese á parar al punto A, quedando el cero del limbo entre los puntos O y A; fijando entonces el plano, haríamos girar la alidada móvil hasta que la visual tirada por ella fuese á parar al punto M, en cuyo caso la línea de fé de esta alidada, señalaría un arco *m*, que expresaría en grados y sus divisiones el valor del ángulo AOM.

Para estar seguros de que habíamos medido el ángulo con exactitud, volveríamos á mirar por la alidada fija, para asegurarnos de que la visual tirada por ella, iba aún á parar al punto A; pues pudiera suceder que la alidada giratoria, con su movimiento alrededor del centro, hiciese variar la posicion dada al limbo.

280. *Medida de un ángulo simple, cuando la alidada es excéntrica*.—En este caso la alidada giratoria es perpendicular al rádio del limbo en su extremo, que hace veces de línea de fé, y por lo tanto, tangente á dicho limbo en todas sus posiciones. Para medir el ángulo ACB (fig. 178; lámina 12) se dirige la alidada *a* al punto A, habiendo hecho coincidir préviamente su línea de fé con el cero del limbo; se fija este, y dirigiendo la alidada al punto B, el cero de su línea de fé habrá recorrido el arco *ab*. Si despues se hacen coincidir de nuevo los ceros, se dirige la alidada en una nueva posicion *a'* al punto A, y fijo el limbo, se dirige de nuevo al punto B, el arco recorrido ahora será el *a'b'*. Para deducir de estos arcos,

la verdadera medida del ángulo ACB, que es el arco mn, tendremos

$$mn = ma' - na';$$

pero siendo iguales los triángulos rectángulos ACa, ACa', por tener comun la hipotenusa AC y ser $Ca = Ca'$, será

$$ma' = am = ab + bm;$$

y por lo tanto

$$mn = ab + bm - na' \qquad [1]$$

Tambien se tiene de un modo análogo

$$mn = bn - bm;$$

y siendo

$$bn = nb' = na' + a'b';$$

resulta

$$mn = na' + a'b' - bm \qquad [2]$$

Sumando les ecuaciones [1] y [2], tendremos

$$2mn = ab + a'b';$$

y por último

$$mn = \frac{ab + a'b'}{2}.$$

281. *Direccion de una recta con respecto á otra dada de posicion.*—La posicion de una recta bc (fig 179; lám. 12) con respecto á la ab, parece quedar determinada por el ángulo m, menor que 180°, suponiendo originados los ángulos de direccion en el sentido de izquierda á derecha, marcado en la figura por la flecha Sin embargo, el conocimiento del ángulo menor que 180°, que una recta forma con otra dada de posicion, no determina la direccion de la primera con respecto á la segunda. En efecto, sea ab (fig. 180; lám 12) una línea dada de posicion, y supongamos que se nos pida trazar la línea que en uno de los extremos b de la ab forma con ella un ángulo de 150°. Al determinar la direccion de que nos ocupamos, sería preciso expresar tambien, si la nueva línea formaba el ángulo hácia la derecha de la primera, suponiendo que se camina de a á b, en cuyo caso se tendría la recta bc, determinada por el ángulo m de 150°, ó hácia la izquierda de la misma ab, en cuyo caso resultaría la bc', medida por el m' tambien de 150°. Podia expresarse tambien la direccion de la

nueva recta por el signo del ángulo, suponiendo positivos los arcos contados de izquierda á derecha, y negativos los tomados en sentido contrario. Si el ángulo dado era de $+150^\circ$, determinaría la direccion bc', y si de -150°, se tendria la de la recta bc.

282. Pero si nos valemos de instrumentos de limbo de círculo entero ó semicirculares de graduacion completa, y tomamos siempre los ángulos en el sentido en que los suponemos originados, es decir, dirigiendo la primera visual al objeto de la izquierda, y haciendo girar la alidada móvil de izquierda á derecha, para dirigir la segunda visual al objeto de la derecha, leyendo siempre la graduacion en este sentido, cesará toda indeterminacion; pues cada línea quedará determinada por el número de grados del ángulo respectivo. En efecto, sea el ángulo abc (fig. 181; lámina 12); si se dirige la visual al punto a de la izquierda, yendo la graduacion de izquierda á derecha, se fija el limbo, y se dirige la alidada giratoria al otro punto c, el arco omo' recorrido por esta, es el valor 150°, por ejemplo, del ángulo buscado; y la recta bc queda determinada á la izquierda de ab, no pudiendo confundirse con su simétrica la bc'; pues esta se determina por el número de grados del arco $omo'o''$, que tendría que recorrer la alidada giratoria para dirigir la visual al punto c'; donde vemos que ya no hay indeterminacion, ni es preciso considerar ángulos positivos y negativos, ó el sentido en que abren, sino que la marcha constante de tomar los ángulos de izquierda á derecha, dá un número de grados distinto para cada posicion de la segunda recta, la que por esta razon no puede confundirse con ninguna otra, y queda su direccion por lo tanto, completamente determinada.

283. Los dos valores de los arcos omo' y omo'' componen 360°; pues $omo'+omo''=ono''+omo''=360^\circ$.

Si $omo'=150^\circ$, resultará $omo''=360^\circ-150^\circ=210^\circ$.

284. Con un limbo semicircular pueden tambien tomarse los ángulos de direccion mayores que 180°, y más cómodamente si fuese de los que llevan la graduacion completa.

En efecto: si tuviésemos que medir el ángulo acb (fig. 182, lám. 12) tomando el arco mayor que 180°, colocaríamos el limbo semicircular de modo que su centro coincidiese con la vertical que pasa por el vértice c, dirigiríamos la alidada fija al punto a de la izquierda, con lo cual el diámetro (0°—180°) se hallaría en el plano vertical que pasa por la recta aa': fijo el limbo, moveríamos la alidada giratoria, que suponemos sobre el diámetro, en el sentido dicho (0—180°), siempre de izquierda á derecha, hasta que viésemos el punto b, y es claro entonces que además de los 180° que habría recorrido la alidada si hubiéramos detenido su movimiento al descubrir el punto a', habrá que contar con el arco $rs=mn$ por ser $mcn=rcs$ (Geom Teor. 4); de modo que podrá hacerse la lectura del arco mn en la graduacion del limbo. Si suponemos que en este caso es de 30°, añadiéndolos á 180°, tendremos 210° por valor del arco mayor que 180° que queríamos determinar.

Si empleáramos el limbo semicircular de graduacion completa (figura 175; lám. 12), los números de la parte interior darian los ángulos de direccion menores que 180°, y los de la exterior los ángulos mayores que esta cantidad.

285. En lo sucesivo, nos valdremos siempre de los ángulos de direccion para determinar las posiciones relativas de las rectas del terreno que deban figurar en un plano. Si el limbo que empleásemos tuviese una sola graduacion y es la primera (277), dirigiríamos la alidada fija al objeto de la izquierda, y haríamos girar la móvil hasta colocarla en direccion al de la derecha; cuando tuviese la segunda graduacion, se dirigiria la alidada fija al objeto de la derecha y la móvil al de la izquierda. En el caso de que tuviese las dos graduaciones, nos valdremos con preferencia de la primera, que es, por otra parte, la que generalmente presentan los principales instrumentos topográficos; por lo cual será la que generalmente emplearemos en lo sucesivo.

286. La línea dada de posicion (281), puede ser una línea cualquiera, como hemos visto, ó bien puede estar dada por la naturaleza, como la meridiana de un punto (125). Para determinar la direccion de la línea AB (fig. 183; lám. 12), refiriéndola á la meridiana NS, se colocará el limbo del instrumento de modo que su centro coincida con el vértice C del ángulo. Se moverá el limbo alrededor de su centro, se dirigirá la visual al punto A por la alidada fija, se sujetará el limbo, y dirigiendo la visual por la giratoria al punto N, el arco recorrido (0—120°) nos marcará el valor 120° del ángulo ACN.

Los ángulos que fijan las direcciones de las rectas con relacion á la meridiana, se llaman *rumbos*.

287. Dados los rumbos r, r' (fig. 184; lám. 12) de dos rectas BA, BC, se puede determinar el ángulo que forman. En efecto; si hacemos el rumbo ABN de 121°, igual á r, y el CBN de 48° á r', se tendrá

$$ab = ac - bc = r - r' = 121^\circ - 48^\circ = 73^\circ.$$

Este valor es el del ángulo de direccion de la recta BC de rumbo menor r', con relacion á la BA de mayor rumbo r (270).

Es indiferente referir los rumbos de las AB y BC á la parte NB de la meridiana, como hemos hecho, ó á la BS; pues siguiendo la misma marcha en la lectura, es decir, de izquierda á derecha, los dos arcos anteriores estarían aumentados en las mismas cantidades, que son las semicircunferencias que señalamos de puntos, y su diferencia sería la misma, pues tendríamos

$$(121^\circ + 180^\circ) - (48^\circ + 180^\circ) = 301^\circ - 228^\circ = 73^\circ.$$

Nosotros referiremos los rumbos en general á la línea BN, que es la parte de la meridiana que se dirige al norte, áun cuando en circunstancias especiales los refiramos á la parte sur de la meridiana.

Las figuras 185, 186 y 187 (lám. 12) representan varias disposiciones que pueden tener las rectas BA y BC, y en todas ellas el arco *ab* que se busca es igual á la diferencia de los rumbos, suponiendo que se trata de fijar la línea de rumbo menor, con relacion á la de mayor rumbo.

Si quisiésemos, por el contrario, referir la de mayor rumbo á la de rumbo menor que suponemos dada, fácil es deducir de la sola inspeccion de las citadas figuras y de lo expuesto (278), que el ángulo de direccion se hallaría restando de 360° la diferencia de los rumbos dados.

288. **Verificaciones y rectificaciones de los limbos.**—La primera circunstancia de las que debe reunir un limbo, es la de hallarse bien dividido ó graduado. Para esto, se observará con el mayor cuidado si la magnitud de las divisiones aparece siempre la misma á la vista; y para cerciorarse mejor, se toma un compás de puntas muy finas, y abriéndole de modo que éstas abracen una cierta magnitud, por ejemplo 5°, se irá tanteando todo el limbo, colocando de todos los modos que se quiera el compás, para ver si siempre abrazan sus puntas cinco divisiones. Dando al compás una nueva abertura, de modo que sus puntas abracen otra magnitud diferente, por ejemplo 8°, se repetirá la misma operacion; y así se continuará haciendo este ensayo cuantas veces se quiera, hasta cerciorarse de la perfecta igualdad de todas las divisiones.

289. La segunda circunstancia es que la línea (0—180°) trazada en el limbo, se halle situada en el plano vertical que pasa por las cerdas de las pínulas, ó por el eje óptico del anteojo de la alidada fija. Para conocer que esto se verifica, es preciso observar si el cero del limbo, orígen de las graduaciones, coincide exactamente con el de la alidada móvil cuando los hilos de las cuatro pínulas ó los ejes ópticos de las dos alidadas se hallan en el mismo plano vertical. Tambien se puede empezar por hacer coincidir los dos ceros, y observar si entonces los hilos de las pínulas ó los ejes ópticos, quedan situados en el mismo plano vertical; pero es preferible hacer la observacion del primer modo, pues si hay error, se puede leer su valor y tenerle en cuenta para añadirle ó restarle, segun convenga, de cada ángulo que se tome. El valor del ángulo que forma el rayo visual de la alidada fija con la línea (0—180°) del limbo, es lo que se llama *error de colimacion*. Para entender esto claramente, supongamos que habiendo puesto las cuatro cerdas de las pínulas ó los ejes ópticos de los anteojos en el mismo plano vertical, la línea (0—180°) del limbo tenga la posicion A*a* (fig. 188; lám. 12), y la línea de fé de la alidada fija la MN sobre la cual se halla la línea de fé de la alidada movible; es claro que si se trata de apreciar el ángulo GCA′, despues de haber dirigido la visual por la alidada fija al punto G, habremos tenido que mover la alidada giratoria hasta que tome la posicion A′*a*′, y como los ángulos empiezan á contarse desde el cero del limbo, sólo leeremos el valor 35° que se supone vale el arco A*n*, siendo así que el arco que mide el ángulo es el M*n*; de

modo que el error es el valor del arco MA, que mide el ángulo GCA. Este ángulo es el que hemos llamado *error de colimacion*. En este caso, habría que añadir este valor, que supondremos ser 10°, al de 35° obtenido antes. Por el contrario, si fuese el mismo ángulo GCA′ el que tratásemos de medir, siendo MN la misma posicion de la alidada fija que en el caso anterior, y B*b* la de la línea (0—180°) del limbo; despues de dirigir la alidada fija al punto G, la giratoria tomaría la posicion A′*a*′ y entonces leeríamos 55° que suponemos que vale el arco B*n*, y habríamos tomado de más el arco BM que expresa el valor del ángulo BCG, que es el *error de colimacion*, el cual por lo tanto habría que restar del valor obtenido 55°.

A pesar de tener el instrumento este defecto, puede obtenerse con él exactamente el verdadero valor del ángulo que se trata medir. Sea, en efecto, este ángulo el ACB (fig. 189; lám. 12), y supongamos que siendo MN la posicion de la alidada fija, la línea (0—180°) del limbo tenga la posicion *ma*. Se colocará el limbo de modo que su centro C se halle en la vertical que pasa por el vértice, y el cero de la línea de fé de la alidada giratoria *g*, sobre el de la línea (0—180°) del limbo, y se moverá éste hasta que veamos el punto A por dicha alidada giratoria: mirando entonces por la fija, se colocará un jalon G en la direccion de la visual. Hecho esto, se hará mover la alidada giratoria hasta que veamos el punto B, y es indudable que el arco recorrido *mn*, que se empieza á contar en grados desde el cero de la línea (0—180°), es el valor del ángulo ACB. Para convencernos de que le hemos tomado con exactitud, volveremos á observar por la alidada fija MN para ver si el jalon G permanece aún en la direccion del rayo visual. Vemos, pues, que cuando el instrumento es inexacto, la alidada fija sólo sirve para dirigir visuales de observacion, y con la giratoria se mira sucesivamente á los extremos de los lados del ángulo; y como la observacion se hace antes y despues de medir el ángulo, resulta que para cada ángulo que hay que medir, se mira dos veces por la alidada fija, y otras dos por la giratoria. Cuando el instrumento es exacto, hemos visto (279) que se mira dos veces por la alidada fija y una sola por la giratoria.

Si el ángulo fuese el GCB, siendo ahora *g* la alidada fija y MN la posicion de la línea (0 —180°), dirigiríamos del mismo modo la alidada giratoria á los puntos G y B, habiendo hecho coincidir primero el cero de esta alidada con el del limbo para dirigir la primera visual, y del mismo modo que antes la alidada fija ha debido estar dirigida al punto A durante la observacion. En este caso, el arco que mide el ángulo de que se trata es el M*n*, recorrido por la alidada giratoria.

Tambien se vé que bastaría la alidada giratoria para la medida de un ángulo y su comprobacion; para lo cual ejecutaríamos con ella las mismas operaciones que en los dos casos que acabamos de explicar, y despues volveríamos á hacer coincidir el cero de la misma con el del limbo, viendo entonces si la visual iba á parar al mismo punto que en la primera posicion.

290. La disposicion particular de la alidada giratoria puede ser tal, que la visual *mm'* (fig. 190; lám. 12) forme con la línea de fé *aa'* un ángulo de muchos grados, lo cual no es un inconveniente para la medida de los ángulos; pues haciendo coincidir esta línea de fé con la (0 — 180°) del limbo, y dirigiendo la visual al punto A, al mover despues la alidada para dirigirla al B, el arco *mn* recorrido por la visual, es exactamente igual al *ab* que ha recorrido la línea de fé, y que mide el valor del ángulo; pues todos los puntos que giran alrededor de un eje comun describen arcos del mismo número de grados.

De todo cuanto hemos dicho se saca partido en la construccion de algunos instrumentos.

291. La tercera circunstancia es, que el limbo esté bien centrado: es decir, que el eje alrededor del cual se mueve la alidada giratoria se halle situado en el centro del limbo. En efecto, si la alidada girase alrededor de un punto que no fuese el centro del limbo, este defecto produciría un error en la lectura que sería variable y vamos á hacer ver que el caso en que el error es el máximo es aquel en que la posicion de la línea de fé de la alidada es perpendicular á la línea que une el centro del limbo con el punto de rotacion de la alidada. Sea CD (fig. 191; lám. 13) la posicion de la línea (0 — 180°), O el centro del limbo, y *d* el punto alrededor del cual se mueve la alidada giratoria; en el caso en que la línea de fé de la alidada coincide con la que une el punto O con el *d*, tendrá la posicion AB, y el ángulo BOC que forman las visuales CD y AB no tendrá error; si la alidada empieza á girar y toma la posicion A'B', como la posicion verdadera debería ser la *a'b'* paralela á la A'B', se leerá el valor del arco CB' correspondiente al ángulo COB', y no el verdadero C*b'* correspondiente al ángulo CO*b'*; el error será el valor del arco B'*b'* correspondiente al ángulo B'O*b'*; si la alidada continúa girando, y toma la posicion A'' B'', perpendicular á la línea AB que pasa por los puntos O y *d*, se leerá del mismo modo el valor del arco CB'' correspondiente al ángulo COB'' y no el verdadero C*b''* correspondiente al *b''*OC, y el error será el valor del arco B''*b''* correspondiente al ángulo B''O*b''*. Ahora vamos á probar que el arco B''*b''* es mayor que el B'*b''*; en efecto, si por el punto *d* tiramos la perpendicular *de* á la *a'b'*, la hipotenusa *d*O del triángulo rectángulo O*de* es mayor que el cateto *de*; pero *d*O es la distancia entre las paralelas A''B'', *a''b''*, y *de* la que media entre las A'B' y *a'b'*; luego el arco B''*b''* que comprenden las primeras será mayor que el B'*b'* que abrazan las segundas.

292. La variacion en la lectura de los ángulos hará que en ciertas operaciones no correspondan los valores que obtengamos con los que debieran resultar; lo que nos dará á conocer que el limbo no está bien centrado. Por ejemplo, conoceríamos que tenia este defecto: primero, si al tomar los valores de los tres ángulos de un triángulo cualquiera, la suma de ellos no fuese igual á dos ángulos rectos. Segundo, si al tomar desde un punto interior de un polígono convexo todos los ángulos AOB,

BOC, COD.... (fig. 192; lám. 13) que se forman alrededor de este punto por las rectas tiradas á sus vértices, la suma no valiese cuatro rectos; tercero, si al tomar todos los ángulos interiores ABC, BCD, CDE.... de un polígono convexo, su suma no valiese tantas veces dos rectos, como lados tienen el polígono menos dos (Geom. Teor. 26).

293. Con un limbo descentrado puede obtenerse el verdadero valor de un ángulo ACB (fig. 193; lám. 13) en el caso particular de que la recta CC′ que une el centro C del limbo con el C′, alrededor del cual se mueve la alidada giratoria, es perpendicular á la CB que forma el lado del ángulo en cuya direccion se coloca la alidada giratoria para apreciar el valor del mismo ángulo.

En efecto, disponiendo el centro C del limbo de modo que se halle en la vertical que corresponde al vértice del ángulo, se dirigirá la alidada fija al punto A, con lo que la línea (0 — 180°) se hallará en la misma direccion CA. Al dirigir la alidada giratoria al punto B, tomará la posicion $m'n'$, en la cual hemos supuesto que CC′ es perpendicular á CB. La lectura del limbo sería entonces el arco am', al cual le faltaría el $m'm$ para componer el am, correspondiente al ángulo ACB, y el cual es el que hubiéramos obtenido en el caso de que la alidada girase en el centro del limbo. Tendremos, pues, la igualdad

$$am = am' + m'm \qquad [1]$$

Si ahora sujetamos la alidada $m'n'$ y damos al limbo una semirevolucion completa, en el sentido que indica la flecha, lo cual tendrá lugar cuando la visual dirigida por la alidada fija vaya á parar de nuevo al punto A, el a del limbo vendrá á ocupar la posicion primitiva del b y recíprocamente; así como el C′, que habrá descrito tambien una semicircunferencia, ocupará la C″, en la cual la alidada giratoria estará representada por la DD′ paralela á la $m'n'$. Dejando ahora libre á la alidada giratoria, para que pueda moverse alrededor de C″, se dirigirá de nuevo al punto B, y restando 180° de la lectura que dará entonces el limbo, se tendrá el valor del arco am'', diferente tambien del verdadero am; el error por exceso será el arco mm'', y resultará la igualdad

$$am = am'' - mm'' \qquad [2].$$

Ahora bien, los arcos $m'm$ y mm'' que entran en las igualdades [1] y [2], son iguales. En efecto; los triángulos rectángulos BCC′, BCC″, que tienen el lado BC comun y además CC′ = CC″, son iguales: de modo que si suponemos doblada la figura por la BC el triángulo BCC′ se confundirá son el BCC″; y suponiendo tirado el rádio Cm', este tomará la nueva posicion Cm'' dando los triángulos $CC'm'$ y $CC''m''$ iguales, y el punto m'' que representa el m', estará situado sobre BC″ y distará del centro la cantidad $Cm'' = Cm'$, rádio del limbo; luego dicho punto m'' está en la interseccion de la BC″ con la circunferencia; luego los arcos $m'm$ y $m''m$, que tienen sus extremos confundidos, son iguales, así como sus ángulos correspondientes $m'Cm$, mCm'' que son los ángulos de error.

Por lo tanto, sumando las igualdades [1] y [2] resultará

$$2am = am' + am'';$$

de donde

$$am = \frac{am' + am''}{2} \qquad [3].$$

Luego en el caso particular de que nos ocupamos, el verdadero valor del ángulo ACB, es igual á la semisuma de las lecturas hechas en el limbo en las dos posiciones dadas á la alidada giratoria.

Si en las ecuaciones [1] y [2] despejamos los errores iguales $m'm$ y mm'', tendremos las

$$m'm = am - am';$$

$$mm'' = am'' - am;$$

y sumándolas, resultará

$$2mm' = am'' - am';$$

$$mm' = \frac{am'' - am'}{2} \qquad [4].$$

De modo que el error por exceso ó por defecto, es igual á la semidiferencia de las dos lecturas.

Ejemplos.—Si una de las lecturas de un ángulo fuese 8°, y la otra 6°, el valor del ángulo sería, segun la fórmula [3],

$$\frac{8^0 + 6^0}{2} = \frac{14^0}{2} = 7^0;$$

y el error, segun la fórmula [4]

$$\frac{8^0 - 6^0}{2} = \frac{2^0}{2} = 1^0;$$

de modo que restando 1° de la mayor lectura 8° ó añadiéndosele á la menor 6°, resultará el valor 7° como antes, por verdadero valor del ángulo.

Si la C'C'' (fig. 194; lám. 13) no fuese perpendicular á la BC, los triángulos BCC' y BCC'' no serían iguales y no se verificaría la demostracion anterior: no siendo por lo tanto exactas las reglas expuestas, por no ser iguales los arcos de error *m'm* y *mm''*; si bien con el objeto de obtener valores aproximados pueden en la práctica aplicarse en todos los casos.

Correcciones —Si el limbo no reune las tres circunstancias dichas, los defectos son de construccion, y en el primer caso deberá desecharse. En el segundo, hemos dicho la manera de medir el ángulo exactamente, y en el tercero la de obtenerle en unos casos con exactitud y en otros aproximadamente.

294. **Medida de los ángulos múltiplos ó repeticion de los ángulos.**—Con los limbos de círculo entero se puede ejecutar la operacion llamada *repeticion de los ángulos*. La primera idea de esta operacion se debe al astrónomo aleman Tobías Mayer, que la dió á conocer en 1777; pero el matemático francés Borda es el primero que hizo construir un instrumento con el cual pudiera realizarse, y que lleva su nombre, llamado *círculo repetidor de Borda*.

Para que un limbo de círculo entero pueda emplearse en la repeticion de los ángulos, es preciso que esté dispuesto de modo que pueda girar en su plano alrededor de un eje de rotacion que pase por su centro, y que además haya medio de fijarle cuando sea necesario. Ha de estar provisto de una alidada de anteojo movible, giratoria alrededor del centro del limbo, y con la facultad tambien de poderla fijar al mismo ó dejarla libre cuando se quiera para que pueda adquirir dicho movimiento.

La division del limbo la consideraremos, como siempre, de izquierda á derecha.

Los limbos repetidores pueden llevar tambien dos alidadas de anteojo, una *superior* al limbo y otra *inferior*, y ambas se disponen de modo que puedan fijarse al mismo á voluntad ó dejarlas libres, para que puedan girar alrededor del centro del limbo cuando convenga.

295. Para tomar un múltiplo de un ángulo con el limbo repetidor provisto de una sola alidada, supongamos que el ángulo simple sea el ACB (fig. 195; lám. 13); se colocará el limbo de manera que su centro se halle en la vertical que pasa por el vértice C del ángulo, y despues de fijar la alidada *ab* al limbo, de modo que su línea de fé coincida con la línea (0 — 180°), se moverá aquel alrededor de su centro, y se dirigirá la visual al punto A; en esta disposicion se fija el limbo, y dejando libre la alidada, se la dirigirá al punto B, con lo cual tomará la posicion *a'b'*, y el arco recorrido *aa'* será la medida del ángulo ACB Para tomar su *duplo*, fijaremos la alidada al limbo en su nueva posicion *a'b'*, dejarémos libre el limbo y le haremos girar alrededor de su centro de derecha á izquierda en el sentido que marca la flecha, hasta que veamos con la alidada el punto A de la izquierda en su nueva posicion *a'b'* (fig. 196; lám. 13), con lo cual la línea (0 — 180°) habrá tomado la posicion *ab*; se fija el limbo, y dejando libre la alidada, se la dirige al punto B de la derecha, siendo su nueva posicion la *a''b''*, y el arco *aa'a''* el doble del *aa'* ó la medida del *duplo* del ángulo ACB

Para tomar su *triplo*, se fija la alidada al limbo en última posicion $a''b''$, se hace girar al limbo alrededor de su eje en el sentido indicado, hasta que veamos el punto A de la izquierda con la alidada en su última posicion $a''b''$ (fig. 197; lám. 13), con lo cual las líneas ab y $a'b'$ habrán tomado las posiciones que se ven en la figura; se fija el limbo y dejando libre la alidada se la dirige al punto B, siendo su nueva posicion la $a'''b'''$, y el arco $aa'a''a'''$ el *triplo* del aa' ó la medida del *triplo* del ángulo ACB. De la misma manera se continuaría, si se quisiese tomar el cuádruplo, el quíntuplo, y en general, un múltiplo cualquiera del ángulo propuesto.

Si llamamos en general A el valor del arco total recorrido, tendremos $A = aa' + a'a'' + a''a''' + \ldots$; y como $aa' = a'a'' = a''a''' = \ldots$, llamando n al número de veces que se ha tomado el valor del ángulo propuesto que llamaremos a, tendremos

$$A = an \qquad [5];$$

de donde

$$a = \frac{A}{n}:$$

luego vemos, que para obtener el ángulo propuesto, se divide el valor que determina la última posicion de la alidada, por el número de veces que se ha medido dicho ángulo.

Una de las ventajas de este método es que puede hacer sensibles fracciones muy pequeñas del ángulo observado; lo cual es de mucha utilidad, pues por muy precisos que sean los instrumentos en su construccion, nunca son todo lo exactos que sería de desear. Supongamos que por unas causas ó por otras, solo se puede obtener el valor de un ángulo con la aproximacion $\frac{1}{d}$, siendo d el número de partes en que podemos concebir dividida una de las menores divisiones del limbo. Si el ángulo se midiese una vez, se cometería el expresado error $\frac{1}{d}$, por no poderlo apreciar; pero si se toma un cierto múltiplo del ángulo, y llamamos n el factor que se necesita para obtener dicho múltiplo, el error en el arco total recorrido será de $\frac{1}{d} \times n = \frac{n}{d}$; de modo que la fórmula [5] hallada en la hipótesis de medirse con exactitud los arcos en cada operacion, sería realmente

$$A = an + \frac{n}{d} \qquad [6]$$

si los errores son por exceso, y

$$A = an - \frac{n}{d} \qquad [7]$$

si son por defecto; y sacando el valor de a en ambas ecuaciones, será en la primera

$$a' = \frac{A}{n} - \frac{1}{d} \qquad [8],$$

y en la segunda

$$a = \frac{A}{n} + \frac{1}{d} \qquad [9],$$

donde vemos, que el ángulo resulta como debe ser, con el error rebajado en el primer caso y aumentado en el segundo, y que así obtenemos la medida del ángulo verdadero, que no se hubiera conseguido sin la repeticion.

Otra de las ventajas que resultan de la repeticion de los ángulos, es la de corregir los errores que provienen de los defectos de division en la graduacion de los limbos. Rara vez, en efecto, las divisiones de los limbos están hechas con toda exactitud, por mucha que sea la práctica del artista que haya intervenido en su construccion, como casi siempre se verifica en todos los trabajos materiales; pero estas inexactitudes solo tienen lugar en algunos de los puntos de la division.

Ahora bien, como cada vez que se repite el ángulo cuyo valor se busca, la línea de fé de la alidada va á parar á distinto punto, es muy probable que haya compensaciones en los errores, que sin la repeticion no se evitarían nunca. Además, al verificar la division por el número de veces que se repite el ángulo, los errores se disminuirían y aunque no hubiese la compensacion dicha anteriormente, es decir, aun cuando todos los errores de las medidas se acumulasen, lo que no es muy probable, al hacer la division, el error final que resultaría, sería menor que el mayor de todos ellos, á no ser en el caso poco probable tambien, de que fuesen todos iguales.

296. Cuando para la repeticion de los ángulos se hace uso de un limbo de círculo entero provisto de dos alidadas de anteojo giratorias alrededor del centro del limbo, la operacion se hace con mucha más rapídez.

Sea el ángulo ACB (fig. 198; lám. 13); colocaremos, como ya se ha dicho, el limbo de modo que su centro corresponda con el vértice del ángulo, fijaremos al limbo la alidada superior *ss*, de modo que su línea de fé esté coincidiendo con la línea (0 — 180°), le haremos girar alrededor de su centro en el sentido que marca la flecha, y dirigiremos la visual al punto A de la izquierda; fijando despues el limbo, se dirigirá la alidada inferior *ii* al punto B de la derecha, con lo cual habremos tomado el arco

is, valor del ángulo ACB Se fijará la alidada inferior ii al limbo, y se hará girar á este en el sentido indicado, hasta que por dicha alidada inferior podamos dirigir la visual al punto A de la izquierda, con lo cual tomará la posicion ii (fig. 199; lám. 13) y la alidada superior estará en ss; dejando ahora libre esta alidada se la dirigirá al punto B, con lo cual tomará la posicion $s's'$, y el arco ss' recorrido por ella será el *duplo* del valor del ángulo ACB.

Ahora podemos suponer que el punto s' hace veces de *cero*, y repetir la misma operacion, para lo cual, fijaremos la alidada superior $s's'$ al limbo, y haremos girar á este hasta que podamos dirigir por ella la visual al punto A de la izquierda, con lo que tomará la posicion $s's'$ (fig. 200; lám. 13), y respectivamente la alidada inferior la ii y la línea (0—180°) la ss; fijaremos el limbo, y dejando libre la alidada inferior ii, la dirigiremos al punto B de la derecha, con lo que tomará la nueva posicion $i'i'$; fijando esta alidada inferior $i'i'$ al limbo, haremos girar á este hasta que veamos por ella el punto A, con lo cual la alidada inferior habrá tomado la posicion $i'i'$ (fig. 201; lám. 13), la superior estará en $s's'$; se fijará el limbo, y dejando libre la alidada superior se la dirigirá al punto B; entonces se hallará dirigida segun $s''s''$, y el arco ss'' contado desde cero en sentido de la graduacion, será el *cuádruplo* del valor del ángulo ACB.

Siguiendo de este modo, iríamos obteniendo los múltiplos *pares* del ángulo propuesto, y por lo tanto, la operacion se verificará con doble velocidad que cuando el limbo está provisto de un solo anteojo.

297. *Correccion de la excentricidad de las alidadas en la repeticion de los ángulos.*—Supongamos que los anteojos de las alidadas son excéntricos, y propongámonos hallar la correccion necesaria para obtener el verdadero valor del ángulo ACB (fig. 202; lám. 13), por medio de la repeticion explicada (296). Demos al anteojo superior la direccion DA, habiendo hecho antes la coincidencia de los ceros, y al anteojo inferior la direccion EB. Se hará girar al limbo hasta que este último anteojo esté dirigido al objeto A, en cuyo caso habrá tomado la posicion E'A, habiendo recorrido el punto E el arco EE'. El punto D habrá ido á parar á D', recorriendo un arco DD' del mismo número de grados que el EE', y el anteojo superior tomará la direccion D'F. Dejando libre al anteojo superior, y dirigiéndole al punto de la derecha B, segun D''B, el cero de la alidada superior, que se hallaba en D' habrá recorrido el arco D'D'', correspondiente al ángulo D'CD'', que representaremos por m, y el cual sería el duplo del ángulo ACB si los anteojos no fuesen excéntricos.

Si representamos por x el verdadero valor del ángulo ACB, tendremos para el ángulo E'CD'' correspondiente al arco E'EG,

$$E'CD'' = E'CE + ECB + BCD + DCD'' \qquad [1];$$

pero por ser $E'CE = D'CD$, resulta

$$E'CE + DCD'' = D'CD + DCD'' = m;$$

tambien se tiene

$$BCD = ACD - x;$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion [1],

$$E'CD'' = ACD - x + ECB + m \qquad [2].$$

Tambien se tiene por otra parte

$$E'CD'' = E'CA + x + BCD'' \qquad [3].$$

De las ecuaciones [2] y [3] resulta

$$ACD - x + ECB + m = E'CA + x + BCD''.$$

Mudando los signos y trasponiendo, resultará

$$2x - m = ACD + ECB - E'CA - BCD'' \qquad [4];$$

pero tambien, se tienen los valores siguientes:

$$ACD = 90^{o} - a = 90^{o} - \text{sen}.\ a,$$

en razon á que siendo el arco a muy pequeño, la diferencia entre su magnitud y la de su seno es tambien muy pequeña; y poniendo en vez de sen. a, su igual $\frac{e}{L}$ (18), en cuya expresion e es la excentricidad CD del anteojo superior, y L la longitud del lado AC del ángulo ACB que se mide, será

$$\text{sen}.\ a = \frac{e}{L};$$

y como el arco a es generalmente de pocos segundos, dividiendo por sen. 1'', la expresion anterior se convertirá en

$$\frac{\text{sen}.\ a''}{\text{sen}.\ 1''} = \frac{e}{L\ \text{sen}\ 1''};$$

pero como en virtud de la pequeñez del arco a, puede suponerse que sen. a'' contiene á sen. $1''$ tantas veces como unidades tiene a, resulta

$$\text{sen. } a = \frac{e}{\text{L sen. } 1''};$$

$$\text{ACD} = 90^\circ - \frac{e}{\text{L sen. } 1''};$$

y de un modo análogo, llamando e' á la excentricidad CE del anteojo inferior, y L′ á la longitud CB, obtendremos los valores

$$\text{ECB} = 90^\circ - \frac{e'}{\text{L}' \text{ sen } 1''};$$

$$\text{E}'\text{CA} = 90^\circ - \frac{e'}{\text{L sen. } 1''};$$

$$\text{BCD}'' = 90^\circ - \frac{e}{\text{L}' \text{ sen. } 1''};$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion [4], será sucesivamente

$$2x - m = 90^\circ - \frac{e}{\text{L sen. } 1''} + 90^\circ - \frac{e'}{\text{L}' \text{ sen } 1''} - 90^\circ + \frac{e'}{\text{L sen } 1''} - 90^\circ + \frac{e}{\text{L}'\text{sen. } 1''};$$

$$2x - m = \frac{e'' - e}{\text{L sen. } 1''} + \frac{e - e'}{\text{L}' \text{ sen } 1''};$$

y dividiendo por 2,

$$x - \frac{m}{2} = \frac{e' - e}{2\text{L sen. } 1''} + \frac{e - e'}{2\text{L}' \text{ sen. } 1''} \qquad [5].$$

Si la diferencia $x - \frac{m}{2}$, representada en segundos por el segundo miembro de esta ecuacion, resultase positiva, indicaría que el ángulo verdadero x era mayor que la mitad del m recorrido por el cero del anteojo superior; y por lo tanto sería necesario añadir á la mitad de este arco m, el número de segundos dado por el segundo miembro de la ecuacion [5].

Si fuese negativa la expresada diferencia, sería preciso restarla de $\frac{m}{2}$; y si fuese *cero*, $\frac{m}{2}$ sería el valor de x como en el caso en que los anteojos son céntricos.

298. La correccion expresada por el segundo miembro de la ecuacion [5] es tanto menor, cuanto mayores son las distancias L y L′, y menores las excentricidades e y e'; siendo siempre de muy pocos segundos, y nula cuando se aplica á los tres ángulos de un mismo triángulo. En efecto, para el ángulo A, la correccion será

$$\frac{e'-e}{2b \text{ sen. } 1''}+\frac{e-e'}{2c \text{ sen. } 1''};$$

para el ángulo B,

$$\frac{e'-e}{2c \text{ sen. } 1''}+\frac{e-e'}{2a \text{ sen. } 1''};$$

y para el ángulo C,

$$\frac{e'-e}{2a \text{ sen. } 1''}+\frac{e-e'}{2b \text{ sen. } 1''};$$

siendo igual á cero la suma de estas tres cantidades.

299 En la ecuacion [5], hallada para el caso más general, podemos hacer varias hipótesis. Si suponemos, por ejemplo, que el anteojo superior pasa por el centro, en cuyo caso será $e=0$, la fórmula [5] se convertirá en

$$x-\frac{m}{2}=\frac{e'}{2\text{L sen. } 1''}-\frac{e'}{2\text{L}' \text{ sen. } 1''} \qquad [6].$$

Un resultado análogo obtendríamos haciendo $e'=0$.

300. Si las excentricidades son iguales y opuestas, tendríamos $e=e'$, y en la ecuacion [5] resultaría

$$x=\frac{m}{2};$$

donde vemos que la correccion es nula.

Si las excentricidades son iguales y del mismo lado, una cualquiera de ellas e, por ejemplo, cambiará de signo, y la ecuacion [5] será entonces

$$x-\frac{m}{2}=\frac{2e'}{2\text{L sen. } 1''}-\frac{2e'}{2\text{L}' \text{sen } 1''}.$$

Esta correccion, igual á

$$2\left(\frac{e'}{2\text{L sen. } 1''}-\frac{e}{2\text{L}' \text{sen } 1''}\right),$$

es dupla de la [6] que corresponde al caso en que el anteojo superior es céntrico (299).

301. **Nonius ó Vernier.**—Hemos dicho (243) que los instrumentos topográficos estaban destinados á la medida de las rectas y de los ángulos. Cuando esta medida debe hacerse con la mayor precision posible, conviene tener instrumentos que aprecien las más pequeñas cantidades de longitud y angulares; para lo cual sería preciso que tanto las medidas de longitud, como los limbos de los instrumentos angulares, contuviesen las divisiones más pequeñas de la unidad; lo que produciría confusion en las de longitud sin poderse conseguir el objeto, y en los limbos el que estos fuesen muy grandes y nada cómodos para su manejo y trasporte. En efecto, en una regla dividida en metros, decímetros, centímetros y milímetros, no sería posible dividir estos últimos en partes iguales para apreciar décimas, vigésimas...... partes de milímetro; y en un limbo de tamaño cómodo y proporcionado, dividido en medios grados, tercios ó cuartos de grado, tampoco sería posible la division de estas partes en los minutos correspondientes. Una nueva pieza adicional á unos y otros, que evitando los mencionados inconvenientes, nos dé los resultados que daría la division si fuese practicable, y nos determine con bastante aproximacion los resultados, es de la que vamos á ocuparnos; la cual tiene por objeto la apreciacion de las fracciones de la menor division de la unidad de medida, en los instrumentos destinados á determinar las longitudes y los ángulos. La invencion de esta pieza es muy ingeniosa, y ha recibido el nombre de *Nuñez* ó *Nonius* porque se atribuye á Pedro Nuñez, y los extranjeros le suelen llamar *Vernier* porque la atribuyen á Pedro Vernier, matemático francés que murió en 1637.

En la pág. 331 de la tercera edicion del tomo primero, parte segunda del Tratado elemental de matemáticas de Vallejo, se lee la siguiente nota:

«Segun aparece de una obra de Pedro Nuñez, impresa en Lisboa el año 1542, intitulada *De crepúsculis*, su division consistía en colocar varias escalas paralelas ó círculos concéntricos diferentemente divididos; y Pedro Vernier publicó en Bruselas en 1631 un pequeño tratado con el fin de perfeccionar los instrumentos astronómicos de Ticho-Brahe en que hace uso de la division actual.»

De donde se deduce que Nuñez fué el inventor de este medio, y Vernier el que generalizó su uso.

En la pág. 517 de la cuarta edicion del tomo primero del compendio de Matemáticas del mismo Vallejo, se lee tambien esta nota:

«D. Ramon Fernandez Reguero, Catedrático de Agricultura en el Seminario de la Vega de Rivadeo, ha inventado un nuevo *Nuñez* sumamente ingenioso que se ha presentado á la Sociedad Económica Matritense; y aunque no tiene todo el grado de rigor matemático, da los resultados con tal aproximacion, que en varios casos de la práctica puede ser útil é importante.»

Definicion y division.—Se llama *nonius* ó *vernier* la pieza adicional que acompaña á los instrumentos, para determinar con cierta aproximacion la medida de las longitudes y de los arcos de círculo.

El nonius se construye en línea recta y en arco de círculo; el primero sirve para apreciar las longitudes, y le llamaremos *nonius recto;* y el segundo para apreciar el valor de los ángulos ó de los arcos del círculo que los miden, y le llamaremos *nonius circular*.

302. **Nonius recto**.—Supongamos que se trata de medir con precision una longitud, y que la medida que se ha de emplear es una regla AB (fig. 203; lám. 13), dividida en metros, decímetros, centímetros y milímetros, que representamos en mayor tamaño que el natural para la mejor inteligencia. Para apreciar las fracciones de milímetro, se toma otra regla pequeña *ab* de la longitud de 9 milímetros, y se divide en 10 partes iguales. Esta reglita es lo que se llama *nonius*. Para apreciar el valor de cada una de las divisiones del nonius con relacion á la division menor de la regla, habrá que dividir 9 milímetros, valor de las 10 partes del nonius por 10, número de partes iguales en que se ha de dividir la longitud de 9 milímetros; el cociente $\frac{9}{10}$ de milímetro, representará dicho valor. La diferencia entre una division de la regla y una del nonius será $\frac{1}{10}$ de milímetro.

Ahora bien, supongamos que los ceros de la regla y del nonius se hallan en contacto: las divisiones marcadas con el número 1 de ambas reglas (fig. 203; lám. 13) no coincidirán, y se hallarán separadas entre sí la cantidad $\frac{1}{10}$ de milímetro; las divisiones 2 se hallarán separadas $\frac{2}{10}$ de milímetro, y así sucesivamente. Del mismo modo, si suponemos coincidiendo las divisiones 1 de la regla y del nonius (fig. 204; lám. 13), los ceros no coincidirán, y se hallarán separados entre sí la cantidad $\frac{1}{10}$ de milímetro; si coinciden las divisiones 2 (fig. 205; lám. 13), los ceros distarán entre sí $\frac{2}{10}$ de milímetro, y así sucesivamente. En virtud de estas consideraciones, será fácil comprender la manera de emplear el nonius para la apreciacion de las longitudes.

303. *Usos del nonius recto*.—1.° *Dada una longitud cualquiera, determinar su valor*.

Para hacer aplicacion del nonius á la medida de una longitud, supongamos que se trata de la de un objeto cualquiera CD (fig. 206; lám. 13), la cual además de tener 3 centímetros y 6 milímetros de la regla que se toma por unidad, contenga una fraccion *ra* de milímetro que se trata de valuar. Si á continuacion del objeto CD, y en contacto suyo y de la regla colocamos el nonius *ab*, que tambien suele hallarse dispuesto de modo que pueda correr á lo largo de la regla AB, no habrá más que examinar con cuidado cuál de las divisiones del nonius *ab* coincide con una de las de la regla AB; y si fuese la octava, por ejemplo, entonces la division 6 de la regla unidad AB, que podemos suponer hace veces de línea cero, se hallará separada de la línea cero del nonius, la distancia de $\frac{8}{10}$ de milímetro, y este será el valor de la fraccion *ra* de milímetro que se trataba de valuar; de modo que en el ejemplo actual la longitud del objeto CD es $0^m,0368$.

2.° *Determinar el valor de una longitud cualquiera en la medida adoptada, para referirla ó tomarla despues en el terreno ó en el plano.*

Sea la distancia $0^m,0368$ la que queramos fijar en la regla unidad. Haremos correr el nonius á lo largo de la regla AB (fig. 206 sin el cuerpo CD; lám. 13), hasta que el cero del nonius coincida con la division 6 milímetros del cuarto centímetro, y tendremos desde el punto A de la regla, hasta la division 6 milímetros tomada, la distancia $0^m,036$; para tomar además las $\frac{8}{10}$ de milímetro, haremos correr el nonius hasta que coincida la division 8 del mismo, con la primera que encuentre de la regla, que será tambien la octava á contar desde la division 6 milímetros, que hace ahora veces de division *cero*, y la parte *ra* será el valor de la fraccion $\frac{8}{10}$ de milímetro que queríamos apreciar; la cual añadida á la distancia comprendida entre el punto A y la division 6 milímetros, dará la longitud A*a*, cuyo valor es el $0^m,0368$ que se quiere determinar.

Si el nonius apreciase de $\frac{2}{10}$ en $\frac{2}{10}$ de milímetro, lo que sucedería si hubiéramos tomado cuatro partes de la regla y las hubiéramos dividido en cinco en el nonius, pues entonces este hubiera apreciado $\frac{1}{5}$ de milímetro igual á $\frac{2}{10}$ de milímetro, se dividiría el número $\frac{8}{10}$ de milímetro por $\frac{2}{10}$ de milímetro que aprecia el nonius, y el cociente 4 nos indicaría que habíamos de hacer coincidir la cuarta division del nonius con la primera que encontrase de la regla.

Si la referencia se quiere hacer al plano en el papel, además de poder seguir este método, adaptando al doble decímetro de madera ó marfil su correspondiente nonius, se hace uso, y es lo que generalmente se acostumbra, de las escalas de trasversales (191).

El nonius en línea recta tiene además aplicacion en varios instrumentos de física, de que tambien echa mano la Topografía, como sucede en el barómetro.

304. **Nonius circular.**—Supongamos que se trata de medir con pre-

cision un ángulo ó su arco de círculo correspondiente: el nonius en forma circular concéntrica con los limbos de los instrumentos angulares podrá apreciar en dicha medida, además de los grados, medios, tercios y cuartos de grado en que se dividen los limbos, los minutos y segundos que no sería cómodo marcar en estos. Los principios son los mismos, y todo cuanto hemos dicho del nonius en línea recta es aplicable al nonius en arco de círculo.

En efecto, sea AB (fig. 207; lám. 13) una parte de un limbo circular, dividido, por ejemplo, en grados y medios grados. Si se toma una pieza *ab* circular y concéntrica con la anterior, dispuesta de modo que pueda girar alrededor del centro, siempre en contacto con el limbo, y que comprendiendo 9 divisiones de las menores del limbo, es decir, nueve medios grados, se dividiese en diez partes iguales, esta pieza sería el nonius ó vernier circular, y se podrán repetir las mismas consideraciones que ya hemos hecho tratando del nonius recto; pues si estuvieran en contacto los ceros, las divisiones 1 se hallarían separadas $\frac{1}{10}$ de medio grado ó 3 minutos; las divisiones 2 se hallarían separadas $\frac{2}{10}$ de medio grado ó 6 minutos, y así sucesivamente: y del mismo modo, si coincidiesen las divisiones 1, los ceros se hallarían separados entre sí $\frac{1}{10}$ de medio grado; si coincidiesen las divisiones 2, los ceros se hallarían separados entre sí $\frac{2}{10}$ de medio grado, y así sucesivamente.

305. *Usos del nonius circular.—1.º Dado un ángulo en el terreno ó en el papel, determinar el número de grados y minutos que contiene.*

Si tratásemos de medir el ángulo AOC (fig. 208; lám. 13), se haria coincidir el diámetro (0—180°) del limbo con uno de los lados AO del ángulo, y el centro con el vértice; y si suponemos que el otro lado CO cae á la derecha de la division 16, entonces el ángulo comprenderá 16 de las menores divisiones del limbo, que suponiendo este dividido en medios grados serán 8 grados, y además la fraccion ó parte de medio grado *rs* que habrá que apreciar por medio del nonius, el cual va colocado en los instrumentos angulares de modo que la línea 0 del mismo coincide exactamente con el rádio movible CO ó línea de fé de la alidada giratoria; para apreciar dicha fraccion se examinará con cuidado qué division del nonius coincide más exactamente con una de las del limbo, y si fuese la 5.ª, por ejemplo, la fraccion *rs* valdría $\frac{5}{10}$ de medio grado ó sean 15′; de modo que el ángulo AOC valdría 8° 15′.

El ángulo AOC (fig. 209; lám. 13) valdria 6° 30′ más la fraccion *rs*, y como la línea del nonius que coincide con una del limbo es la 7.ª valdrá 21′: de modo que el valor del ángulo en cuestion será 6° 51′.

2.ª *Determinar el valor de un ángulo, ó de su arco de círculo correspondiente, en el limbo del instrumento angular adoptado, para referirle ó tomarle despues en el terreno ó en el plano.*

Supongamos que teniendo un instrumento cuyo limbo se halle dividido en medios grados, provisto de su correspondiente nonius que aprecie 3′, como en los casos anteriores, se quiera tomar en el instrumento un ángulo de 8° 15′. Haremos correr la alidada OC (fig. 208; lám. 13) hasta que el cero del nonius coincida con la division 16 del limbo, con lo cual tendremos los 8°: dividiendo despues el número 15′ por 3′ que aprecia el nonius, el cociente 5 indicará que se ha de mover el nonius en el sentido de la graduacion hasta que coincida la quinta division del mismo con la primera que encuentre del limbo, que será tambien la quinta suponiendo el cero en la 16; y el arco *as* será el que exprese el valor 8° 15′ que se busca.

Si se quiere tomar el ángulo 6° 51′ (fig. 209; lám. 13), se colocará el cero del nonius en la division del limbo que marca los 6° 30′, que será la 13; para tomar los 21′ que faltan, se dividirá esta cantidad por 3′, y el cociente 7 nos indicará que se ha de mover el nonius hasta que la sétima division del mismo coincida con la primera que encuentre del limbo; el arco *as* representará el valor 15° 51′ del ángulo de que se trata.

306. *Disposiciones particulares que presenta el nonius.*—Algunas veces el nonius está dividido en dos partes iguales que se hallan á uno y otro lado del cero (fig. 210; lám. 13), estando ambas numeradas en el sentido de la graduacion. Esta disposicion permite dar al nonius una forma simétrica respecto del cero, que va colocado sobre la línea de fé, acortando su longitud, y no altera en nada la manera de servirse de él para la apreciacion de los ángulos.

Cuando el limbo á que acompaña el nonius presenta dos divisiones, el nonius se halla doblemente graduado, ó repetido en sentidos contrarios; y debe tenerse presente que en la apreciacion de un ángulo cualquiera, debe emplearse el nonius que está graduado en el mismo sentido que la graduacion de que se hace uso en el limbo.

307. *Verificaciones y correcciones.*—Para que tanto el nonius recto que acompaña á una medida longitudinal, como el circular que acompaña al limbo de un instrumento angular, reunan las circunstancias de exactitud necesarias, se examinará con cuidado:

1.° Si en el primer caso, los cantos del nonius y de la regla, y en el segundo los bordes del nonius y del limbo, se ajustan siempre exactamente en todas sus posiciones.

2.° Si en cualquiera posicion en que se coloque el nonius, de modo que su division *cero* coincida con una cualquiera de las de la regla ó limbo, su última division coincide tambien exactamente con otra de la regla ó limbo, siendo el número de divisiones del nonius una más que las comprendidas de la regla ó limbo; lo que tambien es una comprobacion de la exactitud de las divisiones de ambos.

Correcciones.—Si el nonius no reune las circunstancias dichas para ser exacto, da á conocer defectos en su construccion, que no está en la mano del geómetra corregir, y debe desecharse por inútil.

308. **Apreciacion de los nonius en general**.—Si representamos por d el valor de la menor division de la regla ó limbo, por x la diferencia entre una division d de la regla ó limbo y una division del nonius, $d - x$ será el valor de esta última division. Llamando además n al número de divisiones del nonius, el valor de la longitud ab (fig. 203; lám. 13) ó del arco ab (fig. 207; lám. 13) será $(d - x)\, n$. El mismo arco tomado en la regla ó limbo, estará espresado por $d\,(n - 1)$, y podremos establecer la ecuacion

$$(d - x)\, n = d\,(n - 1) \qquad [1];$$

resolviendo esta ecuacion, tendremos sucesivamente

$$dn - nx = dn - d;$$

$$nx = d;$$

$$x = \frac{d}{n} \qquad [2];$$

ecuacion que nos dice que la apreciacion del nonius, que es la diferencia entre la menor division de la regla ó limbo, y la del nonius correspondiente, es el cociente que resulta de dividir el valor d de la menor division de la regla ó limbo por el número n, que expresa las partes en que se halla dividido el nonius.

La apreciacion del nonius será tanto más sensible, cuanto mayor sea el número de partes que tomen de la regla ó limbo para formarle, y menor el valor d de cada una de dichas partes; lo que puede observarse en los ejemplos que ponemos á continuacion. Vemos, pues que se concibe teóricamente la posibilidad de obtener una aproximacion indefinida; sí bien en la práct ca solo puede conseguirse hasta cierto límite, por la dificultad de observar con exactitud cuál es la division del nonius que más coincide con una de las de la regla ó limbo, aun valiéndonos del microscopio (226) para que sea más fácil la lectura, dificultad que aumenta á medida que las partes del nonius se diferencian menos de las de la regla ó limbo. En las medidas de longitud, por ejemplo, la mayor aproximacion á que puede aspirarse es la de $\frac{1}{50}$ de milímetro.

309. Teniendo en cuenta lo que acabamos de exponer, podemos establecer la siguiente regla práctica para determinar la apreciacion del nonius:

Dado un instrumento que lleva nonius se observará con el mayor cuidado *el número de las menores divisiones de la regla ó limbo que comprende su correspondiente nonius; se dividirá despues el valor de la menor division de la regla ó limbo por dicho número aumentado en una unidad, que son las partes en que se halla dividido el nonius, y el cociente que resulte marcará la fraccion que aprecia el nonius de la expresada menor division*

Ejemplos. 1.º Si $d = 1$ milímetro, y se han tomado 19 partes de la regla para dividirlas en 20 en el nonius, será $\frac{d}{n} = \frac{0,001}{20} = 0,00005$, ó $\frac{d}{n} = \frac{1^{mm}}{20} = 0,^{mm}05$; de modo que el nonius apreciará media décima de milímetro.

2.º Si d $1^{mm},625$ y se toman 4 partes de la regla para dividirlas en 5 en el nonius, será $\frac{d}{n} = \frac{1^{mm},625}{5} = 0^{mm},325$.

3.º Si $d = 1^{\circ} = 60'$, y se han tomado 29 partes del limbo para dividirlas en 30 en el nonius, será $\frac{d}{n} = \frac{60'}{30} = 2'$

4.º Si $d = 1^{\circ} = 60'$, y se han tomado 19 partes del limbo para dividirlas en 20 en el nonius, será $\frac{d}{n} = \frac{60'}{20} = 3'$

5.º Si $d = 1^{\circ} = 60'$, y 9 partes del limbo se han dividido en 10 partes en el nonius, será $\frac{d}{n} = \frac{60'}{10} = 6'$.

6.º Si $d = \frac{1}{2}$ grado $= 30'$, y se toman 29 partes del limbo para dividirlas en 30 en el nonius, será $\frac{d}{n} = \frac{30'}{30} = 1'$

7.º Si $d = \frac{1}{3}$ de grado $= 20'$, y se toman 59 partes del limbo para dividirlas en 60 en el nonius, será $\frac{d}{n} = \frac{20'}{60} = \frac{1200''}{60} = 20''$.

8.º Si $d = \frac{1}{4}$ de grado $= 15'$, y se toman 14 partes del limbo para dividirlas en 15 en el nonius, será $\frac{d}{n} = \frac{15'}{15} = 1'$

9.º Si $d = \frac{1}{12}$ de grado $= 5'$, y se toman 29 partes del limbo para dividirlas en 30 en el nonius, será $\frac{d}{n} = \frac{5'}{30} = \frac{300''}{30} = 10''$

10.° Si $d = \frac{1}{12}$ de grado $= 5'$, y se toman 59 partes del limbo para dividirlas en 60 en el nonius, será $\frac{d}{n} = \frac{5'}{60} = \frac{300''}{60} = 5''$

Puede conseguirse la apreciacion última de 5″, si las dimensiones del limbo del instrumento lo permiten ó el esmero empleado en su construccion. En una de las sesiones de la Academia de Ciencias de París, presentó Mr. Arago un instrumento que repetía los ángulos en el sentido horizontal y vertical, siendo tal la precision y claridad de la graduacion, que podian leerse por medio de los nonius en ambos limbos hasta los expresados 5″ sin temor de equivocarse, á pesar de no exceder sus rádios de tres pulgadas francesas. Las partes de que se componen estos excelentes instrumentos, así como las graduaciones, están hechas por medios mecánicos muy ingeniosos.

310. Si despejamos n en la ecuacion [2] (308), resultará

$$n = \frac{d}{x} \qquad [3];$$

que nos dice que para saber las partes de que ha de constar el nonius, conocida la division menor de la regla ó del limbo, y lo que el nonius ha de apreciar, no habrá más que dividir la primera cantidad por la segunda.

Ejemplos.—1.° Siendo $d = 1$ milímetro, y $x = 0{\cdot}05$ de milímetro, tendremos

$$n = \frac{1^{mm}}{0^{mm},05} = \frac{100}{5} = 20;$$

es decir, que siendo 20 el número de partes del nonius, deberán tomarse 19 partes de las menores de la regla, ó 19 milímetros, para dividir esta distancia en 20 partes iguales.

2.° Si $d = 30'$, y $x = 1'$, resultará

$$= \frac{30'}{1'} = 30;$$

luego deberemos tomar 29 medios grados, que son las menores divisiones del limbo, para dividir esta cantidad en 30 partes iguales.

3.° Si $d = 20'$, y $x = 20''$, será

$$n = \frac{20'}{20} = \frac{20 \times 60''}{20} = 60;$$

luego se tomarán 59 partes de las menores del limbo, que son tercios de grado, para dividir esta cantidad en 60 partes iguales.

311. Como $d-x$ representa en la ecuacion [1] (308) el valor de una de las divisiones del nonius, si la llamamos v, resultará

$$vn = dn - d; \qquad \text{de donde}$$

$$v = d - \frac{d}{n} \qquad [4];$$

que nos dice que el valor de una division del nonius, se obtiene restando del valor de la menor division de la regla ó limbo el cociente que resulta de partir esta division por el número de partes de que consta el nonius.

Ejemplos.—1.º Si $d = 1^{mm}$, y $n = 20$,

$$v = 1^{mm} - \frac{1^{mm}}{20} = \frac{19^{mm}}{20}.$$

2.º Si $d = 30'$, y $n = 30$,

$$v = 30' - \frac{30'}{30} = 30' - 1' = 29'$$

3.º Si $d = 20'$, y $n = 60$,

$$v = 20' - \frac{20'}{60} = 20' - \frac{1'}{3} = 19'\frac{2'}{3} = 19'\,40''.$$

Luego los valores de una division del nonius serán en el primer caso $\frac{19}{20}$ de milímetro, en el segundo 29 minutos, y en el tercero 19 minutos y $\frac{2}{3}$ de minuto ó $40''$.

312. Conocida la regla (309) que se sigue para averiguar la apreciacion de un nonius cualquiera, y en virtud de la marcha igual seguida para la medicion de las rectas y de los arcos de círculo, podremos exponer las dos reglas prácticas siguientes:

1.ª *Para determinar el valor de una longitud ó de un ángulo con un instrumento que lleve nonius, se añadirá al número entero de menores divisiones de la regla ó limbo, que señale el cero del nonius, la fraccion de dicha division menor, comprendida entre la última de la regla ó limbo y el cero del nonius: la cual se determinará multiplicando la apreciacion de este por el número que indique la division del nonius que más coincida con una de las de la regla ó limbo.*

2.ª *Para tomar en un instrumento que lleve nonius el valor de una longitud ó de un ángulo dado, se verá cuál es el mayor número de las menores divisiones de la regla ó limbo contenido en la cantidad dada, y se hará coincidir el cero del nonius con la division de la regla ó limbo que indique dicho número; se dividirá despues el exceso de la cantidad dada sobre dicho mayor número de menores divisiones por la apreciacion del nonius, y el cociente expresará la division de este último que hemos de hacer coincidir con la primera que encuentre de la regla ó del limbo, moviendo de nuevo el nonius en el sentido de la graduacion.*

313. Cuando no haya coincidencia entre una de las divisiones del nonius y una de las de la regla ó limbo, en cuyo caso se hallarán comprendidas dos divisiones a y b (fig. 211; lám. 13) del nonius entre dos divisiones A y B de la regla ó limbo, la lectura de este dará el valor que se busca, aproximado por defecto ó por exceso; y vamos á determinar dicha aproximacion en el caso en que el punto medio C de la parte AB de la regla ó limbo, coincida con el punto medio c de la division ab del nonius. El valor de x que da la ecuacion [1] sería en este caso

$$x = \mathrm{AB} - ab = \frac{d}{n};$$

y dividiendo por 2 ambos miembros, resultaría

$$\frac{x}{2} = \frac{\mathrm{AB} - ab}{2} = \mathrm{AC} - ac = \frac{d}{2n};$$

de modo, que si al hacer una lectura se tomase la línea a del nonius por tipo de coincidencia, como las líneas que verdaderamente coinciden son las C y c, el error por defecto seria $\frac{d}{2n}$; y si se toma por tipo de coincidencia la division b, el error por exceso será tambien $\frac{d}{2n}$; de modo, que siendo la apreciacion del nonius en general $\frac{d}{n}$, la aproximacion en el caso actual será de $\frac{d}{2n}$.

314. Por último, para conseguir toda la aproximacion posible á la exactitud de la medida de un ángulo en todos los casos, se hará uso de la repeticion de los ángulos, á fin de descubrir el error que no percibiríamos con la medida del ángulo simple; pues si el instrumento de que hiciésemos uso tuviese el limbo dividido en medios grados, por ejemplo, y el nonius apreciase $\frac{1}{30}$ de las menores divisiones, es decir, un minuto,

suponiendo que al medir el ángulo simple nos equivocásemos en $\frac{1}{5}$ de minuto por exceso, no podríamos conocerlo; siendo así que tomando el ángulo quíntuplo del propuesto, la fórmula $A = an + \frac{n}{d}$ [6] (295) en la cual es $\frac{1}{d} = \frac{1}{5}$ de minuto, y $n = 5$, nos daría

$$A = a \times 5 + \frac{5'}{5} = a \times 5 + 1';$$

y como se hace patente la cantidad 1 minuto, la fórmula $a = \frac{A}{n} - \frac{1}{d}$ dará $a = \frac{A}{5} - \frac{1'}{5}$, es decir, que saldrá el ángulo tal como debe ser, con el error descontado $\frac{1}{5}$ de minuto que le sobraba; y si fuese el error por defecto, la fórmula

$$a = \frac{A}{n} + \frac{1}{d} \quad [9]\,(295),$$

nos daría $a = \frac{A}{5} + \frac{1'}{5}$; es decir, el verdadero valor del ángulo, pues resulta aumentado en $\frac{1}{5}$ de minuto que le faltaba.

315. *Errores en la lectura de los ángulos.*—En la lectura de las divisiones del limbo y del nonius se cometen con frecuencia errores de lectura, los cuales son de 10° y 5°, y de $10'$ y $5'$, por lo que es preciso proceder en la lectura con el mayor cuidado para no equivocarse; y por lo tanto, despues de haber anotado el valor del ángulo observado, no debe cambiarse la posicion del limbo y del nonius, hasta haberla repetido.

316. **Tornillos.**—No nos proponemos hablar aquí de los tornillos, considerándolos como una de las máquinas de que trata la Mecánica, ni tampoco de su uso que se conoce generalmente, y por lo cual nosotros los hemos considerado ya en algunos de los aparatos descritos; solo nos ocuparemos de ellos para definirlos y clasificarlos, con respecto á las distintas funciones á que están destinados como una de las partes principales que acompañan á los instrumentos topográficos.

Se llama *tornillo* á un cilindro recto de base circular, en cuya superficie lateral tiene labrado un filete prismático triangular (fig. 212; lámina 13), ó cuadrangular (fig. 213; lám. 13), en forma de espiral.

El tornillo entra en otra pieza EF llamada *tuerca*, en la cual hay practicado un taladro cilíndrico que tiene otro rebajo tallado inversamente que el del cilindro AB. El tornillo va unido á otro cilindro CD de mayor rádio y muy pequeño grueso, que se llama *cabeza del tornillo*, y sirve para hacer girar á este é irle introduciendo en la tuerca. El cilindro AB suele presentar una parte AG sin filete. Unas veces la tuerca está fija, y el tornillo es el que se mueve (fig. 212; lám. 13), y otras está fijo el tornillo, y la tuerca es la que se mueve, como en la fig. 213 (lám. 13). La fuerza con que obran los tornillos es tanto mayor cuanto más inmediatos se hallan los filetes ó entalladuras, y mayor es el rádio de la cabeza.

Segun los diferentes usos á que se destinan los tornillos en las piezas de los instrumentos, les daremos distintos nombres.

317. *Tornillos de union.*—Se llaman así cuando se usan para unir invariablemente dos piezas cualesquiera de las que forman parte de los instrumentos, tales como las *ab* y *cd* (fig. 214; lám. 13). La tuerca está practicada en la inferior *cd*, y haciendo girar al tornillo para introducirlo en dicha tuerca, que se supone fija, se logrará la union completa de esta pieza con la *ab*. Sin embargo, con un solo tornillo pudiera suceder que una fuerza mayor aplicada á la pieza *ab* hiciese girar á esta alrededor de su centro; pero empleando dos tornillos se evitará este inconveniente.

318. *Tornillos de presion.*—Se llaman así los que se usan para detener el movimiento de una pieza dispuesta de modo que pueda moverse libremente sobre otra, fijando así la primera á la segunda, y haciéndolas formar un solo cuerpo.

Sea un cilindro AB (fig. 215; lám. 13) que puede moverse libremente á lo largo de otro cilindro hueco *abcd* dentro del cual va introducido. Si en uno de los dos lados del cilindro hueco se ha practicado una tuerca, el tornillo T que se introduzca en ella, oprimirá al cilindro AB contra el lado opuesto *ad* del cilindro hueco, logrando así que aquel no pueda correr ya dentro de este, y los dos formarán un solo cuerpo. Con el objeto de impedir que el tornillo rehunda la superficie que oprime del cilindro AB, se dispone dentro del cilindro hueco una pieza metálica interior *be*, concéntrica con él y fija solo por el punto *b*, sobre la cual aprieta el tornillo. Lo mismo sucedería si el cuerpo AB fuese un paralelepípedo rectángulo, *abcd* otro hueco dentro del cual se moviese el anterior, y *be* una plancha interior colocada en lo cara *bc*, y fija solo por la parte *b*.

319. Si el tornillo de presion se emplea para unir dos placas de metal, de las cuales la una *cd* (fig. 216; lám. 13) se supone fija, y la otra *ab* colocada sobre ella de modo que pueda girar juntamente con el cilindro hueco *sn*, que encierra dentro de sí al cilindro sólido *ro*, el cual se eleva perpendicularmente á la placa *cd* y formando cuerpo con ella, alrededor del eje comun de los cilindros, se le dispone de la manera siguiente:

Se fija una pieza *fg* á la *cd*, y en la parte saliente se construye una tuerca *m*: un tornillo T, que atraviesa á una pieza *e* de metal, formada de otras dos en ángulo recto, se introduce en la tuerca, y de este modo se concibe que dando vueltas al tornillo, este oprimirá la pieza *e* contra la placa *ab*, uniéndola así con la *cd*, y deteniendo el movimiento en cualquiera de las posiciones en que sea conveniente. Como una vez flojo el tornillo T, la plancha *ab* puede girar sobre la *cd* con bastante velocidad, el tornillo de presion puede permitir ó impedir este giro, y por esta razon se llama tambien *tornillo de movimiento rápido*.

320. Cuando se tiene una placa de metal *ab* (fig 217; lám. 14) provista en su centro de un cilindro hueco *c'd'* que se introduce en la espiga *mn* de un pié P, á fin de que dando una impulsion á la pieza *ab* pueda girar libremente alrededor de su centro, se puede tambien detener su movimiento y fijarla en la posicion que se quiera; para lo cual se unirá invariablemente á dicho pié P una pieza *r* que termine en una plancha *cd*, la cual esté en contacto con la pieza *ab*; colocando despues el tornillo T y la pieza *e* segun hemos explicado anteriormente, no habrá más que dejar flojo el tornillo para que la placa *ab* se mueva libremente, y apretar dicho tornillo en el momento en que se quiera fijar, y que forme todo un solo cuerpo.

321 *Tornillo de ajuste ó coincidencia.*—La combinacion del tornillo de presion, que como hemos dicho permite el movimiento veloz, con un nuevo tornillo que se llama *de movimiento lento*, ó *de ajuste* ó *coincidencia*, porque sirve para producir un movimiento tan pequeño como se quiera, consiguiéndose por este medio fijar con precision las divisiones del nonius de una medida de longitud, ó las cerdas de las alidadas sobre los puntos á que se dirigen, da lugar á un aparato que acompaña á la mayor parte de los instrumentos. Supongamos, en efecto, que se tenga una regla dividida AB (fig 218; lám. 14), y queramos adaptarla un nonius *mn* para medir una longitud; si á continuacion del nonius, en la parte excedente *nr* de la regla en que se halla su division, se fija una pieza *abcd* que abrace á la regla AB y vaya provista de un tornillo de presion T, segun hemos explicado (319), podrá dicho nonius correr á lo largo de la regla con la velocidad que se desée; y apretando dicho tornillo se le podrá fijar en el punto que se quiera. Pero se fijaría con mayor precision en dicho punto, si despues de haber detenido el movimiento veloz próximamente en el punto que se quiere determinar, nos valiésemos de un nuevo tornillo *t* (fig. 219; lám. 14), que tuviese por objeto imprimir un movimiento sumamente lento al nonius, lo cual permitiría hacer coincidir al cero ó á una de sus divisiones exactamente con el punto de la regla que se quiera. Esto se conseguirá, en efecto, por medio de un anillo *m'* fijo á la parte inferior del nonius, dentro del cual gira sin avanzar el tornillo *t*, el cual tiene su tuerca en la pieza *s* unida á la parte inferior de la *abcd*. De este modo, el nonius, la pieza *abcd* y los tortornillos T y *t* forman un solo cuerpo; y todo el aparato así constituido se moverá á lo largo de la regla AB, con la velocidad que se quiera, despues de haber aflojado el tornillo T. Pero si próximamente al punto ó division de la regla que se haya de determinar se aprieta el tornillo T,

entonces se hace formar parte á la regla AB del aparato anterior, y todo queda fijo formando un solo cuerpo. Poniendo entonces en movimiento el tornillo *t*, cuyo filete ó rosca es de muy pequeño paso, y la cabeza de un rádio bastante grande, la rosca *t't''* se irá introduciendo en la tuerca *s*, y por consiguiente el nonius *mn* se irá aproximando lentamente hácia la parte *abcd*, donde obra el tornillo T, sujetando la regla; y por consiguiente se podrá hacer recorrer al nonius la pequeña cantidad que se necesite para lograr la coincidencia del *cero* ó de una de sus divisiones con la que se quiera de la regla AB; motivo por el cual dicho tornillo *t* ha recibido el nombrede tornillo de ajuste ó de coincidencia.

322. Si se tiene un limbo graduado CDE (fig. 220; lám. 14) provisto de una alidada giratoria de anteojo, en cuya regla *mn* se hallan trazados los nonius, y se quiere que dicha regla participe de las dos clases de movimiento que hemos indicado, no habría más que adoptar un mecanismo idéntico al que hemos empleado para las medidas de longitud; para lo cual sujetaríamos á la regla *mn* una pieza de metal *cd* en cuyo estremo dispondríamos el anillo *r*, donde se mueve sin avanzar el tornillo *t*, el que tiene su tuerca en una pieza *s* unida invariablemente á la *ab*, la cual con el tornillo T y otra pieza inferior, oculta en la figura, forma un sistema completamente análogo al que ya hemos descrito (321). Del mismo modo que entonces, basta aflojar el tornillo T para que la pieza *ab* pueda recorrer el canto del limbo CDE, llevando consigo al tornillo *t* y á las piezas *cd* y *mn* con el anteojo AB; todo lo cual forma entonces un solo cuerpo. Se ve que por este medio podemos dirigir fácilmente el eje del anteojo AB próximamente á un punto lejano cualquiera; pero que será muy difícil hacer que la cerda vertical del mismo cubra exactamente á dicho punto; lo cual se consigue apretando el tornillo T: el sistema de presion de que forma parte se fija entonces al limbo CDE (319), y si se hace girar al tornillo *t*, conseguiremos dar al anteojo un movimiento muy lento (321), y haremos coincidir la cerda del anteojo con el punto lejano indicado.

En vez del anillo *r*, la parte lisa del tornillo de ajuste ó coincidencia suele tener una esfera *e* (fig. 221; lám. 14) que ajusta en dos cavidades practicadas en las piezas *ab* y *cd* (fig. 222; lám. 14), que abrazan la esfera *e* del tornillo, y permiten que este gire alrededor de su eje sin avanzar en sentido de su longitud.

323. *Tornillos de nivelacion*.—Los tornillos reciben este nombre cuando se usan con el objeto de colocar en la posicion horizontal, los planos que forman los limbos de los instrumentos, determinando dos rectas horizontales que se crucen, y que son necesarias (58) para fijar dicha posicion.

324. *Tornillos de correccion*.—Se da este nombre á los tornillos cuando se usan con el objeto de que cada una de las partes de un instrumento reuna las circunstancias necesarias para hallarse en disposicion de operar con él, obteniendo toda la precision de que es susceptible (65). Los torni-

llos del retículo (233) son tornillos de correccion, así como los que presentan los niveles, figs 28, 31, 32 y 33 (lám. 2).

324 *a* **Tornillos Micrométricos** —El tornillo micrométrico es un instrumento de precision para la medida de las longitudes, fundado en las propiedades de la *Hélice* perfectamente construida. Se compone de un bastidor de madera ABCD (fig. 752; lám 57), que en uno de sus lados menores AD, tiene un espacio vacío donde se halla la esfera *e* de un tornillo *tt'* que se introduce en la tuerca practicada en una pieza P que puede resbalar con rozamiento suave á lo largo del bastidor ABCD. En el lado AB de este bastidor hay marcada una graduacion, como se vé en la figura, cuyas partes iguales tienen la magnitud del paso de la rosca del tornillo y el *cero* coincide con la línea *mn* en su posicion extrema, que es cuando el tornillo está introducido lo menos posible en la pieza P. Vá unido á este tornillo entre su cabeza *t* y el lado del bastidor AD, un disco de metal *d* al que sirve de eje, y en cuyo canto lleva una graduacion cuyo número de partes iguales llamaremos *n*; y sujeto por dos clavijas *c* al bastidor en el extremo de su lado AD, hay una pieza de acero encorvada *a* que termina en un *estilete* cuya punta corresponde al *cero* de la graduacion del canto del disco *d*, cuando la línea *mn* de la pieza P se la hace coincidir con el *cero* de la graduacion del bastidor.

Una vez dispuesto así este aparato, sirve como el *nonius recto*, para apreciar las menores divisiones de la graduacion del bastidor y las fracciones de estas, pues, en efecto, si se dá una vuelta entera al tornillo *tt'* y por lo tanto al disco *d*, su línea *mn* avanzará ó retrocederá una distancia igual al paso de la rosca y por cada division del disco que pase por la punta del estilete avanzará ó retrocederá la *enésima* parte de dicho paso, ó lo que es lo mismo $\frac{1}{n}$ de la menor division de la graduacion del bastidor.

Para medir la longitud de un objeto, se hace que uno de sus extremos coincida con el canto interior del lado BC del bastidor, colocándole en el sentido BA, y dando vueltas al tornillo hasta que la línea *mn* que hace oficio de *cero* coincida con el otro extremo, se verá el número de las menores divisiones que ha recorrido del bastidor; y la fraccion de una de estas menores divisiones, en el caso de no coincidir exactamente la línea *mn* con una de las divisiones del bastidor, se apreciará por las *enésimas* partes que indique la punta del estilete.

325. Por último, se hace uso de los instrumentos, como ya se ha visto en los anteojos, de piñones, barras y ruedas dentadas, cuyas combinaciones constituyen los *engranajes* y otros medios que suministra la Mecánica, para producir el movimiento más ó menos rápido de varias de las piezas que les componen, y cuya teoría no es de este lugar.

326. **Aparatos de union de los instrumentos con sus piés.**—Los aparatos cuyo mecanismo vamos á describir, y que tienen por objeto hacer que formen un solo cuerpo las partes esenciales de los instrumentos,

con los piés que han de mantenerlos á una cierta y conveniente altura, para la mayor comodidad en su uso, cumplen al mismo tiempo con la condicion de hacer que los planos ó limbos de los instrumentos puedan colocarse en la posicion que se quiera; bien horizontales, bien verticales, ó con la oblicuidad que sea necesaria, segun el objeto que nos propongamos en las operaciones que se practiquen.

Estos aparatos son de varias clases si bien pueden dividirse principalmente en las tres siguientes; cubos ó mangos huecos, rodillas y plataformas.

327. **Cubos ó mangos huecos.**—Se llama *cubo ó mango hueco* la parte inferior que llevan los instrumentos, y que regularmente es de forma de un cono troncado, la cual termina en la rosca *r* (fig 223; lám 14) de un tornillo, destinada á ser introducida en una tuerca que acompaña al instrumento: en la parte hueca *h* se introduce la espiga *e* del pié del instrumento Una vez atornillado el mango al instrumento, no permite á este otra clase de movimiento que el que se produce alrededor de la espiga *e* que se supone fija; y para detener este movimiento y asegurar el instrumento al pié de modo que ambos formen un solo cuerpo, acompaña al mango un tornillo de presion T que oprime á la espiga *e*. Para que este tornillo no rehunda la madera de la espiga, lleva dentro del mango una pieza metálica *op*, fija en *o* y concéntrica con el mango.

328. **Rodillas.**—Cuando los mangos van acompañados de un juego ó articulacion que permite colocar á los limbos de los instrumentos en todas las posiciones que se quiera, reciben estos aparatos el nombre de *rodillas*. Las hay de varias clases y describiremos las dos más principales, que se llaman *rodillas de nuez*, y *rodillas de cilindros* ó *de Cugneau*.

329. *Rodillas de nuez.*—El mango *m* (fig. 224; lám. 14) va atravesado en su parte superior por un tornillo T, que sujeta dos piezas esféricas cóncavas *p* y *p'* en forma de conchas, las cuales abrazan una esfera *e* que lleva el limbo del instrumento en su parte inferior: esta esfera se puede mover dentro de las *conchas* en todos sentidos, deteniendo este movimiento para colocar el plano del limbo en la posicion conveniente, por medio de la presion que ejerce el tornillo T. Esta rodilla presenta muchos inconvenientes; pues el plano del limbo del instrumento pierde su posicion en el momento que se apoya la mano sobre él; porque la esfera que oprimen las conchas, es de muy pequeño diámetro; y por otra parte cuando se ha puesto horizontal una línea del limbo, y se quiere poner otra, se pierde la posicion de la primera: por estas razones es mejor usar la rodilla de cilindros.

330. *Rodilla de cilindros ó de Cugneau.*—La pieza principal de este aparato se compone de dos cilindros *a* y *b* (fig. 225; lám. 14), que forman un solo cuerpo, y cuyos ejes son perpendiculares entre sí. El cilindro *a* está colocado entre dos soportes *c*, *d*, fijos sobre un plano ó pieza *m* en que termina el pié que sostiene el instrumento. Dicho cilindro, así como os soportes, están atravesados por un pasador *p*, que termina por uno

de sus extremos en la cabeza *e*, y por el otro en una rosca que tiene su tuerca en una pieza *t*, quedando los soportes y el cilindro comprendidos entre *e* y *t*. Cuando se hace girar á esta tuerca en el sentido conveniente, oprime los soportes contra el cilindro, é imprime el movimiento de este. El segundo cilindro *b* se ajusta del mismo modo entre los dos soportes *r* y *s*, que van fijos á otro plano ó pieza *n*, que sirve para unir este aparato con el plano del instrumento por medio de un perno que lleva aquel y se introduce en la pieza *n*, sujetándole con una tuerca t''. Cuando las tuercas t, t', t'' están sin apretar, el plano ó limbo del instrumento puede girar alrededor de los tres ejes.

Para colocar en la posicion horizontal el plano del limbo del instrumento, se le dispone primero á ojo próximamente horizontal, despues de apretar la tuerca t'', y colocando sobre él un nivel de aire (69) en direccion perpendicular al eje del cilindro *a*, se hace girar el plano del instrumento alrededor de este eje hasta que la burbuja del nivel se halle en su punto medio, en cuyo caso el cilindro *b* se hallará en la posicion horizontal; y apretando la tuerca *t* quedará fijo en esta posicion. Hecho esto, se coloca el nivel de aire en direccion perpendicular al eje del cilindro *b*, se hace girar el plano del instrumento alrededor del eje de este cilindro, hasta que la burbuja del nivel se halle en el medio, y se aprieta la tuerca t', con lo que el plano del instrumento será horizontal (83). Si ahora se afloja la tuerca t'', el plano podrá girar alrededor del punto *o* sin perder su posicion horizontal, y se podrá detener este movimiento en la posicion que se quiera, apretando la tuerca t'' para que el plano forme cuerpo con la rodilla.

Muchas veces tambien, la combinacion de algunos de estos aparatos con otros medios que proporciona la disposicion especial de ciertos instrumentos, produce la facilidad en la colocacion del plano en cualquier posicion; pero no habrá duda en su comprension al describirlos, despues de los conocimientos elementales que acabamos de exponer.

331. **Plataformas.**—Las plataformas son unos aparatos de union, que permiten dar una posicion horizontal al plano del instrumento de que forman parte, por medio de tornillos ó de la combinacion de estos con charnelas ó con muelles, y de las cuales describiremos las más comunmente usadas.

332. *Plataforma de cuatro tornillos verticales.*—Se compone de una placa circular AB (fig. 226; lám. 14) en la cual se hallan las tuercas *s*, s' correspondientes á los tornillos t, t', y que se une por medio de un pasador á la espiga que constituye el eje del instrumento. Los tornillos apoyan sus cabezas en la placa inferior CD, fija al pié del instrumento. Cuando se hace girar á dos tornillos *t*, diametralmente opuestos, se obliga á las tuercas á recorrer los pasos de la rosca, y elevan ó deprimen la placa AB juntamente con la espiga y toda la parte superior del citado instrumento. La espiga suele terminar en una supeficie esférica, que roza sua-

vemente con las paredes interiores de la pieza E, la cual forma parte de la placa inferior.

El centro de la superficie esférica es un punto constantemente fijo de posicion para todas las que se den á la placa AB.

333. Por el movimiento sucesivo de cada par de tornillos puede darse á la placa AB (fig 227; lám. 14), la posicion horizontal, valiéndonos del nivel de aire (83), colocándole primero en la direccion *tt*, y horizontando esta línea por los tornillos *t* y despues en la *t't'*, que se horizonta del mismo modo por los *t'*. Entonces el eje de rotacion del instrumento, que es por construccion perpendicular á la placa AB, habrá tomado la posicion vertical (122).

334. *Plataforma de cuatro tornillos horizontales*.—La placa A (fig 228; lám. 14) lleva invariablemente unida una espiga E, la cual se introduce en la caja B, y termina en cubo C. Cada una de las caras laterales de este cubo está en contacto con el extremo de un tornillo horizontal *t*, que tiene su tuerca en la cara correspondiente de la caja B. El cubo, y por consiguiente la espiga E y la placa A, puede moverse en sentido de las dos líneas *tt*, *t't'* (fig 229; lám. 14), determinadas por los tornillos opuestos. Para efectuar el movimiento en el sentido de una de las líneas *tt*, se aflojará uno de los tornillos *t* y se apretará el opuesto

Esta plataforma presenta el inconveniente del rozamiento que los extremos de los tornillos *t'*, por ejemplo, experimentan contra las caras correspondientes del cubo C, cuando se hace mover á los *t*; y recíprocamente; lo que es causa de que las caras del cubo se desgasten al cabo de algun tiempo, y se dificulte el juego de los tornillos; por otra parte, la longitud de las líneas *tt*, *t't'* que se horizontan es muy pequeña, y estas no determinan la horizontalidad de la placa superior tan completamente como en la plataforma de tornillos verticales.

335. *Plataforma de dos tornillos y charnelas*.—En la plataforma que representa la fig 230 (lám. 14), la espiga *m* que forma el eje del instrumento, está invariablemente unida á un platillo B, y ambas piezas pueden moverse por medio del tornillo T alrededor de una charnela sujeta en dos piés proyectados verticalmente en *d*, que están fijos á un segundo platillo D, en el cual descansa el pié del tornillo.

El platillo D, tiene un movimiento análogo por el tornillo T', alrededor de una charnela semejante á la anterior Esta charnela se halla comprendida entre los apoyos *c*, *e*, situados en la placa F, que forma parte del pié del instrumento. El tornillo T' descansa tambien sobre la misma placa F.

Por el movimiento del tornillo T, la espiga *m*, juntamente con el plano A del instrumento, perpendicular á ella, varía de inclinacion en sentido de la recta T*h* (fig. 231; lám 14), determinada por el tornillo T y el punto medio de la recta *dd'*. De un modo análogo, por medio del tornillo T' puede moverse segun la T'*h'* determinada por T' y el punto medio de *ce*. Cuando estas rectas que se cortan en *o* sean horizontales, el plano A (fig. 230; lám. 14) será horizontal, y vertical el eje *m* (122).

336. *Plataforma de Mr. Egault de dos tornillos y resortes metálicos.*— La espiga que forma el eje del instrumento, y que está fija invariablemente al plano superior A (fig. 232; lám. 14), termina por su parte inferior en una esfera que se mueve á frotamiento dentro de una cavidad practicada en la pieza *a*, la cual forma parte de un platillo B unido invariablemente al pié del instrumento.

El plano A puede variar de inclinacion y mantenerse en la posicion que convenga, por los resortes *r*, *r'*, que fijos en el platillo B, ejercen su esfuerzo sobre el A, y por los tornillos *t* y *t'* que teniendo en B sus tuercas, tienen sus extremos en contacto con el plano A, y le sostienen.

Los tornillos y los puntos de contacto de los resortes con el platillo A, determinan dos rectas perpendiculares *rt*, *r't'* (fig. 233; lám. 14), que pueden hacer variar la posicion del plano A cuando se muevan los tornillos, y por consiguiente la del eje del instrumento que le es constantemente perpendicular.

337. *Plataforma de tres tornillos.*—En la plataforma de tres tornillos el eje *m* (fig. 234; lám. 14) del instrumento de que forma parte, es perpendicular á la vez al plano A y á la pieza de tres brazos B, en cuyos extremos se hallan practicadas las tuercas de los tornillos T, T', T'', y las extremidades de estos se apoyan en el platillo C fijo al pié del instrumento.

Por medio de los tornillos T, T' (fig. 235; lám. 14) la inclinacion del plano de la pieza B, y por consiguiente la de su paralelo A, puede variar en el sentido de la recta TT' que une estos tornillos, y por el de T'', en el sentido de la T''*h*, determinada por el pié del tornillo y el punto medio de la TT'. Estas dos rectas, perpendiculares entre sí, determinan la posicion del plano A y por consiguiente la del eje del instrumento que le es perpendicular.

338. **Piés de los instrumentos.**—Se llaman *piés de los instrumentos*, los aparatos destinados á sostenerlos á una altura conveniente, para poder manejarlos y servirse de ellos con comodidad en las operaciones. Son de varias formas; pero siempre se procura que reunan á la facilidad en su colocacion sobre el terreno, la resistencia necesaria para conservar su posicion, y la facilidad en su trasporte; así como tambien la más perfecta seguridad en su union con los instrumentos. Hablaremos de los usados más comunmente.

339. **Bastones ó chuzos.**—El pié más sencillo es el que representa la fig. 236 (lám. 14), y es un cilindro ó prisma octogonal *c*, generalmente de 1m,3 de longitud, que lleva en su parte superior una espiga *e* de forma cónica truncada de 0m,08 de longitud, la cual se introduce en el mango hueco de los instrumentos, pudiendo estos girar alrededor de dicha espiga, aflojando el tornillo que une el pié con el mango. En su extremo inferior lleva un regaton de hierro *r* de forma cónica para clavarle en el terreno. El baston ó chuzo se puede colocar en la posicion vertical, por medio de la plomada.

340. **Trípodes.** —El *baston ó chuzo* no puede servir cuando el terreno es duro ó pedregoso, y tiene además el inconveniente de perder su posicion vertical con la mayor facilidad; por lo cual se usan generalmente, hasta en los instrumentos más sencillos, los piés llamados *trípodes*, que se componen de un prisma triangular P (fig. 237; lám. 14) terminado por la espiga *e*. En cada cara del prisma hay colocado un perno con rosca, que se introduce en el taladro que llevan en su parte superior los piés *p*, y que se aseguran por medio de las tuercas movibles *t*, como las de la fig. 213 (lám. 13). Los tres piés llevan en su parte inferior regatones de hierro *r*, terminados en una punta aguda para asegurarlos en el terreno. Estos trípodes pueden acomodarse á todas las desigualdades del terreno: y para colocarlos, se aflojan las tres tuercas, se coloca cada pié en la posicion conveniente para que la espiga *e* se encuentre en la vertical, y despues de afirmarlos sobre el terreno por medio del regaton ó punta de hierro *r*, se aprietan las tuercas para impedir todo movimiento al aparato.

341. El trípode que acabamos de describir, si bien es bastante lijero, tiene el inconveniente de ceder al movimiento de rotacion que tiene que darse al instrumento; por lo que se ha modificado formando cada pié *p* de dos piezas de madera en forma de *v* (fig. 238; lámina 14), introduciendo los extremos en unos regatones *r* de cobre con puntas de hierro, y por la parte superior van unidos á las partes salientes *o*, *o'* *o''*, que presenta una pieza de madera M llamada *meseta*, á la que se afirman con tornillos y tuercas movibles. En medio de la pieza M hay una espiga de metal *e* perpendicular á la meseta, en la cual se coloca el mango hueco del instrumento. Para la comodidad en el trasporte de los trípodes, suelen los piés estar divididos en dos partes sujetas por tornillos, que cuando están flojos permiten doblar las partes inferiores sobre las superiores, y reducir el aparato á un tamaño más cómodo para el trasporte. En razon á que cada pié del trípode que describimos se compone de dos piezas longitudinales unidas por travesaños, suelen algunos llamarle *trípode de seis brazos*.

342. En vez de la espiga *e*, tienen otros trípodes un taladro en el centro de la meseta M (fig. 239; lám. 14) por el cual pasa una varilla de metal *v* terminada en rosca por su extremo superior *r*, con su correspondiente tuerca *t* para que se apoye en la parte superior de la meseta. Alrededor de la varilla y por la parte inferior del trípode, se coloca un resorte en espiral, que va cubierto con un cilindro hueco *c* de metal, sujeto á la parte inferior de la meseta. En este cilindro enchufa otro tambien de metal *c'*, hueco, cerrado en su parte inferior por una placa provista de un taladro para dar paso á la varilla *v*, la cual termina en rosca por su parte inferior con su correspondiente tuerca *t'*. La pieza *t''*, unida invariablemente á la varilla, hace veces de cabeza de tornillo.

Para fijar el instrumento al trípode, se introduce la rosca *r* en una tuerca que aquel presenta al efecto, haciendo girar á la cabeza del tornillo t'': despues se mueve la tuerca t', á fin de que obrando sobre el cilindro c', este se eleve introduciéndose en el c, y oprimiendo al resorte, el cual en virtud de su fuerza elástica, trata de separar al cilindro c' de la meseta, y une fuertemente al instrumento con el trípode.

343. Este mismo mecanismo puede tener la siguiente disposicion: la varilla de metal solo lleva una rosca r (fig. 240; lám. 14) en el extremo superior, con su tuerca t para sostenerla en la meseta, terminando el otro extremo en un mango de madera m, que hace las veces de cabeza de tornillo, para introducir el extremo superior r en la tuerca que lleva debajo la plataforma del instrumento. Sobre una rodaja de metal s, fija á la misma varilla, descansa el resorte en espiral que se cubre con un cilindro hueco c de metal, cerrado por la parte superior por una placa con un taladro en su centro para que el cilindro pueda moverse en sentido de la longitud de la varilla. El extremo inferior del cilindro presenta por su parte interior una tuerca t' en la que se introduce la rosca que lleva la pieza R. Esta pieza puede moverse tambien en sentido de la longitud de la varilla para atornillar su rosca á dicha tuerca t', quedando encerrados de este modo dentro del cilindro la espiral y la rodaja s.

Para unir el instrumento á la meseta del trípode, se empieza por ajustar la rosca R al cilindro c, y despues se introduce la varilla por el taladro de la meseta, sosteniéndola por medio de la tuerca t. Elevando entonces la varilla cogida por el mango m, se atornilla el extremo r en la tuerca que lleva la plataforma del instrumento; en cuyo caso la rodaja s va comprimiendo la espiral, que apoyándose contra la parte superior del cilindro, que se halla en contacto con la meseta, obra sobre la rodaja y tiende á separarla de dicha meseta, apretando fuertemente sobre esta, como en el caso anterior, la plataforma del instrumento.

344. Los trípodes más modernos se construyen de modo que reunidos los tres piés componen dos conos truncados á partir de su medio o (fig. 241; lám. 14) hácia las extremidades, teniendo cada pié la forma de una pirámide triangular mistilínea ó un sector cónico. En la parte inferior están armados los piés de regatones de hierro que juntos forman un cono c, y por la parte superior llevan unas piezas de cobre p sujetas por medio de tornillos y terminadas en espigas, una de las cuales se representa aparte en e, las cuales entran en otras piezas unidas á un platillo ó meseta m, á las que se sujetan por medio de pernos de rosca, formando una articulacion ó juego de charnela. Sobre el platillo va la rosca r, que se introduce ó atornilla en la correspondiente tuerca de que va provista la parte inferior de la plataforma del instrumento. La seccion del trípode en sentido perpendicular á su longitud, se halla representada en t.

Para que la rosca r no reciba golpes que la inutilicen cuando no se usa el trípode, hay otra tuerca practicada en una pieza adicional s, llamada *sombrerete*, la cual se atornilla á la rosca r. Tres anillas de metal de diferentes diámetros a, a', a'', sirven para mantener unidos los piés, lo que hace más cómodo el trasporte del trípode.

345. Hemos creido conveniente explicar con el detenimiento que lo hemos hecho las partes principales de los instrumentos, pues además de las razones expuestas (244), creemos poner de este modo al lector en disposicion de estudiar con facilidad y formarse una idea exacta de un instrumento cualquiera. No es suficiente, en nuestro concepto, presentar aisladamente la descripcion de cada uno de los distintos instrumentos, como si las partes de que se compone le perteneciesen exclusivamente; es preciso generalizar las ideas, conocer detalladamente la forma y el objeto de cada una de las partes principales, que pueden ser comunes á muchos de ellos, y acostumbrarse á distinguirlas en la observacion de un instrumento determinado, cualquiera que sea la disposicion que haya querido darle el constructor.

Para facilitar el estudio de los instrumentos, elegiremos en cada clase para su descripcion los más modernos y de un uso más general, procurando que entre ellos se comprendan además, las diferentes disposiciones adoptadas para cada una de sus partes principales. No dudamos que con este método se hallará el lector en disposicion de darse cuenta de los demás que puedan presentársele, comprendiéndolos sin ningun esfuerzo.

CAPITULO VI.

INSTRUMENTOS ANGULARES.

Brujula.—Declinatoria.

346. **Preliminares** —*Magnetismo* —*Imanes*.—*Magnetismo* es la parte de la Física que se ocupa de las propiedades de los imanes. Se llaman *imanes* los cuerpos que tienen la propiedad de atraer al hierro y otros metales. Se distinguen en naturales y artificiales. Se llama *iman natural* ó *piedra-iman* á un mineral de hierro que goza de la propiedad indicada. *Iman artificial* es una barra ó una lámina de acero templado, á la cual se ha hecho adquirir las propiedades de los imanes naturales, por medio del contacto ó del frotamiento repetido con uno de estos imanes.

La accion atractiva del iman, ya natural ó ya artificial, sobre el hierro es recíproca; puesto que el iman atrae á una pequeña masa de este metal, mientras que es atraido por otra masa de hierro más considerable.

347. *Aguja imantada.*—La aguja imantada es una lámina *ab* (figura 242; lám. 15) de acero templado, cuya forma es la de un rombo muy prolongado, provista de una armadura *c*, por la que se apoya sobre el extremo de un estilo vertical *cd*, y á la cual se ha hecho adquirir las propiedades de los imanes naturales. Es, pues, un verdadero iman artificial.

La aguja permanece perfectamente horizontal; pues el punto de contacto con el extremo del estilo, coincide con el centro de gravedad de la aguja. Dicho punto de contacto es el vértice de un pequeño cono practicado en una piedra muy dura, que generalmente es ágata, la cual está situada en el interior de la armadura.

348. *Polos de los imanes.*—*Línea neutra.*—En todo iman existen dos puntos en los cuales la *fuerza magnética* está en su máximum, y se llaman *polos del iman*; así como una línea situada entre los polos, en la cual dicha fuerza es nula, y que ha recibido el nombre de *línea neutra*.

La tierra se considera hoy por los físicos como un verdadero iman, con sus polos y su línea neutra.

349. Las fuerzas magnéticas que tienen su punto de aplicacion en cada uno de los extremos de un mismo iman, parecen ser de distinta naturaleza. En efecto, si acercamos sucesivamente á un mismo extremo *a* de una aguja imantada los dos extremos de otra aguja, observaremos que entre uno de estos y el *a* se verifica una *atraccion*, y entre el otro extremo de la segunda aguja y el mismo *a* de la primera tiene lugar una *repulsion*. Si los acercamos en el mismo órden al otro extremo *b* de la primera, observaremos en primer lugar una repulsion y una atraccion en el segundo.

350. **Accion directriz de la tierra sobre la aguja imantada.**—En virtud de las atracciones y repulsiones que tienen lugar entre los polos de dos imanes, los polos de la tierra ejercen una accion *directriz*. En efecto, al colocar la aguja imantada sobre el estilo, se la ve oscilar por más ó menos tiempo, tendiendo constantemente hácia una posicion en la que permanece al fin en equilibrio, y á la cual vuelve siempre que se la separa de ella; observándose tambien que es uno de los extremos *a* el que se dirige á un punto poco distante del polo norte geográfico.

Para distinguir este extremo *a* de la aguja que se dirije al norte, del otro extremo *b* de la misma, se lima su mitad *cb*, con lo cual pierde el color azul que ha recibido en la operacion del temple, y por lo tanto el extremo azul de la aguja se hallará á la parte del polo norte magnético de la tierra, y el extremo blanco á la del polo sur.

351. Si llamamos *a'* y *b'* los extremos azul y blanco de una segunda aguja imantada, observaremos que entre los polos *a* y *a'* tiene lugar una repulsion, así como entre los *b* y *b'*; y que existe atraccion entre los *a* y *b'*, ó *a'* y *b*. De donde podemos deducir el siguiente principio de Física: *los polos del mismo nombre se repelen, y los de nombre contrario se atraen*. En virtud de este principio, el polo *a* será de nombre contrario al N, es decir,

que *a* será el polo *boreal* ó *sur* de la aguja, y *b* el polo *norte* ó *austral* de la misma.

Nosotros, sin embargo, llamaremos al *a extremo norte de la aguja*, y le designaremos en lo sucesivo con la letra *n*, y al *b extremo sur de la misma*, designándole con la *s*.

352. *Polos magnéticos.—Meridiano magnético.*—El punto N' (fig. 243; lám. 15), hácia el cual se dirige el extremo norte de la aguja magnética, y que está algo separado del polo norte geográfico N, se llama *polo norte magnético*, y es uno de los polos del gran iman, que como hemos dicho constituye el globo terrestre. El otro polo S' de este iman es el *polo sur magnético*. La línea N'S' que los une es el *eje magnético de la tierra*, y el plano N'AS' que pasa por este eje y por un punto cualquiera A del globo es el *meridiano magnético* de este punto, en cuyo plano se encontraría el eje de una aguja imantada, en su posicion de equilibrio sobre un estilo vertical, cuyo extremo superior coincidiese con dicho punto.

La interseccion del plano meridiano magnético con el plano horizontal del punto A es la horizontal *ns*, con la cual coincide el eje de la aguja magnética.

353. **Meridiana magnética.—Declinacion de la aguja.**—La horizontal *ns* (fig. 243; lám. 15), determinada como hemos visto por el eje de la aguja, es la *meridiana magnética*.

La meridiana astronómica *mm'*, que es horizontal y está situada en el plano del meridiano geográfico NAS (37), y la meridiana magnética *ns*, horizontal tambien y situada en el meridiano magnético, son perpendiculares al rádio terrestre AO, y el ángulo *n*A*m* que forman es la medida del ángulo diedro de dichos planos meridianos. Este ángulo se llama la *declinacion de la aguja magnética*.

La declinacion, que está muy lejos de ser constante, es oriental ú occidental, segun que el extremo *n* de la aguja se dirije al este ó al oeste de la meridiana astronómica.

La declinacion de la aguja varía con los lugares, y en un mismo lugar tambien experimenta variaciones: las cuales unas son regulares, y podemos clasificarlas en variaciones seculares, anuales y diurnas; y otras son accidentales y se llaman en general *perturbaciones*. Nos ocuparemos sucesivamente de estas distintas variaciones.

Variaciones seculares.—La declinacion en el año de 1580 era oriental, y el ángulo de los meridianos de 11° 30'; en 1663, la declinacion era de 0°: despues se hizo occidental, y fué creciendo hasta 1814 en que era de 22° 34'. A partir de esta máxima desviacion, la declinacion, occidental siempre, ha disminuido hasta 1855 en que era de 19° 58' próximamente. La declinacion en Madrid es en la actualidad de 19° 20' al O próximamente.

Variaciones anuales.—En un mismo año la declinacion experimenta variaciones, separándose ya hácia el este, ya hácia el oeste; siendo de unos 20' la amplitud del arco recorrido en ellas.

Variaciones diurnas.—Durante el dia, la aguja está sujeta á variaciones cuya amplitud varía entre 8 y 15 minutos. Poco despues de la salida del sol, el extremo norte de la aguja empieza á separarse de su posicion primitiva, dirigiéndose hácia el oeste, hasta poco despues del medio dia; volviéndose despues hácia el este, hasta las nueve ó las diez de la noche, en que recobra la posicion primitiva de la mañana, permaneciendo estacionaria hasta la mañana siguiente.

Perturbaciones.—Además de las variaciones regulares que hemos indicado, la aguja sufre variaciones irregulares, debidas ya al estado eléctrico de la atmósfera, ya á la aproximacion de masas más ó menos considerables de hierro, ó de minas de este metal.

La aguja colocada bajo estas influencias, no adquiere su posicion de equilibrio sino despues de un número de oscilaciones, mayor que el que ejecuta en las circunstancias ordinarias.

354. **Inclinacion**.—La aguja magnética cuando se halla suspendida ó apoyada por su centro de gravedad, solo permanece en una posicion perfectamente horizontal *ab* (fig. 244; lám. 15), cuando ocupa cualquiera de los puntos de una línea curva irregular próxima al ecuador terrestre, al cual toca en algunos de sus puntos. Dicha curva recibe el nombre de *ecuador magnético*. A partir de ella hácia el polo magnético N' el extremo norte de la aguja se inclina hácia N', formando con la horizontal *cd* un ángulo *dca'*, llamado *ángulo de inclinacion*, el cual crece á medida que la aguja se acerca á N', en cuyo punto tomaría la posicion vertical.

La aguja se inclina tambien hácia el polo magnético S', cuando se dirije hácia él, partiendo del ecuador magnético.

La inclinacion de la aguja se mide por medio de un instrumento conocido con el nombre de *brújula de inclinacion*, que consiste en un limbo graduado, al cual puede darse una posicion perfectamente vertical, y en el centro del cual gira la aguja alrededor de un eje horizontal, que pasa por su centro de gravedad.

El ángulo de inclinacion en el punto que ocupa el instrumento, está medido por el que forma la aguja con la línea (0 — 180°) del limbo, á la cual se da una posicion perfectamente horizontal.

La inclinacion de la aguja puede neutralizarse limando ligeramente el extremo *a'*, ó adicionando un pequeño peso al *b'*.

355. **Brújula**.—La brújula es un goniómetro, por medio del cual se determinan los rumbos de las rectas que unen puntos dados del terreno. Estos rumbos se refieren á la meridiana magnética (286). La brújula presenta varias disposiciones: nosotros describiremos las más comunes, dividiéndolas en brújulas de limbo fijo, y brújulas de limbo movible.

356. *Brújula de limbo fijo*.—Se compone de una aguja *ns* (fig. 245; lámina 15), la cual se apoya en un estilo que ocupa el centro de un limbo graduado, contenido en una caja cuadrada de madera (A, A'). En el fondo de la caja se hallan trazadas dos líneas NS, EO, perpendiculares entre sí y paralelas á los costados de la misma. Los puntos N, E, S, O, re-

presentan los puntos cardinales; por lo que NS, representará la meridiana astronómica. La meridiana magnética lo está tambien por la línea *Ca*, la cual forma con CN un ángulo igual á la declinacion de la aguja (353).

Lleva el limbo una sola graduacion completa de izquierda á derecha en grados y medios grados (fig. 171; lám 12), y está un poco elevado sobre el fondo de la caja, á fin de que la aguja enrase perfectamente con él, y sea más fácil la apreciacion de las divisiones. El cero de la graduacion corresponde al norte N, y las divisiones 90°, 180°, 270°, respectivamente al este, sur y oeste de la caja. El cero se marca ordinariamente con el número 360.

El limbo se cubre con un cristal para evitar los movimientos que el viento imprime á la aguja; y el cristal se sujeta con un aro circular de cobre, que en virtud de su fuerza elástica, oprime las paredes de un pequeño resalto de la misma forma que presenta la caja, é impide que el cristal se levante.

Una palanca acodada *m* sirve para separar la aguja del estilo sobre que se apoya, y sujetarla contra el cristal; con lo cual se evita el desgaste del extremo del estilo cuando no se opera con la brújula.

La palanca tiene su punto de apoyo cerca del extremo *b* de la caja, y descansa por su propio peso sobre el fondo de la misma, cuando una pequeña pieza metálica *c*, que se mueve dentro de una cavidad practicada en la caja, deja descubierto dicho extremo; pero cuando se la mueve hácia este extremo de la palanca hasta oprimirle, la palanca gira alrededor de su punto de apoyo, y el otro extremo que abraza al estilo, se eleva sujetando la aguja contra el cristal. A fin de que entonces no pueda caer la aguja, el cristal se halla elevado sobre el extremo del estilo que la sostiene, en una cantidad menor que la altura que tiene la armadura de la misma aguja.

Una tapa de madera cubre la caja A, entrando en unas ranuras que esta presenta al efecto.

En uno de los costados paralelos á la línea NS, hay una alidada de madera (269), sujeta á girar alrededor de un eje *d*.

El instrumento puede moverse alrededor de otro eje *e*, que forma cuerpo con la placa *r*, y fijarse al pié del instrumento por el tornillo de presion *t* (320).

El pié es una rodilla de juego de nuez (329), provista de un tornillo *t'*, que sirve para sujetarle á la espiga de un trípode ordinario (340).

357. *Brújula de limbo movible.*—Esta brújula, semejante en todo á la descrita, tiene un tornillo *t* (fig. 246; lám. 15), provisto de un piñon cuyos dientes engranan con los que lleva un cierto arco de limbo, pudiéndose por este medio darle el movimiento necesario.

Tanto esta brújula como la de limbo fijo, pueden tener una alidada de anteojo (*a*, *a'*) é ir acompañadas de un nivel de aire (*n*, *n'*).

El extremo de un índice fijo *r*, determina con el centro del limbo una línea paralela á la direccion de la visual.

358. *Rumbos de la línea norte-sur del limbo.*—El ángulo que la línea norte-sur del limbo forma con la direccion de la aguja en cada una de las posiciones distintas que pueden darse á la caja, se llama el rumbo de dicha línea norte-sur (286), el cual está referido al meridiano magnético.

El plano de colimacion de la alidada (248 y 260) es paralelo á la línea NS, por lo cual el rumbo de la visual *am* es el mismo que el de dicha línea.

Cuando la aguja marca la direccion (0-180°), el rumbo de NS es cero, y entonces se halla esta línea en el meridiano magnético.

Colocando jalones en la direccion de la visual, sus ejes determinarán el plano meridiano magnético, paralelo al que pasa por el centro del limbo, y separado de él en una cantidad igual á la distancia de dicho centro al eje de la alidada, ó lo que es lo mismo, á su plano de colimacion.

Haciendo girar á la caja de la brújula (fig. 245; lám. 15) alrededor de su eje de rotacion, á partir de la posicion indicada, en sentido de N á S, pasando por O, que es el contrario al de la graduacion del limbo, el extremo de la aguja irá marcando todos los rumbos en sentido de la misma graduacion, pasando sucesivamente por debajo de la aguja los puntos E, S, O, hasta volver á N; señalándose de esta manera los rumbos de todas las líneas que se pueden considerar pasando por C en el plano del limbo.

359. *Apreciacion de los rumbos.*—En el limbo de la brújula se pueden apreciar á simple vista los cuartos de grado, lo que tiene lugar cuando la aguja divide en dos partes iguales á una division de medio grado, como en los puntos *a*, *a'*, (fig. 247; lám. 15). Tambien pueden apreciarse á la vista tercios de grado, si la aguja ocupa las posiciones *b*, ó *b'*.

El error que en la apreciacion de un rumbo se puede cometer, proviene de tomar $\frac{1}{3}$ de grado por $\frac{1}{4}$, ó $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{3}$, y será por consiguiente la diferencia de lecturas, que es $\frac{1}{12}$ de grado ó 5′. Este será el límite máximo del error de apreciacion.

360. **Uso de la brújula.**—Por medio de la brújula se determina el ángulo que forma el plano vertical que contiene á una recta dada del terreno, con el plano meridiano de uno de los extremos A (fig. 248; lámina 15) de dicha recta. Este ángulo se mide por el que forma la direccion N′S′ de la meridiana magnética del punto A con la proyeccion AB de la recta sobre el plano horizontal de A. El ángulo BAN′ que dichas líneas forman es el *rumbo* de la recta AB (286).

Como las rectas que determinan el rumbo de AB son horizontales, la brújula da reducidos á su proyeccion horizontal, los rumbos de las diferentes rectas que se consideran.

361. Para hallar en la práctica el rumbo de una recta cualquiera AB

(fig. 248; lám. 15), se coloca la brújula de modo que el centro del limbo se halle en la vertical del punto A, extremo de AB, y se hace además que el limbo esté horizontal; para lo cual bastará mover la caja aflojando ántes el tornillo de presion de la rodilla, hasta que la aguja enrase perfectamente con el limbo en dos posiciones próximamente perpendiculares entre sí: apretando despues dicho tornillo de presion, para que se conserve la posicion adquirida.

Si la brújula lleva nivel, se horizontan por su medio dos rectas de la caja (83), para lo cual se colocará el nivel en dos posiciones próximamente perpendiculares entre sí, empleando como antes el movimiento que permite el tornillo de presion de la rodilla. Las operaciones que acabamos de describir constituyen lo que se llama *colocar la brújula en estacion*.

362. En lo sucesivo, llamaremos en general *colocar un instrumento en estacion* en un punto, á las operaciones que deben hacerse con él, para que situado en dicho punto puedan verificarse las observaciones necesarias.

363. Se hace girar despues á la caja alrededor de su eje de rotacion, que por ser perpendicular á ella será vertical (122), hasta que la línea NS se coloque de manera que N se halle más distante que S del observador, haciendo corresponder á este mismo lado el ocular *m* de la alidada.

Dirigiendo entonces la visual al punto B y dejando libre la aguja, esta marcará en el limbo una graduacion *z*, que mide el arco N*z* contado á partir de N en el sentido de la graduacion, la cual, como ya sabemos, es de norte á sur pasando por el este. El arco N*z* es el rumbo de la recta AB.

Al dejar libre la aguja, no adquiere su posicion de equilibrio sino despues de un número de oscilaciones, tanto mayor cuanto más separada se encontraba del meridiano en la posicion en que estaba sujeta, lo que hace perder algun tiempo.

Se evita este inconveniente, observando el punto que corresponde á la mitad de la amplitud de las oscilaciones, levantando de repente la palanca cuando la aguja se halla en la direccion señalada por dicho punto medio, y dejándola caer despues. La aguja no tarda entonces en fijarse.

364. *Error de excentricidad.*—El rumbo de una recta AB (fig. 248; lám. 15) hallado como acabamos de indicar, está afectado de un *error de excentricidad*. En efecto, el ángulo que realmente forma la recta AB con la meridiana magnética del punto A es el BAN′, que tiene por medida el arco *rz*. El arco N*r*, diferencia entre el verdadero rumbo de AB y el N*z* que señala la aguja, es el error de excentricidad.

A medida que aumenta la longitud de AB, el error de excentricidad disminuye. En efecto, si suponemos que B, (fig. 249; lám. 15), pasa á ocupar la posicion B′ en prolongacion de CB, el error será en este caso N*r*′, menor que N*r*, y si suponemos que el extremo de la recta se halla en B″ á una distancia infinita, la recta AB″ será paralela á CB, y el error será nulo.

Por consiguiente, le haremos desaparecer dirigiendo la visual á un punto *d* (fig. 250; lám. 15) separado del *b*, normalmente á la recta *ab*, una cantidad igual á la excentricidad *ac* de la visual. Esto puede conseguirse, disponiendo en el pié de la banderola ó jalon que ha de colocarse en el punto *b*, una regla *mn* (fig. 251; lám. 15), de una longitud igual á dicha excentricidad, y dirigiendo la visual á su extremo *n*; ó bien marcando en el pié del jalon la excentricidad indicada *rs* (fig. 252; lám. 15), con objeto de separar la visual á la derecha del jalon en una cantidad igual á *rs*, de la cual se juzga fácilmente por comparacion.

Tambien puede obtenerse el rumbo de *ab* (fig. 253; lám. 15) haciendo que la alidada esté dispuesta de modo que el ocular se hallé en la vertical del extremo *a*. Entonces el arco *nr*, leido en el limbo, es la medida del ángulo *ncr*, igual al *m* que forma *ab* con la meridiana magnética *cd*. Debemos observar que este medio no presenta expedicion alguna; muy al contrario, solo se consigue dar al instrumento la disposicion conveniente despues de varios tanteos.

365. *Medida del error de excentricidad.*—En el triángulo rectángulo ABC (fig. 248; lám. 15) tenemos (18)

$$AC = AB \text{ sen. } B \qquad [1];$$

de donde se deduce

$$\text{sen. } B = \frac{AC}{AB} \qquad [2].$$

El ángulo B es igual al error de excentricidad NA*r* (Geom. Teor. recíproco del 7). La fórmula [1] hace ver tambien que B disminuye á medida que AB aumenta.

366. **Limites del empleo de la brújula**.—*Límite mínimo*.—El conocimiento de que el error de excentricidad disminuye á medida que aumenta la longitud de la recta cuyo rumbo queremos hallar, nos permite fijar la distancia á que corresponde un error de 5′, que es el mayor que resulta de la lectura de los rumbos (359). Para distancias mayores, el error de excentricidad será inapreciable; y para ellas no hay necesidad de la correccion indicada (364). Despejando AB en la fórmula [1], tendremos

$$AB = \frac{AC}{\text{sen. } B};$$

y haciendo en esta fórmula $B = 0^\circ\ 5'$, y $AC = 0^m,11$, que es la excentricidad de las brújulas ordinarias, resultará

$$AB = \frac{0,11}{\text{sen. } 0^\circ 5'} = \frac{0,11}{0,0014544} = 75,63.$$

La longitud $75^m,63$ es, pues, el *límite mínimo* que corresponde á la longitud que debe tener la recta cuyo rumbo queremos hallar, para emplear la brújula como hemos indicado (361 y 363), sin necesidad de correccion alguna.

367. *Límite máximo.*—Aparte de la excentricidad, hay otra causa de error que resulta de la apreciacion de los rumbos (359), los cuales se obtienen con un error que puede llegar á $5'$, y que á larga distancia produce una desviacion apreciable al extremo de la recta, opuesto á aquel en que se coloca la brújula en estacion. Esta desviacion es la cuerda del arco BB' (fig. 254; lám. 15) correspondiente al ángulo B'AB, que designaremos por t, el cual siendo muy pequeño, hace que el B' pueda considerarse como recto, y entonces tendremos en el triángulo B'AB (18)

$$B'B = AB \text{ sen. } t;$$

y como el valor máximo que hemos hallado para t es $0^o5'$, tendremos para la mayar desviacion

$$BB' = AB \text{ sen. } 0^o5'.$$

De esta ecuacion puede deducirse la longitud que debe tener AB, para que dada la escala en que esta línea ha de representarse, la separacion PB' sea menor que cierto límite $0,^m0002$ por ejemplo. Tendremos entonces que dicha ecuacion se convertirá en la

$$0,0002 = AB \text{ sen. } 0^o5';$$

de donde

$$AB = \frac{0,0002}{\text{sen. } 0^o\,5'} = \frac{0,0002}{0,0014544} = 0,1375.$$

Si la línea AB ha de representarse en la escala de $\frac{1}{1000}$, la longitud hallada 0,1375 representa (188. fórm. 3) $137,^m5$. Por consiguiente, para que la desviacion BB' en el plano sea menor que $0,^m0002$, será preciso que la línea del terreno sea menor que $137,^m5$.

Si la escala es de $\frac{1}{5000}$, averiguaríamos del mismo modo, que las líneas del terreno que queramos representar han de ser menores que $687,^m5$.

Para la escala de $\frac{1}{20000}$ el límite máximo es $2750,^m0$.

368. Observando que la longitud $0,^m1375$ es poco mayor que la longitud $0,^m12$ que tiene la aguja magnética en las brújulas ordinarias, po-

demos establecer: que *el máximum de longitud de las líneas del terreno que deben representarse en un plano y en una escala dada, cuando su direccion se determina por medio de la brújula, no debe exceder de la que representa en dicha escala la longitud real de la aguja magnética.*

369. **Observaciones directas y observaciones inversas.—Comprobacion de los rumbos.**—La observacion del rumbo que corresponde á una recta AB (fig. 255; lám. 15) hecha desde el punto A, nos da el arco *nsa*, que supondremos igual á 328° 45′; y si nos trasladamos á B, y desde este punto observamos el rumbo de la misma recta, tendremos los ángulos iguales NAB, ABS′ (Geom. Teor. recíp. del 7), en razon á que las meridianas NS, N′S′ pueden considerarse como paralelas, puesto que se encuentran en el polo, el cual se halla á una distancia sumamente grande con relacion á la longitud de AB. Como por otra parte los ángulos de error de excentricidad nt, $n't'$, son iguales, por serlo tambien AB (365), resulta $an = n'b'$, y por consiguiente $nsa = n's'b'$; que nos dice que el rumbo leido con el extremo azul de la aguja en la primera observacion, que es la *observacion directa*, es igual al que marca el extremo blanco en la segunda, que es la *observacion inversa ó de comprobacion.*

El rumbo $n'e'a'$ de punta azul en la observacion inversa es igual á $n's'b' - 180°$, ó á $nsa - 180°$: donde se ve que los rumbos que da el extremo azul de la aguja en ambas observaciones se diferencian en 180°.

370. **Medida de los ángulos con la brújula.**—Para medir un ángulo ACB (fig. 256; lám. 15) con la brújula, se coloca esta en el vértice del mismo, y se hallan los rumbos de sus lados: la diferencia de estos rumbos será el valor del ángulo de que se trata (287).

Fácilmente se comprende, que á causa de la excentricidad de la alidada, el ángulo obtenido no tiene su vertice en el centro C de estacion del instrumento; pero el error es despreciable atendida la pequeña distancia entre el vértice D del ángulo obtenido y el centro de la estacion (178).

371. Dado el rumbo de una línea, puede determinarse otra que forme con la primera un ángulo dado; para lo cual basta mover el limbo en el sentido conveniente, observando la aguja, hasta que aquel haya recorrido el número de grados y minutos que debe tener el ángulo que se trata de obtener. Colocando un jalon en la direccion de la visual, este determinará con el punto de estacion la línea pedida. Cuando el arco recorrido es de 90°, la segunda recta es perpendicular á la primera.

372. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª Que la aguja en todas sus posiciones sea un diámetro del limbo; lo que exije que el estilo sea perfectamente perpendicular al plano del limbo, y que el punto de suspension y los extremos de la aguja estén en una misma línea recta.

Cuando el estilo es perpendicular al plano del limbo, la proyeccion de su extremo sobre este plano es precisamente el centro del limbo; entonces todas las posiciones de la aguja serán diámetros del mismo, y la diferencia de las lecturas hechas con los extremos de la aguja será constantemente de 180°.

Pero si el estilo no es perpendicular á dicho plano, su proyeccion será un punto d (fig. 191; lám. 13), distinto del centro O del limbo, siendo dO la proyeccion del estilo. Entonces existe una sola posicion AB en la cual la aguja ocupa la de un diámetro, que es la de la recta dO en la cual pasa por el centro; y en esta sola posicion la diferencia de las lecturas es exactamente 180°. A partir de ella, la lectura de un rumbo cualquiera A′B′ está afectada de un error B′b' tanto mayor cuanto más se separa de la posicion AB, y que está en su máximum en la A″B″, perpendicular á la AB (291).

De aquí podemos deducir la regla que nos ha de dar á conocer si se verifican las condiciones que hemos mencionado.

Colóquese la caja en dos posiciones sucesivas, tales que la aguja marque rumbos próximamente perpendiculares, y si en cada una de ellas la diferencia de los rumbos que dan los extremos azul y blanco de la aguja, y que representaremos por a *y* b, *es de* 180°, *el estilo será perpendicular al plano del limbo, y los extremos de la aguja estarán en línea recta con su punto medio. De lo contrario, alguna de estas circunstancias dejará de verificarse, y será preciso hacer la correccion, ó llevar el error en cuenta.*

Correccion. La correccion puede hacerse dando al estilo la posicion perpendicular al plano del limbo por medio de unas pinzas, cuando á la vista parece que no la tiene, ó rectificando cuidadosamente la aguja con un martillo pequeño.

373. Cuando no se pueda efectuar esta correccion, se puede, sin embargo, hallar con exactitud el rumbo de una línea cualquiera AB (fig. 257; lámina 15). En efecto, sea ns la posicion de la aguja: las lecturas a y b, correspondientes á los extremos azul y blanco de la aguja, se referirán á la meridiana magnética N′S′ y no á la NS, resultando para ambos los errores iguales m. Llamando r al rumbo de la AB, referida á la parte N de la meridiana NS, que corresponde al centro C, tendremos las igualdades:

$$r = a - m;$$

$$r = b + m;$$

que sumadas, darán

$$2\,r = a + b;$$

de donde

$$r = \frac{a + b}{2} \qquad [3]$$

Bastará pues, leer el rumbo que marca el extremo azul de la aguja, así como el que marca el extremo blanco, refiriendo este último á la parte sur de la meridiana, añadiendo ó restando 180°, y hallar la semisuma de estas lecturas.

Ejemplos. Sea $a = 36°45'$; y $215°45'$ la lectura hecha con la punta blanca: la diferencia de lecturas es 179°, diferente de 180°, lo que tiene que suceder, pues suponemos descorregida la brújula. Aplicando la fórmula [3], tendremos:

$$b = 215°\,45' - 180° = 35\,45', \quad \text{y}$$

$$r = \frac{36°45' + 35°45'}{2} = \frac{72°30'}{2} = 36°15'.$$

2.° Sea $a = 274°30'$, y la segunda lectura $93°15'$; será $b = 273°15'$; tendremos:

$$r = \frac{274°30' + 273°15'}{2} = 273°52'.$$

374. *Segunda verificacion.*—Que la direccion de la visual sea perpendicular á la del eje de rotacion de la alidada, para que aquella describa un plano, y no una superficie cónica.

Supongamos en primer lugar que el eje de la alidada B (fig. 258; lámina 15) es perfectamente perpendicular á su eje de rotacion CB, y que hemos dirigido la visual al punto A, el cual suponemos muy lejano. Anotemos el rumbo a marcado por el extremo n de la aguja, y hagamos girar al limbo para dirigir al punto A la nueva visual DA: los ángulos ACB, ACD, se aproximarán mucho á ser rectos, porque sus complementos m, m' son muy pequeños (364); por lo cual las líneas DC y CB se hallarán de una manera apreciable en prolongacion la una de la otra, y el limbo habrá dado una semirevolucion: el extremo s de la aguja marcará un rumbo b, que será igual al primero a.

Si el rumbo b fuese diferente del a, la alidada no sería perpendicular á su eje de rotacion, y habría que corregirla ú obtener los rumbos por una doble observacion.

Esta verificacion es independiente de la primera, y tiene lugar aun cuando la aguja no gire alrededor del centro del limbo. En efecto, supongamos que la proyeccion del extremo superior del estilo es m (figura 259; lám. 15); la aguja marcará un rumbo 10° por ejemplo; y como para la verificacion que nos ocupa el limbo da sensiblemente una semirevolucion completa cuando la alidada está corregida, el punto m va á parar á m', todos los de la circunferencia describen arcos de 180°, y el extremo blanco de la aguja marca la division 10°, como en el caso en que gira alrededor de C.

375 *Correccion*.—La alidada de anteojo se corrige hallando la semisuma $\frac{a+b}{2}$ de los rumbos a y b, y moviendo el limbo hasta que el extremo s marque el rumbo indicado por dicha semisuma. En esta posicion se mueve la cerda vertical del retículo (233), hasta que el cruzamiento de las cerdas cubra al punto A.

Si el eje de la visual no puede moverse lateralmente, como sucede en las alidadas de madera y en algunas de anteojo, se puede obtener siempre el verdadero rumbo (374), dirigiendo las dos visuales BA, DA, como hemos hecho para la verificacion, y hallando la semisuma $\frac{a+b}{2}$ de los rumbos a y b, marcados respectivamante por el extremo n de la aguja en la primera posicion y por el s en la segunda.

376. Si además de tener movimiento el retículo en la alidada de anteojo, le tiene alrededor de su eje dentro de los collares que le sostienen, puede hacerse la verificacion y correccion, como hemos explicado (262).

377. Cuando hay que tener en cuenta á la vez el error de excentricidad de la aguja y el de oblicuidad del eje de la alidada, el rumbo de la primera posicion de la brújula será $\frac{a+b}{2} = m$ (373); y $\frac{a'+b'}{2} = m'$; el que corresponde á la segunda que se le dá en la verificacion de que acabamos de ocuparnos. El rumbo verdadero será (375)

$$\frac{m+m'}{2} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{a'+b'}{2}}{2} = \frac{a+b+a'+b'}{4}.$$

378. *Tercera verificacion*.—Que la línea norte sur de la caja sea paralela al plano de la visual. Cuando esta circunstancia tiene lugar, los rumbos están referidos exactamente al meridiano magnético (358), y se dice entonces que la brújula está *orientada*.

Cuando la línea norte-sur del limbo no es paralela á la direccion de la visual, el ángulo de estas líneas, que se mide por el que forma la norte-sur con una paralela á la otra, es el error de declinacion: el cual no influye en la posicion relativa de las líneas del plano, pues tiene siempre lugar en el mismo sentido, como el error de colimacion (253); pero sí en la posicion absoluta, y desaparece con la orientacion definitiva del plano (197).

379. **Orientacion de la brújula**.—Para conocer si una brújula está orientada, se traza la meridiana geográfica NS (fig. 260; lám. 15), y colocando el centro de la brújula en la vertical de uno A de sus puntos, se dá á la visual la direccion paralela á NS (364). Si el arco nm es igual á la declinacion (353), la brújula estará orientada con respecto al meridiano magnético; pues haciendo girar el instrumento para dirigir la visual á

N', el rumbo será cero. Si suponemos que la declinacion es de 20° al oeste, la brújula estará orientada cuando en la disposicion indicada la aguja marque el rumbo 340°.

Si se observa otro rumbo distinto, la diferencia entre él y la declinacion será el error de declinacion (378); el cual no puede corregirse en las brújulas de limbo fijo, y será necesario llevarle en cuenta. Supongamos, por ejemplo, que dicho rumbo es 337° (fig. 261; lám. 15): el error de declinacion será de 3° al este; y para corregir el rumbo de una línea cuya direccion se haya determinado por medio de una brújula afectada de este error de orientacion, será necesario separarla al oeste de la direccion obtenida una cantidad angular 3°, igual á dicho error.

La brújula de limbo movible se corrige, haciendo girar al limbo una cantidad igual y en sentido contrario al error de orientacion, y haciendo entonces que el extremo del índice coincida con el cero del limbo.

380. Cuando solo se quiere conocer la diferencia de orientacion de dos ó más brújulas, basta tomar con todas ellas el rumbo de una misma recta del terreno.

Toda brújula que dé un rumbo mayor que la elegida para término de comparacion, la cual es conveniente que sea una brújula orientada, indicará un error al oeste, y será preciso restar el error de orientacion de todos los rumbos que con ella se observen. Si, por el contrario, el rumbo de una brújula es menor, el error será al este, y será preciso añadirle á los rumbos observados.

Un ejemplo de este último caso es el que hemos representado en la fig. 251 (lám. 15), en la cual la línea arrumbada es la meridiana astronómica.

381. *Orientacion de la brújula de limbo movible con relacion al meridiano astronómico.*—Si se conoce exactamente la declinacion, que representaremos por d, se mueve la brújula hasta que el extremo azul de la aguja marque la division $360° - d$, que suponiendo la declinacion igual á 20°, será la 340° que señala el punto n (fig. 260; lám. 15); y por medio del tornillo que da un movimiento particular al limbo, se hace que el cero del mismo coincida con el extremo azul de la aguja, para lo cual tendrá que hacérsele recorrer el arco mn.

Estando el cero de la graduacion en el punto n, el extremo del índice ó estilo, que está en m, coincidirá con la division 20°, que expresa el valor de la declinacion. Por esta razon, si estamos seguros de que el estilo está bien situado, se orientará la brújula moviendo el limbo hasta que se halle debajo del estilo la cifra que marca el valor d de la declinacion.

Si no se conoce este valor, se traza la meridiana astronómica, se coloca la visual en su direccion, y se mueve el limbo hasta que el cero se halle en coincidencia con el extremo azul de la aguja.

Orientada así la brújula, los rumbos quedan referidos al meridiano astronómico.

382. **Orientacion de los planos por medio de la brújula.**—Tra-

zando la direccion de la línea (0—80) en un plano cuyas rectas estén determinadas de direccion por medio de una brújula orientada con respecto al meridiano astronómico (381), dicha línea representará la meridiana astronómica, y el plano quedará orientado (497). Si la brújula está orientada con respecto al meridiano magnético (379), la línea (0—180°) representará la meridiana magnética, y el plano quedará orientado con respecto á esta línea. Trazando otra que forme con ella un ángulo igual á la declinacion (353), está última será la meridiana astronómica, cuyo extremo norte ha de quedar al este de la primera.

383. Recíprocamente; trazada la meridiana de un punto, puede hallarse el valor de la declinacion por medio de una brújula orientada, haciendo estacion en dicho punto, y dirigiendo la visual á un jalon colocado en la prolongacion de su meridiana. El ángulo que forme entonces la aguja con la línea (0—180°) del limbo, indicará la declinacion que se busca.

Puede la declinacion hallarse con ventaja por medio de la *brújula de declinacion*, instrumento empleado en los observatorios, el cual tiene un anteojo que gira alrededor de un eje colocado en unos caballetes que se apoyan en la caja de la brújula. El plano de colimacion de este anteojo (260) contiene á la línea norte-sur del limbo, y es perpendicular al plano del mismo, pudiendo disponerse horizontalmente este último por medio de un nivel de aire y los tornillos de una plataforma (337). Haciendo coincidir el plano vertical que describe el eje del anteojo con el meridiano astronómico, lo cual puede hacerse dirigiendo como antes la visual á un jalon colocado en un punto de la meridiana, ó bien á la estrella polar (130), observando que la cerda vertical del retículo hace las veces del cordon de la plomada, la aguja señalará la declinacion.

384. **Trasportacion de los rumbos observados con la brújula, y de los ángulos deducidos.—Trasportadores.**—La *trasportacion de los ángulos* en general, es una operacion que tiene por objeto construir sobre el papel ángulos iguales á los observados en el terreno, y averiguar el valor de un ángulo cualquiera trazado en el papel. Los sencillos instrumentos que para conseguirlo se emplean, se llaman *trasportadores*, y no son otra cosa que unos limbos graduados del mismo modo que los de los instrumentos (277), con la diferencia de que las coronas están situadas en órden inverso, siendo exteriores por lo tanto las divisiones menores. Se construyen de metal, de talco y de papel. Los de metal son generalmente semicirculares de un radio de $4^{cm},5$: tienen el inconveniente de manchar el papel, y no son tan flexibles como los de talco, los cuales reunen la ventaja de ser trasparentes, á la de su flexibilidad, que permite el que se adapten mejor al papel. Los de talco, de círculo entero, suelen tener un rádio de 7^{cm}. Conviene que el rádio del trasportador sea bastante grande, á fin de que puedan marcarse bien las menores divisiones, y trazar los ángulos con precision; condicion que llenan cumplidamente los trasportadores de papel, cuyo rádio suele ser de 16^{cm}; lo que

permite que se pueda escribir la numeracion de cinco en cinco grados, sin perjudicar á la claridad.

Para la trasportacion de los ángulos, conviene que el trasportador que se emplee esté igualmente dividido que lo está el limbo empleado en el terreno, y por consiguiente pueda apreciarse del mismo modo el ángulo.

385. *Trasportacion de los rumbos con el trasportador semi-circular.*—Si dado el rumbo, 38° por ejemplo, de una línea, queremos determinar su posicion con respecto á la meridiana, trazaríamos una recta NS (fig. 262; lám. 15), para representar esta última línea: marcando un punto *a* de la meridiana, y haciendo coincidir con él el centro del trasportador, le haríamos girar alrededor de este punto en el sentido conveniente, hasta que la division 38 coincidiese con un punto *m* de la meridiana, sin que el centro del trasportador hubiese dejado de coincidir con *a*. El diámetro *ns* marcará entonces la direccion pedida; marcando el punto *n* y tambien el *s* para mayor exactitud, se ajusta una regla á los tres puntos *n*, *a* y *s*, y se traza por su canto la recta *ab*, que es la que queríamos determinar.

Tambien puede disponerse el trasportador de modo que hallándose en la meridiana el punto que marca la division 38, y el centro *a* del trasportador, el canto recto *rz* de este, pase por el punto *a'*, por el que suponemos ahora que queremos hacer pasar la recta pedida; la cual será la *a'b'*, trazada por dicho canto recto.

Para trazar la línea *ab* (fig. 263; lám. 15) cuyo rumbo es 150°, haríamos girar al trasportador del modo indicado, hasta que la division 150° coincidiese con la NS. Si el rumbo dado es mayor que 180°, se restará esta cantidad de su valor, y se hará girar al limbo del modo indicado hasta que la division que exprese la diferencia hallada coincida con la parte *a*S de la meridiana. La fig. 264 (lám. 15) indica la posicion del trasportador para la construccion del rumbo de 210°, en la cual la division 30° = 210° — 180°, coincide con la parte *a*S de la meridiana; y la fig. 265 (lám. 15) la del rumbo de 320°.

386. El método que hemos explicado, consiste, como hemos visto, en dar al trasportador el mismo movimiento que al limbo cuando se opera en el terreno (361 y 383); puede tambien hacerse la trasportacion fijando el trasportador de modo que la línea (0—180°) coincida con la meridiana NS (fig. 266; lám. 16), y que el cero se halle en *m* hácia el norte, como sucede con el cero del limbo de la brújula cuando se marca en el terreno la direccion de la meridiana (358). Empleando el trasportador graduado en el mismo sentido que lo está el limbo de la brújula, y que hemos visto que generalmente es de izquierda á derecha, la division 30°, que corresponde, por ejemplo, al rumbo hallado, determina la direccion de la recta *ac*, la cual es simétrica de la *ab* (fig. 267; lám. 16), que se obtendrá por medio de un trasportador graduado de derecha á izquierda: y en efecto, la recta cuyo rumbo es 30° debe quedar al oeste de la meridiana. De aquí deducimos que *para la trasportacion de los rumbos observa-*

dos con la brújula, cuando la línea (0 — 180°) *del trasportador se hace coincidir con la meridiana, la graduacion del mismo ha de ser inversa de la del limbo de la brújula.* Así, si el limbo presenta la primera graduacion (277), el trasportador deberá tener la segunda, y al contrario.

Si el rumbo es mayor que 180°, se colocará el trasportador como indica la fig. 268 (lám. 16), en la cual el cero está hácia la parte sur de la meridiana. Si el rumbo dado es 210°, la recta *ab* se tirará por el punto *a* y la division 30° = 210° — 180°.

387. *Trasportador complementario.*—Cuando el trasportador tiene la graduacion completa, como el limbo semicircular de la fig. 175 (lám. 12), recibe el nombre de *trasportador complementario*, y para tomar con él los rumbos mayores que 180°, no hay necesidad de efectuar la sustraccion que hemos indicado (385); basta continuar el movimiento del limbo, hasta que la division que marca el rumbo dado se halle en coincidencia con la parte *a*S (figs. 264 y 265; lám. 15) de la meridiana.

388. Empleando el trasportador complementario se puede seguir tambien el procedimiento explicado (386). Para determinar los rumbos mayores que 180°, se dará al trasportador la disposicion que presenta la fig. 269 (lám. 16), en la que el cero se halla hácia el sur de la meridiana. La recta *ab* tiene el rumbo 210°, que se toma en la graduacion interior.

389. *Uso del trasportador complementario para referir los rumbos á una perpendicular á la meridiana.*—Al trasportador complementario puede dársele tambien la disposicion que presenta la fig. 270 (lám. 16), trazando dos coronas *abc*, *def*, empezando la graduacion por la exterior en el punto *b* de la perpendicular á la línea (0 — 180°), y continuando por decenas hasta el punto *c* al que corresponden los 90°; se sigue la graduacion desde *a* hasta los 180° que corresponden tambien al punto *b*: se repite la division 180° en la misma línea y en la corona *def*, la cual se divide de un modo análogo de *e* á *f*, y de *d* á *e* hasta los 360°, que corresponden igualmente al punto *b*.

El trasportador así dispuesto se emplea para referir los rumbos á una perpendicular *mp* (fig. 271; lám. 16) á la meridiana. Si el rumbo dado fuese 40°, se hará girar al trasportador hasta que la division 40 del primer cuadrante *bc* (fig. 270; lám. 16) coincida con la parte oriental *ap* (fig. 271; lám. 16) de la perpendicular á la meridiana. Fácil es ver por la sola inspeccion de la figura, que la línea *ab* que pasa por *a* y por el cero de la graduacion exterior, forma con la meridiana el ángulo de 40° que se pedía.

Si el rumbo dado es mayor que 90° y menor que 180°, por ejemplo, de 130°, se hará coincidir la division 130 del segundo cuadrante *ab* (figura 270; lám. 16) con la parte occidental *am* (fig. 272; lám. 16) de la meridiana.

Cuando el rumbo dado es mayor que 180° y menor que 270°, 220° por ejemplo, se hará coincidir la division 220 del tercer cuadrante *ef* con la parte occidental *am* (fig. 273; lám. 16) de la meridiana.

Y si lo está entre 270° y 360°, 310° por ejemplo, se hará coincidir con la parte oriental *ap* (fig. 274; lám. 16) de la meridiana, la division 310 del cuarto cuadrante *de*.

Observaremos que las divisiones del primero y cuarto cuadrantes se hacen coincidir con la parte oriental, y las del segundo y tercero con la occidental de la perpendicular á la meridiana.

390. *Trasportacion de los rumbos por medio del trasportador de círculo entero*.—Empleando el trasportador de círculo entero puede seguirse el método explicado (385), evitando las sustracciones que es preciso ejecutar con el de semicírculo cuando el rumbo pasa de 180°. Para marcar el rumbo 220°, por ejemplo, haríamos girar el limbo hasta que la division 220 coincidiese con la parte norte de la meridiana: la línea *ab* (fig. 275; lámina 16) tirada por *a* y por la division cero, marcará el rumbo pedido.

391. Con el trasportador de círculo entero puede tambien seguirse el procedimiento indicado (386), fijándole de modo que la línea (0 — 180°) del mismo coincida con la meridiana, estando el cero hácia el norte de la misma, y marcando el punto á que corresponde la division que expresa el valor del rumbo que se quiere determinar. Este punto, unido con el que ocupa el centro del trasportador, determina la recta pedida. Conviene recordar que la graduacion del trasportador ha de ser en este caso inversa de la que tiene el limbo de la brújula empleada en el terreno.

392. El trasportador de círculo entero puede tambien ser complementario, disponiendo otra graduacion completa, interior y dirigida en el mismo sentido que la primera. El cero de la segunda está en el rádio *am* (fig. 276; lám. 16) á que corresponde la division 90 de la primera. Para determinar con este trasportador una recta de rumbo dado, referida á una perpendicular á la meridiana, se hace coincidir la division que marca el rumbo dado, 40° por ejemplo, en la division complementaria, con la parte oriental *ap* (fig. 277; lám. 16) de la perpendicular á la meridiana: uniendo despues el punto *a* con el cero de la division primera, la recta *ab*, tendrá el rumbo pedido; pues es evidente que esta recta forma con la meridiana el mismo ángulo que forma con la perpendicular á la meridiana el rádio que lleva el cero de la division complementaria.

393. El uso del trasportador complementario es muy útil en algunas ocasiones, y sobre todo el de círculo entero, que indicamos y acabamos de explicar; por lo que creemos que los constructores harian un servicio, estableciendo la graduacion complementaria en todos los trasportadores de círculo entero.

394. *Determinacion del rumbo de una línea trazada en el papel*.—Se determina el rumbo de una línea trazada en el papel, hallando el ángulo que forma con la meridiana, valiéndose de un trasportador cuyo centro se hace coincidir con el vértice de dicho ángulo, y haciéndole girar hasta que el cero coincida con la línea cuyo rumbo se trata de hallar: la division que coincida entonces con la meridiana dará el valor del rumbo

que se pide. Si se hace coincidir con la meridiana la línea (0 — 180°) de un trasportador graduado en sentido contrario al del limbo de la brújula, la division que coincida con la recta dada, marcará el rumbo que se pide.

395. **Consideraciones acerca de las aplicaciones de la brújula á la Topografía.**—Hasta hace pocos años las aplicaciones de la brújula á la Topografía se limitaban á la orientacion de los planos, y todo lo más á la determinacion de sus detalles menos importantes, por creerse generalmente que no era susceptible de dar buenos resultados en operaciones de un órden más elevado: hoy, más detenidamente estudiado este instrumento y mejor conocido, se aplica como los demás al levantamiento de los planos; y manejado con inteligencia, da resultados tan exactos como muchos de los goniómetros que daremos á conocer. La comodidad de su uso y la celeridad que permite dar á las operaciones, le hace muy á propósito para la agrimensura, el trazado de los caminos, las operaciones que se ejecutan en las minas y en los bosques, y las que tienen por objeto la representacion de terrenos muy accidentados.

Fijos por otra parte los límites de su empleo (366 y 367), y teniendo en cuenta que las variaciones regulares de declinacion (353), apreciables las unas solamente en los instrumentos de precision de los observatorios, y teniendo lugar las otras en tiempo mayor que el que pueden durar las operaciones, no tienen por lo tanto influencia en las brújulas topográficas; y que además las perturbaciones de la aguja son claramente perceptibles, se comprende la importancia que ha adquirido la brújula, hasta el punto de ser considerada por algunos Profesores como el instrumento por excelencia de la Topografía.

396. **Brújula de limbo zenital.**—Esta brújula difiere de la explicada (356) en la pieza de union con el trípode, que es una plataforma de tres tornillos (337): lleva además fijo á la caja un nivel *n* (fig. 278; lám. 16) con sus tornillos de correccion *b*, un limbo dividido *(l, l')* susceptible de un pequeño movimiento por el tornillo de correccion *r*, que está á la parte posterior del instrumento representada en L, alrededor de un eje perpendicular á él, y fijo á la caja perpendicularmente á uno de sus costados. El tornillo *r*, semejante á los de ajuste ó coincidencia (321), gira sin avanzar en la pieza *k* unida al limbo, y su rosca se introduce en una tuerca fija invariablemente á la caja. Un segundo nivel *(m, m')* unido á la parte posterior del limbo, tiene su tornillo de correccion *s*, igualmente dispuesto que el *r*, estando una de sus esferas fija al limbo, y la otra al tubo del nivel. Ambos tornillos se ponen en movimiento por medio de una llave como la que acompaña al nivel de la figura 31 (lám. 2).

La alidada de esta brújula es un anteojo astronómico (232) sujeto por las abrazaderas *(h, h')* á una pieza de metal que gira alrededor del eje del limbo *(l, l')*, y la cual lleva tambien los nonius *v*. El movimiento de la alidada puede ser á voluntad rápido ó lento, por el sistema de los tornillos de presion *a* y de coincidencia *c* (322).

Todo el instrumento puede girar alrededor de una espiga fija á la plataforma, con movimiento rápido que puede impedirse por un tornillo de presion (320), ó bien puede hacerse el movimiento rápido ó lento á voluntad, por el sistema de los tornillos a' y c'.

Los tornillos t de la plataforma descansan en la meseta del trípode (341).

397. *Divisiones del limbo zenital.*—El limbo zenital está dividido en medios grados (277), y el nonius aprecia minutos (309. Ej. 6.°). El cero del limbo se halla en la parte superior del mismo, lo que no es un inconveniente para la medida de los ángulos de elevacion y depresion (290). Las graduaciones son dos, simétricas á partir del cero: la que está hácia la parte del ocular sirve para la apreciacion de los ángulos de elevacion, y la de la parte del objetivo para apreciar los de depresion. Cuando el eje del anteojo es horizontal, el cero del nonius coincide con el del limbo zenital.

398. Por medio de los ángulos de elevacion y de depresion se obtienen los ángulos zenitales (201); pero algunas brújulas dan directamente el ángulo zenital: en ellas la graduacion está dispuesta de manera, que cuando el anteojo *mv* (fig. 279; lám. 16) se halla en la posicion vertical, el cero del nonius coincide con el cero del limbo que está en *o*. Es claro entonces, que cuando el eje del anteojo haya recorrido el arco *zv*, el nonius señalará el *on* del mismo número de grados, siendo este último la medida del ángulo zenital *zav*.

Cuando el arco zenital sea menor que 90°, será complemento de un ángulo de elevacion: cuando tenga este valor, la visual será horizontal, y cuando resulte mayor será complemento de un ángulo de depresion.

Esta última graduacion tiene la ventaja de determinar por el sólo valor del ángulo la direccion de la visual: al paso que en la primera es preciso indicar además, si el ángulo obtenido es de elevacion ó de depresion; aunque tambien pueden considerarse positivos los unos y negativos los otros, para abreviar la escritura.

En la marcha adoptada para las operaciones, la graduacion puede ser de 0° á 180° en la semicircunferencia *ozp*, y lo mismo en la *omp*, en el sentido marcado por el órden de las letras; pero si se establece la graduacion de 0 á 360° en el sentido *ozp*, podrá obtenerse de una manera más completa la determinacion de una posicion cualquiera del eje del anteojo, entre todas las que puede tomar en el plano vertical que describe en su movimiento.

399. **Usos de la brújula de limbo zenital.**—Con el instrumento de que nos ocupamos, puede obtenerse á la vez el rumbo y la pendiente de una línea AB (fig. 280; lám. 17) del terreno. Para esto, se coloca la brújula en estacion (361) en el extremo A de dicha línea, disponiendo verticalmente el eje de rotacion del instrumento: para lo cual se hace girar á la brújula alrededor de este eje, hasta que el nivel n (fig. 278; lám. 16) se halle en direccion de dos tornillos de la plataforma, y moviendo estos hasta que la ampolla del nivel acuse la horizontalidad: se coloca despues

el nivel en la direccion del tercer tornillo de la plataforma, horizontando aquel por el movimiento de este solo tornillo, se repite la misma operacion hasta que el nivel permanece horizontal en ambas posiciones: con lo que el eje será vertical (122). La operacion de disponer verticalmente el eje de rotacion, se llama generalmente *horizontar el instrumento*.

Marcando en una regla dividida, ó en el jalon mismo que debe colocarse en B para tomar el rumbo de AB (364) la altura Az del eje de rotacion de la alidada sobre el punto A del terreno, se dirige la visual al pié B del jalon Bg; para lo cual se aflojan los tornillos de presion a y a' (figura 278; lám. 16); con esto el anteojo puede girar libremente en sentido horizontal alrededor del eje de rotacion de la brújula, y en sentido vertical alrededor del eje del limbo zenital: ejecutando estos movimientos en sentido conveniente, se puede dirigir la visual al punto B; y para hacer que el cruzamiento de las cerdas cubra exactamente al punto á que queremos dirigir la visual, se aprietan los tornillos de presion a y a', y se emplean los de coincidencia c y c'. El movimiento que permiten los primeros cuando están flojos, puede ser simultáneo; ó bien puede moverse la alidada, hasta que se halle sensiblemente en el plano vertical de AB (fig. 280; lám. 17), y despues se le hace subir ó bajar, segun que B se halle más alto ó más bajo que A: en cuanto á los tornillos c y c', conviene usarlos alternativamente

Cuando hemos dirigido exactamente la visual á B, se lee el rumbo de AB (363).

400. Para obtener su pendiente, se afloja el tornillo a (fig. 278; lámina 16) y se mueve la alidada en su plano vertical, haciendo que la visual vaya á parar exactamente al punto g (fig. 280; lám. 17) marcado como hemos dicho en el jalon, ó en una regla que se coloca verticalmente en B. El ángulo de elevacion e (251), obtenido en el limbo zenital, es igual á la pendiente p de la recta AB. En efecto, siendo Az igual á Bg, y además paralela á ella (50), será tambien zg paralela á AB (Geom Teor. 30) y los ángulos e y p serán iguales (Acotaciones 34).

401. **Verificaciones y correcciones.** — Para las verificaciones es conveniente empezar por centrar el anteojo (240), para lo cual se aflojarán los tornillos de las abrazaderas (h, h') (fig. 278; lám 16) con lo que aquel puede moverse dentro de ellas; pero no es absolutamente necesario; por lo que en algunas brújulas no es susceptible el anteojo de este movimiento: nosotros, por lo tanto, prescindiremos de centrarle. La primera verificacion es entonces la misma explicada (372)

402. *Segunda verificacion y correccion*.—Que el eje de rotacion del instrumento sea perfectamente vertical, á fin de que el nivel n (fig. 278; lám. 16) se mueva en un plano horizontal.

Colóquese el nivel en direccion paralela á la línea tt(fig. 281; lám 16) que une dos tornillos de la plataforma, y llévese la ampolla del nivel á su punto medio por el movimiento de los mismos tornillos Si el eje del nivel es paralelo á la línea *tt*, esta será horizontal (108); ambas determinarán un plano *ttnn* (106). Dando al instrumento una semirevolucion exacta, la *nn* tomará una posicion *n'n'*, que será horizontal, y determinará con la *nn* un plano, inclinado en general, que será perpendicular al eje de rotacion *ab* del instrumento (124), y por consiguiente paralelo al de las rectas *tt*, *t't'*, que es tambien perpendicular al eje por construccion. La ampolla del nivel permanecerá, por lo tanto, en su punto medio.

Pero si *tt* no es paralela á *nn*, dando á esta la posicion horizontal por medio de la ampolla, la *tt* será inclinada, y al hacer la semirevolucion la línea *nn* tomará la posicion *n'n'* (fig. 282; lám. 17). Esta figura representa la proyeccion de todas estas líneas en el plano que tiene por traza la recta *pq* de la fig. 281 (lám. 16); se comprende entonces que será preciso dar al nivel la posicion *hh* perpendicular á *ab*, lo que se consigue por el movimiento del tornillo de correccion particular del nivel; despues será preciso horizontar las líneas *tt*, *hh*, para lo cual se emplean los tornillos de la plataforma.

Para dar á los planos *ttt't'*, *nnn'n'* (fig. 281; lám. 16) la posicion horizontal, y por consiguiente la vertical al eje *ab*, toda vez que el nivel está corregido, bastará colocar este en la direccion perpendicular á *tt*, y llevar la ampolla á su mitad por el movimiento del tornillo *t''*. Cuando esto se ha conseguido, el nivel permanece horizontal en todas las posiciones que se dan al instrumento alrededor de su eje.

403. De lo expuesto se deduce la siguiente regla práctica para la verificacion y correccion de que nos ocupamos.

Se coloca el nivel en la direccion de dos tornillos de la plataforma, y se horizonta por ellos: se da una semirevolucion al instrumento, y si la ampolla marca entonces la posicion horizontal del nivel, este estará corregido; si no, se corrige la desviacion que se observe, mitad por el tornillo de correccion particular del nivel, y mitad por los mismos tornillos de la plataforma: se lleva el nivel á su primera posicion y se repite la misma operacion, hasta que en ambas posiciones la ampolla marque la horizontalidad; con lo que se habrá corregido el nivel. Se coloca este despues en direccion del tercer tornillo, y se horizonta por el movimiento de este solo tornillo. Para asegurarse de que la correccion está bien hecha, se observa si el nivel queda horizontal en todas las posiciones que se dén al instrumento, haciéndole girar alrededor de su eje.

404. *Tercera verificacion.*—Que el eje óptico sea perpendicular al eje de rotacion de la alidada (374).

405. *Cuarta verificacion.*—Que el plano descrito por el eje óptico del anteojo sea vertical. Esta verificacion es la explicada (264). La correccion se hace en algunas brújulas por el movimiento de unos tornillos que unen el limbo vertical á la caja de la brújula.

Para disponer una cerda del retículo verticalmente, se sigue la marcha indicada en el párrafo citado, aflojando lo tornillos de las abrazaderas *(h, h')* (fig. 278; lám. 16), y apretándolos cuando se ha conseguido la verticalidad de la cerda.

406. *Quinta verificacion.*—Que el eje óptico del anteojo sea horizontal, cuando se halla en coincidencia el cero del limbo zenital con el del nonius correspondiente.

Poniendo los ceros en perfecta coincidencia, se dirige el anteojo á un objeto vertical cualquiera, observando el punto a (fig. 283; lám. 17) del mismo en que termina la visual. Dando á la alidada una semirevolucion alrededor de su eje, lo que se consigue exactamente por la nueva coincidencia de los ceros, el eje óptico permanecerá horizontal si antes lo era; y haciendo girar al instrumento alrededor de su eje vertical, la visual no saldrá del plano horizontal que pasa por c, y al cabo de una semirevolucion completa, irá á parar al mismo punto a.

Pero si el eje óptico dirigido segun ca' no es horizontal cuando los ceros coinciden, formará con la horizontal ca un ángulo m: marcando el punto a' en que termina la primera visual, y dando á la alidada la semirevolucion que hemos indicado, el eje óptico tomará la posicion cb, prolongacion de ca', formando con la horizontal de c un ángulo $m' = m$. Al hacer la semirevolucion del instrumento alrededor de su eje vertical, el ángulo m' no variará de inclinacion; lo que dará el ángulo $m'' = m'$. Tendremos por lo tanto $m = m''$; y como los triángulos caa', caa'' son rectángulos (55) y tienen el lado ca comun, resulta $aa' = aa''$. Determinado el punto a por la condicion de equidistar de a' y a'', se hace girar al limbo por su tornillo de movimiento general r (fig. 278; lám. 16), hasta que la visual vaya á parar al punto a: con lo que quedará horizontal. Despues se horizonta el nivel (m, m') por el tornillo s. Este nivel nos manifestará si el limbo pierde en lo sucesivo la posicion que le hemos dado, dejando de ser horizontal.

407. La determinacion del punto a (fig. 283; lám. 17) puede obtenerse con precision, y evitarnos en la verificacion repeticiones y tanteos, sirviéndonos de una regla dividida colocada verticalmente en un punto A del terreno, y anotando las alturas Aa', Aa''. En efecto, se tiene

$$\mathrm{A}a = \mathrm{A}a' - aa';$$

$$\mathrm{A}a = \mathrm{A}a'' + a''a;$$

de las que resulta sucesivamente:

$$2\mathrm{A}a = \mathrm{A}a' + \mathrm{A}a'';$$

$$\mathrm{A}a = \frac{\mathrm{A}a' + \mathrm{A}a''}{2};$$

bastará por lo tanto mover el limbo hasta que la visual vaya á parar al punto de la regla cuya altura sobre A es la semisuma de las alturas observadas.

408. La verificacion y correccion de que nos ocupamos puede obtenerse por otro método muy sencillo. Suponiendo que la línea de los ceros tenga la posicion ab (fig. 284; lám. 17), el ángulo de elevacion de la visual tirada á un punto lejano cualquiera p, será m, diferente del verdadero pch, que representaremos por x. Dando á la alidada una semirevolucion, el cero del nonius a vendrá á parar á b, y despues de dar una semirevolucion al instrumento, con lo que b irá á parar á b', y de dirigir la visual á p, el ángulo observado será m'. Tendremos entonces sucesivamente:

$$x = m + r;$$

$$x = m' - r:$$

$$x = \frac{m + m'}{2} \qquad [4].$$

Para hacer la correccion bastará tomar el valor de x (305—2°, y 212—2°), y mover el limbo hasta que la visual vaya de nuevo á parar al punto p.

La fórmula [4] suministra tambien el medio de apreciar los ángulos de elevacion y de depresion, y los zenitales, en una brújula cuyo limbo no fuese susceptible del movimiento necesario para la correccion de que nos ocupamos.

409. **Brújula de doble arco zenital.**—En esta brújula se suprime parte del limbo zenital, resultando dos arcos m y m' (fig. 285.; lám. 17): el anteojo está unido á la pieza b de los nonius por tornillos que le sujetan á dos rectángulos salientes s, que forman parte de la misma pieza, y puede girar alrededor del centro comun de los arcos, con movimiento rápido ó lento, por el sistema que constituyen los tornillos a y c. El tornillo de correccion t une la pieza z de los arcos á la caja de la brújula, y puede dár á aquella el pequeño movimiento necesario para la correccion. Otro tornillo r sirve para la correccion particular del único nivel n, que tiene generalmente la brújula que describimos, fijo á la parte posterior de la pieza z.

La caja es unas veces de madera y de forma cuadrada, y otras es metálica circular; siendo en todo lo demás igual á la de limbo zenital.

410. Las correcciones son tambien las mismas, y deben hacerse en el mismo órden. Para la segunda (402) se emplean los tornillos de la plataforma y el tornillo r de correccion particular del nivel.

La quinta verificacion (406) se puede hacer como hemos indicado para la brújula de limbo zenital, observando un punto muy lejano; ó bien se puede seguir el método expuesto (408) Como en esta correccion el nivel pierde la posicion horizontal que habia adquirido, se hace que la recobre por el movimiento del tornillo r.

411. **Brújula de arco simple zenital.**—Esta brújula tiene un solo arco de rádio bastante grande, dividido en cuartos de grado. El nonius lo está en 15 partes, por lo cual aprecia minutos (309. Ej. 8.º). El anteojo unido á la pieza del nonius, gira con ella alrededor del eje proyectado en m (fig. 286; lám. 17) con movimiento rápido ó lento por el sistema de los tornillos a y c (322). El tornillo t sirve para mover el sistema constituido por el arco y la alidada, y el r es el de correccion particular del nivel n.

412. **Verificaciones y correcciones.**—Las correcciones son las mismas que las de la brújula de limbo zenital, teniendo en cuenta que para la verticalidad del eje puede emplearse el método explicado (402) ó el (410), segun que el nivel esté unido á la caja de la brújula ó á la pieza que lleva el arco zenital, como sucede generalmente en la brújula que describimos.

413. La disposicion particular de este instrumento no permite emplear los métodos explicados (406 y 408) para hacer que la visual sea horizontal cuando coincide el cero del nonius con el del arco zenital. El procedimiento que se emplea consiste en colocar el instrumento en A (fig. 287; lám. 17), y hallar la pendiente m de una línea AB (400): trasladándose despues á B, se halla la pendiente m' de la misma línea; la primera estará dada por un ángulo de elevacion, y la segunda por uno de depresion: suponiendo que la línea que une el centro de rotacion de la alidada y el punto en que los ceros coinciden es horizontal, como las rectas ab, $a'b'$ son paralelas, los ángulos m y m' serán iguales (Geometría Teór. 11 —2.º); pero si dicha línea no es horizontal, llamando n al ángulo que forma con la verdadera horizontal, m, m' á los ángulos observados, y p á la pendiente verdadera de la línea AB (fig. 288; lám. 17), tendremos en el punto A de estacion

$$p = m + n;$$

y en el otro punto B,

$$p = m' - n;$$

de las que se deduce

$$p = \frac{m + m'}{2}.$$

Tomando en el arco zenital el ángulo así obtenido (305—2.º), se pone dicho arco en movimiento por el tornillo t (fig. 286; lám. 17) hasta que la visual va á parar de nuevo al punto a' (fig. 287; lám. 17), con lo que estaremos en el caso anterior: despues se horizonta el nivel por su tornillo de correccion particular, si está unido á la pieza del arco

414. Hemos supuesto para la correccion anterior, que las verticales de los puntos A y B eran paralelas: lo cual no es exacto; pero el error que resulta es inapreciable.

En efecto, sean v, v' (fig. 289; lám 17) las verticales, y h, h' las horizontales respectivas de los puntos A y B. No siendo paralelas las verticales, tampoco lo serán las horizontales, y tirando por B las rectas Bv'', Bh'', respectivamente paralelas á las Av, Ah, resultará que Bh'' formará con la horizontal h' un ángulo x, y tendremos

$$m' = s + x;$$

pero por la construccion resulta $s = m$; luego obtendremos sucesivamente:

$$m' = m + x;$$

$$m' - m = x \quad [5];$$

pero tambien tenemos $x = t$ (Geom. 13), y $t = a$ (Geom. Teor. recip. del 8); de donde resulta $x = a$: sustituyendo en la ecuacion [5], será por último

$$m' - m = a.$$

Donde vemos que el error es igual al ángulo que forman las verticales de los puntos extremos de la recta, y que crece por consiguiente con la separacion de dichas verticales; pero para que llegue á valer 1′ es preciso que AB tenga una longitud de 2000^{m} (50), que excede con mucho á las que se toman ordinariamente para la correccion: luego el error cometido será siempre menor que 1′, y por lo tanto inapreciable en el instrumento.

Aun cuando el nonius apreciase de 20 en 20″ (309 — Ej. 7.°), la distancia límite sería de unos 620 á 670^{m}, que tambien es mayor que la que se toma para la correccion.

415. **Brújula de limbo azimutal de Ladois.**—La brújula de Ladois tiene un limbo de metal m (fig. 290; lám. 17), de doble graduacion completa (277) en grados y medios grados, que sirve para la medida de los ángulos azimutales. Este limbo puede tener movimiento rápido ó lento alrededor de un eje perpendicular á él, que es al mismo tiempo el eje de rotacion de todo el instrumento, por medio de un sistema de tornillos a y c (321 y 322), que le relaciona con la plataforma. Este sistema se designa con el nombre de *sistema de movimiento general del instrumento*.

La caja de la brújula es tambien metálica, de forma circular, y lleva exteriormente en prolongacion de su fondo los nonius v correspondientes al limbo azimutal m, los cuales aprecian minutos (309 — Ej. 6.°). Otras dos piezas, que tambien forman cuerpo con la misma caja, llevan: la primera el nivel n y el limbo vertical, y la segunda un contrapeso p

para equilibrar el peso de la primera y de las piezas que la acompañan.

La caja y todas las demás piezas unidas á ella, pueden girar simultáneamente alrededor del eje citado con movimiento rápido ó lento, por el sistema de tornillos a' y c', que se llaman *tornillos de movimiento particular de la parte superior del instrumento*

La pieza que lleva el nivel y el limbo zenital, y que representamos aparte en b, se une por medio de dos tornillos z, á otra pieza c, que lleva el eje d, alrededor del cual gira el limbo zenital (l, l', l''), por medio del tornillo de correccion (t, t', t''). La inclinacion del limbo puede variar por el movimiento de los tornillos z.

La alidada, concéntrica con el limbo zenital, se pone en movimiento por el sistema de los tornillos a'', c'', llamado de *movimiento particular de la alidada*.

416. **Usos, verificaciones y correcciones.**—*Medida de los ángulos azimutales*.—Para medir el ángulo ACB (fig. 256; lám. 15) se coloca la brújula en estacion en C, y poniendo en coincidencia el cero del nonius con el del limbo azimutal, para lo cual se emplean los tornillos a', c' (fig. 290; lám. 17), del sistema de movimiento particular de la parte superior del instrumento, se dirije la visual al punto A. Para dirigir exactamente el cruzamiento de las cerdas del retículo al punto A, se emplean los sistemas de tornillos a, c, de movimiento general del instrumento y a'', c'' de movimiento particular de la alidada, como hemos indicado (399). Despues se anota el rumbo de CA, y se aflojan los tornillos de presion a', a'', dirigiendo la visual al punto B como antes, empleando los sistemas de tornillos a', c' y a'', c''. Entonces se anota el ángulo que aprecia el nonius v, que será la expresion del arco recorrido, y el rumbo de la recta CB.

El ángulo deducido de los rumbos debe ser igual al obtenido por el nonius: ambos están afectados, sin embargo, de un error de excentricidad, que no influye para el primero, y en cuanto al segundo puede obtenerse exactamente, dando una semirevolucion á la alidada alrededor de su eje de rotacion d, y repitiendo la operacion indicada; la semisuma de los ángulos dados por el nonius v, será la medida del verdadero ángulo ACB (280).

417. El limbo azimutal permite tomar el ángulo de izquierda á derecha ó de derecha á izquierda (285), toda vez que tiene doble su graduacion (415). Cuando se emplea la primera, se comprueba el valor hallado para el ángulo, por medio de los rumbos, restando del rumbo CA (figura 256; lám. 15) que es el primero obtenido, el segundo CB, añadiendo 360° al primero cuando es menor que el segundo. Si se emplea la segunda graduacion, se resta el primer rumbo observado del segundo.

Ejemplos. 1.° Sea, por ejemplo, 20° el rumbo de CA y 310° el de CB, habiendo empleado la primera graduacion para la medida del ángulo: resultará

$$ACB = (20^\circ + 360^\circ) - 310^\circ = 70^\circ,$$

que será el obtenido por el limbo, si las observaciones están bien hechas.

2.° Sea 340° el rumbo de CB, y 50° el de CA, para otro ángulo cuyo valor sea tambien 70°, habiendo empleado la segunda graduacion para la medida del ángulo: tendremos

$$BCA = (360^\circ + 50^\circ) - 340^\circ = 70^\circ.$$

418. Los ángulos zenitales se obtienen del mismo modo que hemos dicho (400).

419. *Verificaciones y correcciones.*—Además de las correcciones de la brújula de limbo zenital (401), tiene las del limbo azimutal y los nonius (288) y (307). Tambien debemos observar que la correccion (405) puede efectuarse dando al limbo zenital la posicion vertical por medio de los tornillos z (fig. 290; lám. 17).

420. **Brújula de Chevallier.**—El anteojo de la brújula de Chevallier está dispuesto de modo que puede sacarse de los collares c (fig. 291; lámina 17), y colocarse en ellos invertido. Aflojando los tornillos de los collares, puede hacerse girar á las planchitas en que terminan estos por su parte superior, alrededor de unas charnelas, dejando abiertos los collares: puede entonces sacarse el anteojo, colocarle invertido y cerrar de nuevo los collares, apretando los tornillos para sujetar el anteojo. Un nivel m está unido al limbo zenital, y otro n lo está á la pieza a de los nonius, á la cual se hallan fijos tambien los collares del anteojo.

La alidada se mueve por el sistema de los tornillos G y H (322): y el tornillo de correccion F sirve para mover el limbo zenital juntamente con la alidada. Las letras G, H, F, están marcadas en las cabezas de los tornillos correspondientes.

La caja que lleva el limbo y la aguja es circular; siendo en todo lo demás el instrumento de que nos ocupamos semejante á las brújulas que hemos descrito.

421. Las correcciones son las mismas que hemos explicado (401) para la brújula de limbo zenital. Observaremos, sin embargo, que puede empezarse por centrar el anteojo (242), haciéndole girar alrededor de su eje dentro de los collares; lo que se ejecuta fácilmente en la brújula de cuya descripcion nos ocupamos.

Para dar al eje la posicion vertical se seguirá la marcha establecida (402), empleando para la correccion el tornillo F de movimiento general del limbo y los tornillos de la plataforma. Al ejecutar la quinta verificacion (406), en vez de dar á la alidada una semirevolucion alrededor de su eje, puede sacarse el anteojo de los collares, y colocarle en ellos invertido; despues se hará girar al instrumento alrededor de su eje vertical, hasta dirigir la visual al mismo punto que en la primera posicion.

Una vez ejecutada esta última correccion, se llevan las ampollas de ambos niveles á su punto medio por medio de sus tornillos de correccion particular t, t'.

El nivel n, sirve para hacer tomar á la visual en caso necesario la posicion exactamente horizontal que ocupaba al hacer la correccion; para lo cual se hará que el cero del nonius de la alidada coincida con el cero del limbo zenital, horizontando el nivel n por medio del tornillo H. Si entonces difieren sensiblemente los ceros que antes se pusieron en coincidencia, el nivel ó el limbo estarán descorregidos y será preciso rectificarlos.

422. **Brújula de Kater.**—La aguja *ns* (fig. 292; lám. 17) de esta brújula forma cuerpo con un limbo de metal sumamente ligero, de graduacion completa, dividido en grados y medios grados; el cero corresponde al extremo sur de la aguja, y la graduacion va de sur á norte pasando por el oeste. El estilo sobre que se apoya la aguja está en el fondo de una caja cilíndrica *(c, c')*, la cual está provista de una pínula exterior *(p, p')*. Diametralmente opuesto á la pínula hay un prisma triangular de metal *(a, a')* que encierra otro de cristal, cuya cara inferior es convexa; el primero presenta una ranura *(b, b')* que sirve de ocular. Esta ranura y la cerda de la pínula, que es el objetivo, determinan un plano que pasa por el centro del limbo. El pasador *(m, m')* mueve la palanca que sujeta á la aguja contra el cristal que cubre la caja. El boton n, que está en contacto con una placa elástica interior, sirve para detener el movimiento oscilatorio de la aguja y el limbo oprimiéndoles ligeramente. La caja puede girar alrededor de un eje dentro de una espiga que forma parte de la rodilla r.

La pínula y el prisma del ocular pueden aplicarse, la primera al cristal que cubre la caja, y el segundo al costado de esta; lo que permite que pueda darse al instrumento una forma muy cómoda para su trasporte.

423. *Usos de la brújula.*—Para hallar el rumbo de una línea CA (figura 293; lám. 17) se centra el instrumento en el extremo C de la misma, y se hace girar á la caja hasta que la visual dirigida por el ocular y la cerda del objetivo vaya á parar al punto A. Al mismo tiempo que esto se efectúa mirando por la parte superior de la ranura b, b' (fig. 292; lám. 17), se presenta á la vista un trozo del limbo, amplificado por haber atravesado la cara convexa del prisma, y en posicion vertical á causa de la inclinacion de 45° que tiene otra de las caras. Si una de las divisiones aparece entonces en prolongacion de la cerda, el rumbo será un número exacto de grados ó medios grados; si no está en prolongacion de ninguna de ellas, se apreciará el rumbo como en la brújula ordinaria. Cuando la division *cero* lo esté, la visual se hallará en el meridiano magnético.

424. Para la medida de un ángulo, se dirigirá la primera visual al objeto A de la izquierda, y se anotará el rumbo 38° 15′; haciendo girar la caja alrededor de su eje en el sentido de la graduacion, se dirigirá la visual al punto B, lo que dará el rumbo 102° 30′: la diferencia 64° 15′ de estos rumbos es el valor del ángulo ACB.

425. A causa de la refraccion de la luz en el prisma, las graduaciones del limbo se presentan invertidas; por esta razon los constructores gra-

ban los números invertidos, á fin de que aparezcan directos en las observaciones.

426. **Brújula de reflexion.**—La brújula de reflexion, igual en todo lo demás á la que acabamos de explicar, tiene en vez del prisma lenticular un espejo *e* (fig. 294; lám. 17), la cual representa una seccion del instrumento: el espejo tiene una inclinacion de 45º con respecto al plano del limbo *l*. Mirando por el taladro *a* se observan á la vez: por la parte superior del taladro, el objeto al cual se dirige la visual, y la cerda de la pínula; y por la inferior una parte del limbo, que aparece vertical en virtud de la inclinacion del espejo. La division que más cerca se halla de la cerda indica el rumbo como en la brújula de Kater. En algunas brújulas el espejo puede variar de inclinacion, girando alrededor de una charnela.

427. **Brújula de Burnier.**—Se compone de una caja ovalada de laton *(c, c')* (fig. 295; lám. 17) cerrada por la parte superior y por la inferior. En el fondo de la caja se halla el estilo *e* que sostiene una aguja como la de la brújula de Kater, con la diferencia de que la graduacion está en la superficie lateral de un anillo cilíndrico *l* de poca altura y sumamente ligero. La graduacion de este limbo es completa, y se halla en direccion de sur á norte pasando por el este: por lo que para observar un ángulo debe empezarse por hallar el rumbo de la derecha, al contrario de lo que se verifica en la brújula de Kater (424). Una abertura *a* practicada en el costado de la caja, y ocupada por un cristal convexo, sirve para observar el limbo, el cual se presenta amplificado por la curvatura del cristal, así como un hilo metálico *k*, situado en el interior perpendicularmente al fondo de la caja. Otra abertura *b*, que presenta la tapa superior y que está cubierta por un cristal plano, permite el paso de la luz destinada á iluminar el interior visible de la caja. Sobre esta se elevan dos pínulas, una más pequeña, que sirve de ocular, y presenta una hendidura longitudinal *h*, y la otra más larga *p* es el objetivo y está atravesada en sentido de su longitud por una cerda. El boton *(m, m')* sirve para la suspension del limbo, y el *n* para detener las oscilaciones, como en la brújula de Kater.

Una rodilla á la Cugneau, que es una modificacion de la que hemos descrito (330), y cuyos ejes son los proyectados en *z* y *z'*, puede atornillarse á la parte inferior de la caja.

428. El hilo *k*, la hendidura *h* y la cerda del objetivo se hallan en un mismo plano, que es el de colimacion del instrumento. Cuando se quiere determinar el rumbo de una línea, se emplea la brújula de que nos ocupamos del mismo modo que la de Kater. Al dirigir la visual por las pínulas se observa al mismo tiempo la cerda *k*, que ocupa una posicion paralela á las divisiones del limbo, las cuales son tambien verticales. Si coincide exactamente con alguna de ellas, el rumbo será un número exacto de grados.

429. *Observaciones de los ángulos zenitales.*—Igual al *l* de que hemos hecho mencion, tiene la brújula de Burnier otro limbo *l'*, que gira alrede-

dor de un eje *d*, fijo á la tapa superior de la caja. Colocando esta de modo que el eje *d* sea horizontal, el limbo *l'* queda en una posicion fija, en la cual la línea (0°—180°) del mismo, queda tambien horizontal, en virtud del peso de un sector macizo que tiene el limbo; este sector está dispuesto de modo que su centro de gravedad se halla en el plano que determina el eje *d* con la division 90° Estando este plano en posicion vertical, el que determinan las divisiones 0 y 180 es horizontal. Moviendo la caja hasta que la cerda coincida con la division 0 del limbo *l'*, la visual tirada por las pínulas será horizontal. A partir de 0 hay dos graduaciones, una superior y otra inferior. Para hallar la pendiente de una línea, se dirige la visual por las pínulas á uno de los extremos de la misma, y se aprecia la pendiente, viendo la division con que coincide la cerda *k*. Si esta division es de la graduacion superior, la pendiente será bajando á partir del punto de estacion; y será subiendo con respecto á este punto, cuando la coincidencia sea con la graduacion inferior.

El boton *r* sirve para impedir el movimiento del limbo *l'*, cuando no se opera con él.

430 **Brújula de bolsillo de Goulier.**—El limbo *l* (fig. 296; lám. 18) de esta brújula, está dividido en grados desde 0 á 360° en sentido norte á sur pasando por el este. Aflojando el tornillo *t*, puede darse al limbo un movimiento, cuya amplitud está limitada por la longitud de unas hendiduras que presenta la caja, y por las cuales pasan los tornillos *r* que sujetan el limbo: este movimiento se efectúa con la mano, y cuando se ha conseguido dar al limbo una posicion conveniente, se le fija apretando el tornillo *t*.

En el fondo de la caja hay otra graduacion que parte de *o* en que está el cero, y sigue á uno y otro lado de este punto hasta que los *n* y *s* en que termina con 90°. Esta graduacion se emplea en la observacion de los ángulos zenitales; y desde *e* en el sentido *ens*, hay otra que solo comprende 30°, y sirve para *orientar la brújula*. En el centro *c* se encuentra un perpendículo metálico *p*, que termina en una anilla, la cual puede girar alrededor del estilo que sostiene la aguja. Esta termina en *a* por un contrapeso, el cual puede correr cierto espacio en sentido de su longitud, para evitar la inclinacion (354) que segun hemos dicho varía con los lugares; en el otro extremo *b*, termina en una horquilla más elevada que la plancha de la aguja: esta horquilla sirve para fijar la aguja, inclinando ligeramente la caja hasta que tropiece con el cristal que cubre á esta última ó con el limbo. Puede servir tambien para horizontar este cuando el instrumento está sujeto á un trípode por medio de una rodilla; bastará para ello dar á la brújula una posicion tal, que dando alrededor de su eje una revolucion completa, la horquilla no toque al limbo ni al cristal.

En la parte inferior de la caja se halla situado exteriormente un doble plano inclinado, el cual, corrido hácia un extremo, deja en libertad á la aguja y al perpendículo; corrido en sentido contrario sujeta á ambos, y

27

haciéndole ocupar una posicion media, sujeta la primera dejando libre al segundo.

A un costado de la caja y en prolongacion de su fondo hay un plano *m*, cuyo canto *df* es paralelo al diámetro *ns*, y diametralmente opuestos, un espejo fijo *z*, y una anilla *h*, que puede servir para colgar el instrumento ó para cojerle cuando no se opera con él colocado sobre un trípode. Otro espejo *v* está unido al *z* por una charnela, que permite hacer variable el ángulo de los espejos, cuyo sistema hace veces de alidada.

431. *Observacion de los rumbos.*—Para hallar el rumbo de una línea, se coloca la brújula en estacion en uno de sus extremos, y se la hace girar alrededor de su eje, hasta que el sistema de los espejos se halle en la misma direccion que el ojo del observador y el otro extremo de la recta: se hace entonces girar tambien al espejo móvil, hasta que la imágen del ojo aparezca en la mitad de su borde coincidiendo con el objeto que determina dicho extremo, como se representa en la fig. 297 (lámina 18).

El rumbo de la *ns* (fig. 296; lám. 18), que es paralela á la visual, determina el de la recta dada (360).

Puede hacerse tambien la observacion dirigiendo la visual por una hendidura longitudinal, practicada en un carton que se adapta al espejo movible.

De otra manera podemos todavía dar á la visual la direccion conveniente, y es la que regularmente se emplea cuando se hacen las observaciones sin fijar el instrumento á un trípode; se le hace girar alrededor de su eje al mismo tiempo que se varía la inclinacion del espejo móvil, hasta que la imágen del ojo formada en el espejo fijo se encuentre en *a* (fig. 298; lám. 18) en una misma perpendicular á la charnela que la imágen *b* producida en el espejo móvil por los rayos de luz emitidos del jalon proyectado en *c*, ó del objeto que determina el extremo de la línea cuyo rumbo queremos determinar.

432. *Orientacion de la brújula de Goulier con respecto al meridiano astronómico.*—Supongamos que la aguja marca la division cero, en cuyo caso la visual *mn* (fig. 299; lám. 18) se hallará en la direccion del meridiano magnético N′ S′. Haciendo girar el instrumento hasta que la aguja señale 340°, la visual se hallará en la direccion *rt* del meridiano astronómico NS (381), y los puntos *a*, *b*, habrán pasado á ocupar las posiciones respectivas *a′*, *b′*, recorriendo un arco de 20°. Dejando fijo el instrumento, se moverá el limbo como hemos indicado (430), hasta que la division 90 del limbo que ha venido á parar á *b′*, coincida con la 20 del arco *z* que se encuentra en *b*. Entonces la aguja marcará el rumbo cero, que corresponderá á la meridiana astronómica.

433. *Observacion de los ángulos zenitales.*—Se dispone el limbo verticalmente, para lo cual se fija la brújula á un tablero, el cual es móvil por la articulacion de una rodilla sujeta á un trípode, y se da al espejo *v* (fig. 300; lám. 18) una posicion perpendicular al *z*, lo que tendrá lugar

cuando la imágen del primero formada en el segundo aparezca en prolongacion de aquel.

Hecho esto, se hace girar á la brújula alrededor de la espiga del trípode, y al limbo en el plano vertical en que se encuentra, hasta que la imágen del ojo del observador formada en el canto del espejo *v* coincida con el objeto que señala el punto extremo visto directamente. El perpendículo marca entonces la pendiente que se trata de hallar.

Para determinar la pendiente de una recta AB (fig. 301; lám. 18), puede tambien disponerse la brújula de modo que el canto del plano *m* se ajuste á dicha línea. El perpendículo da entonces el ángulo *a*, que mide la pendiente *p* de AB.

Cuando se trata de una línea distante, que se presenta á la vista en toda su extension, se coloca la brújula verticalmente, y el canto superior de los espejos, que se disponen en prolongacion uno de otro, de modo que aparezca á la vista cubriendo en toda su extension á dicha línea.

434. **Brújula de la Comision de Argel.**—Esta Brújula presenta dos graduaciones; la exterior es completa, y sirve para la apreciacion de los rumbos; la interior para la de los ángulos zenitales, y comprende solo dos cuadrantes; ambas están divididas y dispuestas del mismo modo que las de la brújula de Goulier.

La aguja *ns* (fig. 302; lám. 18) se suspende por la palanca acodada *m*, que se mueve por un tornillo situado en la parte inferior de la caja: dando entonces al limbo la posicion vertical, un perpendículo metálico *a*, que puede girar alrededor del estilo, toma la direccion vertical.

La caja metálica circular que comprende la parte del instrumento que hemos descrito, puede girar alrededor de un eje determinado por dos tornillos *b*, *d*, fijos á un anillo metálico *r*, el cual gira á su vez alrededor de otro eje determinado por los *c*, *e*, fijos al tablero *z*. El sistema de los ejes *bd*, *ce*, constituye el *sistema de suspension de Cardan*, que se emplea para las brújulas marinas, y por medio del cual queda el limbo horizontal, cualquiera que sea la posicion que se dé al tablero: pues en efecto, la disposicion de estos ejes permite el movimiento de la caja en todos sentidos, y esta toma la posicion horizontal por su propio peso. Los tornillos *t*, *t'*, atraviesan el tablero y el anillo *r*, apoyando sus extremos en la caja de la brújula, y sirven para impedir á esta todo movimiento cuando están apretados, pues entonces la caja forma un solo cuerpo con el tablero. Cuando se quiere que funcione el sistema de suspension, se aflojan los tornillos *t*, *t'*, moviéndolos hasta que dejen libres á la caja y al anillo.

Sobre la caja, y unida á ella por medio de tornillos, hay una escala metálica dividida en milímetros; y en los lados menores del tablero se elevan dos pínulas *p*, *p'*, la primera de las cuales presenta una hendidura que sirve de ocular, y la otra, representada aparte en P, una cerda que sirve de objetivo. La hendidura y la cerda determinan un plano, que es perpendicular al tablero, y que contiene á la recta NS.

Las pínulas terminan por su parte superior en unos corchetes que sirven para suspender la brújula de una cuerda, cuyos extremos se sujetan á dos puntos fijos; la brújula en virtud de su peso recorre una porcion de la cuerda, hasta quedar en posicion de equilibrio, en cuya posicion el tablero queda horizontal.

Tambien puede usarse esta brújula manteniéndola en la mano, ó fijándola á la meseta de un trípode.

435 *Usos de esta brújula.*—Cualquiera que sea la manera de situarla en estacion, entre las que acabamos de indicar, la aguja marca el rumbo de la línea á que se dirige la visual, del mismo modo que en las brújulas ordinarias; pero sin estar afectado del error de excentricidad.

Para observar los ángulos zenitales, se sujeta la caja al tablero, se dispone este verticalmente, se dirige la visual al extremo de la línea cuya pendiente queremos hallar, y el péndulo marca entonces la pendiente pedida, como en la brújula de Goulier (433).

436. **Brújula de Porro**.—La caja de la brújula de Porro es cuadrada, de caoba, y tiene en su centro el estilo que sostiene la aguja como en las brújulas ordinarias: el limbo es de marfil, para evitar la accion que puede tener sobre la aguja el metal de que está formado en otras brújulas. Dos botones colocados en dos ángulos opuestos de la caja sirven para evitar el movimiento lateral de la caja: un tercer boton situado en otro de los ángulos sirve para la suspension dela aguja; y el cuarto ángulo está ocupado por un nivel esférico que se emplea para horizontar el limbo.

La alidada de esta brújula es un anteojo cuyo eje óptico se mueve en un plano perpendicular al del limbo, alrededor de un eje apoyado en dos caballetes, sostenidos á su vez en el cristal que cubre al limbo y á la aguja, y que con este objeto tiene bastante espesor. El limbo zenital es de nikel, metal que no tiene accion sobre la aguja, y gira con el anteojo al cual está invariablemente unido: el nonius correspondiente está fijo al caballete.

Un arco de marfil, y una línea trazada con diamante en el cristal, sirven para *eliminar la declinacion;* bastará para ello disponer el sistema de los caballetes de modo que coincida la línea trazada en el cristal con el número que marca la declinacion en el arco de marfil.

El nivel esférico, y por consiguiente, el limbo azimutal del instrumento, se horizonta por medio de las cuñas *a, b* (fig. 303; lám. 18), que reunidas forman un segmento esférico MN, dividido en dos partes por un plano inclinado con respecto á las bases, el cual pasa por el centro de la esfera: la seccion es, pues, un círculo máximo cuyo diámetro es *rs*. Cogiendo las cuñas por los mangos *m*, y moviéndolas en un sentido cualquiera, la inclinacion del círculo *rs* con respecto al horizonte varía contínuamente: por lo tanto, observando el nivel esférico y moviendo las cuñas en sentido conveniente, se llevará la ampolla al medio del cristal en el que hay marcada con diamante una circunferencia, con la cual es concéntrica dicha ampolla cuando el nivel está horizontal.

437. **Declinatoria.**—Este instrumento, que tambien llaman algunos *declinatorio*, se compone de una caja rectangular de madera, en cuyo interior y hácia los lados menores se hallan dos arcos divididos *m*, *m'* (figura 304; lám. 18): los ceros de ambas divisiones corresponden á los puntos medios de los arcos, y determinan una recta paralela á los lados mayores de la caja. La graduacion de cada uno de los arcos se extiende hasta 40 ó 45º á uno y otro lado del cero. En el centro *a* comun á los dos arcos se halla un estilo que sostiene á la aguja magnética *ns*. La letra N indica la parte á que ha de corresponder el extremo *n* de la aguja, y sirve para colocar el instrumento orientado siempre de la misma manera.

Un cristal cubre el fondo de la caja, los arcos y la aguja, y se sujeta con un cerco metálico rectangular, que se adapta á las paredes de la caja. Esta se cubre con una tapa como en las brújulas ordinarias de madera.

Una palanca acodada, que se eleva al introducir la tapa de la caja, suspende la aguja como en las brújulas ordinarias.

438. La línea de los ceros debe ser paralela á los lados mayores de la caja; pero si forma un pequeño ángulo con ellos, el error que produce tiene lugar siempre en el mismo sentido, como el que proviene de la inclinacion de la norte-sur en las brújulas ordinarias (378); no influye, por lo tanto, en la posicion relativa de las líneas cuya direccion se determina con la declinatoria afectada de este error, y desaparece tambien con la orientacion final del plano.

439. **Usos de la declinatoria.**—Se emplea para hallar la declinacion de la aguja y para trazar en un plano la meridiana magnética ó la astronómica. Para hallar la declinacion, es preciso que se tenga trazada en un plano la meridiana astronómica (126): se hace coincidir con esta línea el canto *bc* de la caja de la declinatoria, y entonces el extremo *n* de la aguja marca la declinacion.

Para trazar la meridiana magnética basta mover la caja hasta que la aguja coincida con la línea de los ceros, y trazar una línea por el canto *bc* de la caja.

La meridiana astronómica se traza moviendo la caja hasta que la aguja señale el ángulo de declinacion, que se supone conocido, quedando el punto N al este del extremo *n* de la aguja: la línea trazada por el canto *bc* será la meridiana pedida.

CAPITULO VII.

Plancheta.

Plancheta.—Orientacion de la plancheta.—Verificacion y correcciones.—Medida de los ángulos con la plancheta.—Orientacion de una línea trazada en la plancheta.—Consideraciones sobre la plancheta.

440. **Plancheta.**—La *plancheta* es un goniógrafo por medio del cual se obtiene desde luego, representada en una hoja de papel, la proyeccion horizontal del polígono semejante al del terreno.

La invencion de este instrumento es debida á J. Prætorius de Nuremberg en el siglo XVI, habiendo recibido despues varias modificaciones, que la han llevado al grado de perfeccion con que hoy se usa.

La más sencilla de todas se compone de un tablero ABCD (fig. 305; lámina 18), perfectamente liso, de madera resistente, cuadrado ó rectangular, construido en forma de marco ó bastidor, como se vé en la figura, á fin de que no se alabée. Sus dimensiones suelen ser ordinariamente de $0^m,40$ á $0^m,60$ de lado, y $0^m,015$ de espesor próximamente, aunque pueden variar segun las circunstancias.

Colocado este tablero en una posicion horizontal y á una altura cómoda, sirve como una mesa de dibujo; sobre él se pega el papel en que se ha de obtener la figura que se desea. Lleva en su parte inferior una pieza de metal, fija por medio de tres tornillos *t* colocados en las partes *a, b, c* de dicha pieza, en el centro de la cual se eleva perpendicularmente un cilindro de metal, cuyo eje es el de rotacion del instrumento: este cilindro se introduce en otro hueco, que acompaña á un platillo ó disco *d*, tambien de metal, y que termina en una esfera *e*, la cual forma parte de la rodilla ó juego de nuez (329). Este juego va unido á un mango hueco (327), para introducirle en la espiga de uno de los trípodes explicados (340).

Apretando el tornillo de presion del juego de nuez, y dando una impulsion al tablero, éste gira en su plano alrededor del eje de rotacion indicado; y para detener el movimiento y hacer que el tablero quede formando cuerpo con la rodilla y el trípode, se halla dispuesto un tornillo de presion (318) en una de las partes *a* de la pieza unida al tablero. El movimiento de rotacion puede ser tan lento como se quiera, si se hace uso además del tornillo de ajuste ó coincidencia (321). Una vez apretado el tornillo de presion, el plano del tablero puede colocarse en una posicion cualquiera, en virtud del movimiento de la esfera del juego de nuez dentro de las conchas.

441. A esta plancheta acompaña la alidada de metal con pínulas, giratoria alrededor de un punto cualquiera de la línea de fé (248).

442. Como la posicion en que se coloca el tablero es generalmente la horizontal, la plancheta que acabamos de describir, que es de las más sencillas, tiene el inconveniente de perder dicha posicion con la mayor facilidad (329); por lo que se puede dar á este instrumento mayor perfeccion, adaptándole una rodilla á la Cugneau (330) (fig. 306; lám. 18), y mejor aún una plataforma de tres tornillos (337).

443. El tablero de estas planchetas, atendidas sus dimensiones, pudiera no contener al plano del polígono del terreno que se trata de obtener; por lo cual lleva en la parte inferior y en dos lados opuestos unos rodillos *r*, *r'* de la misma longitud que aquellos, dispuestos de modo que puedan girar alrededor de su eje en un solo sentido, y cuyo movimiento puede detenerse á voluntad, manteniéndolos en la posicion en que se quiera; en uno de ellos va arrollada una tela fina, á la cual se pegan de antemano, unos á continuacion de otros, los pliegos de papel necesarios. De esta manera, cuando el dibujo no puede estar contenido en el papel que ocupa el tablero, se arrolla en uno de los cilindros, y queda sobre el tablero el papel en blanco, que se desarrolla en el otro.

Con el objeto de que el papel se adapte bien al tablero, se usa para estirarle y sujetarle un marco de metal *mm'*, que va embutido en los bordes de los cuatro lados del tablero, y que se asegura por medio de tornillos: dicho bastidor tiene sus bordes redondeados para que no corten el papel.

En el marco suele estar señalada la graduacion de la circunferencia en que puede suponerse inscrito el cuadrado ó rectángulo de la plancheta

444. Para dar á la plancheta toda la perfeccion de que es susceptible, se puede disponer de manera que además del movimiento de rotacion rápido ó lento por medio del tornillo de presion M y el de coincidencia E, tenga el tablero otro de *traslacion* en sentido de la recta *mm'*, cuando se fija á la pieza *nn'* por la tuerca T, con lo que se impide el movimiento de rotacion. Para conseguirlo, se emplea la pieza *pp'* y otra paralela á ella, las cuales están invariablemente unidas al tablero por los tornillos *tt'*, y llevan unas ranuras que abrazan los rebordes en que termina la pieza *oo'*

de la parte inferior del instrumento. Cuando se afloja el tornillo de presion M, se puede mover el tablero en el sentido indicado sobre la pieza *oo'*, y apretando dicho tornillo, se hace uso del de coincidencia E para el movimiento lento del tablero.

445. Sería conveniente que participase tambien del movimiento de traslacion en sentido de otra recta perpendicular á la primera, con lo que se lograria que un punto dado en el papel de la plancheta, se hallase en la vertical correspondiente á un punto dado del terreno; para lo cual hay que valerse de una pieza curva de acero, llamada *compás curvo* ó *compás de espesor*, que lleva en su punta inferior una plomada, y en la superior un pequeño taladro circular *c* (fig. 307; lám. 18), cuyo centro corresponde á la vertical que determina el hilo de la plomada. Con este compás se abraza el tablero de la plancheta de modo que el punto que se ha de hacer corresponder con el del terreno, se halle situado en el centro del taladro circular de la punta del compás, y colocando la plancheta de manera que la plomada esté próximamente en la vertical del punto dado en el terreno, se acabará de lograr la exacta coincidencia por los movimientos expuestos del tablero. Se hace uso del compás de espesor para lograr esta coincidencia, áun cuando la plancheta no participe del movimiento de traslacion indicado; bien que entonces hay necesidad de hacer algunos tanteos para conseguirlo, y nunca se logra exactamente. Cuando está fija la plancheta, y dado un punto en ella se quiere buscar el que la corresponde del terreno, ó al contrario, la operacion no presenta dificultad ni es necesario el movimiento de traslacion.

El trípode de esta plancheta es de los descritos (340), y la alidada la de anteojo (258) Con el objeto de medir los ángulos de altura y depresion con relacion al plano horizontal del instrumento, la alidada de anteojo va provista de un sector circular *sz* (fig. 308; lám. 18) fijo al soporte que sostiene al anteojo, cuyo arco tiene en medio el *cero* y lleva doble graduacion, generalmente en medios grados. Al anteojo va fija una pieza *a*, que participa de su movimiento, y lleva en su extremo el *nonius*; y todo se halla dispuesto por construccion de modo que cuando los *ceros* se hallan en contacto, la línea que pasa por ellos, prolongada suficientemente, es perpendicular al eje del anteojo. Por medio de los tornillos *t* se da al arco el movimiento necesario para la correccion. Otros dos tornillos situados en la parte posterior de la regla *b*, tienen por objeto mover el plano del arco en sentido perpendicular á él, y sirven para disponerle perpendicularmente al tablero de la plancheta

En algunas alidadas el sector circular se halla unido al anteojo participando de su movimiento, y el *nonius* está fijo en el soporte; y cualquiera que sea la posicion de las divisiones *cero* en el arco del sector y el *nonius*, deben hallarse en coincidencia cuando el eje del anteojo es horizontal.

La regla de estas alidadas, además de cuanto hemos dicho (248), suele llevar trazada en su plano una escala de trasversales (191).

446. Las planchetas que hemos descrito son las usadas más generalmente y se concibe que las varias disposiciones que puedan adoptar los constructores serán fáciles de comprender despues de lo explicado.

447. Tambien puede ser el tablero de forma circular con su correspondiente marco de metal, y éste hallarse provisto de una de las graduaciones más en uso (277). Pondremos aquí la plancheta circular que describe Vallejo, en la tercera edicion del tomo primero, parte segunda de su *Tratado elemental de Matemáticas*, página 333, párrafo 668, inventada por el Dr D. Domingo Fontan, catedrático de Matemáticas sublimes en la Universidad de Santiago, y construida en la misma ciudad en 1820 por los instrumentistas D. José y D. Domingo Lares. Su autor asegura que esta plancheta es mucho más exacta, cómoda y ventajosa que las que se hallan en uso.

«Consta este instrumento de un trípode en forma de baston y de una cajita circular de madera de diez pulgadas de diámetro y dos de espesor.»

»El trípode es de una construccion igual á la de los bastones de que nos servimos para sentarnos; está armado interiormente de tres puntas para fijarlo sobre el terreno, y superiormente de tres tornillos, en los cuales se asegura la mesa que ha de servir para trazar las visuales. Unos y otros quedan defendidos por medio de la empuñadura y del regaton.

»La cajita contiene la alidada con su nivel de aire, el declinatorio y un rayador que tambien sirve de lapicero; se divide en dos partes y además de resguardar estos aparatos, está destinada una de ellas al uso principal del instrumento; se compone de dos piezas, que se sujetan por medio de un tornillo; la una es de forma triangular, tiene tres cavidades y se coloca sobre los tornillos del trípode; la otra presenta una superficie circular muy plana para que se extienda sobre ella el papel, asegurándole y manteniéndole sin arrugas por medio de un anillo de laton. En su centro hay una pieza del mismo metal con un agujero cilíndrico, en donde entra el eje de la alidada. Antes de operar con esta, se traza un círculo por medio de una punta fija, á fin de que se puedan trasportar los ángulos, describiendo otro de igual rádio en el borrador del plano.

»Armada la plancheta, se nivela en todas direcciones por medio de los tornillos, se elevan las pínulas en una posicion triangular, sujetando sus extremos por medio de un pasador; se enfilan cualesquiera objetos en todo el giro del horizonte, se trazan y numeran las visuales y se escriben los nombres, ó bien sobre ellas mismas ó en un cuaderno separado, y por último, se orienta la estacion con el auxilio del declinatorio.

»Cuando se quiere nivelar un terreno, debe tenerse presente que la visual correspondiente á la interseccion de los hilos es paralela al eje del nivel.

»Si por algun obstáculo no pudiesen enfilarse algunos objetos sin que se varíe de centro de estacion, se muda la plancheta, y ligando la alidada sobre la visual del objeto, se dá un movimiento al plano del instrumento, aflojando el tornillo de la pieza inferior hasta cubrir exactamente dicho objeto, se fija el plano y se concluye la estacion trazando las demás visuales. Lo mismo podrá hacerse cuando se haya suspendido una estacion, ó en el caso de que se hubiese levantado la plancheta sin concluir la medida de los ángulos. Servía el mismo artificio para repetir ó multiplicar un ángulo. Debe evitarse el error de excentricidad insensible ó de poca consecuencia en muchos casos.

»El Sr. Fontan ha tenido muchas ocasiones de comprobar su utilidad en la série de operaciones geodésicas que emprendió con otros instrumentos suyos de la mayor perfeccion, acometiendo la árdua empresa de levantar á su costa, y contando tan solo con la cooperacion de algunos amigos, la carta físico-geométrica de Galicia; obra que tiene muy adelantada, estando casi concluida la parte occidental de esta vasta provincia hasta el meridiano del cabo de Vares, y levantado el plano de la comarca de Valdeorres y otras, de modo que se halla situada la mitad de la superficie de Galicia.»

448. **Orientacion de la plancheta.**—Se dice que se orienta la plancheta, cuando dada una línea en el terreno, y trazada su homóloga en el papel del tablero, se coloca este en estacion de modo que uno de los extremos de la línea trazada en él, se halle en la vertical del extremo correspondiente de su línea homóloga del terreno; hallándose además toda la línea del tablero situada en el plano vertical de la del terreno. Para conseguirlo, se colocará la plancheta en el extremo A (fig. 309; lám. 18) de modo que el punto *a* se halle próximo á la vertical del A, disponiendo tambien el tablero á ojo próximamente horizontal por medio de los pies del trípode, y rectificando despues la horizontalidad con el nivel de aire (83). Hecho esto, se coloca el compás de espesor de modo que su taladro se halle coincidiendo con *a*, y la alidada de modo que el canto de la línea de fé se ajuste exactamente á la recta trazada *ab*.

Valiéndose despues de los movimientos de rotacion y traslacion del tablero, se hace que la plomada caiga exactamente sobre el punto A, y que la visual vaya á parar á un jalon situado préviamente en el extremo B de la línea del terreno, sin que el compás de espesor ni la alidada dejen de ocupar en el tablero la posicion que se les habia dado. Para lograr que todas estas circunstancias se verifiquen, hay necesidad de varios tanteos, teniendo que mover á veces todo el instrumento, en lo que suele emplearse mucho tiempo. Cuando se ha conseguido, se dice que la plancheta se halla *en estacion y orientada*.

449. Los inconvenientes expuestos para la orientacion de la plancheta, se evitarían si la línea *ab* tuviese su extremo *a* en el centro del tablero; pues se colocaría el punto *a* en la vertical de A, valiéndose del perpendículo suspendido de un pequeño gancho que se fijase á la parte inferior de la pieza central del trípode, y puesto el borde de la alidada en contacto con la línea *ab*, se dirigiría la visual al punto B por el solo movimiento de rotacion del tablero, logrando situar sin pérdida de tiempo la recta *ab* en el plano vertical de AB. Pero como quiera que la línea *ab*

puede considerarse como un lado de un ángulo ó de un polígono que se ha de trazar en el papel, y suponerse que se mueve en su plano paralelamente á sí misma hasta hallarse situada en el paraje que se quiera, puede decirse tambien que la plancheta se halla orientada, cuando se encuentre en el plano vertical de AB una línea *a'b'* paralela á *ab* y tirada por el centro del tablero.

450. En lo sucesivo adoptaremos las letras mayúsculas para la designacion de los puntos que consideremos en el terreno, y las minúsculas correspondientes para la de sus homólogos en el tablero de la plancheta; ya sin acentos ó con ellos, segun las distintas posiciones de una misma línea en la plancheta, que ha de ser siempre homóloga de una misma del terreno.

451. La orientacion de la plancheta por medio de la alidada debe obtenerse en cada uno de los puntos en que se coloque en estacion; de manera que si ahora la trasportásemos al punto B y el jalon al A, habria que repetir de nuevo todo lo expuesto para tener la *ba* en el plano vertical de BA; y si se colocase en estacion en un punto situado fuera de la AB, entonces se ha de entender por estar orientada la plancheta el hallarse dispuesto el tablero de modo que sus lados sean respectivamente paralelos á las posiciones que ocupaban primitivamente. Esta orientacion ó paralelismo para todo otro punto que no pertenezca á la AB, y áun para el segundo punto B de esta recta, se consigue por medio de la declinatoria (437) determinando el ángulo del meridiano magnético con la línea *ab* (fig. 310; lám. 48) antes de trasladar la plancheta al punto B, ó á otro del terreno situado fuera de la AB.

Se colocará, por lo tanto, la declinatoria sobre el tablero y la línea *ab*, moviéndola hasta lograr que los extremos de la aguja coincidan con la línea norte sur de la caja (439), y se trazará con lápiz una recta *de* por el lado mayor de la caja.

Trasladada la plancheta á otro punto, y puesto el lado mayor de la caja de modo que se ajuste con la línea *ed* que se trazó por él, se dará á su tablero el movimiento de rotacion, hasta lograr que la aguja coincida nuevamente con la línea norte-sur, en cuyo caso se hallará orientada la plancheta en su segunda posicion M'N'

En efecto, por ser iguales los ángulos *acd*, y tener sus lados *de* paralelos, resultan tambien paralelos los lados *ab*.

Se concibe, sin embargo, que si bien por este medio se ha conseguido el paralelismo, para lograr que un nuevo punto *p* de la plancheta, situado fuera de la *ab*, estuviese en la vertical del punto correspondiente P, seria preciso que dicho punto se hallase en el centro de la plancheta para que con el movimiento de rotacion de esta no saliese de la vertical; pues de no ser así, hay que atender, además de la orientacion con la declinatoria, á la colocacion de dicho punto en la vertical del correspondiente del terreno, ó en la de otro punto de una línea *pb* proyeccion de la PB, como se necesita en algunos casos.

452. **Verificaciones y correcciones**.—Este instrumento, prescindiendo de las alidadas que le acompañan, no es susceptible de ninguna verificacion; debiendo procurarse solamente que á la lijereza reuna el ser todo lo más sólido posible, para que no sufra variaciones en las posiciones en que se le coloque; debiéndose sacrificar en todo caso la primera condicion á la segunda.

Respecto á las verificaciones y correcciones de las alidadas, que son una parte tan esencial de la plancheta, hemos hablado de ellas con todo detenimiento en los párrafos 253 y 261 á 266, reemplazando ahora el tablero de la plancheta al plano de que allí hacemos mencion.

La tercera correccion (264) puede efectuarse en la alidada descrita del mismo modo que en la brújula de Ladois (449), empleando los tornillos que mueven el plano del sector de la fig. 308 (lám. 18) en sentido perpendicular á él (446).

453. La última verificacion, que tiene por objeto determinar si el plano de colimacion tiene por traza sobre el tablero de la plancheta la línea trazada por el canto de la regla de la alidada, podemos tambien obtenerla valiéndonos de la declinatoria.

Para esto es necesario saber de antemano el ángulo que la proyeccion *ab* (fig. 309; lám. 18) de una línea AB del terreno forma con el meridiano magnético: se orienta entonces la plancheta por medio de la declinatoria (451); se coloca despues la alidada sobre el tablero, de manera que su canto coincida exactamente con la línea *ab*, y se dirije la visual por las pínulas ó el anteojo para ver si va á parar al jalon colocado en el extremo B de la línea del terreno, en cuyo caso la alidada cumplirá con la circunstancia que se desea. En caso contrario habrá error de colimacion. Este error que no influye en la medida de los ángulos (253 y 254), se puede obtener fácilmente; pues no habria más que mover ahora la alidada alrededor de un punto de la línea *ab* hasta descubrir el jalon B, y trazar una nueva línea por el canto de la regla; la cual formará con la *ab* el ángulo que hemos llamado *error de colimacion*.

Esta verificacion puede tambien hacerse siguiendo una marcha inversa, es decir, colocando la alidada sobre el tablero de modo que el canto de la regla corte á la línea *ab*, y moviéndola alrededor del punto de interseccion hasta que la visual vaya á parar al punto B, en cuyo caso se detiene el movimiento de la alidada: y si se vé que el canto de su regla coincide exactamente con la línea *ab*, la alidada no tendrá error de colimacion; en el caso de que no haya coincidencia, trazando una línea por el canto de la alidada esta formará con la *ab* el ángulo de error.

454. *Correccion del arco zenital*.—Dispuesta la alidada de que hemos hablado (446), de modo que pueda servir para la apreciacion de los ángulos de elevacion y depresion, debe reunir á las circunstancias enunciadas, la de que el eje óptico sea horizontal cuando coincide el cero del nonius con el del arco del sector zenital.

Para verificarlo cuando el anteojo no puede sacarse del collar, ni girar dentro de él alrededor de su eje, como el que hemos descrito (446), es preciso valerse de otro anteojo llamado *anteojo de verificacion*, cuyo tubo *s* (fig. 317; lám. 18) está invariablemente unido á dos cubos metálicos *c, c'* perfectamente iguales, y el cual se coloca sobre el tablero T de la plancheta, que se ha puesto perfectamente horizontal.

Moviendo el anteojo de manera que descanse siempre sobre el tablero, se llegará á una posicion en la cual la visual irá á parar exactamente á un punto *a* lejano y bien determinado. Si el anteojo está centrado, es evidente que invirtiéndole de modo que las caras de los cubos sobre que descansa vayan á la parte superior, y al contrario, la visual *ba* irá de nuevo á parar al mismo punto *a*, y será paralela al tablero, y por consiguiente horizontal. Pero si no lo fuese, se observarian los puntos *a'*, *a''* en que terminase en las dos posiciones indicadas, y se movería el retículo hasta que la visual fuese á parar al punto medio *a* de la recta que une los dos primeros (406). Se hace girar despues á la alidada para dirigir la visual al punto *a*; y si el nonius está en el cero exactamente, la visual *va* podrá considerarse como paralela á *ba*, y por consiguiente horizontal, en razon á la gran distancia á que se halla el punto de encuentro de estas rectas, con relacion á la distancia *df* que media entre ellas. De lo contrario, se hará la coincidencia de los ceros, y se llevará de nuevo la visual al punto *a* por el movimiento de los tornillos de correccion *t*.

455. Conocida la apreciacion del nonius y la altura *df* del soporte del anteojo, se puede hallar la distancia mínima á que puede tomarse el punto *a*. Sea *m* el ángulo de las visuales y *af* la distancia buscada. En el triángulo rectángulo *dfa*, tenemos (20)

$$df = fa \times \text{tang. } m;$$

de donde resulta

$$fa = \frac{df}{\text{tan. } m}.$$

Si suponemos, por ejemplo, $df = 0,^{m}3$, y $m = 1'$, resultará $fa = 1031^{m}$.

Por consiguiente, tomando el punto *a* á una distancia mayor, el ángulo *m* no llegará á valer 1', y el error será inapreciable en el instrumento. Todos los ángulos de elevacion y de depresion que se observen en lo sucesivo, estarán afectados de este error inapreciable.

456. Si el anteojo puede girar alrededor de su eje dentro del collar, se horizonta el tablero de la plancheta, se ponen los ceros en coincidencia, y se mueve la alidada hasta encontrar un punto lejano cuya imágen coincida con el cruzamiento de las cerdas del retículo: se da una semirevolucion al anteojo dentro de su collar, y si se observa la misma coincidencia, la visual será horizontal. De lo contrario, se moverá el retículo

hasta que el cruzamiento ocupe el punto medio de la distancia que aparezca entre los puntos observados Este procedimiento está fundado en lo que hemos expuesto (406).

Si el anteojo puede además sacarse del collar y colocarse invertido, puede tambien hacerse la verificacion dirigiendo la visual á un punto como antes, y trazando una recta por el canto de la línea de fé, invirtiendo el anteojo dentro del collar y tambien la alidada, que se pasa al otro lado de la recta trazada en el tablero, haciendo coincidir con ella la línea de fé, y observando si la nueva visual dirigida entonces, coincide ó no con el mismo punto que antes. En este último caso, la correccion se hace tambien por los tornillos del retículo.

457. **Medida de los ángulos con la plancheta**.—Para obtener sobre el tablero la proyeccion *bac* (fig. 312; lám. 18) de un ángulo BAC del terreno, se colocará la plancheta en estacion en el vértice A, para lo cual despues de haberla colocado á la altura conveniente, separando ó acercando los pies del trípode, y colocado á ojo el tablero próximamente horizontal, se acaba de rectificar la horizontalidad por medio del nivel de aire de mano, valiéndose de la rodilla ó tornillos de la plataforma. Se referirá el punto A del terreno al tablero de la plancheta, ó el punto dado en esta al del terreno, por medio del compás de espesor y la plomada: en el punto *a* que ha de representar el vértice del ángulo, se clava verticalmente una aguja, para colocar en contacto con ella el borde de la regla de la alidada, y no habrá más que recordar cuanto hemos dicho en los párrafos 249 al 253, advirtiendo solamente que al plano de que allí hacemos mencion sustituye ahora el tablero de la plancheta, y tendremos sobre este construido el ángulo que se deseaba. Si conviniese saber su valor en grados, le determinaríamos (Geom. 37 y 38) valiéndonos de los trasportadores que ya conocemos.

Si la plancheta llevase graduado el marco (443) ó fuese circular tambien con graduacion (447), se podria obtener el ángulo trazado y graduado al mismo tiempo, si se hiciese corresponder con el vértice del ángulo del terreno el punto céntrico de la plancheta; y se concibe tambien que se podrá en este caso hacer uso de la repeticion de los ángulos (295). La alidada podría estar provista de su correspondiente nonius para la apreciacion de los ángulos.

458. *Error de excentricidad.*—Cuando una línea trazada en la plancheta representa uno de los lados del ángulo que se trata de medir, es preciso orientar el instrumento con respecto á esta línea (448) Ya hemos visto las dificultades que esta operacion presenta en la práctica, y por esta razon se obtiene la orientacion aproximadamente, colocando en estacion la plancheta de modo que el punto *a* (fig. 313; lám. 18) esté en la vertical de A, haciendo coincidir con la línea *ab* el borde de la regla de la alidada, y dando al tablero el movimiento de rotacion, hasta que la visual vaya á parar al punto B Fijando entonces el tablero, se moverá la alidada alrededor del punto *a* hasta que la visual vaya á parar al punto C,

y trazando la *ac* quedará determinado gráficamente un ángulo, que no es el que forman las rectas AB y AC, pero que se puede tomar por este. En efecto, se comprende que procediendo de este modo se comete un error de excentricidad, pues el punto *a* que se hallaba en la vertical de A, á no ser en el caso particular de hallarse situado en el punto céntrico del tablero, al dar á este el movimiento de rotacion indicado sale de dicha vertical, trazando un arco de círculo cuyo rádio es la distancia de dicho punto *a* al punto *o* situado en el eje vertical de rotacion; resultando así hallarse el vértice del ángulo en *a'*, fuera del punto de estacion *a*, y haber obtenido el ángulo *ba'c* en vez del *bac*; pero esta excentricidad es inapreciable, y no tiene influencia en la mayor parte de los casos, segun hemos manifestado (178) En efecto, aun cuando la cuerda de dicho arco tuviese un decímetro, seria preciso que se operase en una escala muy grande, para que este error pudiera apreciarse.

Se evitaria el error de excentricidad procediendo de la manera siguiente: una vez dada la línea *ab* (fig 312; lám. 18) en la plancheta, se tira una paralela *a'b'* á la *ab* por el punto céntrico de esta, que se puede obtener próximamente, pues es la interseccion de las dos diagonales del tablero. Se coloca la plancheta de modo que el centro *a'* se halle en la vertical de A, y procediendo como anteriormente, se obtendrá el ángulo *b'a'c'* igual al BAC; se tirará despues por el punto *a* una paralela *ac* á la *a'c'*, y se tendrá el ángulo *bac* en el paraje del tablero que se deseaba. El error en este caso, si el punto *a'* no estuviese exactamente en la vertical determinada por el eje de rotacion, podria considerarse como completamente nulo

459. *Medida de los ángulos zenitales* —Para medir los ángulos de altura y depresion y los zenitales, hemos dicho (251) que se coloque verticalmente el plano, que en este caso es el tablero de la plancheta; pero cuando la alidada va provista de un arco de círculo vertical (446) se pueden tambien determinar dichos ángulos haciendo permanecer horizontal el tablero de la plancheta

En efecto, si hacemos coincidir el cero del nonius con el del arco, el eje óptico del anteojo que representaremos por *ab* (fig 314; lám. 18) será horizontal. Si se hace girar al anteojo para que ocupe una posicion *a'b'*, á fin de tomar el ángulo de altura *bob'*, el cero del nonius habrá recorrido un arco *cc'* que medirá el ángulo *bob'*; y si se diese al anteojo la posicion *a''b''* para tomar un ángulo de depresion *bob''*, este tendrá por medida el arco *cc''* recorrido por el nonius. Para conocer el ángulo zenital *zob'*, se tomaria (251) el complemento del ángulo de elevacion *bob'*, medido por el arco *cc'*.

Cualquiera que sea la posicion de los nonius y las disposiciones que presenten, la lectura de los arcos se hará segun hemos explicado (306).

460 **Orientacion de una linea trazada en la plancheta.**—Se reduce á orientarla con respecto á la línea de que nos ocupamos (448), y

á determinar el ángulo que forma con la meridiana astronómica, trazada (126 ó 127) en el tablero.

La meridiana que hemos trazado se refiere al terreno, haciendo coincidir con ella el canto de la línea de fé de la alidada, y estableciendo dos ó más jalones en la direccion de la visual.

Se consigue la orientacion con más sencillez, por medio de la declinatoria, colocándola sobre la línea que se trata de orientar, y trazando la meridiana magnética (439). Conocida la declinacion, se puede obtener la direccion de la meridiana astronómica

El ángulo que forma la línea dada con cada una de las meridianas es su orientacion respectivamente á ellas; ángulo que se obtiene gráficamente, y puede valuarse sobre el tablero de la plancheta por medio de trasportadores. Pero cuando se usa la declinatoria, se puede obtener desde luego su valor en grados Sea *ab* (fig 315; lám 18) la linea trazada en la plancheta. Se colocará el lado mayor de la caja en contacto con dicha línea, de modo que el *cero* se halle dirigido al norte, y si la posicion del extremo azul de la aguja fuese la *m*, de modo que el número de grados no excediese del límite de la graduacion, no habría más que anotar estos grados para tener el ángulo *n*; y si la aguja tuviese la posicion contraria *m'*, de modo que el ángulo *n'* no excediese tampoco de dicho límite, no habria más que añadirle 180° para tener el ángulo que se busca. Con una brújula de graduacion completa y caja cuadrada se obtendrian los grados en todos los casos, colocándola en la posicion indicada, y siendo el número de grados el que marca entonces la punta azul. Si la caja fuese redonda, se colocaría la brújula de modo que su diámetro NS coincidiese con dicha línea *ab*; pero si es una de las que llevan una pieza adicional, presentando una línea paralela á la norte-sur, entonces es esta línea la que se hace coincidir con la *ab* de la plancheta. En estos casos en que se obtiene el ángulo en grados, se puede cometer un error de lectura que puede llegar á valer 5' (359); por lo que es más exacto determinar el ángulo gráfico con la declinatoria ó con la brújula de caja cuadrada, haciendo coincidir el extremo azul de la aguja con el cero de la graduacion.

461. **Consideraciones sobre la plancheta**.—Las planchetas, aun aquellas que en su construccion son llevadas á su mayor grado de perfeccion, son los instrumentos menos á propósito, entre los que hoy se conocen, para las operaciones topográficas. La ventaja que presentan de dar trazada desde luego la proyeccion del plano del terreno, parece á primera vista de bastante importancia; pero si se examina con cuidado, se advertirá que en el terreno se hace uso de escalas, compases etc., para ir verificando el dibujo, lo que ocupa casi tanto tiempo y con menos éxito, tratándose de obtener resultados de alguna precision, que si se hiciesen estas operaciones en el gabinete, con el detenimiento que requieren. El geómetra debe procurar siempre que en las operaciones de campo se tome con celeridad y exactitud aquel número de datos, que

elegidos y anotados con inteligencia, sirvan para obtener con exactitud el resultado de las operaciones que haya practicado en el terreno; que es lo que puede conseguirse con otros instrumentos. La plancheta además es el instrumento más pesado, de más volúmen y más expuesto á variaciones, por ser casi en su mayor parte de madera, dificultando, por lo tanto, la precision en los resultados, y siendo incómodo para el trasporte. Por todas estas razones, y atendidos los adelantos de la Topografía, su uso está reducido á la determinacion de los detalles menos importantes en las operaciones topográficas, á las aplicaciones de la agrimensura en ciertos y determinados casos, y á las operaciones militares de campaña, en que la primera condicion suele ser la designacion del tiempo, bastante limitado generalmente, en que deben ser ejecutadas.

CAPITULO VIII.

Escuadra.

Escuadra ó cartabon.—Escuadra-círculo.—Escuadra prismática octogonal.—Escuadra cilíndrica.—Problemas que se resuelven con la escuadra.—Verificaciones y correcciones.—Orientacion de la escuadra.—Orientacion de un plano con la escuadra provista de una brújula.—Escuadra de reflexion.—Verificacion y correccion.—Escuadra de prismas.

462. **Escuadra ó cartabon.**—Se llama *escuadra* ó *cartabon* un instrumento que tiene por objeto determinar en el terreno rectas perpendiculares entre sí. Su construccion más sencilla consiste, en disponer perpendicularmente entre sí, y de una manera invariable las dos reglas de que hemos hablado (246), colocándolas sobre un baston ó chuzo (339) por medio de un tornillo que pasa por su punto medio. Haciendo girar al pié del instrumento alrededor de su eje, gira tambien el cartabon en su plano. Se concibe que colocado el chuzo en una posicion perfectamente vertical, y estableciendo jalones en la direccion de los rayos visuales que se dirijan por las reglas, se tendrán dos rectas perpendiculares entre sí, cuyo punto de interseccion será el pié del chuzo.

463. La poca exactitud de las visuales dirigidas por las reglas, y el no poder determinar los puntos que se hallan más altos ó más bajos que su plano, ha hecho que este instrumento haya recibido varias modificaciones; y prescindiendo de aquellas que dan lugar á escuadras poco más ó menos que la elemental de que hemos hablado, nos ocuparemos de las que hoy se usan más perfeccionadas, y que designaremos con los nombres de escuadra-círculo, prismática octogonal, cilíndrica y de reflexion.

Escuadra-círculo.—Esta escuadra, representada en la fig. 316 (lámina 18), se compone de un disco de metal que lleva cuatro pínulas colocadas perpendicularmente al plano del mismo, en los extremos de dos diámetros perpendiculares entre sí, y dispuestas de modo que los planos verticales determinados por las hendiduras y cerdas de dos pínulas opuestas tengan por trazas los referidos diámetros. El círculo de metal lleva en su parte inferior un cubo ó mango hueco (327) para introducir en él la espiga de un chuzo ó trípode. Las dimensiones del rádio del círculo y de la altura de las pínulas son variables, si bien se construyen de modo que la escuadra resulte de poco volúmen.

464. **Escuadra prismática octogonal.**—Se compone de un prisma regular de metal de base octogonal (fig. 317; lám. 18), hueco en su interior, y cuyas pínulas tienen la disposicion indicada (272). En las otras cuatro caras lleva tambien hendiduras, resultando así dividido en ocho ángulos de 45° el círculo en que puede suponerse inscrito el polígono de la base. Como cuando se usan dos hendiduras opuestas, las visuales no se pueden dirigir con tanta facilidad como cuando se hace uso de las pínulas, llevan aquellas en su extremo superior un taladro cónico troncado *a* para distinguir por él con más prontitud los objetos antes de mirar por las hendiduras. Las dimensiones de estas escuadras varian de 0,m08 á 0,m10 de altura, y de 0,m06 á 0,m07 de diámetro. Cuando la escuadra lleva en su parte superior una brújula, esta se halla dispuesta de modo que la línea norte-sur de la caja, se halla en el plano vertical de dos pínulas opuestas.

465. **Escuadra cilíndrica.**—Es la representada en la fig. 318 (lámina 18) y su disposicion se comprende fácilmente, considerando que su superficie es la del cilindro inscrito en el prisma de la escuadra últimamente explicada; siendo la posicion de sus pínulas la explicada (272).

Sería conveniente que la escuadra se moviese independientemente del mango, lo que se consigue en las escuadras modernas, dando á aquel la disposicion que presenta la fig. 319 (lám. 18): el cuerpo de la escuadra se une con el mango por medio del tornillo *t*, que está fijo á la parte superior *m* de este último, y unido como acabamos de indicar, puede girar con la pieza *m* alrededor de un eje *rs*, que forma cuerpo con la pieza inferior *n* del mango, la cual se puede afirmar á la espiga del chuzo ó á la de un trípode por el tornillo de presion *p*.

Cuando se emplea un trípode para afirmar la escuadra, debe hacerse uso de la plomada para la coincidencia con el punto del terreno.

Las escuadras, á causa de su utilidad y sencillez, son de un uso frecuente en la Topografía.

466. **Problemas que se resuelven con la escuadra.**—Con las escuadras se pueden resolver los dos problemas siguientes:

1.° *Formar un ángulo recto en un punto dado de una recta, ó levantar una perpendicular á esta última.*

Sea la recta AB y el punto dado C (fig. 320; lám. 18): se clavará en este punto el pié de la escuadra, colocándole vertical por medio de la plomada, y se moverá este, ó mejor la escuadra, dándole un movimiento de rotacion, despues de aflojar el tornillo que oprime el mango hueco á la espiga del chuzo ó trípode, hasta que el plano de colimacion determinado por la hendidura *b* y la cerda *a* se halle en el plano vertical de AB; lo que tendrá lugar cuando la visual vaya á parar exactamente al punto A. Se mirará despues por la hendidura *m* y se hará colocar un jalon D que quede cubierto por la cerda *n*; haciendo señas á izquierda y derecha hasta conseguirlo, en cuyo caso con una nueva seña se mandará clavar el jalon de modo que se halle vertical: con lo cual los puntos C y D pertenecerán á la perpendicular pedida. Para comprobacion, se volverá á dirigir como al principio la visual al punto A, y por la hendidura de la pínula *a* y la cerda de la *b* se dirigirá tambien la visual á un jalon colocado en el otro extremo B, para ver si se halla tambien cubierto por dicha cerda. Las dos rectas AB y CD serán perpendiculares, por ser las trazas sobre el terreno de los planos de colimacion de la escuadra, perpendiculares entre sí por construccion.

467. 2.º *Desde un punto dado fuera de una recta, tirar otra que forme con ella un ángulo recto, ó bajarle una perpendicular.*

Sea la recta AB y el punto D (fig. 321; lám. 18): se colocará el pié de la escuadra en un punto M de la recta AB situado hácia el paraje donde parezca á simple vista que debe hallarse el pié de la perpendicular. Se hará coincidir uno de los planos de colimacion de la escuadra con la recta AB; y se verá si el otro plano perpendicular de colimacion se halla en la direccion del punto D. Si no sucede así, y el punto D queda á la derecha de la cerda, entonces la escuadra se halla á la izquierda del pié de la perpendicular, y se moverá, por lo tanto, hácia la derecha. Si despues de este movimiento se hallase colocada en M′, y el punto D quedase á la izquierda de la cerda, es claro que la escuadra estará situada á la derecha del pié de la perpendicular, y se volveria á mover hácia la izquierda. Repitiendo estos tanteos tendremos otros dos puntos P y R situados entre los anteriores; por lo que bastan pocos tanteos para hallar la posicion en que la cerda cubre exactamente el punto D, en cuyo caso el pié de la escuadra nos determinará el punto C, pié de la perpendicular bajada desde D.

Cuando al observar el punto D, este se halla fuera de los límites del rectángulo vaciado donde se halla la cerda, se dirigirá la visual por una de las dos aristas superiores de la escuadra y paralelas al plano de colimacion perpendicular al AB, para saber hácia qué lado debe moverse el instrumento. En cada uno de los tanteos, y más particularmente en la última posicion, se debe examinar con cuidado si los dos planos de colimacion, se hallan coincidiendo con los verticales que pasan por las rectas AB y CD.

468. Para tomar los ángulos de 45°, 135°, 225° y 315°, despues de hacer coincidir con la recta dada uno de los planos de colimacion determinado por una hendidura y la cerda del rectángulo opuesto, cuyo plano se considera como la línea (0 — 180°), se dirigirá la visual por uno de los planos determinado por dos hendiduras, que sea el que forme con la

recta dada el ángulo pedido, estableciendo un jalon en sentido de esta visual, y advirtiendo que el uso de los taladros cónicos con que terminan las hendiduras en su parte superior, es muy útil para dirigir la colocacion del jalon, por descubrirse más espacio; teniendo que mirar por encima de la escuadra para dirigir la operacion, cuando las hendiduras no van provistas de los expresados taladros. En atencion á estos diversos ángulos fijos que se pueden determinar con la escuadra, no habrá inconveniente en considerarla como *goniómetro de ángulos fijos*. Cuando la escuadra está provista de una brújula y tiene el movimiento de rotacion indicado (465), puede servir para la comprobacion de los ángulos fijos obtenidos con la escuadra, y usarse como la brújula ordinaria para la apreciacion de los rumbos y la determinacion de los ángulos azimutales.

469. **Verificaciones y correcciones**.—Consisten las verificaciones, en cerciorarse de que los planos verticales de las pínulas, así como los de las hendiduras, se cortan á ángulo recto; y si además los ocho ángulos que estos planos forman entre sí son de 45°. Para cerciorarse de que los diámetros pp', $p''p'''$ (fig. 322; lám. 19) de las pínulas son perpendiculares entre sí, se clavará el chuzo en el terreno, colocándole verticalmente por medio de la plomada; se colocarán dos jalones J, J', en la direccion del diámetro pp' y otros dos J'', J''', en la del $p''p'''$. Conviene que estos jalones se hallen á una distancia del punto C, de 40 ó 50 metros á lo menos. Se da un cuarto de revolucion al instrumento en el sentido indicado por la flecha, de modo que el diámetro $p''p'''$ quede en la direccion de los jalones J, J', y el pp' en la de los J'', J''': y si la visual dirigida ahora por las pínulas p, p' en su nueva posicion va á parar exactamente á los jalones J'', J''', la escuadra estará bien construida; pues habiéndose confundido el ángulo $p''Cp'$ con su adyacente pCp'', serán iguales y rectos, y lo mismo los otros dos pCp''' y $p'''Cp'$ (Geom. Teor. 3, Cor. 1.°). Esta misma verificacion se repetirá con los diámetros ee', $e''e'''$, en cuyo sentido están las hendiduras; pero como estos diámetros pudieran cortarse á ángulos rectos, sin formar por eso ángulos de 45° con los pp', $p''p'''$, para cerciorarse de esta última circunstancia, se colocará un nuevo jalon J^IV en sentido de la hendidura ee', y se hará girar á la escuadra en el sentido indicado, hasta que el diámetro ee' tome la posicion del pp'; si entonces la visual dirigida por las pínulas p''', p'' va á parar exactamente al jalon J^IV, los dos ángulos pCe, y eCp'' serán iguales y de 45°.

470. Si no se verifican las circunstancias dichas, la escuadra es defectuosa en su construccion, y para determinar el ángulo de error, se hará coincidir el plano vertical de las pínulas p y p' (fig. 323; lám. 19) con el de los jalones J y J', y se situará un jalon J'' en la direccion de las otras pínulas p'' y p''': haciendo girar á la escuadra hasta que las pínulas p'' y p''' ocupen la posicion que tenian las p y p', estas tomarán entonces la mn, en cuya direccion se establecerá un nuevo jalon J''', próximamente á la misma distancia del punto C que el J''; dividiendo en dos partes iguales

la línea $J''J'''$, y plantando un jalon J^{iv} en el punto medio, se tendrá el ángulo de error $J''CJ^{iv}$, mitad del $J''CJ'''$.

471. *Correccion* —La escuadra de reglas puede corregirse aflojando el tornillo que las une al pié, dirigiendo la *mn* al jalon J^{v}, y apretando de nuevo el tornillo. La escuadra-círculo se corrije tambien de una manera enteramente análoga, cuando sus pínulas están dispuestas de modo que pueden moverse en sentido de la circunferencia en que se hallan situadas.

Conviene en todo caso, para mayor seguridad, repetir de nuevo la comprobacion.

472. En la escuadra cilíndrica ó prismática octogonal, la correccion no puede hacerse; pero vamos á manifestar que en todos los casos se pueden resolver con una escuadra defectuosa los problemas de los párrafos 466 y 467.

En efecto, para levantar una perpendicular á la recta AB en un punto C (fig. 324; lám. 19) cuando se sabe que el diámetro $p''p'''$ no tiene la posicion *mn* perpendicular á pp', se colocará un jalon J en la direccion de $p''p'''$, y se hará girar al instrumento hasta que el diámetro $p''p'''$ se halle en la direccion de la AB; con lo cual el pp' tomará la posicion $p^{iv}p^{v}$; se colocará un nuevo jalon J' en esta direcion, el cual se procura que se halle próximamente á la misma distancia del instrumento que el jalon J; dividiendo en dos partes iguales la línea que une los dos jalones, y colocando otro nuevo jalon J'' en el punto medio, este y el pié de la escuadra determinarán la perpendicular pedida.

473. Cuando se trata de bajar una perpendicular á la recta AB (figura 325; lám. 19) desde el punto D fuera de esta recta, con una escuadra inexacta, se colocará esta en un punto C, tal que hallándose coincidiendo el plano de colimacion *pp* con el vertical de la AB, se vea el punto D en la direccion del otro plano $p'p'$. Hecho esto, se dará á la escuadra el movimiento de rotacion, hasta que el plano de colimacion $p'p'$ se halle en la posicion que tenia el *pp*, con lo cual este tomará la $p''p''$, y moviendo la escuadra con su pié en sentido de la línea AB hasta un punto C', desde el cual se descubra tambien por las pínulas $p''p''$ el punto D, tendremos formado el triángulo isósceles CDC', por ser iguales los ángulos $s = pCp'$ y $s' = p'C'p''$; y por consiguiente será $CD = C'D$. Dividiendo ahora en dos partes iguales la distancia CC', determinada por las posiciones del pié de la escuadra en ambos casos, se tendrá el punto O, que será el pié de la perpendicular DO que se trataba de hallar (Geom. Teorema 24).

474. **Orientacion de la escuadra**.—Se dice que la escuadra, está orientada, cuando uno de sus planos de colimacion, por ejemplo, el *ab* (fig. 320; lám. 18) se halla coincidiendo con el vertical que pasa por la línea AB del terreno; lo cual se comprueba las veces que sea necesario en la resolucion de los problemas expuestos, y se consigue por completo mirando alternativamente desde *a* al jalon B, y desde *b* al jalon A, y

viendo si en ambas posiciones los jalones quedan perfectamente cubiertos por las cerdas de las pínulas opuestas.

475. **Orientacion de un plano con la escuadra provista de una brújula.** —Para esto, se hace coincidir el plano de colimacion *ab* (fig. 320; lám. 18) de la escuadra, que pasa por la línea (0—180°) de la brújula, con el vertical de la AB, que suponemos una línea del plano, y la posicion de la aguja nos indicará el valor del arco *as*, con lo que obtendremos la orientacion del plano (197) con relacion al meridiano magnético: valiéndonos despues de la declinacion para orientarle con respecto al meridiano verdadero.

476. **Escuadra de reflexion.** —Se compone de una caja *(c, c')* (figura 326; lám 19), de fondo plano, cuyas paredes están formadas por una pieza curva de metal, elástica, y sujeta al fondo por una de sus extremidades. La otra extremidad es susceptible de cierto movimiento, en virtud de su elasticidad, por medio del tornillo de correccion *t*, que tiene su tuerca en una pieza *z* fija al fondo de la caja. Este movimiento sirve para hacer que formen constantemente un ángulo dado dos espejos (A, A') (B, B') que ocupan la parte inferior de las paredes de la caja; la parte superior de las mismas presenta unas ventanillas *n*, por las cuales pueden verse directamente los objetos.

En la parte inferior del fondo de la caja hay un mango *m*, que sirve para tener la escuadra en la mano durante las observaciones.

477. *Problemas que se resuelven con la escuadra de reflexion.* —Para comprender el uso de esta escuadra en la resolucion de los problemas, recordaremos los principios de óptica que hemos establecido (207), y más especialmente el caso particular (208), que comprenden. Supongamos que los espejos de la escuadra sean los A y B (fig. 117: lám. 9), que forman un ángulo *s* de 45°, y que en el punto A de la recta MA, queremos levantar una perpendicular á esta recta. Colocaremos la escuadra en A, de modo que por las ventanillas veamos directamente desde A el objeto M, que señala el extremo de la recta dada; fijo el instrumento en esta posicion, se hará mover un jalon hasta que ocupe una posicion N, en la cual su imágen doblemente reflejada por los espejos aparezca en el espejo B, en prolongacion del objeto M visto directamente. Entonces el ángulo MAN, doble del que forman los espejos, será un ángulo recto, y la recta que une el punto N con el A determina por lo tanto la perpendicular pedida.

Dado un punto N desde el cual se quiere bajar una perpendicular á la recta MA, bastará hallar por tanteos un punto A de esta recta, desde el cual se observe el extremo M de la misma, visto directamente, en prolongacion de la imágen del N formada en el espejo B por la doble reflexion.

Cuando la inclinacion de los espejos es de 22° 30', ó de 30°, se emplea del mismo modo para obtener ángulos de 45 ó de 60°.

478. Cuando el ángulo de los espejos es de 90°, puede hallarse por

medio de la escuadra un punto comprendido entre otros dos M y N (figura 327; lám 19), que se halle en línea recta con ellos. Para esto, se buscará por medio de tanteos una posicion de la escuadra tal, que el objeto M, visto desde *v*, aparezca en prolongacion de la imágen doblemente reflejada del otro punto N. Entonces el ángulo de las rectas AM y BN, será de 180°, y puede considerarse que se hallan en prolongacion una de otra; pues la distancia AB que media entre ellas, es muy pequeña con relacion á la que hay entre los puntos dados. Puede tomarse con menos error como punto de la recta MN, la proyeccion *m* del mango de la escuadra sobre el terreno.

479. La escuadra descrita es la más sencilla. Otras están formadas por tres pares de espejos, que forman respectivamente los ángulos de 22° 30′ ó de 30°, de 45° y de 90°. Están dispuestos en una caja metálica rectangular, la que presenta espacios vaciados en la parte superior de sus paredes, para dirigir las visuales.

480. **Verificacion y correccion.**—Consiste la verificacion de las escuadras, en asegurarse de que los espejos forman el ángulo constante que hemos asignado á cada una de ellas para la resolucion de los problemas á que se les destina. Para ver si efectivamente satisfacen á esta condicion, se determina dicho ángulo MAN (fig. 117; lám. 9) por medio del limbo graduado y las alidadas de otro instrumento; para lo cual se colocará el limbo en A, y marcando en él (305 — 2°) el valor del ángulo de que se trata, se dispondrán dos jalones M y N en las direcciones de las visuales tiradas por pínulas de ambas alidadas. Marcado así el ángulo, se coloca la escuadra en vez del limbo, en el vértice A, y se dirije la visual al extremo M, viendo si entonces coincide con él la imágen del otro extremo N, en cuyo caso la escuadra estará convenientemente dispuesta. De lo contrario se hará mover el espejo B por el tornillo de correccion hasta que tenga lugar la coincidencia.

La escuadra de la fig. 327 (lám. 19) se corrije del mismo modo, colocando antes los jalones de modo que formen un ángulo de 180°, ó lo que es lo mismo, que estén en línea recta.

481. **Escuadra de prismas.**—A los espejos de las escuadras explicadas, sustituye en algunas de las que hoy se construyen, la combinacion de dos prismas de cristal, cuyos ángulos son tales, que la refraccion se convierte en reflexion, como en el caso indicado (221), y están dispuestos de manera que pueden resolverse los mismos problemas que con las escuadras de espejos. Tienen por otra parte la ventaja de no exigir correccion alguna á causa de su esmerada construccion.

CAPITULO IX.

Grafómetro-Pantómetra.

Grafómetro.—Usos del grafómetro.—Verificaciones y correcciones.—Grafómetro semicircular con anteojos.—Grafómetro de círculo entero con anteojos.—Usos, verificaciones y correcciones.—Trasportacion de los ángulos medidos con el grafómetro.—Trasportador de Troughton.—Límite del empleo del grafómetro.—Pantómetra.—Usos, verificaciones y correcciones.—Pantómetra de limbo zenital con anteojo.—Usos, verificaciones y correcciones.—Límites del empleo de la pantómetra.—Recipiángulo.

482. **Grafómetro**.—Es un goniómetro por medio del cual se obtiene la *amplitud*, ó el valor en grados, de los ángulos formados por las líneas que se consideran en las operaciones topográficas. Se divide en *grafómetro de pínulas*, y *de anteojo*.

Grafómetro de pínulas.—Este grafómetro consta de un limbo semicircular *(l, l')* (fig. 328; lám. 19) de doble graduacion (fig. 174; lám. 12) en grados y medios grados. Dos pínulas *(a, a')* *(b, b')* fijas á las extremidades de la regla *m*, constituyen con ella una alidada fija (256). Otra alidada *(n, n')*, giratoria alrededor del centro del limbo (255), lleva en las extremidades de su regla los nonius, que aprecian minutos (309.—Ej. 6°). Cada uno de los nonius sirve solo para una de las graduaciones del limbo.

A este acompaña una brújula cuyo limbo está ordinariamente dividido de 2 en 2°; y algunos grafómetros llevan además uno ó dos niveles situados en prolongacion del plano del limbo.

La parte inferior del instrumento es una rodilla de juego de nuez.

483. El grafómetro puede ser tambien de círculo entero, y entonces su proyeccion horizontal es la que representa la fig. 177 (lám. 12).

484. **Usos del grafómetro**.—El grafómetro se emplea para la medicion de los ángulos en el plano de los objetos (243), y tambien para la de los ángulos azimutales (250), y los de elevacion y depresion; pudiéndose deducir de estos últimos los ángulos zenitales (251).

Los ángulos se miden en el plano de los objetos colocando el grafómetro en estacion en el vértice, y moviendo á la vez el limbo por medio del juego de la rodilla, y la alidada móvil alrededor de su punto medio, hasta que la visual tirada por cada una de las pínulas vaya á parar á uno de los puntos en que terminan los lados del ángulo que se mide: leyendo despues su valor en la primera ó en la segunda graduacion (277), segun que la alidada fija esté dirigida al objeto de la izquierda ó al de la derecha (285).

Para la medida de los ángulos azimutales se dispone el limbo horizontalmente por medio de los niveles que le acompañan, ó por un nivel de mano (83) en caso contrario. En la práctica es suficiente la horizontalidad que proporciona la aguja de la brújula (361); procediendo en lo demás como hemos dicho (279).

Los ángulos de elevacion y depresion se obtienen dando al plano del limbo una posicion vertical por el movimiento de la rodilla, y haciendo al mismo tiempo que la línea (0°—180°) del mismo sea horizontal; todo lo cual se habrá conseguido cuando el centro C del limbo (fig. 329; lámina 19) y la division 90° queden cubiertos á la vez por el cordon de una plomada *p*, que se coloca delante del primero.

Con la plomada se juzga al mismo tiempo de la verticalidad dada al limbo, mirando este de canto, y observando si el cordon de la plomada queda paralelo á su plano.

Haciendo girar á la alidada móvil *ab* hasta dirigirla al punto M, extremo de la recta CM, cuya pendiente se quiere determinar, el arco *ma* dará esta pendiente que no es otra cosa que el ángulo de elevacion MC*n*. El ángulo de depresion *n*CN, estaría medido por el arco *nr*.

485. Tambien puede emplearse el grafómetro para hallar una línea que forme un ángulo dado con otra línea tambien dada. Bastará para ello colocarle en el punto de esta que ha de ser vértice del ángulo, dirigir la alidada fija al extremo de la misma línea, y tomar en el limbo (312—2.ª) el ángulo dado. Un jalon colocado en la direccion que tiene entonces la alidada móvil determina con el punto de estacion la línea pedida.

Cuando el ángulo así determinado es de 90°, la segunda recta es perpendicular á la primera; y cuando es de 180°, se hallan en prolongacion una de otra.

486. **Verificaciones y correcciones**.—Las verificaciones y correcciones son las mismas explicadas para los limbos (288), las cuales tienen en el grafómetro una aplicacion completa.

487. **Grafómetro semicircular con anteojos**.—Difiere del grafómetro semicircular de pínulas, en que las alidadas son de anteojo: la superior es una alidada de anteojo movible *ab* (fig. 330; lám. 19), giratoria

alrededor de un eje fijo al soporte *d*: la inferior es una alidada fija de anteojo movible *a'b'* (267), el cual gira alrededor de un eje situado en otro soporte, que está fijo al limbo y á la parte superior de la rodilla.

488. *Usos, verificaciones y correcciones.*—El grafómetro así construido sirve para la medida de los ángulos azimutales, para lo cual se dispone horizontalmente el limbo (484).

Si las alidadas son de anteojo fijo (268), el grafómetro se emplea para la medida de los ángulos en el plano de los objetos.

489. Las verificaciones y correcciones son las mismas que en el grafómetro de pínulas. Cuando no se verifica la circunstancia enunciada (289), y los retículos de los anteojos son movibles, se puede hacer la correccion estableciendo la coincidencia de los ceros, y haciendo que las cerdas verticales de ambos anteojos cubran exactamente al cordon de una plomada, lo que se consigue por el movimiento de los retículos.

490. **Grafómetro de círculo entero con anteojos.**—Se compone de un limbo circular *l*, *l'* (fig. 331; lám. 19) de graduacion completa, generalmente en sentido de derecha á izquierda, dividido en grados y medios grados, el cual está unido por su centro á la columna *m* en que se halla el eje de rotacion de todo el instrumento, y puede girar alrededor de él, ó fijarse ambos á la plataforma (337), por el sistema de los tornillos de presion *a* y de coincidencia *c* (322). Un anteojo *b* llamado *anteojo de prueba*, unido por una charnela al collar *e* puede moverse en un plano vertical alrededor de ella, y girar tambien alrededor de la columna *m*, ó fijarse á ella por el tornillo de presion *t*.

La parte superior del instrumento, que hace las veces de alidada (266), se compone de un anteojo *d*, que puede moverse alrededor de un eje fijo á la columna *h*, la cual lleva consigo la pieza *r* de los nonius. Sobre esta pieza se halla el nivel *n*, provisto de su tornillo particular de correccion. La alidada puede girar alrededor del eje general de rotacion ó fijarse al limbo, por el sistema de los tornillos *a'* y *c'*.

491. **Usos, verificaciones y correcciones.**—El grafómetro de círculo entero se emplea para la medida y repeticion de los ángulos azimutales. Para la medida de un ángulo, se coloca el instrumento en estacion en el vértice, centrándole por medio de la plomada, y horizontándole por los tornillos de la plataforma (399). Se hace despues coincidir el cero de uno de los nonius con el del limbo, empleando los tornillos *a'* y *c'*: aflojando en seguida el *a* se mueve todo el instrumento alrededor del eje de la columna *m*, y el anteojo *d* en el plano que describe, hasta que la visual esté dirigida al objeto que señala al extremo del lado de la derecha (285), haciendo que quede cubierto exactamente por el cruzamiento de las cerdas, apretando el tornillo *a* y moviendo el *c*. Para dirigir la visual al objeto de la izquierda se afloja el tornillo *a'*, y se hace mover la alidada, y el anteojo en su plano, acabando de hacer la coincidencia por el tornillo *c'*. El arco recorrido por el cero del nonius es el valor del ángulo que se trataba de medir.

402. Puede tambien obtenerse este valor sin hacer la coincidencia de los ceros, anotando la graduacion que señala el de uno de los nonius al hallarse dirigida la visual al objeto de la derecha, y tambien el que marca cuando lo está al de la izquierda, siguiendo la misma marcha que anteriormente.

La diferencia de los arcos observados es el valor del ángulo que se trata de hallar. Cuando el segundo valor, que es el que debe tomarse como minuendo, es menor que el primero, se le añaden 360° para hacer la sustraccion.

493. El anteojo de prueba *b*, sirve para asegurarse de que el limbo no ha tenido movimiento alguno durante la observacion del ángulo ó de los ángulos que se midan desde un mismo punto; para lo cual se hace que el cruzamiento de las cerdas cubra exactamente á un punto lejano y bien determinado, empleando para ello el movimiento del anteojo en su plano, y el giro que puede dársele aflojando el tornillo *t*. Cuando se halla convenientemente dirigido, se le fija apretando dicho tornillo. Si al concluir las operaciones permanece cubriendo el mismo punto, es claro que el limbo no ha tenido movimiento alguno.

494. *Repeticion de los ángulos*.—La repeticion de un ángulo puede efectuarse siguiendo la marcha establecida (295). Se mide para ello el ángulo como acabamos de decir, aflojando despues el tornillo *a*, y dirigiendo la visual al objeto de la derecha como cuando los ceros estaban en coincidencia: se dirije de nuevo y del mismo modo que en la observacion primera la visual al de la izquierda, con lo que el arco observado deberá ser doble del anterior. La misma marcha se seguiría para obtener los demás múltiplos del primer arco recorrido.

495. El método de repeticion de los ángulos, empleando los dos anteojos (296), puede seguirse, toda vez que el inferior es susceptible de girar unido al limbo, é independientemente de él; pero no debemos dejar de advertir, que la circunstancia de no tener tornillo de coincidencia para el movimiento lento, entorpece la marcha de las operaciones; por esta razon se sigue generalmente el método anterior.

496. *Verificaciones y correcciones*.—Además de las que se refieren al limbo (288) y á los nonius (307), debe verificarse:

1.° *Que el eje de rotacion del instrumento sea vertical*.—La verificacion es la del nivel excéntrico explicada (402).

2.° *Que el eje óptico del anteojo superior describa un plano, y no una superficie cónica*.—Puede seguirse el segundo procedimiento del párrafo 262, advirtiendo que para invertir el anteojo, es preciso quitar el tornillo *z* que le une á la columna *h*.

3.° *Que el plano descrito por el mismo eje sea vertical*.—Esta verificacion es la indicada (264), y la correccion puede hacerse por medio de dos tornillos ocultos en la figura, y situados á la parte posterior de la columna *h*, los cuales pueden hacer variable su inclinacion.

497. *Empleo de los dos nonius para la apreciacion de los ángulos*.—

Cuando de las verificaciones del limbo y de los nonius resulta que los ángulos marcados por los ceros de estos últimos, en cada una de las distintas posiciones de la pieza á que van fijos, no es constantemente de 180°, sin separarse mucho de este valor, se deduce de esta circunstancia la existencia de imperfecciones, que casi nunca pueden evitarse, debidas á la construccion del aparato, ó bien ocasionadas por el uso: el término medio entre las lecturas de ambos nonius anula generalmente los errores originados por estas causas (293).

498. **Trasportacion de los ángulos medidos con el grafómetro** — Para la trasportacion de los ángulos (384) cuando se han obtenido con el grafómetro, se sigue un procedimiento análogo al empleado para su medida en el terreno. Supongamos medido uno de estos ángulos, y sea *ab* (fig. 332; lám. 19) una línea trazada en el papel y que es la homóloga de una de las que forman el ángulo medido en el terreno: para construir la homóloga de la segunda se colocaría el trasportador de modo que su centro coincidiese exactamente con el punto *b*, homólogo del vértice, y que el cero de la graduacion estuviese en un punto *o* de la *ab*: marcando el punto *m* en la division que señalase el número de grados que corresponde al ángulo, la recta *bc* determinada por los puntos *m* y *b* será la recta pedida.

Lo que acabamos de decir supone que el ángulo de que se trata es menor que 180°, y que empleamos un limbo semicircular graduado del mismo modo que el limbo del grafómetro si tiene una sola graduacion y es la primera (277): ó bien que siendo ambos de doble graduacion, hemos empleado para las dos operaciones la primera. Si nos hubiésemos valido de la segunda, la trasportacion se obtendría del mismo modo, haciendo que el cero se hallase en un punto de la primera línea, que en este caso sería la de la derecha (285).

499. Si el ángulo dado fuese mayor que 180°, dispondríamos el trasportador del mismo modo, y marcaríamos el punto *m* (fig. 333; lám. 19) extremo del arco *om*, obtenido de restar 180° del ángulo dado, trazando despues la recta *bc* por el canto de una regla apoyado en los puntos *m* y *b*. Empleando el trasportador semicircular de doble graduacion (fig. 175; lám. 12), el punto *m* estaría dado por la division que marcase el ángulo que se trataba de construir.

El arco correspondiente al ángulo obtenido es el *omn*. Tambien pudiéramos haber determinado la direccion de la recta *bc*, marcando el punto *n*, extremo del arco $osn = 360° - omn$, tomado en la graduacion inversa.

500. Es preferible el empleo del trasportador del círculo entero, el cual se dispone de la misma manera, marcando el punto *m* (fig. 334; lámina 19) extremo del arco *orm* correspondiente al ángulo dado, y trazando la recta *bc* por los puntos *b* y *m*.

En la práctica se acostumbra señalar el extremo *r* del arco $or = orm - 180°$, y apoyar la regla en los puntos *r*, *b* y *m* para trazar la recta pedida. La circunstancia de hallarse estos tres puntos exactamente en línea recta determina mejor su direccion.

501. **Trasportador de Troughton.**—Para trasportar los ángulos con el mismo grado de precision con que se han medido en el terreno, se emplea un trasportador circular metálico, igualmente dividido que el limbo del grafómetro (482), y una alidada giratoria alrededor de su centro, provista de nonius que tambien aprecian de minuto en minuto. Este instrumento, perfeccionado por el constructor inglés Troughton, y representado en la fig. 335 (lám. 19), consta del limbo indicado *l*, que presenta en su parte interior unos chaflanes *r* en medio de los cuales hay trazadas otras tantas líneas, que corresponden exactamente á las divisiones 0, 90, 180 y 270 del limbo. Unas puntas muy finas de acero, sirven para fijar el limbo al papel, evitando todo movimiento lateral. La circunferencia exterior del limbo es dentada. En el centro del mismo hay un círculo de talco, en el cual están trazadas dos rectas cuya interseccion determina el centro. El tornillo *t*, provisto de un piñon cuyos dientes engranan con los del limbo, sirve para dar movimiento á la parte del instrumento que hace las veces de alidada, y que lleva los nonius *n*. Unas piezas de acero *a*, que pueden doblarse sobre la alidada por medio de charnelas situadas en los cilindros *c* fijos á la pieza móvil, terminan por puntas de acero armadas en unas cabezas de tornillo *v*. En los cilindros *c*, hay unos pequeños tornillos que sirven para corregir la posicion de las puntas de acero á que acabamos de referirnos.

Algunos trasportadores tienen un sistema de tornillos de presion y de coincidencia (322) para el movimiento de la alidada, en vez de los dientes de la rueda y el piñon que tiene en el que hemos descrito.

Para emplear este trasportador, se hace coincidir su centro con el punto *b* (fig. 334; lám. 19); y con un punto *o* de la línea *ab* el índice correspondiente á la division cero, afirmando el limbo al papel en esta posicion; se hace girar á la alidada por el tornillo *t* (fig. 335; lám. 19) hasta que el cero del nonius *n*, marque el ángulo dado (312—2.ª), y se oprime lijeramente la cabeza de tornillo *v*, con lo que la punta de acero marcará un punto, que unido con el que ocupaba el centro, dará la recta pedida.

Señalando el que corresponde á la otra punta, la línea estará mejor determinada (500).

502. Con este trasportador puede tambien resolverse el problema recíproco por un procedimiento muy importante cuando se trata de medir un ángulo muy agudo *abc* (fig. 336; lám. 19) en el cual su vértice no está por lo tanto bien determinado. Se prolongan las líneas que forman el ángulo dado, se hace la coincidencia de los ceros en el trasportador, y se le coloca de modo que una de las puntas de acero de la alidada, coincida con un punto *p* de una de las líneas que forman dicho ángulo, y otro *q* con uno de la prolongacion de la otra, fijando el instrumento en esta posicion. Se hace girar á la alidada hasta que su extremo *p* vaya á caer en

un punto r de la segunda recta, anotándose el número de grados del arco pr; haciendo girar de nuevo á la alidada en sentido contrario hasta que el otro extremo vaya á parar á s, se anota tambien el valor del arco qs ó de su igual pz: entonces se tiene (Geom. Teor. 52)

$$abc = \frac{pr + qs}{2} = \frac{pr + pz}{2}.$$

Tambien puede hallarse el ángulo de dos rectas convergentes, de una manera análoga al caso anterior, colocando el trasportador de modo que las puntas de la alidada coincidan con dos puntos p y q (fig. 337; lám. 20), correspondiente cada uno á una de dichas rectas, y llevando despues la que está en p á r, anotando el valor del arco pr: si despues se lleva la punta q á s y se anota el arco qs ó su igual pz, se tendrá (Geom. Teor. 53) para el ángulo x que se busca,

$$x = \frac{pr - pz}{2}.$$

503. *Verificaciones y correcciones del trasportador.*—Además de las que se refieren al limbo y á los nonius, es preciso *que las puntas de acero* v *estén en línea recta con el centro del trasportador.*—Para cerciorarnos de que así se verifica se traza una recta por el canto de una regla bien construida, y haciendo que el centro del trasportador coincida exactamente con un punto de esta línea, se mueve la alidada hasta que una de las puntas v se halle tambien en otro de la misma línea; se ve si entonces lo está del mismo modo la otra punta. En caso contrario se hace la correccion por los tornillos de los cilindros c.

504. **Límite del empleo del grafómetro.**—Supongamos que el arco rs (fig. 338; lám. 20) es el límite 1′ de la apreciacion de los ángulos. Es evidente que en el espacio angular que comprenden las líneas ar, as indefinidamente prolongadas existen infinitos puntos, tales como el c, que determinan con a una recta ac, cuyo ángulo con ab no puede obtenerse con exactitud.

En efecto, el valor de este ángulo estará dado por el arco mr ó el ms, cometiéndose un error rt ó ts, que tiene por límite máximo 1′. Este error produce una desviacion en la direccion de la recta ac, que crece con la distancia, y vamos á determinar el límite máximo de la que puede mediar entre los puntos a y c en el terreno, para que al trasportar el ángulo en una escala dada, la desviacion dc en el plano sea menor que el límite $0,^{m}0002$ de las longitudes apreciables á la vista.

Para conseguirlo, supongamos que el triángulo adc es rectángulo, y tendremos (20),

$$dc = ac \text{ tang. } 1' \qquad [1],$$

considerando al ángulo de error en su límite máximo.

En la ecuacion [1] se tiene

$$dc = 0^{m},0002, \text{ y } \tang. 1' = 0^{m},00029;$$

sustituyendo estos valores y despejando ac, resultará:

$$ac = \frac{0^{m},0002}{0,00029} = 0^{m}\,68965.$$

Esta magnitud tomada en el plano corresponde (188) en la escala de $\frac{1}{5000}$ á $0^{m},68965 \times 5000 = 3448^{m},25$: podremos, por lo tanto, tomar los ángulos que formen en el terreno las líneas cuya magnitud sea inferior á 3^{km}, sin que sea apreciable el error en el instrumento, y sin que tenga influencia alguna en la representacion gráfica de la figura constituida por ellas.

En la escala de $\frac{1}{10000}$, el límite de la longitud que deben tener las líneas del terreno es de cerca de 7^{km}; magnitud que excede á las que se consideran ordinariamente en las operaciones topográficas.

505. **Pantómetra.**—Este instrumento, conocido tambien con el nombre de *goniasmómetro*, y debido á Fouquier, se compone de un cilindro (fig. 339; lám. 20) semejante al de la escuadra (465), dividido en dos partes: la inferior está unida al trípode (340) por medio de una rodilla de juego de nuez (329), y presenta en su superficie el limbo, que está dividido generalmente en grados, de derecha á izquierda (277); una hendidura corresponde al cero del mismo, y una ventanilla con su cerda á la 180, constituyendo ambas la alidada fija como en el grafómetro. Esta parte del instrumento se mueve alrededor de su eje de figura dentro de las conchas de la rodilla, y se fija por el tornillo de presion de esta. La parte superior del cilindro se mueve alrededor del mismo eje, é independientemente de la que lleva el limbo, por medio del tornillo t, fijo á esta parte, y provisto de un piñon cuyos dientes engranan con los de una rueda fija interiormente al cilindro superior. Este lleva el nonius n, y está provisto tambien de dos niveles tangentes en la base superior, y de una brújula semejante á la de la escuadra (464). Otra alidada dispuesta como la primera, y cuya hendidura corresponde al cero del nonius, sirve de alidada móvil, y otras dos hendiduras determinan un plano perpendicular al de colimacion de esta última alidada.

El nonius está dividido en 30 partes, por lo que aprecia de 2 en 2' (309.—Ej. 3.º).

La pantómetra presenta otras disposiciones más sencillas que las que acabamos de describir, las cuales consisten en la supresion de los niveles ó de la brújula, y la más elemental se compone tan solo de los cilindros y la rodilla.

506. **Usos, verificaciones y correcciones.**—Este instrumento se emplea para la medida de los ángulos azimutales, disponiendo verticalmente el eje del cilindro por medio de los niveles y el juego de la rodilla. Para la medida de un ángulo ACB (fig. 340; lám. 20), se dirije la alidada fija al objeto A de la derecha (285) con lo que el cero del limbo se hallará en *o*, y la móvil al objeto B: el arco *oo'* comprendido por los ceros, y que es igual al *mm'*, determina el valor del ángulo ACB.

El problema recíproco (485) se resuelve del mismo modo que con el grafómetro. Tambien puede resolverse empleando solamente la parte móvil del cilindro, en cuyo caso el problema es el recíproco del explicado (492).

Las verificaciones y correcciones son tambien las misma que las del citado instrumento (486). Los niveles no tienen tornillos de correccion: por lo que no podemos asegurarnos de la perfecta verticalidad del eje del cilindro; pero tampoco es necesario, porque el error que puede resultar es inapreciable en la medida de los ángulos azimutales.

507. **Pantómetra de limbo zenital con anteojo.**—La pantómetra de Fouquier ha recibido modificaciones por los constructores modernos, que la han llevado á un grado notable de perfeccion: tal es la que representamos en la fig. 341 (lám. 20): á la rodilla de nuez sustituye con ventaja una plataforma de tres tornillos (337), á la que va unido el sistema de los *a* y *c*, para el movimiento rápido ó lento del limbo: el *t* mueve la parte superior del instrumento como en la pantómetra anteriormente descrita: esta parte lleva consigo una brújula, y el nivel (*m*, *m*), provisto de su tornillo (*h*, *h'*) de correccion particular. Un anteojo astronómico (232) puede girar alrededor de un eje perpendicular á él, el cual se apoya en los cojinetes en que terminan dos soportes fijos á la parte superior del cilindro que lleva los nonius. Uno de estos soportes es susceptible de un movimiento en sentido de su longitud, cuyo movimiento hace variar la inclinacion del eje de rotacion del anteojo, por medio del tornillo de correccion *z*. Entre los soportes hay un segundo nivel situado paralelamente al eje de rotacion á que acabamos de referirnos, y provisto de su tornillo de correccion particular, ocultos ambos en la figura. Fijo invariablemente al mismo eje y perpendicular á él, está el limbo zenital (*l*, *l'*), que por lo tanto participará de los movimientos del anteojo: los nonius correspondientes á este limbo se hallan en las extremidades de una pieza *b*, que puede tener un pequeño movimiento alrededor del eje comun al limbo y al anteojo, ó fijarse invariablemente al cilindro móvil, por los tornillos *r*, que tienen sus tuercas en dos piezas prismáticas fijas al mismo cilindro, y cuyos extremos pueden ponerse en contacto con el de otra pieza que está en prolongacion de la *b*: unas tuercas móviles acaban de fijar el sistema despues de haber corregido la posicion de la pieza *b* de los nonius. El sistema de los tornillos *a'* y *c'* sirve para el movimiento del arco zenital.

Ambos limbos están divididos en medios grados (277), y los nonius aprecian de minuto en minuto (309.—Ej. 6.º)

508. **Usos, verificaciones y correcciones.**—Se emplea esta pantómetra, como la sencilla de Fouquier en la medida de los ángulos azimutales y como la brújula de limbo zenital (400) en la de los ángulos de elevacion y depresion.

509. *Verificaciones y correcciones.*—1.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Se verifica y corrige como hemos indicado (402), empleando el nivel *(m, m')*, los tornillos de la plataforma y el *(h, h')* de correccion particular del nivel.

510. 2.ª *Horizontalidad del eje de rotacion del anteojo.*—Se horizonta el segundo nivel por su tornillo de correccion particular: se levanta el anteojo sacando el eje de los cojinetes que sostienen los extremos de este último, y se coloca de nuevo en ellos invertido: si el nivel queda entonces horizontal, el eje tambien lo será: de lo contrario, se corregirá la mitad de la desviacion por el tornillo *z*, que mueve uno de los soportes, acabando de horizontar por el de correccion particular del nivel.

Para darnos cuenta de estas operaciones, análogas á las del nivel de aire (76), supongamos que el eje *ab* (fig. 342; lám. 20) es paralelo al del nivel *mn*, cuando hemos dado á este último la posicion horizontal; ambos serán perpendiculares al eje *rs* de rotacion del instrumento (55), y al hacer la inversion, los punto *a* y *m* ocuparán el lugar que correspondia á los *b* y *n* en la primera posicion, quedando el nivel horizontal.

Pero si el eje del anteojo tiene la posicion *ac* cuando se ha horizontado el nivel, al hacer la inversion, los puntos *a*, *m* y *n* ocuparán respectivamente las posiciones *c*, *m'* y *n'*, como si hubiesen girado alrededor de un eje *r's'* perpendicular á *ac* y el nivel dejará de ser horizontal. Se comprende entonces que será preciso hacer que el eje de rotacion del anteojo sea paralelo al del nivel, lo que se consigue por el tornillo de correccion del nivel, y disponer ambos ejes horizontalmente, para lo que se emplea el *z* que mueve el soporte.

511. 3.ª *Que el eje óptico del anteojo sea perpendicular al eje horizontal de rotacion.*—Supongamos en primer lugar que el eje óptico del anteojo ocupa la posicion *ab* (fig. 343; lám. 20) perpendicular á su eje de rotacion *mn*. Colocando un jalon *e* en la direccion de la visual, se levanta el anteojo, haciéndole girar en el espacio alrededor de *mn*, y se le coloca de nuevo de manera que cada uno de los extremos del eje se apoye en el mismo cojinete que en la primera posicion. Fácil es ver que el anteojo se halla en las mismas condiciones que si hubiese girado alrededor de este eje invariable, como en el segundo procedimiento explicodo (262). Entonces los puntos *a* y *b* habrán cambiado de posicion, y dando al instrumento una semirevolucion exacta alrededor del eje vertical de rotacion, observando el limbo azimutal, la visual irá de nuevo á parar al punto *e*.

Cuando el eje del anteojo esté dirigido segun la oblícua *cd*, ocupará despues del giro indicado la posicion *c'd'*, y dando la semirevolucion alrededor del eje vertical, se colocará un jalon *e''*, á igual distancia del punto de estacion, que el e' colocado en la primera direccion del eje óptico. Despues se moverán los tornillos del retículo hasta que la visual vaya á parar á un tercer jalon e equidistante de los dos primeros.

512. La correccion puede tambien hacerse observando el arco $c'bd$ que recorre el nonius para que la visual pase de la posicion $c'd'$ á la cd en que va á parar al objeto e' observado anteriormente: este arco se obtiene hallando la diferencia entre 180° y el arco $d'nd$ recorrido por la visual en el sentido de la graduacion para pasar de la posicion $c'd'$ á la cd que ocupaba primitivamente: haciendo recorrer entonces al cilindro superior el arco $c'b$, mitad del $c'bd$, lo perpendicular ab al eje mn tomará la posicion cd, este eje ocupará la $m'n'$, perpendicular á cd y el eje óptico la $c''d''$: bastará entonces mover los tornillos del retículo hasta que la visual vaya á parar de nuevo al objeto e' primeramente observado, para que sea perpendicular al eje de rotacion. Siendo horizontal este eje, la visual describirá en su movimiento un plano vertical (101), como puede comprobarse por medio de una plomada (264).

513. 4.ª *Que los ceros de los nonius coincidan con los del limbo zenital cuando la visual es horizontal*.—Se sigue la misma marcha explicada (413) para la brújula de arco zenital, empleando para la correccion los tornillos r (fig. 341; lám. 20), que mueven la pieza de los nonius.

514. **Límites del empleo de la pantómetra**.—Introduciendo en la fórmula [1] (504) el valor de la tangente del arco de 2′, se encuentra para la pantómetra sencilla el límite 1700m, si la escala es de $\frac{1}{3000}$, y el de 3500 para la de $\frac{1}{10000}$. La pantómetra de limbo zenital tiene los mismos límites que el grafómetro.

515. **Recipiángulo**.—En algunas aplicaciones puede ser útil un goniómetro muy sencillo, que ha recibido este nombre; por ejemplo, cuando se trata de medir en los edificios los ángulos que forman los muros entre sí. Se compone el recipiángulo de dos reglas ab, cd (fig. 344; lámina 20), que forman un ángulo variable girando alrededor de la charnela r que las une. El punto r corresponde al centro de un semicírculo fijo á una de las reglas ab: el extremo d del brazo menor de la otra regla lleva un nonius. Este recipiángulo sirve para la medida de los ángulos salientes de los muros, adaptando á estos los brazos mayores rc, rb de las reglas, de manera que queden perpendiculares á la arista interseccion de dichos muros: entonces el nonius señala en el limbo un arco m, que es la medida del ángulo ard, igual al n que forman los muros.

Para la medida de los ángulos entrantes se fijan á las reglas anteriores otras dos cs, sb por medio de charnelas, constituyendo así un rombo de ángulos variables: se hacen coincidir con los muros que forman el ángulo entrante las reglas cs, sb, y entonces el nonius señala un arco $m = n = s$, que es el que se trata de medir.

CAPITULO X.

Teodolito.—Círculo repetidor.

Generalidades.—Teodolito de Troughton.—Usos del teodolito.—Verificaciones y correcciones.—Teodolito de Troughton con dos anteojos.—Verificaciones y correcciones.—Límite del empleo del teodolito.—Teodolito de Richer.—Usos, verificaciones y correcciones.—Teodolito de Lerebours et Secrétan.—Usos, verificaciones y correcciones.—Teodolito de Combes.—Usos, verificaciones y correcciones.—Teodolito-brújula.—Verificaciones y correcciones.—Teodolito de Gambey.—Verificaciones y correcciones.—Teodolito excéntrico de Gambey.—Verificaciones y correcciones.—Usos del teodolito excéntrico.—Medida y repeticion de los ángulos zenitales.—Teodolito de Porro.—Usos, verificaciones y correcciones.—Círculo repetidor.—Verificaciones y correcciones.—Usos del círculo repetidor.—Medida y repeticion de los ángulos en el plano de los objetos.—Medida y repeticion de los ángulos zenitales.—Método de la reiteracion de ángulos.—Teodolito de Brumser.—Consideraciones acerca de los goniómetros de precision.

516. **Generalidades.**—El *Teodolito* es un instrumento que se emplea en las operaciones geodésicas y en las topográficas que exigen precision, para la medida de los ángulos azimutales y lós de elevacion y depresion, pudiendo deducirse de estos últimos los ángulos zenitales; áun cuando algunos permiten la determinacion inmediata de estos últimos. Difiere en general del grafómetro y la pantómetra en la mayor apreciacion angular y en los detalles de construccion, que hacen del teodolito un goniómetro más apropósito que aquellos para las operaciones á que se le destina.

Varias son las disposiciones que los constructores modernos han adoptado para estos instrumentos; siendo, por lo tanto, distintas sus correcciones al pasar de uno á otro; el estudio del goniómetro que nos ocupa sería incompleto si no describiésemos el número de modelos suficiente para comprender todas ó la mayor parte de las varias disposiciones á que acabamos de referirnos, dando la preferencia al teodolito inglés de Troughton por lo mucho que su uso está generalizado en España, por la solidez y la buena construccion de sus piezas, y la facilidad en su manejo; sin que por eso creamos que otros, entre ellos el de Gambey, desmerezcan en nada en cuanto á las condiciones de exactitud.

517. **Teodolito de Troughton.**—El teodolito más sencillo de este constructor se compone de dos placas superpuestas *b* (fig. 345; lám. 20): en la inferior está el limbo azimutal, y en la superior dos nonius *n* en unos rebajos practicados en el borde de la plancha, los cuales forman una superficie cónica, que es prolongacion de la lateral del limbo que tiene la misma forma; esta disposicion hace más cómoda la observacion de las divisiones, que se facilita con la ayuda de una lente (226).

La plancha inferior forma cuerpo con una columna cilíndrica *d*, perpendicular á ella: esta columna es hueca y recibe en su interior otra tambien cilíndrica dispuesta perpendicularmente á la plancha superior, y en el centro de la misma; pudiendo así girar ambas planchas alrededor de un eje comun, ya unidas, ya independientemente la una de la otra, y en ambos casos con movimiento rápido ó lento á voluntad. Para que giren unidas se aprieta el tornillo de presion *a'*, y se hace uso del sistema de tornillos *a* y *c* (322): este movimiento puede tambien servir para hacer girar á la placa inferior independientemente de la otra, aflojando préviamente el tornillo *a'*; pero esto se ejecuta raras veces, y no es indispensable para los usos á que se destina el teodolito.

Fijo el tornillo *a*, se puede hacer girar á la plancha superior por el sistema de los *a'* y *c'*.

Sobre la plancha superior, y participando de todos sus movimientos, se halla una brújula cuyo centro está en el eje de rotacion de las planchas, dos niveles de aire cuyos ejes son perpendiculares entre sí, y los cuales se hallan provistos de tornillos de correccion particular, así como tambien dos caballetes sobre los cuales se apoyan los extremos de un eje paralelo al plano de la plancha. Alrededor de este eje gira un limbo semicircular graduado, perpendicular á él en su punto medio. El canto exterior de este limbo, que sirve para la determinacion de los ángulos de elevacion y depresion, es dentado y engrana con un piñon que da movimiento al limbo. Este piñon que está oculto en la proyeccion vertical, y se proyecta horizontalmente en *v*, se apoya en una pieza *h*, en la cual está tambien el nonius del limbo zenital. La plancha del nonius puede correr lateralmente cierto espacio, aflojando los tornillos que la sujetan; con este objeto las ranuras por las cuales pasan estos tornillos son bastante prolongadas lateralmente.

Paralelamente al diámetro (0—180°) del limbo zenital é invariablemente unida á él, se halla una regla *f* sobre la cual se elevan dos soportes que terminan en los collares de un anteojo astronómico, el que puede girar dentro de ellos alrededor de su eje de figura; los collares se cierran por unas clavijas *g*.

El retículo del anteojo en el teodolito, tiene por lo regular tres cerdas; una está destinada á ocupar la posicion horizontal, y las otras dos forman un ángulo agudo, cuya bisectriz es perpendicular á la primera cerda.

Un nivel *m* unido al anteojo por su parte superior, y más generalmente por la inferior, como representa la figura, puede variar de inclinacion con respecto á él por el movimiento de los tornillos *r*: otros tornillos *z*, dobles para cada extremo del tubo del nivel, sirven para hacer variar lateralmente la direccion de su eje.

La columna *d* termina por su parte inferior en una placa paralela á la plancha del limbo azimutal. Esta placa es á la vez la superior de una plataforma de cuatro tornillos *t* (332): la placa inferior de la misma se atornilla á la rosca en que termina el trípode (344).

La caja en que se trasporta el instrumento encierra además un segundo ocular con lentes azules para las observaciones solares, la plomada, un destornillador, y una palanca para mover los tornillos de correccion.

518. *Graduacion del instrumento*.—Los limbos azimutal y zenital están divididos en grados y medios grados (277), y los nonius correspondientes aprecian minutos (309.—Ejemplo 6.°).

El sentido de la graduacion es el de izquierda á derecha, y el limbo zenital presenta dos graduaciones que parten del cero situado en la parte inferior, y crecen á derecha é izquierda hasta 90°.

En la parte posterior del limbo zenital hay otra graduacion representada en la fig. 349 (lám. 21), la cual da la *diferencia entre la hipotenusa* AB (fig. 63; lám. 5) *y la base* AC del triángulo rectángulo que forman estas líneas con la vertical BC, cuando la primera tiene una longitud de 100 metros.

519. **Usos del teodolito**.—El teodolito se emplea para la medida de los ángulos azimutales, disponiéndole del mismo modo que el grafómetro de anteojos (491), horizontándole por los tornillos *t* (fig. 345; lám. 20); para lo cual se dispone cada uno de los niveles de la planta superior paralelamente á la direccion de dos tornillos opuestos, y se horizonta alternativamente cada nivel por los tornillos que determinan la indicada direccion paralela: con lo que las planchas quedan horizontales (333). La apreciacion del ángulo que se trata de medir se obtiene de una manera análoga, dirigiendo primeramente la visual al objeto de la izquierda, y empleando para el sistema de los tornillos *a*, *c* y el piñon que mueve el limbo zenital, y despues al de la derecha por el mismo piñon y el sistema de los tornillos *a′* y *c′*.

La medida del ángulo puede obtenerse tambien sin hacer la coincidencia de los ceros (492), y con más exactitud en caso necesario, tomando el término medio de los que marcan ambos nonius (497).

Los ángulos azimutales se pueden repetir como hemos indicado (494).

520. Se comprueban aproximadamente los ángulos por medio de los

rumbos, y se orientan las líneas, valiéndose de la brújula; para todo lo cual se debe disponer el anteojo entre los collares, de modo que el objetivo esté á la parte que corresponde al norte en el limbo de la brújula.

521. *Medida de los ángulos de elevacion y depresion.*—Se sigue la marcha que hemos indicado para la brújula de limbo zenital (400), por medio del piñon que mueve el limbo. Los ángulos de elevacion se leen en la division que está á la parte del ocular, y los de depresion en la que se halla á la del objetivo del anteojo; apreciando siempre los minutos en la graduación que se halla en el sentido de la correspondiente del limbo (306).

522. *Reduccion de las distancias al horizonte.*—Puede obtenerse esta reduccion observando la graduacion posterior del limbo zenital. Supongamos que la recta dada tiene 120m,4 de longitud, y que su pendiente es 10° 26′ (161): observando la graduacion indicada, veremos que marca 1,52 próximamente; hallaremos entónces la diferencia correspondiente á la distancia dada (518), por la proporcion

$$100 : 1,52 :: 120,4 : x = 1,830;$$

y restando este resultado de la distancia medida, se obtiene tambien 118,57 para la reducida al horizonte.

523. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Que el eje óptico del anteojo coincida con el eje de figura ó de rotacion del anteojo dentro de los collares.*—Se sujetan todos los tornillos para que el anteojo no pueda tener otro movimiento que el de rotacion dentro de los collares, y se corrige la posicion de la cerda horizontal y de la bisectriz de las inclinadas, como hemos explicado (240).

524. 2.ª *Paralelismo del eje del nivel y el eje óptico del anteojo.*—Se horizonta el nivel por los tornillos de la plataforma, se saca de los collares y se le vuelve á colocar en ellos invertido: si entonces la ampolla permanece horizontal, los ejes son paralelos; en caso contrario, se corrige la mitad de la desviacion que se observe por los tornillos de correccion particular del nivel, acabando de horizontar por los de la plataforma.

Si tratamos de darnos la razon del procedimiento que acabamos de explicar, supongamos que sea ab (fig. 346; lám. 20) el anteojo, mn el nivel, y que estas líneas sean perpendiculares al eje sx de rotacion del instrumento: dando al nivel la posicion horizontal, la ab tambien lo será, y si invertimos el anteojo de modo que el extremo a ocupe el collar b y al contrario, se producirá el mismo efecto que si hubiese girado alrededor del eje sx; y por lo tanto el punto m irá á ocupar la posicion del n, y al contrario, quedando el nivel horizontal.

Pero si mn no es paralela á ab, al horizontar el nivel, tomará el instrumento la posicion representada en la fig. 347 (lám. 20), y al hacer la inversion, los puntos m, n irán á parar á m', n' como si hubiesen girado alrededor de s' x', y el nivel no quedará horizontal; moviendo los tornillos del nivel hasta que desaparezca la mitad de la desviacion, su eje será paralelo al del anteojo, y ambos se llevarán á la posicion horizontal, por los de la plataforma.

Por la correccion hecha, sólo se consigue situar el nivel en un plano paralelo al eje del anteojo; pero entonces puede ó no serle perfectamente paralelo: nos cerciorarémos de que lo es, dando al anteojo dentro de los collares todo el giro que permita observar la burbuja del nivel, y viendo si equidista constantemente de las marcas del tubo: porque describiendo entonces el eje del nivel la superficie lateral de un cilindro cuyo eje es el de figura del anteojo, todas las posiciones del primero de estos ejes serán generatrices horizontales, por serlo una de ellas que es la determinada por la correccion hecha. Si la ampolla no permaneciese horizontal, indicaría que el eje del nivel describia una superficie de revolucion, y que por lo tanto no sería paralelo al eje de rotacion indicado. Se logra darle esta posicion por medio de los tornillos *z* (fig. 345; lám. 20), que le mueven lateralmente.

525. 3.ª *Que el eje de rotacion del instrumento sea vertical.*—Se coloca uno de los niveles de las planchas en direccion paralela á la de dos tornillos opuestos de la plataforma, y se horizonta por ellos: se da una semirevolucion exacta al instrumento, observando el limbo azimutal, y si se ve alguna desviacion en la burbuja, se corrige la mitad por los tornillos de correccion particular del nivel, y la otra mitad por los mismos tornillos de la plataforma; repitiéndose la operacion hasta asegurarse de que el nivel está perfectamente corregido, la línea que une dichos tornillos de la rodilla será horizontal (402). Fijo el instrumento en esta posicion, se corrige el otro nivel del mismo modo, empleando los otros dos tornillos de la plataforma; con lo que la línea que éstos determinan será tambien horizontal, y vertical el eje del instrumento (333). Los niveles permanecerán entonces horizontales, durante una revolucion completa del instrumento alrededor de su eje de rotacion.

526. 4.ª *Que el plano descrito por el eje óptico del anteojo sea perpendicular al eje de rotacion del limbo zenital.*—Esta circunstancia exige que el eje de rotacion sea horizontal, lo que tendrá lugar cuando sea paralelo á las planchas de los nonius (109). Nos asegurarémos de que asi se verifica, dirigiendo la visual á una plomada haciendo que el cruzamiento de las cerdas del retículo cubra uno de sus puntos, y viendo si cubre á los demás girando en el plano que describe alrededor del eje de rotacion á que nos referimos.

La correccion necesaria, sólo puede hacerse en algunos teodolitos, cuya construccion difiere de la que hemos explicado, en que los soportes en que se apoya el eje *ab* (fig. 348; lám. 21) de rotacion del limbo zenital, se apoyan á su vez en una placa *cd*, unida á la plancha superior del limbo azimutal por los tornillos *t*, *t'*, *t''*, que puestos en movimiento por medio del que se da con una palanca á las roldanas *r*, hacen variar la inclinacion de la placa *cd* y de la parte superior unida á ella.

527. 5.ª *Que el cero del nonius coincida con el del limbo zenital cuando el nivel y por consiguiente el eje óptico del anteojo sea horizontal.*—Si hechas las correcciones anteriores, no existe la coincidencia de los ceros, se aflojan los tornillos que sujetan la plancha del nonius, y se la corre hasta lograr la coincidencia exacta, apretándolos de nuevo. Si no puede hacerse esta correccion, se tiene en cuenta el error de desviacion al apreciar los ángulos verticales; sumándole ó restandole de todos ellos, segun el sentido de la misma y el del ángulo que se lee.

Si el nonius marca, por ejemplo, 12′ subiendo cuando el nivel está horizontal, será preciso restar esta cantidad de todos los ángulos de elevacion y aumentarla á todos los de depresion. Lo contrario habría que hacer si el ángulo de error fuese bajando.

528. **Teodolito de Troughton con dos anteojos.**—Este teodolito, representado por su parte posterior con respecto al limbo zenital en la fig. 349 (lám. 21), es de mayores dimensiones que el que hemos descrito (517); el limbo zenital se mueve por un sistema de tornillos *a″*, *c″* análogo á los de movimiento del limbo azimutal. El tornillo de correccion del nivel es del sistema descrito (80) y representado en la fig. 33 (lámina 2); el eje del nivel se mueve lateralmente por un sistema de tornillos análogo al *z* (517), el cual sirve al mismo tiempo de charnela. La plataforma es de tres tornillos (337), cuyas extremidades inferiores presentan unos resaltos representados al descubierto en *r*, que penetran por taladros practicados en una pieza giratoria alrededor del centro de la placa inferior de la plataforma, los que tienen en prolongacion unas ranuras más estrechas: una vez introducidos, se corre dicha pieza en el sentido que permiten las ranuras, las cuales abrazan las gargantas de los mencionados resaltos: se sujeta entonces la pieza giratoria apretando los tornillos de un muelle *s* que tiene al efecto, con lo que el instrumento queda fuertemente unido al trípode.

Un segundo anteojo, que es excéntrico, gira alrededor de la columna *d*, con movimiento lento ó rápido, y tambien puede fijarse á ella, por el sistema de los tornillos de presion *t* y de coincidencia *z*.

Cada uno de los anteojos tiene dos oculares: el de mayor longitud constituye con el tubo del objetivo, cuando está armado, un anteojo terrestre (236), y el de menor longitud un anteojo astronómico (232): el anteojo superior del teodolito representado en la figura, está armado del ocular terrestre y el inferior del astronómico. Este último es el *anteojo de prueba* (490). Un microscopio *m*, que puede moverse alrededor del limbo azimutal, sirve para distinguir con claridad las divisiones de su graduacion, y otro *x* sirve asimismo para las del limbo zenital.

529. *Graduaciones.*—Los dos limbos están divididos en tercios de grado (277), y los nonius aprecian de 20 en 20″ (309. Ej. 7.°). La division posterior del limbo zenital es la misma que en el teodolito anteriormente descrito (518).

530. *Usos del teodolito de Troughton con dos anteojos.*—Este instrumento

se dispone para la medida de los ángulos, colocando uno de los niveles de la plancha superior paralelamente á la direccion de dos tornillos de la plataforma, y horizontándole por ellos: el otro nivel se horizonta por el tercer tornillo, sin mover la plancha de la posicion que ocupa; esta operacion se ejecuta con más prontitud que en los instrumentos en que se emplea un solo nivel, porque no hay necesidad de dar giro alguno á la plancha de los niveles.

Para medir un ángulo, se usa este teodolito como el de un solo anteojo, empleando los sistemas de tornillos a,c, y a'',c'' al dirigir la visual al objeto de la izquierda, y los a',c' y a'',c'' para el de la derecha (416).

Teniendo en cuenta lo que acabamos de indicar, todo lo que se refiere á los usos de este instrumento es enteramente lo mismo que hemos indicado para el teodolito de un solo anteojo.

El anteojo de prueba se usa como en el grafómetro (493).

531. *Repeticion de los ángulos.*—Puede seguirse cualquiera de los métodos expuestos (295) y (296). Para la correccion necesaria, cuando se emplean ambos anteojos, es necesario aplicar la fórmula inserta en el párrafo 299, la cual exije el conocimiento de la excentricidad del anteojo inferior, que puede determinarse dirigiendo visuales por ambos anteojos á un punto muy lejano a (fig. 350; lám. 21), las que serán aproximadamente paralelas (454): colocando una plomada en la direccion de cada visual y á igual distancia del instrumento, la longitud de la bc que media entre ellas será la excentricidad del anteojo inferior.

532. **Verificaciones y correcciones.**—Puede seguirse la misma marcha que hemos establecido (523) para las verificaciones y correcciones, empleando para la segunda (524) el tornillo de correccion del nivel y el c'' (fig. 349; lám. 21) de coincidencia del limbo zenital; pero tambien se pueden ejecutar en el órden y de la manera siguiente:

533. 1.ª *Centracion del anteojo* (523).

534. 2.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Puede hacerse del mismo modo que para el teodolito de un solo anteojo (525), colocando uno de los niveles en direccion de dos tornillos de la plataforma, y corrigiéndole mitad por los mismos tornillos y mitad por los de correccion particular: el otro nivel se corrige por el tercer tornillo de la plataforma y los de correccion particular del mismo.

Sin embargo, teniendo en cuenta la mayor sensibilidad del nivel superior, se hace la correccion por él, colocándole en direccion de dos tornillos r de la plataforma, y haciendo la correccion indicada (402) por el tornillo c'' y los de la plataforma: colocándole despues en la direccion del tercero, se horizonta por él, quedando el eje vertical. Entonces se corrigen los niveles inferiores por sus tornillos de correccion particular.

Si el teodolito de dos anteojos tiene plataforma de cuatro tornillos, se hace la correccion de un modo análogo, valiéndose del tornillo c'' y dos opuestos de la plataforma: cuando el nivel está corregido, se le dá un cuarto de revolucion para colocarle en direccion de los otros dos, horizontándole por ellos, con lo que el eje quedará vertical.

Para comprender mejor esta correccion, que es análoga á la de la brújula (402), supongamos que el eje del nivel superior no es paralelo al del anteojo, pero que el eje de rotacion sx (fig. 351; lám. 21) es perpendicular á la horizontal pq, la cual es paralela á la línea que une los tornillos r, r'. Trayendo la ampolla á su mitad por el tornillo c'', el nivel tomará la posicion mn: estando en el mismo plano esta horizontal y la pq, serán paralelas (105) y perpendiculares al eje sx, que lo es por construccion á la pq: por lo tanto, dando al nivel una semirevolucion exacta alrededor del eje sx, el nivel permanecerá horizontal y la verificacion estará hecha.

Cuando el eje $s'x'$ (fig. 347; lám. 20) no es perpendicular á rr', horizontando el nivel por medio de c'' (fig. 349; lám. 21) ocupará la posicion mn; y despues de darle la semirevolucion indicada, ocupará su simétrica, la $m'n'$, en la que no es horizontal; para la correccion necesaria será preciso dar al nivel la posicion hh' perpendicular á $s'x'$, lo que se consigue haciendo desaparecer la mitad de la desviacion que presenta la ampolla del nivel por el tornillo c'', y llevar las líneas hh', pq á la posicion horizontal por los r, r' de la plataforma. En el caso de que ésta sea de cuatro tornillos, la línea que une los r, r' está en el plano de las pq, hh'.

535. 3.ª *Paralelismo del eje del nivel y el eje óptico del anteojo.*—Se dá á este último la posicion horizontal, del mismo modo que en la brújula de limbo zenital (406), dirigiendo la visual á un punto, sacando el anteojo de los collares para colocarle de nuevo en ellos invertido, dándole una semirevolucion alrededor del eje vertical, y observando el punto á que vá á parar la visual en la vertical del primero; despues se mueve el anteojo por el tornillo c'' hasta que vaya á cubrir al punto equidistante de los dos primeros, en cuyo caso será horizontal: entonces se lleva la ampolla del nivel á su mitad por los tornillos de correccion particular.

536. Las otras dos correcciones son las mismas que para el teodolito de un solo anteojo (526 y 527).

537. **Límites del empleo del teodolito.**—El teodolito de Troughton con un anteojo tiene los mismos límites que el grafómetro. Para hallar el que corresponde al de dos anteojos, que aprecia de 20 en 20″, hallaríamos la tangente de 20″, que es 0m,00009696, y sustituyendo este valor en la fórmula [1] (504), resultaría para la escala de $\frac{1}{5000}$ la distancia de 10313m,5, y la de 20627m para la escala de $\frac{1}{10000}$.

538. **Teodolito de Richer.**—El teodolito de Richer tiene el limbo azimutal y sus nonius dispuestos como en la pantómetra en dos superficies cilíndricas, prolongacion la una de la otra: en la inferior está el limbo, que tiene movimiento alrededor de un eje y puede fijarse por

medio del tornillo de presion *a* (fig. 352: lám 21) á una pieza unida á la plataforma. Esta es de cuatro tornillos horizontales *t* (334), mueven dos ejes dispuestos segun el sistema de suspension de Cardan (434).

La superficie cilíndrica del nonius puede fijarse á la inferior, ó girar con movimiento rápido ó lento por el sistema de tornillos *a'* y *c'*, y lleva en su base superior la declinatoria *(d d')* (437) y una columna *h* perpendicular á ella, que termina en una plancha sobre la cual se halla un nivel *n* provisto de sus tornillos de correccion *r*. La declinatoria tiene un pequeño movimiento de báscula para disponer horizontalmente los arcos graduados, observando la aguja. La misma plancha sostiene tambien el eje de rotacion del limbo zenital *(l,l')*, que puede variar de inclinacion por medio de los tornillos *s*. El sistema de los *a''* y *c''* sirve para los movimientos del limbo zenital. El nonius *m*, trazado en una plancha unida á la que sostiene el eje de rotacion del limbo zenital, es susceptible de un movimiento necesario para la correc ion, aflojando el pasador *p* y moviendo en el sentido conveniente dos tornillos proyectados horizontalmente en *z*. Conviene advertir que para poner en movimiento uno de los tornillos es preciso aflojar el otro: llevado el nonius á su posicion, se afirma apretando el mismo pasador. Con el limbo se mueve la alidada excéntrica de anteojo acompañada de un nivel, sujetos ambos á una misma regla, y provisto el último de su tornillo particular de correccion. El mismo nivel tiene otra abertura inferior, que permite horizontar su tubo en dos posiciones diametralmente opuestas del mismo alrededor del eje de rotacion del anteojo y el nivel.

Los limbos de este teodolito están divididos en grados de derecha á izquierda (277); y los nonius aprecian de 2 en 2' (309—Ej. 3.°).

539. **Usos, verificaciones y correcciones**.—Se usa este instrumento en la medida de los ángulos azimutales por una doble observacion (280), invirtiendo el anteojo para ejecutar la segunda, y teniendo en cuenta el sentido de la graduacion. Los ángulos zenitales se miden como con la brújula de limbo zenital (400). Los límites de su empleo son los mismos que los de la pantómetra (514).

540. Este instrumento exige para estar corregido las circunstancias siguientes:

1.ª *Que el eje de rotacion del instrumento sea vertical.*—Esto se consigue como en el teodolito de cuatro tornillos verticales en el caso particular citado (534), colocando el nivel *n* en la direccion de dos de los horizontales *t* y haciendo la correccion por ellos y los *r* de correccion particular del nivel. Corregido este, se le coloca en la direccion de los otros dos tornillos y se horizonta por ellos, quedando el eje vertical.

541. 2.ª *Horizontalidad del nivel que acompaña al anteojo.*—Se lleva la ampolla á su mitad por medio del tornillo *c''*: se le da una semirevolucion exacta alrededor del eje vertical de rotacion, y si se observa alguna desviacion, se corrige por mitades con dicho tornillo *c''* y el de correccion particular del nivel.

542. 3.ª *Paralelismo del eje óptico del anteojo y el eje del nivel que le acompaña.*—Se dirige la visual á un punto m (fig. 353; lám. 23), y dando al anteojo una semirevolucion exacta alrededor de su eje de rotacion, el punto a del eje óptico irá á parar á b y al contrario: entonces se da á la parte superior del instrumento una semirevolucion alrededor del eje vertical rs, y se observa el punto m' en que termina la visual en la vertical de m: despues se mueven los tornillos del retículo hasta que termine en el punto h equidistante de m y m'. La visual será entonces horizontal (406).

543. 4.ª *Que el cero del nonius zenital esté en coincidencia con el de su limbo correspondiente cuando la visual es horizontal.*—Hecha la correccion anterior, se observa si existe ó no esta coincidencia; y en el segundo caso se la obtiene aflojando el pasador p (fig. 352; lám. 21) y moviendo los tornillos z en el sentido conveniente.

544. 5.ª *Que el eje de rotacion del limbo zenital sea horizontal.*—Se emplea la plomada como en la verificacion de la alidada (264), y se hace la correccion, si es necesaria, por los tornillos s.

545. **Teodolito de Lerebours et Sécretan.**—Este teodolito da los ángulos de elevacion y depresion expresados en grados, y al mismo tiempo en el valor numérico de su tangente por la relacion $\frac{d}{l}$ (Acotaciones 25).

El limbo azimutal y toda la parte inferior á él, está igualmente dispuesta que en el grafómetro de dos anteojos (490). La parte superior lleva un anteojo que puede girar alrededor de su eje de figura entre los collares en que se encuentra dispuesto, los cuales se apoyan en una regla p (fig. 354; lám. 22), susceptible de movimiento alrededor de una charnela situada en su mitad y fija á otra regla inferior, por medio del tornillo v que hace variar la posicion relativa de las reglas. Ambas pueden girar alrededor de la charnela x por el sistema de tornillos a'', c'', llevando la inferior consigo en su movimiento una plancha metálica en la cual está grabado el nonius correspondiente á la escala h, por medio de un boton unido á la plancha, el cual corre entre un bastidor b fijo á la regla: asimismo se mueve con ella el nonius correspondiente al arco zenital, provisto de un reflector rectangular inclinado s. Tambien puede moverse alrededor de la charnela x un microscopio simple r, que se usa para la apreciacion de las graduaciones de la escala.

El arco zenital, la escala y la charnela x forman parte de un bastidor que se apoya en otra pieza giratoria alrededor del eje del limbo azimutal, la cual lleva consigo el nivel (n, n'), y las piezas de los nonius correspondientes al limbo azimutal con sus reflectores y los microscopios (m, m'); moviéndose toda la parte superior descrita por el sistema de los tornillos a' y c'. La inclinacion del plano del bastidor puede variar por los tornillos z, para lo cual se afloja el menor de ellos, y se dá movimiento al otro para dar al plano la posicion conveniente, despues de lo cual se aprieta el primero para fijarle en ella.

546 *Graduacion.*—El limbo azimutal y el arco zenital están divididos en tercios de grado, y los nonius aprecian de 20 en 20″ como en el teodolito de Troughton (529) La unidad de la escala es $\frac{1}{100}$ de la longitud que tiene la parte de regla horizontal en que descansa. Esta longitud es la comprendida entre las proyecciones de la charnela x y de la escala sobre la regla La menor division de esta es de media unidad: el nonius comprende cuatro de estas divisiones y está dividido en cinco partes, apreciando por lo tanto hasta décimas de la unidad (309).

547 **Usos, verificaciones y correcciones**.—Se emplea como el grafómetro de dos anteojos para la medida de los ángulos azimutales (491) Para medir los ángulos de elevacion es preferible colocar el anteojo superior de modo que el ocular se halle hácia la parte de la charnela x, con lo que el objetivo caerá hácia el arco zenital, y en una posicion inversa para los ángulos de depresion. Uno cualquiera de estos ángulos está dado á la vez por su valor en grados obtenido por el nonius del arco zenital, y por la pendiente observada en la escala. Para el arco de 2° 28′, por ejemplo, se observará que el nonius de la escala señala 4,3; la pendiente será entonces $\frac{4,3}{100} = 0,043$, que es la tangente trigonométrica de dicho arco. La pendiente será por lo tanto el cociente que resulta de dividir por el número constante 100 la altura observada en la escala.

548. *Verificaciones y correcciones* —1.ª *Correccion del retículo.*—Se emplea el movimiento del anteojo dentro de sus collares para hacer que el cruzamiento de las cerdas se halle en el eje óptico del anteojo (240).

549. 2.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Se sigue la marcha indicada (402) corrigiendo la posicion del nivel por su tornillo de correccion particular y los de la plataforma.

550 3.ª *Coincidencia de los ceros del nonius de la escala y del arco zenital, con los de sus graduaciones correspondientes* —Se afloja el tornillo a'' y se bajan los nonius hasta que sus ceros respectivos se hallen próximamente en coincidencia con los correspondientes en la escala y en el arco zenital, haciendo despues la exacta coincidencia con el c'', aflojando antes el tornillo t si fuese necesario; despues se mueve este mismo tornillo con auxilio de una palanca de correccion, hasta que su extremo se halle en contacto con la regla inferior del bastidor. De esta manera, cuando se quiera en lo sucesivo que el instrumento marque la pendiente *cero*, basta mover la alidada verticalmente hasta que se verifique de nuevo el contacto que acabamos de indicar.

551 4.ª *Horizontalidad del eje óptico del anteojo* —Se horizonta el eje óptico como en la brújula de limbo zenital (406), empleando para la correccion el tornillo v.

552. 5.ª *Verticalidad del plano descrito por el eje óptico.*—Se obtiene por medio de la observacion de una plomada (264), y se corrige en caso necesario por los tornillos z.

553. 6.ª *Horizontalidad perfecta de una de las cerdas del retículo.*—Se hace girar al anteojo alrededor del eje de rotacion del instrumento, hasta que el cruzamiento de las cerdas del retículo cubra un punto bien determinado del horizonte. Haciéndole entonces girar de nuevo alrededor del mismo eje, se observa si los demás puntos de la cerda van cubriendo sucesivamente al mismo punto, durante todo el tiempo que permanece en el campo del anteojo: si así se verifica, la cerda estará en el plano horizontal descrito por el eje óptico.

En efecto, sea ab (fig. 355; lám. 23) la posicion de una de las cerdas, y c el punto cubierto por el cruzamiento de las mismas: siendo horizontal el eje óptico, dicho cruzamiento irá cubriendo sucesivamente los puntos c', c'' de la horizontal del punto c, cubierta á su vez por la cerda.

Pero si esta tiene la posicion inclinada df el cruzamiento irá pasando tambien como antes por c' y c''; pero la cerda ocupará las posiciones paralelas, $d'f'$, $d''f''$, dejando descubierto el punto c.

Basta para la correccion hacer girar al anteojo alrededor de su eje dentro de los collares, hasta que la cerda ocupe la posicion ab, en que cubre constantemente al punto c; y para asegurarse en lo sucesivo de que vuelve á colocarse dicha cerda en la posicion horizontal, se mueve un tornillo que atraviesa el cilindro o (fig. 354; lám. 22) hasta que su extremo se halle en contacto con un tope fijo al tubo del anteojo. Cuando en el uso de este instrumento quiera darse á la indicada cerda la posicion horizontal, no habrá más que mover el anteojo dentro de los collares hasta que tenga lugar el contacto del tope y el tornillo.

554. **Teodolito de Combes.**—Este instrumento tiene un solo nivel de bastante longitud, situado sobre una regla metálica, y susceptible de variar de inclinacion con respecto á ella, por el tornillo v (fig. 356; lámina 22) y una charnela fija á la pieza en que se apoya; esta regla termina por uno de sus extremos en otra pieza á la cual está fijo el eje e del limbo zenital (l', l'): la inclinacion de la regla y el limbo es variable por el tornillo t, que les hace girar alrededor de una charnela dispuesta en otra regla inferior y paralela á la primera.

El limbo zenital es susceptible de un movimiento alrededor del eje e por el tornillo de correccion (z,z') cuando se aflojan el tornillo (r,r'), y otro inferior é igualmente dispuesto que él, y que no se ve en la figura. El anteojo, unido á la regla de los nonius de la graduacion zenital, se fija ó se pone en movimiento por el sistema de los tornillos a'',c''.

La pieza de los nonius correspondientes al limbo azimutal está invariablemente unida á un ensanche de la regla inferior indicada, y puede girar con toda la parte descrita por el sistema de tornillos a' y c' alrededor de un eje que pasa por el centro del limbo zenital.

Este limbo se mueve con la columna h alrededor de un cilindro fijo invariablemente á la plataforma, ó bien se fija á ella por los tornillos a y c.

555. **Usos, verificaciones y correcciones.**—Se emplea este teodolito como el de Richer (539) para la medida de los ángulos azimutales y los

de elevacion y depresion. Las verificaciones y correcciones á que está sujeto son las siguientes:

556. 1.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Se ejecuta como la de la brújula de limbo zenital (402), por medio de los tornillos de la plataforma y el *v* de correccion particular del nivel.

557. 2.ª *Perpendicularidad de la visual respecto al eje horizontal del limbo, y correccion de la cerda horizontal del retículo.*—Se dirige la visual á un punto lejano y bien determinado: se dá una semi-revolucion al anteojo alrededor del eje *e*, observando el limbo zenital, y en esta disposicion se concluye la verificacion y se corrige la perpendicularidad de la visual al eje *e* (512) por el tornillo que mueve la cerda vertical del retículo. Colocando entonces el cruzamiento en la vertical del punto observado, se vé si coincide exactamente con él, en cuyo caso la cerda horizontal estará corregida. De lo contrario, se le hace recorrer la mitad de la distancia que aparece mediar entre estos puntos, por el tornillo del retículo que mueve la cerda horizontal.

558. 3.ª *Horizontalidad de la visual cuando los ceros coinciden.*—Se verifica por cualquiera de los procedimientos explicados (406 y 408) para la brújula de limbo zenital, y se hace la correccion por el tornillo *(z, z')*.

559. 4.ª *Verticalidad del plano descrito por el eje óptico.*—Se obtiene observando una plomada (264), y corrigiendo la posicion del limbo zenital por el tornillo *t*. Debe advertirse que despues será preciso horizontar de nuevo el nivel por su tornillo *v*.

560. Las brújulas de limbo zenital pueden corregirse como el teodolito de Combes, cuando se quiere obtener mayor precision de la que se exige en las operaciones más comunes en que generalmente se emplean.

561. **Teodolito-brújula.**—Este instrumento, construido por Grasselli y Zambra, y representado en proyeccion horizontal en la fig. 357 (lám. 23), se compone de tres partes principales: la primera es el limbo *l*, que hace las veces de limbo zenital, con su alidada de anteojo igualmente dispuesta que en la brújula (396), siendo *r* el tornillo de correccion del limbo y *a'*, *c'* los de movimiento del mismo: el de correccion particular del nivel se encuentra á la parte inferior de éste, y está oculto en la figura: un contrapeso *p* equilibra la alidada de anteojo. La parte descrita del instrumento puede separarse de la caja de la brújula, aflojando los tornillos que oprimen á las piezas *m*.

La caja de la brújula se une á rosca á la columna en que termina la plataforma del instrumento: un anteojo de prueba gira con su collar alrededor de dicha columna.

Separando la caja de la plataforma, se puede fijar á esta última la parte superior del instrumento: estas dos partes así unidas constituyen el teodolito de arco zenital representado en la fig. 358 (lám. 23).

562. *Usos de este instrumento.*—Se emplea á voluntad como la brújula de limbo zenital (399) ó como el grafómetro de círculo entero (491) para

señalado por este segundo nonius será $90^\circ + e$. Si señalase $89^\circ 53'$, el error sería de $7'$ por defecto, y el valor señalado sería de $90^\circ - e$. Del mismo modo el tercer nonius señalaría un arco de $180^\circ \pm e'$, y el del cuarto nonius, $270^\circ \pm e''$.

Suponiendo todos los errores por exceso, hagamos recorrer al cero del primer nonius un arco a, y observemos las graduaciones m, m', m'' marcadas respectivamente por los ceros de los otros tres.

El arco recorrido estará representado para cada uno de los respectivos nonius por las expresiones

$$\begin{aligned} &a\,;\\ &m - (90^\circ + e)\,;\\ &m' - (180^\circ + e')\,;\\ &m'' - (270^\circ + e'')\,: \end{aligned}$$

y el ángulo verdadero x por la cuarta parte de la suma de estas cantidades; será, por lo tanto,

$$x = \frac{a + m + m' + m'' - (90^\circ + e + 180^\circ + e' + 270^\circ + e'')}{4};$$

$$x = \frac{a + m + m' + m'' - 540^\circ - (e + e' + e'')}{4}$$

La cantidad $(e + e' + e'')$ se obtiene desde luego en la primera posicion dada á los nonius, y es constante para todos los ángulos que se observen. Una vez hallado este valor, al observar un ángulo cualquiera no habrá más que sustituir en la fórmula las lecturas a, m, m' m'', dadas por los nonius.

Si alguno de los errores e, e', e'' fuese por defecto, no habría más que considerarle como negativo al calcular el valor $(e+e'+e'')$.

586. *Repeticion de los ángulos*.—Dispuesto el círculo repetidor como hemos indicado (584) al haber obtenido el valor del ángulo simple, puede hacerse la repeticion de los ángulos por el método expuesto (295), empleando los tornillos p, r (fig. 364; lám. 24) para los movimientos del limbo, y los a y c para los del anteojo superior. El anteojo inferior se usa como un anteojo de prueba para cada vez que se mide el ángulo, como ya hemos dicho (493).

El segundo método de repeticion (296) es el que generalmente se sigue, empleando los tornillos a, c, a', c', p y r.

Es conveniente recordar que para las operaciones de precision se necesita hacer la correccion de excentricidad de que nos hemos ocupado (297); y como generalmente es excéntrico tan sólo el anteojo inferior, la fórmula que se aplica es la [6] inserta en el párrafo 299.

587. **Medida y repeticion de los ángulos zenitales.**—Se sigue un procedimiento análogo al que hemos dado á conocer (575) para el teodolito excéntrico de Gambey: dispuesto el limbo verticalmente (582), se establece la coincidencia del cero de uno de los nonius con el del limbo, y aflojando el tornillo *v* de presion del limbo azimutal, se hace girar al instrumento alrededor del eje vertical hasta que el limbo y el punto de observacion se hallen próximamente en un mismo plano vertical; despues apretando el tornillo *v* y aflojando el tornillo *p* del tambor, se mueve el limbo hasta que dicho punto se encuentre en el campo del anteojo superior, y próximamente cubierto por el cruzamiento de las cerdas del retículo; acabando de obtener exactamente esta circunstancia por los tornillos de coincidencia *x* y *r*. Entonces se mueve el anteojo inferior alrededor del eje del limbo hasta que su nivel se halle próximamente horizontal, y apretando el tornillo de presion que ha permitido este movimiento, se le acaba de horizontar exactamente por el tornillo de coincidencia. Es conveniente observar, si en este último movimiento ha variado la posicion dada al limbo y al anteojo, viendo si el punto de observacion queda aún cubierto por el cruzamiento de las cerdas; y en caso contrario se emplean los tres tornillos de coincidencia á que acabamos de referirnos para hacer que el eje del anteojo superior y el nivel del inferior, ocupen exactamente las posiciones indicadas.

Aflojando el tornillo de presion *v* del círculo azimutal, se da una semirevolucion al instrumento alrededor del eje vertical hasta que el limbo se encuentre tambien en un mismo plano vertical con el punto de observacion, se afloja el tornillo de presion *a* del anteojo superior, y se mueve éste hasta que el punto de observacion se halle en el campo del anteojo. Entonces es preciso que el cruzamiento de las cerdas del anteojo superior cubra exactamente al punto de observacion, y que el nivel del inferior esté perfectamente horizontal; todo lo cual se consigue por los movimientos de los tornillos de coincidencia *x* del círculo azimutal, *c* del anteojo superior y *r* del tambor. En la segunda posicion del limbo, se emplean los tornillos del tambor para horizontar el nivel del anteojo inferior, á fin de no variar la posicion del eje del nivel respecto al plano del limbo: de esta manera cuando se horizonta el nivel en la segunda posicion, la vertical á que se refiere el ángulo zenital está determinada por el mismo diámetro del limbo que en la primera.

El arco recorrido por el cero del nonius en las operaciones indicadas es doble, como ya sabemos, del ángulo zenital. Llevando el limbo á su posicion primera, se repite la misma operacion, como cuando los ceros se hallaban en coincidencia, y teniendo presente que el nivel se horizonta siempre por el tornillo del tambor, se obtendrá el cuádruplo, y los múltiplos pares del arco zenital.

El sentido de la graduacion indicará como en el teodolito de Gambey, si se debe disponer el limbo á la derecha ó á la izquierda del observador al dar principio á la operacion.

588. Los ángulos zenitales pueden obtenerse como con el teodolito de Gambey (575), fijando la posicion del limbo por el empleo de una pieza auxiliar, que se fija á la horquilla por medio de tornillos de presion y coincidencia, los cuales permiten cierto movimiento á esta pieza, destinado á reemplazar al que puede darse al limbo por los tornillos q, z del sector. La misma pieza está acodada para fijar el limbo por su parte inferior, y termina en otro sistema de tornillos de presion y coincidencia que reemplaza á los p y r del tambor para el movimiento del limbo. Un nivel grande se puede fijar á los brazos ó montantes de la horquilla, y está provisto de su tornillo de correccion particular.

589. *Aplicacion de la medida de los ángulos en un plano vertical á la determinacion del valor que corresponde á las divisiones del nivel del aire.*— Dispuestos verticalmente el eje de rotacion del instrumento (581) y el limbo (582), se pone en coincidencia el cero del limbo con el de su nonius, se mueve el instrumento hasta que el limbo y el nivel del anteojo inferior se hallen en una direccion paralela á la recta determinada por uno de los tornillos de la plataforma y el punto medio de la distancia entre los otros dos: se mueve despues el limbo hasta que el cruzamiento de las cerdas del anteojo superior cubra exactamente á un punto bien determinado. Se horizonta despues con exactitud el nivel del anteojo inferior, y se mueve el primero de los indicados tornillos de la plataforma, hasta que la burbuja haya recorrido un número exacto de divisiones, cuyo valor se ha determinado de antemano: aflojando el tornillo de presion del anteojo superior, se le dirigirá de nuevo al mismo punto de observacion: el arco recorrido por el cero del nonius será la medida de la inclinacion dada al eje del nivel. En este estado puede repetirse el ángulo para obtenerle con mayor exactitud, conservando la coincidencia del cero del nonius con la graduacion del ángulo medido, dirigiendo la visual por el movimiento del limbo al punto de observacion, y repitiendo la operacion que acabamos de indicar.

Dividiendo el valor de las divisiones del nivel por el ángulo medido, se obtendrá el arco recorrido para la inclinacion de 1''. Si suponemos que cada division del nivel es un milímetro, que hemos hecho recorrer al nivel 12 divisiones, y que el ángulo obtenido es de 40'', el arco recorrido para la inclinacion de 1'' será

$$\frac{12^{\text{mm}}}{40} = 0^{\text{mm}},3,$$

que es el valor que hemos supuesto en el ejemplo que propusimos (75).

589 *a*. **Método de la reiteracion de los ángulos.**—Este método, que fué empleado por primera vez por el ilustre astrónomo *M. Bessel*, es parecido al de la *repeticion*, y la diferencia esencial entre uno y otro consiste, en que cuando se usa la repeticion, se supone tácitamente que la

segunda medicion de un espacio angular, se efectúa partiendo del punto de division en que termina el arco que resultó para la primera, mientras que en la *reiteracion*, las mediciones sucesivas se hacen partiendo de distintos puntos.

En efecto, en el método de la reiteracion, medido un ángulo y apuntada su graduacion, se parte para medirle otra vez, de otra graduacion distinta; es decir, que habiendo empezado en la primera desde el *cero* del limbo azimutal del instrumento, se empezará la segunda desde los 5°, la tercera desde los 10°, y así sucesivamente.

Tiene por objeto la *reiteracion* el atenuar áun más que la *repeticion* los errores que se cometen en la medida de los ángulos y que impiden su exactitud. En efecto, fácil es ver la série de errores que afectan dicha medida, pues aparte de los que provienen de las alteraciones por la temperatura de los metales de que están construidos los instrumentos, y que no son uniformes, existen las imperfecciones en su construccion, y las que se originan áun en los más exactos al cabo de algun tiempo por el uso, que contribuye mucho á su destruccion, esto sin contar, con que la impericia y falta de práctica del operador, den lugar á errores de lectura, indeterminacion de las visuales y otras causas, cada una de las cuales por sí sola, ó la reunion de varias ó todas ellas, den lugar á todo género de irregularidades en la medida.

En la *repeticion*, es falsa la hipótesis de que los distintos arcos se suceden sin alterar la ley de continuidad, y que se añaden unos á otros rigorosamente, pues las imperfecciones en la graduacion y los movimientos irregulares é inevitables de los tornillos dentro de sus tuercas, así como los rozamientos de las varias piezas entre sí que las desgastan y varían su forma, no producen en la práctica los resultados exactos que se conciben en la *teoría*. En la *reiteracion* se atenúan los errores de la falta de continuidad de los arcos, no considerando ésta como precisa, y tomando, por el contrario, todos los arcos discontínuos; y los que provienen de la imperfeccion de las graduaciones, por empezar siempre las mediciones partiendo de distintos puntos.

La imperfeccion tambien de los medios que se emplean para asegurar y fijar las diferentes piezas de los aparatos, las considera Herchel como causa de muchos errores. En efecto, un solo tornillo de presion se considera insuficiente, y en el de coincidencia, el juego de la esferilla, así como las alteraciones que pueden padecer los filetes de la rosca, hace que no puedan fijarse bien las visuales dirigidas á los objetos. Además, si los tornillos tienen que sostener pesos, como sucede en los limbos destinados á medir ángulos verticales, entonces se aumentan mucho más los errores. En vista de lo dicho, propuso M. Biott, y despues adoptó el coronel Bonne, en la medicion del arco de paralelo de Brest á París, el uso de instrumentos con dobles tornillos de presion y de coincidencia. Sin embargo de todo, las ventajas que dichos instrumentos presentan, se hallan contrarrestadas por la dificultad de su manejo, teniendo que dar á los dos tornillos de coincidencia movimientos simultáneos, de igual velocidad y en el mismo sentido.

Otra causa de error estriba en la observacion hecha de que la medida de los ángulos se obtiene casi siempre, menor de lo que es en realidad, lo que proviene del rozamiento de la plancha de los nonius sobre el limbo, que siempre gira en sentido de la graduacion de éste y le arrastra consigo, debiendo permanecer siempre inmóvil, lo que ha sido comprobado por M. Bessel, que empotrando el limbo, obtenía ángulos mayores que los obtenidos sin esta precaucion, habiéndose ideado para compensar en parte este error, debido al movimiento del limbo, tomar los ángulos, una vez en el sentido de la graduacion y otra en sentido contrario.

Otro error de no menor importancia es el producido por la *torsion del eje*. En efecto, construidos limbos y nonius, completamente independientes y sin que presentasen el más ligero rozamiento, se han notado áun errores que tambien son por defecto, y despues de estudiada detenidamente la cuestion, se ha venido en conocimiento de que el eje sufre una ligera torsion al girar en sus apoyos. Este giro, siempre en el mismo sentido, aumenta el error y la torsion, y puede llegar á ser considerable.

Los aparatos destinados á destruir la torsion del eje, cuando se opera por *reiteracion*, tienen generalmente dos tornillos de presion para sujetar los limbos é impedir que sean arrastrados por los nonius.

El procedimiento que se sigue para medir un ángulo corrigiendo la torsion del eje es el siguiente. Supongamos, para mayor facilidad, que el instrumento tenga céntrico el anteojo *mn* (fig. 753; lám. 57), y que el *cero* del nonius de la alidada de anteojo se halle en el plano vertical del eje del mismo y que nos propongamos medir el ángulo AOB. Se colocará el instrumento de estacion (399 y 519), y poniendo en contacto el cero del nonius con el del limbo azimutal, se apretará el tornillo de presion de la alidada, para que, unidos el limbo azimutal y la plancha de los nonius, formen un solo cuerpo; se moverá todo el sistema alrededor del eje del instrumento para dirigir la visual al objeto A de la izquierda y se aprietan los tornillos de presion que sujetan al limbo; se afloja despues el tornillo de presion de la alidada para que sólo esta tenga movimiento y se dirige la visual al punto B de la derecha, y el arco ab recorrido por el nonius será la medida del ángulo r ó AOB que se trataba de hallar.

Para deshacer la torsion, se dirige el anteojo á un objeto B′ próximo á B y situado á la derecha de éste, y se apunta en un registro la lectura ab', de donde

$$ab = ab' - bb' = m \qquad [1]$$

Se fija la alidada en el punto b', y aflojando los tornillos de presion del limbo, se mueve todo el sistema y se dirige de nuevo la alidada al objeto B; el punto b' ocupará la posicion que tenia antes el b, y el *cero* del limbo tomará la posicion a', siendo el arco $a'b$ el mismo que el ab'; se aprietan ahora los tornillos de presion del limbo y se afloja el de la alidada que está dirigida al punto B, para dirigir la visual al punto A y apuntar en el registro la lectura $a'a$, de donde

$$ab = a'b - a'a = m' \qquad [2].$$

Se tienen de este modo dos valores m y m' de un mismo ángulo tomados en sentido contrario y desecha en el segundo la torsion cometida en el primero, y una vez el anteojo en la posicion OA, se le vuelve al cero, haciéndole girar el ángulo aOa', con lo que se consigue acabar de destruir la torsion que aún pudiera existir y dejar el instrumento en disposicion de empezar de nuevo otra medicion.

Sumando las ecuaciones [1] y [2] resultará

$$2ab = m + m'$$

de donde
$$ab = \frac{m + m'}{2} \qquad [3].$$

Luego la semisuma ó promedio de los dos valores hallados es el valor del ángulo AOB ó γ que nos proponíamos hallar.

Las ventajas de la *repeticion* (294) se comprenden teóricamente, pero dejan en la práctica mucho que desear, y en Inglaterra se han desechado ya por imperfectos los instrumentos repetidores. Siempre que sea necesario obtener los ángulos azimutales con mucha precision, deben reiterarse las mediciones. Para esto, despues de haber hecho las operaciones que conducen á la medida de un ángulo, se vuelven á ejecutar en el mismo órden, partiendo de distintos puntos de la graduacion del limbo como de los 5°, 10°, 15°, etc., y así sucesivamente, segun ya hemos dicho.

Si se hacen dos mediciones, los dos valores que así se obtienen para el ángulo azimutal de que se trata, habrán sido medidos sobre dos arcos distintos, y la mitad de su suma ó su promedio dará el valor pedido con mayor precision que cada una de las mediciones efectuadas, y de igual modo pueden reiterarse las observaciones mayor número de veces, hallando despues el cociente que resulta de dividir la suma de todos los valores hallados por el número de mediciones.

La construccion de los teodolitos que se usan para aplicar la repeticion y que se llaman *repetidores*, es más complicada que la de los *reiteradores*, porque si bien la placa de los nonius del círculo azimutal de los primeros se puede mover con la de este círculo y tambien aisladamente, la placa análoga de los teodolitos reiteradores, se mueve siempre para hacer las observaciones con independencia del círculo á que corresponde.

El teodolito de Troughton (517 y 528) es repetidor y concéntrico, y el teodolito de Brunner que vamos á describir, es reiterador y excéntrico.

589 *b*. **Teodolito de Brunner**.—Este instrumento, que sirve para la reiteracion de los ángulos, está construido, para llenar su objeto, con arreglo á este sistema, y es el que se usa en los importantes trabajos topográficos que lleva á cabo el Instituto Geográfico y Estadístico.

Se compone de un limbo azimutal *aa* (fig. 754; lám. 57), en cuyo centro y en su parte superior lleva un cilindro de acero que se eleva perpendicularmente al plano de dicho limbo, y que es el eje principal de rotacion del instrumento, y en su parte inferior lleva una pieza *v* que termina en otra *v'*, que tiene unos rebordes *r*, *r*, y en cuyo centro y por su parte inferior hay una cavidad hueca cilíndrica, en la que encaja exactamente un eje de acero que se eleva perpendicularmente al plano de la pieza *v''* que está invariablemente unida á la plataforma *pp* de tres tornillos *t*, *t*, *t* (337).

De esta manera, el limbo azimutal *aa* puede girar alrededor del eje que lleva la pieza *v''*, aflojando los dos tornillos de presion *t'*, *t'*, y fijarle invariablemente á la plataforma, apretando dichos tornillos, y de este modo, pudiendo hacerse variar la posicion del *cero*, se puede reiterar varias veces la medida de un ángulo á partir de distintos puntos, para valerse de distintos arcos.

En el eje de acero que hemos dicho se eleva perpendicularmente sobre el plano superior del limbo azimutal *aa*, encaja exactamente un cilindro hueco de metal *c*, terminado en su parte superior por un boton acordonado *b*, que puede girar suavemente alrededor de dicho eje y que lleva unidos, en su parte inferior, el disco ó placa de los dos nonius I, II, diametralmente opuestos, correspondientes á la graduacion del limbo azimutal *aa*, y en la superior una pieza ó barra *h* que sostiene dos soportes de igual altura *s*, *s'*, fijo el primero y susceptible el segundo de un pequeño movimiento por medio del tornillo *t'''*. Estos soportes abrazan otro cilindro de metal hueco *c'*, que lleva en uno de sus extremos, invariablemente unido, el limbo zenital *zz*. Dentro de este cilindro hueco encaja exactamente otro eje de acero que puede girar dentro de él con el anteojo *oo'* que lleva unido en uno de sus extremos, así como la placa de los nonius I, II, correspondientes á la graduacion del limbo zenital y diametralmente opuestos; dicho eje es perpendicular al plano del limbo zenital, pasa por su centro y termina por el otro extremo en el boton acordonado *b'*. El limbo zenital puede tambien girar con el cilindro hueco á que está unido, dentro de los collares en que terminan los soportes. Si esta circunstancia no se verifica, y el cilindro hueco *c'* no puede tener movimiento entre los collares, entonces no puede reiterarse, valiéndose de distintos arcos, la medida de los ángulos zenitales. El tambor *x* que lleva la pieza *h* en uno de sus extremos, sirve de contrapeso á las piezas que hemos visto se hallan en el extremo opuesto.

Los movimientos rápido y lento, tanto de la placa de los nonius, perteneciente al limbo azimutal, como de la correspondiente al limbo zenital, se verifican por sus respectivos tornillos de presion t''', t''', y de coincidencia t^{IV}, t^{IV}; advirtiendo que la accion de estos últimos se combina con la de un resorte de acero en forma de espiral, como se vé en la figura.

Las dimensiones de los limbos azimutal y zenital son iguales, siendo su diámetro de $0^m,13$, estando divididos de 10 en 10′, en sentido de izquierda á derecha, y trazadas las divisiones sobre plata, haciéndose las lecturas por medio de los nonius I, II, en ambos limbos, y comprendiendo cada nonius 60 divisiones, equivalentes á 59 de los menores de los limbos. La apreciacion directa será, por lo tanto, de 10″ (309), pues tenemos

$$x = \frac{d}{n} = \frac{10'}{60} = \frac{600''}{60} = 10''.$$

Para que se distingan bien las coincidencias de las divisiones de los limbos con las de los nonius, se hace uso de las lentes l, l, que amplifican sus imágenes, y valiéndose de los reflectores r, r, que envían la luz solar sobre sus respectivos nonius.

En la parte posterior del limbo zenital y unido á él, se halla un nivel n provisto de su tornillo de correccion, que sirve para colocar verticalmente el eje principal de rotacion del instrumento ó dar la posicion horizontal á la placa del limbo azimutal.

El anteojo consta de un objetivo acromático de 33^{mm} de diámetro y 324^{mm} de distancia focal, y de un ocular astronómico que produce una ampliacion lineal 20 veces mayor (231 al 243). El retículo está compuesto de cuatro hilos, uno en direccion de un diámetro vertical y los otros tres horizontales y equidistantes entre sí, siendo el que está en medio un diámetro horizontal.

El trípode de este teodolito es de los explicados en los párrafos (341, 342 y 343).

589 *c*. **Verificaciones y correcciones.**—Despues de la descripcion de este instrumento, en la cual se vé que reune los medios de poder hacer con él todas las verificaciones y correcciones esenciales que se necesitan en todos los teodolitos, explicadas ya estas en muchos de ellos con todo detenimiento y siendo para el teodolito de Brunner próximamente las mismas, las indicaremos ligeramente al hablar ahora de sus usos.

589 *d*. **Usos del teodolito de Brunner.**—*Medicion de los ángulos azimutales.*—Sea el ángulo ACB (fig. 755; lám. 57) el que nos proponemos medir. Antes de empezar la observacion se coloca el anteojo á la izquierda del eje central del teodolito y se señalan con los números romanos I, II, los nonius del círculo azimutal y los del zenital, si no estuviesen ya marcados estos números en el instrumento, poniendo el número I al nonius que en el círculo azimutal está debajo del ocular del anteojo y el II al opuesto, y en el círculo zenital se señala con el número I el que está en la parte superior del anteojo y con el número II el que se halla en la parte inferior del mismo. Hecho esto, se dispone el ocular del anteojo de

manera que se vea con él con claridad los hilos del rectículo, y las lentes de ambos círculos de suerte que puedan hacerse con precision las lecturas de las graduaciones. Se coloca el centro del trípode en la vertical del punto C que señala el vértice de modo que se halle la plataforma próximamente horizontal, y se dá despues al eje central de rotacion del teodolito la posicion vertical (525), valiéndose del nivel *n* (fig. 754; lám. 57). Se determina ahora la inclinacion del eje de rotacion del círculo vertical moviendo verticalmente el anteojo hasta hallar dos puntos que coincidan sucesivamente con el cruzamiento de los hilos del retículo, y si despues de hacer girar al instrumento alrededor del eje en sentido azimutal hasta que quede á la parte contraria el círculo vertical, se dirige la visual á uno de los objetos y la imágen del otro no coincide con el cruzamiento de los hilos del retículo, al dar al anteojo el movimiento vertical, entonces se toma la mitad de la distancia que haya entre el cruzamiento de los hilos ó sea la *cruz filar*, y la imágen de dicho punto, puesto que la expresada mitad es la inclinacion del eje. Esta inclinacion se corrige en el instrumento por medio del tornillo t'' del soporte s' (fig. 754; lámina 57), ó bien valiéndose de dos tornillos colocados debajo del eje del círculo vertical, y esta operacion se repite las veces que sea preciso con otros puntos, hasta que el expresado eje del círculo vertical tenga la posicion horizontal. Puede hacerse tambien esta correccion moviendo el anteojo en sentido vertical y haciendo que coincida en la mayor extension posible la cruz filar de los hilos del retículo ó cruzamiento de los hilos con el cordon de una plomada que esté en reposo (526). Por último se pone vertical uno de los hilos del retículo (264).

Las direcciones azimutales se observan dirigiendo dos visuales á cada punto; la primera visual ó puntería á cada uno de los puntos A y B (fig. 755; lám. 57) se dirige con el anteojo á la izquierda del eje central del teodolito y la segunda con el anteojo á la derecha y se dá principio á la operacion por el punto A que está á la izquierda, dirigiendo la visual AA' y apuntando las dos lecturas que se hacen con los dos nonius correspondientes al círculo azimutal; despues se dirige la visual ó puntería BB' al segundo punto B, apuntando tambien las dos lecturas. Estas dos primeras visuales á los puntos A y B nos dan el ángulo C' diferente del ACB que se quiere medir. Haciendo despues girar al teodolito 180° alrededor del eje vertical y de haber invertido el anteojo ó haberle hecho girar alrededor del eje horizontal, se dirigen de nuevo las visuales á los puntos A y B empezando por el B que serán las BB'' y AA'', y estas dos segundas visuales á los puntos B y A, nos darán el ángulo C'' diferente tambien del propuesto ACB.

Cada una de las dos lecturas, como hemos dicho, con los dos nonius diametralmente opuestos en cada visual ó puntería, se hacen leyendo siempre primero el número entero de grados con uno de los nonius, que generalmente es el I, y apreciando despues las menores divisiones y las fracciones de la menor division del limbo con los dos nonius I y II; se busca despues el promedio ó la mitad de la suma de estas dos últimas lecturas, y el resultado se añade al número entero de grados hallado con el nonius I, lo que se practica así, porque de este modo se disminuyen los errores de inexactitud en las lecturas parciales.

Ahora bien, para hallar el ángulo C por medio de los ángulos C′ y C″, observaremos que los triángulos AC′D y CDB, supuesto que tienen iguales los ángulos en *d* por opuestos por el vértice, y siendo en cada triángulo igual la suma de sus ángulos, que vale dos rectos, los otros dos ángulos juntos C′ y DAC′ del primer triángulo, valdrán tanto como los otros dos C y DBC del segundo triángulo; es decir, que se tendrá

$$C' + DAC' = C + DBC$$

Del mismo modo resultará en los triángulos CAE y EBC″

$$C'' + EBC'' = C + CAE,$$

y sumando estas dos ecuaciones ordenadamente y despejando el ángulo C, ó sea el ACB, tendremos

$$C = \frac{C' + C''}{2} \qquad [1];$$

lo que nos dice, que para hallar el valor del ángulo pedido ACB, se toma el promedio de los dos que se miden con el anteojo en posiciones puestas.

Para hallar los valores de C′ y C″, llamaremos l y l' á las lecturas definitivas de las punterías á los objetos A y B con el anteojo á la izquierda y hallándose el *cero* de la graduacion del limbo á un mismo lado de las divisiones que marcan las lecturas l y l', y se tendrá

$$C' = l' - l \qquad [2],$$

y si el *cero* se halla entre las expresadas divisiones será

$$C' = 360^\circ + l' - l \qquad [3].$$

Sean tambien l'' y l''' las lecturas definitivas de las punterías á los objetos B y A con el anteojo á la derecha y el *cero* de la graduacion del limbo á un mismo lado tambien de las divisiones que marcan las lecturas l'' y l''' ó entre estas divisiones, tendremos del mismo modo estas otras dos fórmulas:

$$C'' = l''' - l'' \qquad [4]$$
$$C'' = 360^\circ + l''' - l'' \qquad [5]$$

Ahora se emplearán de estas fórmulas las convenientes para hallar los valores de C' y C'' que han de sustituirse en la ecuacion [1], para tener el valor de C ó del ángulo ACB, el cual tiene siempre por expresion una de estas igualdades, segun los casos

$$C = \frac{l' + l'''}{2} - \frac{l + l''}{2} \qquad [6]$$

ó

$$C = 180^\circ + \frac{l + l'''}{2} - \frac{l + l''}{2} \qquad [7]$$

Si á partir del primer punto en una observacion, hubiese muchos puntos situados á la derecha del mismo, se continuará del mismo modo dirigiendo las punterías á todos los objetos que se vayan encontrando sucesivamente á la derecha del observador, hasta llegar al que preceda al primero de que partió la observacion, y se hallará así concluida la primera vuelta de horizonte La segunda vuelta se empieza en seguida, despues de haber invertido el anteojo, dirigiendo la visual al último punto que se observó en la primera vuelta y se continúa en sentido inverso, es decir, se van ahora observando sucesivamente todos los puntos que se vayan encontrando á la izquierda y cuando se estaciona fuera del vértice, se comprenden tambien en la vuelta de horizonte las visuales dirigidas á dicho vértice.

Los datos que se obtienen en las operaciones se escriben en un estado ó formulario, cuya forma varía, y puede tomarse como modelo el que emplea el Instituto Geográfico, y es el formulario núm. 7, comprendido en sus *Instrucciones para los trabajos topográficos.*

Medicion de los ángulos zenitales.—Habiendo ya explicado en varias ocasiones la medida y repeticion de los ángulos zenitales, la marcha es la misma con el teodolito de Brunner para la medida de las distancias zenitales; teniendo presente que el teodolito se pone en estacion con el anteojo á la izquierda del observador, que se dirige la visual al punto cuya distancia zenital se quiere hallar, y se hace la lectura de los grados en el limbo zenital con el nonius del mismo núm. 1, y las lecturas de los minutos y segundos con los dos nonius. Dando una semi-revolucion al teodolito alrededor de su eje vertical, el anteojo quedará á la derecha del observador, en una posicion simétrica á la anterior, con relacion al zénit de la vertical que pasa por el centro del instrumento y el nonius núm I, tomará igualmente una posicion simétrica de la anterior, resultando la posicion de la línea (0—180°) que debe ser horizontal antes del giro, invertida con respecto á su primera posicion. Para dirigir la segunda visual al mismo punto que la primera, y que el ocular venga de nuevo á parar al lado del observador, habrá que hacer recorrer al anteojo una distancia igual al doble de la distancia zenital, en cuyo caso la direccion la medida de los ángulos azimutales, y como la alidada de arco zenital (459) para la de los ángulos de elevacion y depresion.

563. **Verificaciones y correcciones.**—Las correcciones de la brújula (fig. 357; lám. 23) son las explicadas (401) para la de limbo zenital: pudiendo hacer la perpendicularidad del eje óptico á su eje de rotacion (374), aflojando el tornillo *z*, y oprimiéndole de nuevo despues de la correccion: y dando al limbo en caso necesario el movimiento indicado (406) por medio del tornillo *r*.

564. *Correcciones del teodolito.*—1.ª *Verticalidad del eje.*—Se obtiene esta verticalidad (402) por los tornillos *t* que unen el nivel al limbo y por los de la plataforma.

2.ª *Perpendicularidad del eje del anteojo á su eje de rotacion.*—Se hace la verificacion por el procedimiento explicado (374), y la correccion necesaria por el tornillo que mueve la cerda vertical.

3.ª *Horizontalidad del eje óptico cuando los ceros coinciden.*—Se emplea el tornillo que mueve la cerda horizontal y un anteojo de verificacion de la manera indicada (454).

565. **Teodolito de Gambey.**—Este teodolito tambien repetidor, tiene un limbo plano (*l*, *l'*) (fig. 359; lám. 23) dividido en tercios de grado (277) y constituido por la corona circular *l*: otra corona concéntrica *b* lleva cuatro nonius, que aprecian de 20 en 20″ (309.—Ej. 7.º), armados de los reflectores (*r*, *r'*). El eje de la corona *b* es un cilindro que gira dentro de la columna *d*; la cual es á su vez el eje de la corona *l*. Las coronas pueden girar independientemente la una de la otra, y tambien pueden hacerlo unidas, cuando se aprieta el tornillo de presion *a'*: moviendo entonces el tornillo *c'* puede darse un movimiento lento á la corona *b* y á toda la parte superior del instrumento, que vá unida á ella. La columna *d* puede fijarse al pié del mismo por el tornillo *a*, y tomar un movimiento lento por medio del *c*.

El anteojo superior gira en un plano vertical alrededor de un eje apoyado en una horquilla, la cual se eleva en el centro de la corona *b*. El eje de rotacion del anteojo lo es tambien del limbo zenital, al que está unido invariablemente. Para dar al eje la posicion horizontal, se emplea un tornillo de correccion, oculto en la figura, el cual eleva uno de los extremos superiores de la horquilla, para lo cual uno de los brazos de ésta está dividido en dos partes: la inferior es fija, y la superior es movible por el tornillo que acabamos de indicar, y que se pone en movimiento por medio de una palanquita de hierro.

La pieza de los nonius está dispuesta como la de la pantómetra de limbo zenital (507), y puede tener tambien alrededor de su eje el movimiento necesario para la correccion, por medio de los tornillos *z*, *t* y la tuerca móvil *s*. Este sistema de tornillos está unido á la parte fija del brazo de la horquilla, y en el otro brazo se halla dispuesto otro sistema enteramente igual. Un contrapeso (*p*, *p'*) situado al otro extremo del eje de rotacion del anteojo, sirve para equilibrar el peso del limbo zenital.

El anteojo con su eje puede sacarse de los cojinetes en que se apoya y colocarse en ellos invertido, para lo cual es preciso aflojar el tornillo *t*; la pieza *e* se dispone al otro lado de modo que su extremo inferior ocupe entre los tornillos del mismo la posicion que tiene ahora entre los *z* y *t*.

Un nivel de aire representado en la proyeccion horizontal, y oculto en la vertical, puede situarse sobre el eje de rotacion del anteojo y paralelamente á él, por medio de dos pequeñas horquillas fijas á los extremos y por la parte inferior de la regla que sostiene el tubo del nivel. Las horquillas son bastante largas para que el nivel no gire con el eje de rotacion del anteojo, impidiéndolo los brazos de la horquilla que sostiene á este último. Un tornillo *h* que se mueve por medio de la palanquita de hierro, sirve para la correccion particular del nivel.

El anteojo inferior gira alrededor de la columna *d*, y puede fijarse á ella por un tornillo de presion *x*.

Dos microscopios (*m*, *m'*) fijos á los extremos de una varilla angular, giran con ella alrededor del eje del instrumento, y sirven para la lectura de los ángulos azimutales; y otro microscopio (*n*, *n'*) para la de los ángulos de elevacion y depresion.

La perfeccion con que se halla construido el teodolito de Gambey, lo hace un instrumento muy recomendable para las operaciones topográficas de precision.

566. **Verificaciones y correcciones**.—1.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento*.—Se verifica y corrige como hemos indicado (402), sirviéndose para esto último del tornillo *h* de correccion particular del nivel y los de la plataforma.

567. 2.ª *Horizontalidad del eje de rotacion del anteojo*.—Se levanta el nivel, colocándole de nuevo invertido; y si la burbuja queda en la mitad del tubo, su eje y el de rotacion serán paralelos, y este por consiguiente horizontal (408); pero si no, se corregirá la desviacion por mitades, empleando el tornillo de correccion particular del nivel y el que hace subir ó bajar la parte móvil del brazo de la horquilla que sostiene el eje de rotacion. La razon de este procedimiento es la misma que hemos dado á conocer (510).

568. 3.ª *Que el eje óptico del anteojo superior sea perpendicular al eje horizontal de rotacion*.—Se verifica y corrige del mismo modo que en la pantómetra (511), empleando el anteojo superior.

569. 4.ª *Que los ceros de los nonius coincidan con los del limbo zenital cuando la visual es horizontal*.—Puede seguirse la marcha indicada (513) para la pantómetra de limbo zenital; pero tambien se puede hacer la verificacion y correccion de la manera siguiente: se establece la coincidencia de los ceros, se dirige la visual á un punto del horizonte, y se quita el nivel superior á fin de poder levantar el anteojo con las piezas unidas á él; para lo cual habrá que aflojar préviamente la tuerca móvil y el tornillo *t*: aflojando entonces el tornillo de presion *a''*, se da una semirevolucion á la pieza *e* alrededor del eje comun al limbo y al anteojo,

y se hace de nuevo la coincidencia de los ceros por los tornillos *a'' c''*. En esta disposicion se vuelve á colocar el eje en los cojinetes y la pieza *e* en la posicion que debe ocupar entre los tornillos *z* y *t*, con lo que quedará invertida la posicion del ocular y el objetivo en el anteojo. Se da entonces una semirevolucion al instrumento alrededor de su eje vertical hasta que el cruzamiento de las cerdas del anteojo esté dirigido al punto observado primeramente ó á uno de los que se hallen en la vertical que al mismo punto corresponde: en este último caso, se hará girar al anteojo alrededor de su eje horizontal hasta que la visual vaya á parar al punto medio de los determinados en la vertical del primeramente observado por las dos posiciones del anteojo, y se moverá la pieza *e* hasta lograr la coincidencia de los ceros por medio de los tornillos *z* y *t*, afirmando la posicion obtenida por medio de la tuerca móvil *s*.

Para corregir la posicion del sistema de tornillos del otro brazo de la horquilla, se invierte la posicion del eje haciendo que la pieza *e* se coloque entre ellos, y dando una semirevolucion al instrumento para dirigir la visual al punto determinado por la correccion hecha. Si la visual no vá á parar á él exactamente, se afloja la tuerca *s* y el tornillo *t*, y se pone en juego el *z* hasta que la visual cubra exactamente al punto, en cuyo caso se afirma de nuevo la pieza *e*, por el tornillo *t* y la tuerca móvil.

Este procedimiento está fundado en el mismo principio que el explicado (406), pudiendo tambien hacerse la correccion (408) empezando por dirigir la visual á un punto cualquiera.

En la pantómetra de limbo zenital puede hacerse del mismo modo la correccion de que acabamos de ocuparnos.

570. **Teodolito excéntrico de Gambey**.—El limbo azimutal *l* (figura 360; lám. 23) de este teodolito y la pieza de sus correspondientes nonius están dispuestas como en el teodolito céntrico del mismo autor (565) en coronas concéntricas, que giran en un mismo plano perpendicular por construccion al eje de rotacion de todo el instrumento. El sistema de los tornillos *a* y *c*, sirve para los movimientos del limbo y los *a'*, *c'*, para la corona interior que lleva los nonius. Un anteojo de prueba está fijo á la plataforma, y solo tiene un pequeño movimiento lateral por el tornillo de ajuste ó coincidencia *x*.

Con la corona de los nonius gira toda la parte superior del instrumento: la columna *d* termina por su parte superior en una horquilla *h*, en que se apoya uno de los extremos del eje *e* de rotacion del limbo zenital *l'*: el otro extremo de este eje descansa sobre un tornillo *t*, que tiene su tuerca en la regla *b*; por el movimiento de este tornillo se hace girar al eje *e* alrededor de la charnela que relaciona con la horquila *h* el extremo correspondiente del eje, haciendo así variable la inclinacion del eje y de la regla.

El limbo zenital *l'* es susceptible de los mismos movimientos alrededor del eje *e* que el limbo *l* alrededor de su eje, por el sistema de tornillos de presion *r* y de coincidencia *s*; sistema que une el limbo al eje *e* por medio de la pieza *k*. La que lleva los nonius está igualmente dispuesta que en el limbo azimutal, y se mueve alrededor del mismo eje, por los tornillos *a''* y *c''*, llevando consigo el anteojo superior. Tanto en este como en el de prueba, el retículo está centrado por construccion; pero puede moverse en su plano alrededor del mismo centro, por dos tornillos que tienen sus tuercas en unos prismas fijos á uno de los rebordes del tubo del anteojo, y cuyos extremos se ponen en contacto con los de un prisma metálico, situado en prolongacion del plano del retículo. Un contrapeso *p* fijo al extremo de la barra *b* equilibra el peso del limbo zenital y de las partes relacionadas con él.

El nivel *n*, provisto de un tornillo de correccion *z*, se coloca tambien sobre el eje *e* por medio de dos horquillas como en el teodolito céntrico (565), y se sujeta con otra horquilla *h'* que impide que el nivel se mueva lateralmente, pero no el que pueda levantarse para colocarle invertido.

Otro nivel *n'* está situado sobre el mismo eje *e*, perpendicularmente á su longitud, y puede corregirse por el tornillo *v*.

571. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Puede hacerse por cualquiera de los niveles, empleando el tornillo correspondiente de correccion particular y los de la plataforma (402).

572. 2.ª *Paralelismo del eje* e *con el del nivel* n.—Se horizonta dicho nivel por el tornillo *t*, se levanta como en la correccion indicada (567), y se hace desaparecer por mitades la desviacion por medio de los tornillos *t* y *z*.

El limbo zenital queda entonces en posicion vertical, porque es perpendicular al eje *e* por construccion.

573. 3.ª *Horizontalidad de la visual cuando coinciden los ceros de la graduacion zenital.*—Es la correccion indicada (406) para la brújula de limbo zenital, que se obtiene en este instrumento por el sistema de tornillos *r* y *s*.

574. 4.ª *Verticalidad de una de las cerdas del retículo.*—Se dirige la visual al cordon de una plomada, y se mueve el plano del retículo por sus tornillos de correccion, hasta que dicha cerda le cubra exactamente. La otra cerda, perpendicular por construccion á la primera, quedará horizontal.

575. **Usos del teodolito excéntrico.—Medida y repeticion de los ángulos zenitales.**—Los ángulos zenitales se miden con este instrumento como con el teodolito de Richer (539), y hechas todas las correcciones del instrumento, puede emplearse para obtener los ángulos de elevacion y depresion como con todos los instrumentos explicados de limbo zenital; aunque es preferible emplear el método que vamos á exponer para la medida y repeticion directa de los ángulos zenitales. Sea *a* (fig. 361; lám. 24) el punto que termina la recta *ca* cuyo ángulo con la vertical *zc* se trata de obtener. Haciendo la coincidencia de los ceros de la graduacion del limbo zenital por los tornillos *a''*, *c''*, (fig. 360; lám. 23),

llévese la visual del anteojo superior á cubrir exactamente á dicho punto *a*, empleando del modo que ya sabemos el sistema de tornillos *r* y *s*, con lo que el anteojo tomará la posicion *vm* (fig. 361; lám. 24): dando al instrumento una semirevolucion alrededor del eje vertical de rotacion, tomará la disposicion representada en la fig. 362 (lám. 24), y moviendo el anteojo hasta que se halle dirigido nuevamente al punto *a*, lo que se conseguirá por los sistemas de tornillos que mueven el anteojo en su plano de colimacion y los que mueven el instrumento alrededor del eje vertical, tomará la posicion *v'm'*, que forma con *vm* un ángulo *mcm'*, doble del *zca* que queríamos determinar. Empezando de nuevo la operacion como cuando estaban los ceros en coincidencia, se obtendrá el cuádruplo del ángulo zenital, y continuando, se tendrán los múltiplos pares del mismo ángulo.

Debemos observar, que para que el cero del nonius se mueva en el sentido de la graduacion del limbo, debe hallarse este á la izquierda del observador al empezar la operacion, cuando el limbo está graduado de izquierda á derecha; y á la derecha, cuando lo estuviese en sentido contrario.

576. **Teodolito de Porro.**—Este instrumento, representado en la fig. 363 (lám. 24), está dispuesto de modo que el limbo azimutal, que está en *ab*, es interior á otro que lleva el nonius, y ambos pueden girar independientemente el uno del otro alrededor del eje de rotacion de todo el instrumento, y con movimiento rápido ó lento á voluntad, por medio de tornillos de presion y coincidencia dispuestos como en los teodolitos que ya hemos descrito.

Participando del movimiento del limbo, ó independientemente de él, gira alrededor del mismo eje un tubo cilíndrico *c*, provisto de un ocular, un objetivo llamado *colimador* y una aguja imantada suspendida de un hilo sin torsion: el norte y la graduacion del aparato así constituido, que se llama *orientador magnético*, están señalados en un círculo de talco.

En un platillo superior al limbo exterior, y unido invariablemente á él, está un nivel esférico como el de la brújula del mismo autor (436); y otro cilíndrico *n* con su tornillo de correccion particular; del mismo platillo se eleva un caballete que sostiene el eje del anteojo. Un nivel *n'* está unido al caballete, y tiene tambien su tornillo de correccion. El anteojo gira con el limbo, como en el teodolito de Gambey (565), y tiene su nonius fijo al caballete. El movimiento del limbo zenital y el anteojo se verifica por tornillos dispuestos como en el teodolito de Troughton (528). Con esta parte del instrumento gira una regla dividida *e*, que se ajusta á una plancha de madera *p*, sujeta entre carriles que presentan las armaduras en que tienen sus tuercas los tornillos de la plataforma.

577. **Usos, verificaciones y correcciones.**—La disposicion del instrumento de que nos ocupamos, permite dar al limbo zenital una posicion perfectamente perpendicular al limbo del instrumento, y hacer que

el anteojo describa un plano vertical, como en el teodolito de Gambey, empleando los niveles *n* y *n'* con sus tornillos de correccion, y otros que mueven las partes del instrumento en que se apoyan, independientemente de la parte inferior, cuyo eje de rotacion se dispone verticalmente por los tornillos de la plataforma, y otro sistema análogo de pequeños tornillos que sirven para la correccion del nivel esférico.

Haciendo que la aguja coincida con la division *cero* del orientador, y colocando un jalon en la direccion de la visual, puede dirigirse á él el eje óptico del anteojo y valerse del movimiento del limbo azimutal, para hacerle coincidir con el cero de su nonius: fijo entonces este limbo, servirá para determinar los rumbos de las distintas posiciones que se den al eje del anteojo, referidos al meridiano magnético; pudiendo estarlo al meridiano astronómico con sólo hacer coincidir con el cero del nonius la graduacion del limbo azimutal que marca la declinacion (381).

Trazando líneas de lápiz por el canto de la escala *e*, se tendrán trasportados en el papel que se fija al tablero *p*, los rumbos de las visuales dirigidas por el anteojo; pudiendo tambien marcarse en las mismas líneas sus longitudes respectivas por medio de las divisiones de la escala.

El cero de la graduacion del limbo zenital corresponde á la posicion vertical del eje óptico del anteojo.

La posicion de una línea cualquiera estará dada en este instrumento por el rumbo que la corresponde, y la pendiente por el ángulo zenital obtenido directamente.

578. Las verificaciones y correcciones, que se ejecutan como en los teodolitos en que tienen una disposicion análoga las distintas partes cuya posicion se trata de disponer convenientemente, teniendo en cuenta lo que acabamos de exponer, son las siguientes:

1.ª Que el eje de rotacion del instrumento sea vertical, y horizontal el limbo azimutal *ab*.

2.ª Que el eje óptico del anteojo sea perpendicular á su eje de rotacion, para que describa un plano y no una superficie cónica.

3.ª Que el plano descrito por este eje sea exactamente vertical.

4.ª Que el eje óptico sea exactamente vertical cuando coincide el cero del limbo zenital con su nonius correspondiente. Esta correccion puede hacerse, haciendo que dicho eje sea horizontal cuando coincide con el cero del nonius la division 90 del limbo.

5.ª Que el cero del limbo azimutal coincida con el de su nonius, cuando la visual esté en el plano del meridiano magnético ó del astronómico, segun se haya elegido uno ú otro para la referencia de los rumbos.

6.ª Que el cero de la escala *e* esté en el eje de rotacion del instrumento. Esta última circunstancia se verifica, marcando con un punto muy fino el que corresponde á cada una de varias posiciones de la escala, girando alrededor de dicho eje, y viendo si todos ellos se confunden en uno sólo: corrigiendo la posicion de la escala en caso contrario, corriéndola hasta que tenga lugar la expresada circunstancia.

579. **Circulo repetidor.**—La mayor parte de los instrumentos explicados, pueden servir como hemos visto para la repeticion de los ángulos; pero el *círculo repetidor* es llamado así, por ser el instrumento repetidor por excelencia.

Un limbo B (fig. 364; lám. 24) dividido generalmente de izquierda á derecha en tercios ó cuartos de grado, aun cuando puede llegar á estarlo de 5 en 5′, y dos anteojos A, A′, el uno superior y el otro inferior, pueden girar alrededor de un mismo eje, perpendicular al plano del limbo é invariablemente unido á él. El anteojo superior A forma cuerpo con la armadura C, que lleva cuatro nonius *m*, y ambos pueden fijarse al limbo ó girar rápida ó velozmente á voluntad por el sistema de tornillos *a* y *c* (322). El anteojo inferior es tambien susceptible de fijarse al eje del limbo, ó de girar con los indicados movimientos, por medio de los tornillos *a′* y *c′*: paralelamente al eje de este anteojo, é invariablemente fijo á su tubo se halla un nivel *n′*. Otro nivel *n* lo está á la columna que envuelve al eje de rotacion del limbo, y puede variar de inclinacion con respecto á él por un tornillo de correccion particular auxiliado de un muelle de acero. Dicha columna termina en un tambor *b*, el cual encierra un ensanche del eje de rotacion indicado, al que se dá movimiento por el sistema de tornillos de presion *p* y de coincidencia *r*.

Los tornillos *r* están unidos á un piñon, cuyos dientes engranan con los que presenta el extremo del ensanche mencionado.

El tambor *b* tiene plomo en su interior para equilibrar el peso del limbo y de las partes unidas á él.

El *eje de rotacion del limbo* puede girar tambien alrededor de otro eje, que forma cuerpo con la columna que envuelve al primero y se apoya en las extremidades superiores de los brazos de una horquilla *h*. El primero de estos ejes arrastrando en su movimiento al limbo y los anteojos, describe un plano perpendicular al segundo, al cual se dá el nombre de *eje de la horquilla*, por medio del sistema de tornillos *q* y *z*. Los arcos recorridos por el eje de rotacion del limbo en virtud de este movimiento, se miden en el arco *s*, que fijo invariablemente al eje de la horquilla participa del mismo movimiento, observando el índice *i* trazado en una pieza dispuesta en uno de los brazos de la horquilla.

Esta horquilla forma cuerpo con una columna hueca *d*, la cual envuelve á un cilindro fijo en el centro del limbo *l*, que es el *limbo azimutal*. La columna *d* gira alrededor del cilindro, cuyo eje es el de *rotacion general del instrumento*, por el sistema de tornillos de movimiento general *x*, *v*, dispuesto á la extremidad de una alidada que forma cuerpo con la columna *d*. En la otra extremidad, hay un boton *k* al que se aplica la mano para dar cómodamente el movimiento rápido al instrumento. En la misma alidada se halla el nonius correspondiente al limbo azimutal.

Este limbo forma cuerpo con los tres brazos de la plataforma, en cuyos extremos se hallan los tornillos de nivelacion *t*, los cuales descansan en cilindros metálicos fijos á la meseta de un trípode muy resistente.

Está dispuesto el limbo azimutal de modo que el cero de la graduacion corresponde á uno de los tornillos de la plataforma, y por lo tanto, la recta que une las divisiones 90 y 270 es paralela á la que determinan los otros dos tornillos.

Cada tornillo tiene una placa graduada perpendicular á su eje, que sirve para apreciar el movimiento dado al tornillo, por un índice fijo al brazo correspondiente de la plataforma.

Dos microscopios dispuestos como en el teodolito de Gambey (563) facilitan la apreciacion de los valores angulares marcados por los nonius de la armadura C.

La disposicion del instrumento que describimos permite al plano del limbo ocupar en el espacio todas las posiciones imaginables, girando alrededor de los tres ejes mencionados: el de rotacion del limbo, el de la horquilla, y el de rotacion general del instrumento.

580. **Verificaciones y correcciones.**—Antes de proceder á la medida de los ángulos, conviene disponer las diferentes partes del instrumento de una manera propia para facilitar las operaciones. Para ello es preciso que se verifique:

1.° *Que los ejes de ambos anteojos sean paralelos al plano del limbo.*—Se dispone el limbo horizontalmente por medio de los tornillos q y z observando el sector s, y paralelamente al plano del limbo el eje de un anteojo de verificacion (454), haciendo despues cubrir al punto observado los cruzamientos de las cerdas de los retículos de ambos anteojos A y A' por medio de los tornillos de sus correspondientes retículos.

581. 2.° *Que el eje de rotacion de todo el instrumento sea vertical.*—Se hace coincidir el cero del limbo azimutal con el del nonius correspondiente, con lo que el eje del nivel n' estará en un plano paralelo á la línea que une dos tornillos de la plataforma (579), y se horizonta este nivel por los tornillos a' y c' de movimiento del anteojo inferior: se da una semirevolucion exacta al instrumento, y se corrige la mitad de la desviacion que entonces se observe en el nivel, como hemos dicho (402); pero es más exacto y más pronto hacer desaparecer toda la desviacion por uno solo de dichos tornillos de la plataforma, observando en la placa graduada que le acompaña el número de divisiones recorridas para conseguirlo, moviéndole despues en sentido contrario la mitad de este número de divisiones, y acabando de horizontar el nivel por su tornillo de coincidencia c'. Corregido el nivel, se da un cuarto de revolucion al limbo azimutal, y se horizonta aquel por el movimiento del tercer tornillo de la plataforma.

Pudiera hacerse la misma operacion con el nivel n, empleando el tornillo z del sector y los de la plataforma; pero es preferible valerse del otro, que se emplea tambien en la verificacion siguiente.

582. 3.° *Que el plano del limbo pueda disponerse verticalmente.*—Para dar al limbo la posicion vertical, se emplea un aparato auxiliar representado en la figura 365 (lám. 24), y compuesto de una varilla cilíndrica de

metal *ab*, en cuyas extremidades se hallan dos índices por los cuales debe pasar el hilo del perpendículo *p*, cuando la varilla es vertical y el aparato está convenientemente dispuesto: uno de los índices es fijo, y el otro movible lateralmente por los tornillos de correccion *t*. Dos brazos *d* fijos á la varilla, terminan en unas piezas por medio de las cuales se fija la varilla al limbo *l* con los tornillos *c*. La línea determinada por los índices debe ser exactamente paralela al plano del limbo. Para hacer esta verificacion, y colocar á la vez el limbo en la posicion vertical, se fija á él la varilla de modo que el índice que lleva los tornillos *t* ocupe la parte superior, y se pone el limbo en movimiento por los tornillos del tambor y los del sector, hasta que la plomada coincida con los índices. Fijo el limbo en esta posicion, se aflojan los tornillos *c* y se invierte la posicion de la varilla: si entonces la plomada coincide aún con los índices, la varilla será paralela al limbo, y este será vertical (51). Pero si no coincide, se hace desaparecer la mitad de la desviacion moviendo el limbo por el tornillo de coincidencia del sector, y la otra mitad por los tornillos *t* de correccion del índice.

La demostracion de este procedimiento es la misma que hemos dado siempre que se ha tratado del paralelismo de dos líneas determinadas. En efecto, sea *ab* (fig. 366; lám. 24) la posicion del plano del limbo cuando la línea de los índices ocupa la posicion vertical *mn*; al invertir la posicion de la varilla, la línea de los índices toma la posicion *m'n'*, como si hubiese girado alrededor del eje *cd* perpendicular por construccion al limbo: se comprende que será preciso dar á *m'n'* la posicion *vx* paralela á *ab*, haciendo desaparecer la mitad de la desviacion por los tornillos de correccion del índice inferior, y dar despues á las líneas *ab*, *vx* la posicion vertical, lo que se consigue por el tornillo del sector. En esta correccion el eje *cd* toma la posicion horizontal (102). Horizontando el nivel *n* (figura 364; lám. 24), por su tornillo de correcion particular, servirá para indicarnos en lo sucesivo la posicion horizontal de dicho eje. Observando entonces el índice del sector, la graduacion que marque es una nueva indicacion para lo sucesivo; y si el índice es susceptible de movimiento, debe hacérsele coincidir con la division cero del sector.

Corregida la varilla, puede disponerse verticalmente el limbo en las operaciones sucesivas con solo la primera disposicion que hemos dicho se debe dar á la varilla.

Esta última verificacion es tan solo necesaria cuando se trata de medir ángulos situados en planos verticales.

583. **Usos del círculo repetidor.**—Este instrumento se emplea en la medida de los ángulos en el plano de los objetos (243), y se le puede disponer tambien para la de los ángulos zenitales.

584. **Medida y repeticion de los ángulos en el plano de los objetos.**—Para lo primero, se empieza por hacer coincidir el cero de uno de los nonius *m* (fig. 364; lám. 24) con el del limbo B, valiéndose para ello como ya sabemos de los tornillos *a* y *c*. Despues es preciso colocar el lim-

bo en el plano de los objetos, para lo cual se afloja el tornillo *v*, y por el boton *k* se da el movimiento general al instrumento, con lo que el *eje de la horquilla*, perpendicular al vertical de rotacion, describirá un plano horizontal: se continúa este movimiento hasta que la direccion del eje de la horquilla vaya á cortar á la recta que une los objetos que determinan los extremos del ángulo, ó á su prolongacion: en cuyo caso el eje de la horquilla, teniendo dos puntos en el plano de los objetos, estará contenido en él: se fija entonces el tornillo de presion *v*, y se afloja el *q* para hacer girar á la parte superior del instrumento alrededor del eje *e* de la horquilla. Siendo estos ejes perpendiculares entre sí por construccion, y habiendo hecho por la operacion explicada que el de la horquilla sea una de las horizontales del plano de los objetos, el de rotacion particular del limbo puede girar hasta ocupar una posicion perpendicular á la línea de máxima pendiente de este plano (Acotaciones 41). Observando ahora que el plano B del limbo es paralelo, tambien por construccion, al eje de la horquilla, y teniendo en cuenta la pequeña distancia que entre ellos media en comparacion á la que hay entre los objetos, se comprenderá que el limbo estará en el plano de los mismos objetos; por cuya razon se detiene el movimiento cuando el limbo aparece á la vista situado en dicho plano, apretando entonces el tornillo *q*.

Cuando se ha conseguido esto, se afloja el tornillo *p*, y se mueve el limbo hasta que la visual tirada por el anteojo superior A esté dirigida lo mejor que sea posible al objeto de la izquierda (285), apretando entonces el tornillo *p*. Igualmente se dirige el anteojo inferior al objeto de la derecha. Dispuesto así el instrumento, la posicion de los cruzamientos de los retículos con respecto á los puntos que deben cubrir exactamente, indicará los movimientos que aún es preciso dar á sus distintas partes, los cuales se efectúan con los tornillos de coincidencia correspondientes á los de presion que se han empleado para los movimientos rápidos.

Así dispuesto el aparato, y dirigiendo el anteojo superior al objeto de la derecha, por el sistema de los tornillos *a* y *c*, el arco recorrido por el cero del nonius que se puso en coincidencia con el del limbo, marcará el valor del ángulo que se trataba de conocer. El anteojo inferior, despues de haber servido para colocar el limbo en el plano de los objetos, hace las veces de anteojo de prueba (493), viendo si despues de la operacion indicada aparece aún dirigido exactamente al objeto de la derecha

585. *Empleo de los cuatro nonius para la apreciacion de los ángulos.*— Para atenuar los errores de construccion ó las imperfecciones debidas al uso, es conveniente determinar el valor de un ángulo por el término medio entre las lecturas obtenidas en los cuatro nonius (497). Empezaremos por determinar el error que pueden producir las posiciones ocupadas por los ceros de los nonius. Se hace coincidir uno de ellos con el cero del limbo, y se observa la graduacion marcada por el segundo, que debe ser la division 90°, y supongamos que marque 90° 3′: esta cantidad 3′ será un error por exceso, que representaremos en general por *e*, y el valor

del eje óptico del anteojo será paralela á su posicion primitiva, y como la placa de los nonius gira con dicho anteojo, habrá recorrido una distancia igual tambien á dos veces la zenital. Resulta de lo dicho que la nueva lectura que ahora se ejecute con los nonius equivaldrá á la primera más el doble de la zenital, es decir, que siendo l la primera lectura definitiva, l' la segunda, y z la distancia zenital, resultará

$$l' = l + 2z$$

de donde
$$z = \frac{l' - l}{2};$$

lo que nos dice que es preciso hacer dos punterías para hallar la distancia zenital de una direccion dada; la primera con el anteojo á la izquierda del observador, y la segunda con el anteojo á la derecha, y la distancia zenital será igual á la mitad de la diferencia de estas lecturas.

Cuando se observan las distancias zenitales, se dirige la puntería á la parte más elevada, y se mide esta altura sobre el terreno, y á éste se refiere igualmente la altura del eje de rotacion del anteojo. Debe medirse en las operaciones la distancia zenital de todos los puntos á que se dirija la visual azimutal

590. **Consideraciones acerca de los goniómetros de precision.** — El teodolito y el círculo repetidor son en realidad instrumentos geodésicos; tienen, sin embargo, una gran aplicacion en muchas operaciones topográficas que requieren exactitud, empleándose hoy en los trazados de las vías de trasporte, y de los canales, en las operaciones topográfico-catastrales, y en otras muchas, que no entran en el dominio de la Geodesia. Estas consideraciones justifican la extension dada al capítulo dedicado á los instrúmentos de precision, si se compara con la que tiene en los tratados publicados hasta el dia: extension á que nos han llevado por otra parte los adelantos que ha hecho en estos últimos años el importante ramo de la construccion de instrumentos.

Respecto al círculo repetidor, pudiéramos habernos ocupado de los diferentes medios de impedir ó de atenuar muchas causas de error producidas, ya por las imperfecciones inherentes á la construccion del instrumento por esmerada que sea, ya á la falta de completo equilibrio que puede haber entre sus distintas partes en algunas de las posiciones que se le hace tomar cuando se opera con él; pero hemos tenido en cuenta al omitirlas la poca influencia que pueden tener en las operaciones topográficas más delicadas, teniéndola tan solo en las que son verdaderamente geodésicas.

En las operaciones topográficas, el instrumento que con más frecuencia se emplea es el teodolito de Brunner, por la mayor precision de la medida de los ángulos, empleando el método de la *reiteracion*.

CAPITULO XI.

Goniómetros y goniógrafos fundados en las propiedades de la luz.

Goniómetros y goniógrafos de reflexion.—Sextante.—Verificaciones y correcciones.—Usos del sextante.—Sextante de bolsillo.—Usos, verificaciones y correcciones.—Círculo astronómico.—Verificaciones y correcciones.—Usos del círculo de reflexion.—Medida y repeticion de los ángulos en el plano de los objetos.—Medida y repeticion de los ángulos situados en planos verticales.—Triángulo gráfico de reflexion.—Semicírculo de reflexion de Douglas.—Sextante de un solo espejo.—Plancheta fotográfica.—Teoría en que se funda.—Descripcion del instrumento.—Diferencia entre observacion nadiral y observacion zenital.—Uso de la plancheta fotográfica.

391. **Goniómetros y goniógrafos de reflexion.**—Las leyes de la reflexion de la luz han tenido una feliz aplicacion á la determinacion del valor de los ángulos, dando lugar á varios instrumentos de suma utilidad para las observaciones que se ejecutan á bordo de los buques, y que pueden aplicarse tambien á las operaciones topográficas en que es permitido sacrificar á la rapidez de su ejecucion, la precision que resulta del empleo de los instrumentos de que nos hemos ocupado en algunos de los capítulos anteriores. Dejando para los tratados de Astronomía práctica y de Navegacion el tratar de ellos con la extension necesaria para asegurar el buen éxito de las operaciones á bordo, nosotros solo nos ocuparemos de exponer brevemente la descripcion y el uso que debe hacerse en Topografía del *sextante*, el *círculo astronómico*, el *triángulo gráfico*, y el *semicírculo de reflexion de Douglas*.

392. **Sextante.**—El sextante, debido á Hadley, es un goniómetro que se compone de un sector circular de ébano ó de metal, provisto en su centro de un espejo M (fig. 367; lám. 25) perpendicular al plano del sec-

tor, y armado en una pieza circular giratoria alrededor del centro del mismo: con ella gira una alidada que termina en el nonius *n*, correspondiente á la graduacion del arco *ab*, con movimiento rápido ó lento á voluntad, por un sistema *c* de tornillos de presion y de coincidencia La inclinacion del espejo M sobre el plano del sector, puede variar por los tornillos *s*. Otro espejo N, tambien perpendicular al mismo plano, tiene azogada su mitad inferior y trasparente la superior para ver directamente los objetos á través de ella. Este segundo espejo es tambien susceptible del mismo movimiento que el primero por un sistema de tornillos igual al *s*, y la pieza en que se apoya puede moverse lateralmente por los tornillos *r*. Cuatro cristales de colores oscuros, armados en unas piezas *x*, giratorias alrededor de charnelas, pueden colocarse delante del espejo M, y otros dos *z* delante del N, para debilitar la fuerza de la luz en las observaciones solares.

Un anteojo *d*, que se introduce á rosca en el collar *e*, está dirigido al espejo N, sin serle perpendicular, y la cerda horizontal de su retículo debe cubrir á la línea que separa la parte trasparente de la azogada en el espejo; para lo cual el anteojo es susceptible de moverse paralelamente al plano del sector por un tornillo que pone en movimiento el collar. Este tornillo no se ve en la figura. Un tubo abierto por uno de sus extremos, y provisto en el otro de un pequeño taladro destinado á servir de ocular, puede sustituir al anteojo para las observaciones de objetos claramente perceptibles á la simple vista. Los rádios del sector están unidos por un travesaño que da consistencia al instrumento, y en cuya mitad se halla una tuerca que recibe la rosca en que termina un mango destinado á tener el sextante en la mano durante las observaciones.

El limbo del sextante está dividido en tercios de grado (277), y el nonius presenta 40 divisiones, apreciando por lo tanto (308) de 30 en 30″.

593 Cuando el arco *ab* es un cuadrante, el instrumento toma el nombre de *cuadrante de reflexion*, y el de *octante* cuando es la octava parte de la circunferencia.

594. **Verificaciones y correcciones** —Las circunstancias que debe reunir este goniómetro para los usos á que se le destina, son las siguientes:

1.ª Que los espejos M y N sean perpendiculares al plano del limbo.

2.ª Que ambos espejos sean paralelos entre sí cuando coincide el cero del nonius con el de la graduacion del sector.

3.ª Que el eje óptico del anteojo sea paralelo al plano del limbo.

Para asegurarse de que el espejo M es perpendicular al plano del limbo, se dispone delante de él un prisma metálico perfectamente construido, que suele acompañar al instrumento, y se observa si la cara superior del prisma aparece en el mismo plano que su imágen formada en el espejo; para lo cual se coloca la visual en este plano. Si la imágen aparece elevada con relacion á la cara del prisma, el espejo estará inclinado hácia adelante, y lo estará en sentido contrario si dicha imágen aparece deprimida: en cualquiera de estos casos se moverá el espejo en el sentido conveniente por los tornillos *s*.

595. Para obtener la perpendicular del espejo N, se dirije la visual por el anteojo á un objeto bien determinado, y se mueve la alidada hasta que en la parte azogada del mismo espejo N aparezca la imágen del objeto despues de reflejada en el otro. Si el objeto y su imágen coinciden exactamente, el espejo N es perpendicular al plano del limbo; pero si se encuentran en una misma perpendicular á este plano, sin hallarse en contacto, se mueve el espejo por el tornillo análogo al *s* hasta que tenga lugar el indicado contacto.

596. Si haciendo la coincidencia de los ceros, y dirigiendo la visual por la parte clara del espejo á un objeto lejano, se ve coincidir exactamente con él su imágen doblemente reflejada, los espejos serán paralelos, segun la propiedad recíproca establecida (209): pero no siendo así, se hace variar la posicion del espejo N con respecto al M, por medio de los tornillos *r*, hasta lograr la coincidencia.

597. El paralelismo del eje del anteojo al plano del limbo se obtiene por medio del anteojo de verificacion (454), cuando el del sextante tiene tornillos de correccion para el retículo; pero regularmente existe el paralelismo por construccion.

598. **Usos del sextante.**—El sextante, así como el cuadrante y el octante, se destinan á la medida de los ángulos en el plano de los objetos, y tambien á la de los ángulos verticales de elevacion.

Para lo primero, se hace la coincidencia exacta del cero del nonius con el del arco graduado, se dispone el plano del sector aproximadamente en el de los objetos, y se le mueve en él dirigiendo la visual por el anteojo hasta que el objeto A (fig. 368; lám. 25) visto directamente por la parte trasparente del espejo N, aparezca coincidiendo con su imágen A', vista en la parte azogada por la doble reflexion del rayo luminoso AC en los espejos, formando ángulos iguales con las normales *n* y *n'* á ambos; circunstancia que siempre puede tener lugar por el paralelismo de los espejos (209). Fijo en esta posicion el sector, se afloja el tornillo de presion de la alidada y se la pone en movimiento, con lo que desaparecerá la imágen A', continuando el movimiento de la alidada hasta que esta imágen se halle reemplazada por la del objeto B de la derecha. Se fija entonces el tornillo de presion, y se emplea el de coincidencia para que esta segunda imágen coincida con el objeto A, que sigue viéndose directamente. El espejo M y la alidada ocuparán entonces la posicion *mb*, en la cual la imágen de B se verá por la doble reflexion del rayo BC en ambos espejos, segun las normales *n''* y *n'*.

El arco *ab* dado por el nonius, y que es la medida del ángulo que forman los espejos, es tambien mitad del A'DB que forma el rayo incidente BC de la primera reflexion con el reflejo ND de la segunda (207), y que es igual al ACB que se trataba de medir.

A fin de evitar la duplicacion del ángulo observado para obtener el de las visuales, las graduaciones del limbo tienen numeracion doble.

599. Cuando el ángulo es tan grande que no puede observarse con el sextante por exceder de los límites de su graduacion, se miden los que forma cada uno de los objetos con otro intermedio del plano que ellos determinan con el punto de estacion, sumando despues los ángulos así obtenidos.

600. Hemos dicho que se dirija la visual al objeto de la izquierda A (fig. 368; lám. 25), á fin de que la alidada se mueva en el sentido de la graduacion del limbo: hay casos, sin embargo, en que conviene empezar la operacion por el objeto B de la derecha, para lo cual se invertirá el instrumento de modo que los espejos queden inferiores al plano del limbo, y se seguirá exactamente la misma marcha que acabamos de indicar. En general, conviene dirigir la primera visual al objeto menos iluminado, para facilitar la percepcion de la imágen del otro, que tiene que experimentar mayor pérdida de luz en las reflexiones sobre los espejos.

601. *Medida de los ángulos de elevacion.*—El sextante se emplea tambien para la medida de la altura angular de un astro sobre el horizonte, cuando se percibe el del mar, colocando el limbo en el plano vertical del punto ocupado por el centro del astro, y haciendo coincidir su imágen doblemente reflejada, con el punto de interseccion de dicho plano vertical con la línea del horizonte, cuyo punto se ve directamente por el anteojo á través de la parte trasparente del espejo N. Estas observaciones son muy comunes á bordo.

Cuando se quieren hacer en tierra se emplea un espejo B (fig. 369; lám. 25), que se horizonta por medio de un nivel de aire perfectamente corregido (83). En este caso, se hace coincidir la imágen A' del objeto A, producida por la reflexion sobre el horizonte artificial y vista desde *v* directamente, con la nueva imágen del mismo objeto doblemente reflejada por los espejos del instrumento. El ángulo ABA' obtenido (598) es doble del de elevacion ABC, que se trataba de conocer.

602. **Sextante de bolsillo.**—Reducido el sextante á muy pequeñas dimensiones, y encerrado en una caja cilíndrica de metal (A, A') (figura 370; lám. 25) cuando no se hace uso de él, este instrumento es muy útil en los reconocimientos y otras operaciones topográficas que exigen poca exactitud. Armado, como aparece en la figura, presenta una alidada *c* provista de un nonius correspondiente al arco graduado *ab* incrustado en la tapa superior de la caja. El arco está dividido en tercios de grado, y el nonius aprecia de minuto en minuto. La alidada gira por medio del tornillo *(l, l')* llevando consigo el espejo azogado, que está en el interior de la caja y es el que hemos designado por M en el sextante ordinario. El espejo, mitad trasparente y mitad azogado, fijo tambien á la misma tapa por su parte inferior, puede variar de inclinacion con respecto á ella por medio de dos tornillos descubiertos en los taladros circulares *s*, y movibles por una llave que acompaña al instrumento en la caja en que se encierra. Otro tornillo análogo *r* hace variable su inclina-

cion respecto del otro espejo. Dos cristales de color tambien interiores pueden colocarse delante del primer espejo, moviendo sus armaduras por palancas cuyos extremos aparecen en la ventanilla *k*.

Un microscopio *(m, m')* colocado al extremo de una barrita metálica gira alrededor del centro del arco graduado, y puede colocarse sobre el nonius para la lectura de los ángulos.

El anteojo *(d, d')*, dirigido al segundo espejo como en el sextante ordinario, está atornillado á un collar que se fija á la caja por el tornillo *(z, z')*.

Los espejos reciben la luz de los objetos exteriores por una abertura lateral que presenta la caja á la parte posterior de la que aparece en la figura, y el anteojo la recibe por otro taladro circular abierto delante de su objetivo.

Separando el anteojo se destornilla la parte inferior A' de la caja, la cual sirve entonces de tapa á la superior, atornillándola por la rosca *x*.

693. **Usos, verificaciones y correcciones.** —Los usos del sextante de bolsillo son los que hemos indicado (598) para el sextante ordinario, y las correcciones son las dos siguientes:

1.ª *Perpendicularidad del espejo mitad trasparente y mitad azogado con respecto á la tapa superior de la caja.* —Se obtiene como en el sextante ordinario (595) por los tornillos *s*.

2.ª *Paralelismo de ambos espejos cuando el cero del nonius coincide con el del arco graduado.* —Se obtiene tambien (596) por el tornillo *r*.

604. **Círculo astronómico.** —Con objeto de hacer extensiva á los goniómetros de reflexion la repeticion de los ángulos, el astrónomo Tobías Mayer ideó el *círculo entero de reflexion*, compuesto de dos alidadas M y N (fig. 371; lám. 25) que pueden girar independientemente la una de la otra, y tambien del limbo, alrededor del centro de este último, pudiendo además fijarse á él, por medio de los sistemas *c* y *c'* de tornillos de presion y coincidencia. La alidada M lleva el espejo *m* todo azogado, susceptible de un movimiento lateral por los tornillos *t*, y de variar de inclinacion con respecto al plano del limbo por los *s*, análogos á los que tiene el espejo del sextante: lleva tambien el nonius *a*, y el microscopio *b* para facilitar su lectura, el cual gira con la varilla á que está unido alrededor de un soporte *e*.

La alidada N lleva el espejo *n*, mitad trasparente y mitad azogado, y el anteojo *d* dirigido á él como en el sextante. El anteojo puede variar de inclinacion con respecto al plano del limbo y colocarse á la altura conveniente por los tornillos *r*.

Separando el ocular y el objetivo, el tubo del anteojo puede usarse como el que se adapta al sextante (592) para la observacion de los objetos que se perciben bien á simple vista. Tambien se ven en esta alidada, y fijas en su plano delante de los espejos, unas piezas *z* que presentan cajas destinadas á recibir otras piezas armadas de vidrios de colores, cuyo uso es el mismo que tienen en el sextante, y unos tornillos para sujetarlas. Las piezas análogas que se encuentran en contacto del espejo *m* tienen por objeto la colocacion de placas opacas que disminuyen la superficie visible del espejo.

El limbo aparece dividido en tercios de grado de 0 á 720°, teniendo en cuenta que los semigrados se cuentan como grados como en el sextante (598). El nonius está dividido tambien en 40 partes, apreciando por lo tanto de 30 en 30″.

605. **Verificaciones y correcciones.**—El círculo de reflexion debe reunir las mismas condiciones que el sextante (594), observando que el paralelismo de los espejos (596) se obtiene moviendo el espejo M por los tornillos *t*. El paralelismo del eje del anteojo, respecto al plano del limbo, se obtiene por medio de un anteojo de verificacion (454) empleando los tornillos *s*, los que sirven tambien para colocar el anteojo *d* á una altura tal, que su eje vaya á parar exactamente á la línea que divide la parte trasparente de la azogada en el espejo *n*.

606. **Usos del círculo de reflexion.**—Se usa este goniómetro para la medida y repeticion de los ángulos en el plano de los objetos, así como de los ángulos de elevacion ó depresion y los zenitales.

607. **Medida y repeticion de los ángulos en el plano de los objetos.**—Los ángulos se miden con el círculo de una manera enteramente análoga á la que hemos indicado para el sextante (598), haciendo coincidir el cero del nonius de la alidada M con el del limbo, dirigiendo la visual directa por el anteojo y la parte trasparente del espejo *n* al objeto de la izquierda, y moviendo el limbo con la alidada M hasta que la imágen doblemente reflejada del mismo objeto coincida con él, que se continúa viendo directamente. En esta posicion se fija la alidada N por el tornillo de presion del sistema *c'*, y aflojando el del *c*, se pone en movimiento á la alidada M, hasta que la imágen del objeto de la derecha venga á sustituir á la primera. El arco, recorrido por el cero del nonius *a*, nos dará por su graduacion el valor del ángulo pedido.

Si fija la alidada M con el cero en la graduacion obtenida, se repite la misma operacion que cuando lo estaba en cero, se hallará el valor del arco duplo; y continuando del mismo modo se tendrá el triplo, el cuádruplo.... del primer ángulo medido

Cuando convenga empezar la observacion por el objeto de la derecha, se invertirá el instrumento como hemos dicho para el sextante (600).

608. La medida y repeticion de los ángulos puede obtenerse con el círculo de reflexion sin la coincidencia de la imágen directa y refleja del primer punto; para lo cual se establece la del cero del nonius de la alidada M (fig. 372, lám. 25) con el del limbo, y se mueve la alidada N independientemente de él, hasta que se halle dirigida al objeto B de la derecha; haciendo girar entonces al limbo con la alidada M fija á él, hasta que la imágen del punto A, obtenida como ya sabemos por la doble reflexion en los espejos *m* y *n* siguiendo la direccion AC *nd*, coincida con el punto B visto directamente. Fijando entonces la alidada N al limbo, se da á todo el instrumento un movimiento en su plano hasta que la visual se halle

dirigida al objeto A: despues de este movimiento, todas las partes del círculo ocuparán las mismas posiciones relativas que antes de él, los espejos *m* y *n* habrán pasado á *m'* y *n'*, y la alidada M á M', siguiendo aún los ceros en coincidencia.

Haciendo entonces independiente á la alidada M', se la hace girar hasta ocupar de nuevo la posicion M, en la cual la imágen doblemente reflejada del objeto B, siguiendo el camino BC *n' d'*, coincida con el A á que se halla dirigido el anteojo.

El arco *ab* recorrido por el cero del nonius en el sentido de la graduacion, es la medida de un ángulo igual al de los objetos, que se lee doble en el limbo. En efecto, al pasar el espejo de la posicion *m'* á la *m* recorriendo este arco *ab*, existe necesariamente una posicion en la que es paralelo al espejo *n'*, y en la cual forma con él un ángulo, mitad del de los objetos: esta posicion corresponde á la bisectriz del ángulo *m*C*m'*, y en ella se ve coincidir con el objeto A su imágen doblemente reflejada, y puede leerse el ángulo de los objetos como en el procedimiento indicado (606); pero es préferible continuar el movimiento de la alidada hasta la coincidencia de la imágen de B con el objeto A, en la que el arco recorrido será el correspondiente al ángulo de los objetos, duplicado en su lectura, como hemos dicho, por la graduacion del limbo. Debemos observar que el ángulo correspondiente al arco *ab* es igual al de los objetos, porque ambos son la amplitud recorrida por las alidadas para pasar de la primera á la segunda posicion de las que hemos hecho ocupar al instrumento, girando en su plano alrededor de su centro.

La primera observacion, correspondiente á la posicion N de la alidada que lleva el anteojo, se llama *observacion de la izquierda* por recibirse de este lado la luz emitida por el objeto A; la segunda N', *observacion de la derecha*, por venir de este lado la del B; y ambas constituyen una *observacion cruzada*; por lo que la repeticion de los ángulos, hecha como acabamos de explicar, se distingue de la anteriormente explicada llamándola *repeticion de los ángulos por observaciones cruzadas*.

609. **Medida y repeticion de los ángulos situados en planos verticales.**—Se obtiene la medida y repeticion de los ángulos de elevacion ó depresion por el procedimiento seguido (606) para los que se miden en un plano cualquiera, y siguiendo la marcha explicada (604) para su determinacion por medio del sextante.

610. Estos mismos ángulos pueden hallarse por otro procedimiento, en él que no se emplea el círculo como instrumento de reflexion, para lo cual la alidada M suele llevar una charnela, á la que puede fijarse un nivel de aire, que en virtud del juego de la primera es horizontal en dos posiciones diametralmente opuestas del limbo. Haciendo coincidir con el cero de este último el del nonius de la alidada N, se dispone verticalmente el limbo de modo que las alidadas se hallen á la derecha del observador, y se dirige una visual al objeto A (fig. 373; lám. 25), moviendo despues la alidada M, hasta que el *n* adaptado á ella quede horizontal,

fijando entonces la alidada al limbo. Se dá una semi-revolucion al instrumento alrededor de la vertical vM, con lo que el cero del nonius de la alidada N, que se hallaba en b, vendrá á ocupar la posicion b'. Si en esta posicion se dá una semi-revolucion al instrumento en su plano alrededor del eje proyectado en C, lo que se habrá conseguido cuando el nivel n, que habrá ido á la parte superior, invirtiéndose en virtud del juego de la charnela indique de nuevo la posicion horizontal, el cero habrá pasado de b' á a': aflojando entonces el tornillo que sujeta la alidada N al limbo se la dirigirá de nuevo al punto A; con lo que el cero del nonius habrá recorrido en el sentido de la graduacion un arco $a'b$ doble en magnitud del ángulo de elevacion ACh.

La lectura del limbo dará el cuádruplo del mismo ángulo, á causa de contarse en él los medios grados como grados enteros.

Cuando la graduacion del limbo es de derecha á izquierda, es preciso colocar el limbo en su primera posicion de modo que las alidadas se hallen á la izquierda del observador.

611. *Medida de los ángulos zenitales.*—Puede seguirse la marcha explicada para el teodolito de Gambey (575), para lo cual se establece la coincidencia del cero del nonius de la alidada N con el del limbo, y se dispone éste verticalmente con las alidadas á la izquierda del observador si el limbo presenta la primera graduacion (277), y á la derecha si la segunda. Se mueve el limbo hasta que la visual dirigida por el anteojo vaya á parar al objeto A (fig. 373; lám. 25), y se fija la alidada M cuando el nivel n está horizontal. Se dá una semi-revolucion al instrumento alrededor de la vertical vM, con lo que el cero del nonius irá de b á b', como en el procedimiento explicado en el párrafo anterior. Para dirigir de nuevo la alidada N al punto A, lo que no puede verificarse sin poner en movimiento á la M, se observa la graduacion marcada por el cero del nonius de esta última, se hace girar á ambas alidadas en el sentido $a'Ma$ hasta que la M haya dado una semi-revolucion, haciendo que el cero de su nonius coincida con la graduacion que difiera exactamente en 360° de la observada en su posicion primera, atendiendo á la lectura que dá este instrumento. Se mueve el limbo en su plano hasta que el nivel marque de nuevo la posicion horizontal como en el procedimiento anteriormente explicado, y se hace girar á la alidada N hasta que la visual dirigida por el anteojo vaya de nuevo á parar al punto A. El arco $b'b$ recorrido por el cero del nonius de la alidada N será duplo en magnitud del correspondiente al ángulo zenital vCA, y se leerá cuádruplo en el limbo.

612. **Triángulo gráfico de reflexion.**—Este instrumento, goniómetro y goniógrafo á la vez, se compone de tres reglas Cd, Cb, ab (fig. 374; lám. 25); la regla ab gira alrededor del punto a de la primera, llevando consigo un boton b, y al girar pone tambien en movimiento alrededor del punto C á la regla Cb, que presenta una ranura longitudinal: en el movimiento de la regla ab el boton se desliza á lo largo de la indicada ranura; y como se halla á una distancia de a igual á la que media entre los

puntos fijos a y C, las tres reglas constituyen un triángulo isósceles cuya base es variable de longitud. Un espejo m perpendicular á la direccion de la regla Cb, gira con ella y es todo azogado como en el sextante: otro espejo n mitad azogado y mitad trasparente está fijo del mismo modo á la regla Cd, y una pínula p, que lleva un pequeño taladro cónico como las pínulas ordinarias, sirve de ocular en las observaciones.

El nonius correspondiente á la graduacion del limbo semicircular l, se halla á la extremidad de la regla ab.

En el triángulo gráfico la graduacion no es doble como en los instrumentos de reflexion que anteceden.

613. *Usos del triángulo de reflexion.*—Se dirige la visual al objeto A por la pínula p y la parte trasparente del espejo n, y se hace girar á las reglas hasta coincidir con A la imágen doblemente reflejada del objeto B. El ángulo bad es gráficamente igual al ángulo de los objetos, que está determinado además en grados por el nonius. En efecto, sean ab, bC, aC (fig. 375; lám. 25) las reglas del triángulo representadas por sus ejes. En virtud de la proposicion establecida (208) se tiene:

$$\text{ACB} = 2\,s,$$

siendo s el ángulo de los espejos formado por la direccion del m y la paralela n' al n: por otra parte en el triángulo abC se tiene (Geom. Teor. 14 Cor. 1.°):

$$r = 2z = 2s,$$

á causa de ser iguales los ángulos s y z por tener el mismo complemento; luego el ángulo r es igual al ACB de los objetos.

614. Para trasportar el ángulo obtenido gráficamente, se hace coincidir el centro a (fig. 374; lám. 25) del semicírculo, con el punto que ha de ser el vértice, y el canto ad de la regla Cd con la recta primer lado del ángulo; trazando una recta por el canto ab de la otra regla, esta formará con la primera el ángulo pedido.

615. **Semicírculo de reflexion de Douglas.**—Este instrumento difiere muy poco del triángulo de reflexion, siendo como él goniógrafo y goniómetro. Un sector s (fig. 376; lám. 26) gira alrededor de un punto c de la regla ac, llevando consigo el espejo m todo azogado y un boton que pone en movimiento á la regla b, deslizándose por una ranura longitudinal de esta regla. A uno de los extremos de la misma se halla el espejo n mitad azogado y mitad trasparente, y al otro la pínula p que sirve de ocular. Unido á la regla ac está el limbo semicircular l, cuyo nonius v forma cuerpo con el sector s. La regla ac presenta dos escalas, una de ellas de trasversales.

616. *Usos del semicírculo de Douglas.*—Para la medida de un ángulo se hace la coincidencia de los ceros, y se dirige la visual al objeto de la

izquierda, que se verá directamente y por reflexion como en el sextante (598): despues, sujetando el sector con una mano por el extremo *d* de la regla en que termina, se mueve la *ac* hasta que la imágen doblemente reflejada del objeto de la derecha coincida con el de la izquierda, que se continúa viendo directamente. El ángulo estará dado gráficamente, y expresado en grados por el cero del nonius como en el triángulo de reflexion. Tambien en el semicírculo de Douglas el ángulo obtenido y el de los objetos son iguales, por ser ambos dobles del que ha recorrido en su movimiento el espejo *m*.

617. **Sextante de un solo espejo.**—La pérdida de luz que se experimenta por la doble reflexion en los instrumentos anteriormente descritos, ha sugerido la idea de construir el sextante de un solo espejo M (figura 377; lám. 26) perpendicular á la regla metálica *r*, y dividido en dos partes en el sentido de su altura; azogada la de la izquierda y trasparente la de la derecha. El espejo puede girar conservándose siempre perpendicular á la regla, y llevando consigo en su movimiento una alidada que termina en el nonius *n*, correspondiente á un arco graduado *g* fijo á la misma regla *r*. El taladro de una pínula *p* sirve de ocular, y se halla enfrente de la línea divisoria de las mencionados partes del espejo.

618. *Usos de este instrumento.*—Para explicarnos el uso de este sextante, supongamos que el espejo se halla en M (fig. 378; lám. 26) en una direccion perpendicular á la regla *r*, en la cual el cero del nonius coincide con el del arco graduado: al dirigir una visual desde V al objeto A por el ocular y la línea divisoria de las partes azogada y trasparente del espejo, que se proyecta en C, podrá ver dicho punto coincidiendo con la imágen de otro que se hallase en la línea VA entre los puntos V y C (202). Haciendo girar al espejo hasta que la imágen del B reflejada por él aparezca coincidiendo con el A, el arco *a* recorrido por el cero del nonius será complemento de la mitad del correspondiente al ángulo ACB de los objetos. En efecto, se tiene $z=t$ (Geom. Teor. 4), y $z=s$ en virtud de las leyes de la reflexion; de donde resulta $t=s$: y como además a es complemento de z, tambien lo será de cada uno de los s y t mitades del ACB. Se tendrá por lo tanto:

$$t=90^{\circ}-a;$$

y como es $ACB=2t$, resultará:

$$ACB=180^{\circ}-2a.$$

Escribiendo en la graduacion estos valores, se tendrán directamente los de los ángulos observados.

619. **Plancheta fotográfica.**—La perfeccion que los adelantos de las ciencias naturales han conseguido dar á la Fotografía, ha dado orígen á las investigaciones de muchos sábios acerca de sus aplicaciones á la

Topografía. No trataremos de enunciar la série de experiencias más ó ménos felices, que á pocos años de la invencion de Daguerre hicieron Martens, Garella, Porro y Laussedat, para lo que remitiremos á nuestros lectores á la obrita de Mr. Paté sobre la *aplicacion de la fotografía á la topografía militar*, en la que hace una breve cuanto interesante reseña de ellas; limitándonos á exponer con brevedad el principio en que se funda, y el uso que se hace de la *plancheta fotográfica* de Chevallier, todos de la misma obra, y de las noticias que con tanta bondad nos ha suministrado D. Pedro Zea, Teniente Coronel de Estado Mayor del ejército, que ha acompañado á Laussedat en los trabajos de topografía fotográfica que ha ejecutado. El aparato empleado en ellas es la plancheta fotográfica representada en la fig. 379 (lám. 26).

620. **Teoría en que se funda.**—Sea M (fig. 380; lám. 26) el objetivo de la cámara oscura fotográfica: P la placa que recibe las imágenes de los objetos colocados delante de la lente objetivo y en el campo de la misma: uno de estos objetos AB, presentará en la placa su imágen invertida *ab* (226), que será recibida en la parte inferior al centro *c* de la misma placa. Si suponemos que el aparato gira alrededor de un eje vertical, en cada una de sus posiciones se fijará una nueva imágen superpuesta á la anterior; pero si al mismo tiempo girase la placa alrededor de un eje horizontal, las imágenes se formarían en distintos puntos de ella, no habiendo por lo tanto superposicion. Si todavía el aparato estuviese dispuesto de manera que una revolucion completa alrededor de su eje general de rotacion, se verificase exactamente en el mismo tiempo que la revolucion completa de la placa al de su eje particular, lo que se consigue por el engranaje de dos ruedas dentadas de igual diámetro, *r*, *r'* (fig. 379; lám 26), una horizontal y otra vertical, movidas por una manivela, el ángulo formado por dos objetos verticales, cuyas imágenes habrán tomado en la placa la direccion de dos rádios, será igual al ángulo azimutal recorrido.

Se comprende que del mismo modo se pueden determinar tambien en sus posiciones relativas las direcciones de todas las líneas que unen el punto de estacion con los puntos del terreno, ó con los objetos que se quiera considerar en una revolucion completa del aparato.

Las direcciones de los rádios que representan estas líneas, se determinan por medio de una cerda vertical, colocada en el plano óptico del objetivo, y cuya imágen se produce tambien en la placa sensible.

Para evitar la repeticion de las imágenes de un mismo objeto, formadas por el movimiento de la placa, así como la deformacion originada por la curvatura de la lente, las imágenes se reciben á través de un sector *c'de* (fig 380; lám. 26), que se vé en la placa representada de frente en P': *a'b'* es la imágen formada en ella del objeto AB; *c'h* la de la cerda vertical, y *mn* la de otra cerda situada horizontalmente, y que representa la traza del plano horizontal que pasa por el centro óptico del objetivo. El punto de interseccion *r* de las imágenes de ambas cerdas, describe una circunferencia de rádio $c'r$ al cabo de una revolucion completa, á cuya circunferencia son tangentes las imágenes de todas las posiciones de la cerda horizontal.

621. **Descripcion del instrumento.**—En la citada obra se reproduce la descripcion hecha por Mr. Benoît: nosotros solo diremos que la cámara oscura es de las llamadas *de fuelle;* que la distancia focal (224) de la lente se mide por el camino recorrido por un índice ó el cero de un nonius correspondiente al centro del objetivo, á partir del cero de una escala que corresponde á la parte anterior de la placa; y que una brújula de pínulas ó de anteojo se encuentra dispuesta á la parte superior de la cámara, y su plano de colimacion debe coincidir con el determinado por la cerda vertical y el centro óptico del objetivo. Por medio de ella se dirigen las visuales á los objetos que determinan con el de estacion las líneas cuyo ángulo se trata de conocer, y cuyas imágenes aparecen coincidiendo con las de la cerda vertical; pudiéndose observar al mismo tiempo los rumbos de las indicadas direcciones. Si los planos á que nos hemos referido no coinciden exactamente, habrá un *error de declinacion,* que no influye en la posicion relativa de las líneas determinadas (378).

622. **Diferencia entre observacion nadiral y observacion zenital.**—Dispuesto el objetivo de la cámara como hemos indicado, las partes inferiores de las imágenes concurren al centro de la placa; pero si se hallase elevado de manera que la imágen se formase en la parte superior de la misma placa, las más elevadas de los objetos serian entonces las concurrentes al centro; de aquí el nombre de *observacion nadiral* dado á la primera, y de *observacion zenital* á la segunda. Para ejecutar fácilmente una ú otra, el objetivo está dispuesto en un bastidor que puede colocarse en dos posiciones distintas, en una de las cuales se halla enfrente de la parte inferior, y en la otra de la parte superior de la placa.

623. **Uso de la plancheta fotográfica.**—Para hallar el ángulo de dos direcciones dadas, se coloca la cámara fotográfica en el vértice, horizontando por medio de un nivel de aire (83) el tablero sobre que descansa, y preparada convenientemente la placa para la recepcion de las imágenes fotográficas, se dirige la visual por el anteojo ó la alidada al objeto que termina uno de los lados del ángulo, haciendo girar el aparato hasta que la visual se halle dirigida al otro objeto, fijando sucesivamente las imágenes de ambos por los procedimientos que pertenecen exclusivamente al fotógrafo.

El ángulo que forman ambas imágenes, mejor determinado por las de la cerda vertical (620), es el ángulo que se trataba de conocer

Repitiendo la misma operacion para nuevos objetos, se tendrán las direcciones del centro á los objetos determinados, en sus posiciones relativas, análogamente á lo que sucede con los rumbos hallados por medio de la brújula (358), que tambien se pueden obtener al mismo tiempo.

624. El procedimiento que hemos indicado se llama *por sectores fijos sucesivos:* cuando el sector se reduce hasta el extremo de convertirse en

una estrecha abertura que reemplaza á la cerda vertical, y se dá un movimiento al aparato en que se fijan las imágenes de todos los objetos comprendidos en una vuelta entera de horizonte, se dice que se opera *por movimiento continuo*

625. Se vé, por todo lo expuesto, que el instrumento de que nos ocupamos es un goniógrafo (243), y la placa no viene á ser otra cosa que un *trasportador gráfico,* toda vez que en ella están las verdaderas magnitudes gráficas de los ángulos, que pueden construirse por medio de la misma placa en el lugar en que sea necesario representarlos.

La plancheta fotográfica puede, por lo tanto, emplearse para las operaciones topográficas con ventajas sobre la plancheta ordinaria, cuando se trata de obtener gráficamente los valores de los elementos geométricos que constituyen un plano topográfico; pero, á lo menos en el estado actual de este goniógrafo y de su uso, no puede competir con los goniómetros de precision, si se trata de obtener con él ángulos que han de servir de elementos del cálculo.

CAPITULO XII.

Construccion de los ángulos obtenidos con los goniómetros.

Construccion geométrica de los ángulos.—Tablas de las cuerdas.—Uso de las tablas de Francœur.—Tablas de Boudusson.— Tablas de Thiollet.—Formacion de las tablas.—Construccion de los ángulos por los senos naturales.—Construccion de los ángulos por las tangentes naturales.—Tablas de Leterrier.

626. **Construccion geométrica de los ángulos.**—Ya hemos dado á conocer (384 y 498) la manera de formar los ángulos observados con los goniómetros, empleando los trasportadores, y hemos podido observar que cuando en estos no puede apreciarse el valor de los ángulos con el mismo grado de aproximacion que proporciona el goniómetro empleado en el terreno, se dá lugar á errores de consideracion. Para evitar este inconveniente, los geómetras han tratado de hallar medios de trazar los ángulos por construcciones geométricas, y nosotros indicaremos los principales trabajos de esta clase.

627. **Tablas de las cuerdas.**—M. Francœur ha publicado un tratado de *Goniometría* ó arte de trazar geométricamente los ángulos cuya graduacion es conocida, y determinar el número de grados de un ángulo trazado, valiéndose de tablas calculadas que contienen las cuerdas de los arcos correspondientes á los mismos ángulos, en la hipótesis de hallarse el rádio dividido en 10000 partes.

La disposicion de estas tablas, que comprenden las cuerdas de los arcos desde 1′ á 180°, y de los cuales trascribimos á continuacion una pequeña parte, es la siguiente:

Cuerdas de 0 á 12 grados.

M.	0'	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	M.
0	0	175	349	524	698	872	1047	1221	1395	1569	1743	1917	0
1	3	77	52	26	701	75	50	24	98	72	46	20	1
2	6	80	55	29	04	78	53	27	1401	75	49	23	2
3	9	83	58	32	07	81	55	30	04	78	52	26	3
4	12	86	61	35	10	84	58	33	07	81	55	28	4
5	15	89	64	38	13	87	61	35	10	84	58	31	5
6	17	92	66	41	15	90	64	38	13	87	61	34	6
7	20	95	69	44	18	93	67	41	15	89	63	37	7
8	23	98	72	47	21	96	70	44	18	92	66	40	8
9	26	201	75	50	24	99	73	47	21	95	69	43	9
10	29	204	378	553	727	901	1076	1250	1424	1598	1772	1946	10
11	32	07	81	56	30	04	79	53	27	1601	75	49	11
12	35	09	84	58	33	07	82	56	30	04	78	52	12
13	38	12	87	61	36	10	84	59	33	07	81	55	13
14	41	15	90	64	39	13	87	62	36	10	84	57	14
15	44	18	93	67	42	16	90	65	39	13	87	60	15
16	47	21	96	70	45	19	93	67	42	16	89	63	16
17	49	24	98	73	47	22	96	70	44	18	92	66	17
18	52	27	401	76	50	25	99	73	47	21	95	69	18
19	55	30	04	79	53	28	1402	76	50	24	98	72	19
20	58	233	407	582	756	931	1105	1279	1453	1627	1801	1975	20
21	61	36	10	85	59	33	08	82	56	30	04	78	21

Cada llana de esta tabla está dividida en catorce columnas: la primera y la última están encabezadas con la letra M, inicial de minutos, y las intermedias con las anotaciones 0°, 1°, 2°.......... correspondientes á los arcos de un número entero de grados. Líneas horizontales dividen las columnas de 10 en 10' para mayor claridad, á la que contribuye tambien la supresion conveniente de las cifras comunes á los valores consecutivos de las cuerdas.

628 **Uso de las tablas de Francœur.**—El uso de la tabla anterior es muy sencillo. Si se quiere construir un ángulo menor que 90°, de 6° 20' por ejemplo, se hallará la cuerda del arco correspondiente á este ángulo, buscando en la columna encabezada con la notacion 6° el número que se halla en el mismo renglon que el número 20 de las columnas de los minutos. Este número, que es 1105, nos indica que la cuerda del arco de 6° 20', en una circunferencia trazada con un rádio igual á 10000 partes de una magnitud arbitraria, contiene 1105 de estas partes.

Para construir el ángulo, se toma en una recta indefinida la longitud AC (fig 381; lám 26) de 10000 partes tomadas en la escala de trasversales (Acotaciones—16, 17 y 18), y se traza desde C con este rádio un arco indefinido AB Tomando despues una magnitud de 1105 de estas partes, y haciendo centro en A, se trazará otro arco que cortará al primero en un punto B, el cual unido con el C determina el ángulo ACB de 6° 20′.

629. Si el ángulo dado es de 6° 20′ 10″, para hallar la parte correspondiente á los 10″, que no se encuentra en las tablas, se admite en la práctica que *las diferencias de las cuerdas son proporcionales á las diferencias de los arcos correspondientes*, y bajo este supuesto se buscan las cuerdas de los arcos 6° 20′ y 6° 21′, que se diferencian en 1′ ó 60″, y comprenden al ángulo dado, las cuales son 1105 y 1108 La diferencia de estas cuerdas es 3, la del arco menor 6° 20′ de las tablas al arco dado es 10″, y podremos formar la proporcion

$$60'' : 3^p :: 10'' : x = 0,^p 5 :$$

añadiendo este valor á la cuerda del arco menor de las tablas, se tendrá 1105,p 5 para el de la cuerda de 6° 20′ 10″, la cual se tomará en la escala, y se procederá como en el caso anterior.

630. Cuando por el contrario, se tiene un ángulo ACB trazado en el papel, y se quiere conocer su valor en grados, se hace centro en el vértice con un rádio igual á 10000p y se describe el arco AB, averiguando despues en la escala el valor de la cuerda de este arco. Si suponemos que es 1105p, buscaremos en las tablas y en el renglon correspondiente á 0′ el número 1105 ó el inmediatamente inferior á él, que es 1047, y está en la columna encabezada con 6°, descendiendo por ella hasta encontrar el número 1105, que hallándose en la línea horizontal correspondiente á 20′, nos dá para el valor que buscamos 6° 20′.

631. Puede suceder que la cuerda hallada no esté exactamente en las tablas: supongamos que sea de 105 p,5; procederíamos como en el caso general, y encontraríamos los valores 1105 y 1108, que comprenden á la cuerda dada, lo que indica que el ángulo que buscamos está comprendido entre 6° 20′ y 6° 21′, y valdrá por lo tanto 6° 20′ y cierto número de segundos, que valuaríamos hallando la diferencia 3 de las cuerdas consecutivas 1105 y 1108 que corresponden á ángulos cuya diferencia es 1′ ó 60″; y teniendo en cuenta la 0p ,5 que hay entre el valor 1105,5 de la cuerda del ángulo propuesto y la correspondiente al ángulo menor de las tablas, formaremos la proporcion

$$3^p : 60'' :: 0^p,5 : x = 10'',$$

que nos dá el valor 6° 20′ 10″ para el ángulo ACB.

632. Para construir el ángulo de 90°, se traza una semicircunferencia ADC (fig. 382; lám. 26) con el rádio AO de 10000p, y tomando en la

escala la longitud 14142 dada por las tablas para la cuerda del arco de 90°, se hará centro en A ó en C, y se trazará con ella un arco que cortará en D á la semicircunferencia. La recta DO que une este último punto con el centro será la que forma el ángulo de 90°.

Claramente se vé que este procedimiento dá el medio de levantar una perpendicular en un punto de una recta dada, pudiendo comprobarse su exactitud por la circunstancia de tener que resultar iguales AD y DC.

633. Si el ángulo es mayor que 90°, dè 140° por ejemplo, se hallaria del mismo modo la cuerda correspondiente AB (fig 383; lám. 26) de 18794P, que dan las tablas; pero es más conveniente determinarla por la BD del arco suplementario 40°, que es 6840P, en razon á que el punto B no queda bien determinado en el primer caso, por cortar á la semicircunferencia con mucha oblicuidad el arco de rádio AB. Por esta razon se vé que es suficiente que las tablas se extiendan hasta 90°.

634. Las tablas de Francœur pueden servir para la determinacion de los ángulos, asignando al rádio valores diferentes del dè las tablas, y más fácilmente para los que son múltiplos de 10. En efecto, sea AB (fig 384; lám. 26) el rádio de las tablas, BC la cuerda del arco correspondiente al ángulo BAC, y AD el nuevo rádio. Trazando con él el arco DE, podemos hallar fácilmente el valor de la cuerda DE que al mismo ángulo corresponde para el rádio AD; pues los triángulos ADE, ABC son semejantes, y dan la proporcion

$$AB : BC :: AD : DE$$

de la cual resulta:

$$DE = \frac{BC}{AB} \times AD \qquad [1]$$

fórmula que nos sirve para hallar todas las cuerdas para un mismo ángulo BAC y para diferentes rádios.

Ejemplos.—1.° *Se pide la cuerda de 42° para el rádio de 400P.*—Llamando x á esta cuerda, y sabiendo que la del mismo arco en el rádio de las tablas es 7167, sustituyendo en la fórmula [1], se tendrá:

$$x = \frac{7167}{10000} \times 400 = 286{,}68.$$

2.° *Hallar la misma cuerda siendo el rádio de 1000P.*—Se tendrá

$$x = \frac{7167}{10000} \times 1000 = 716{,}7.$$

Para la cuerda del mismo arco siendo el rádio de 100p , encontraríamos 71,67; y en general, para rádios múltiplos de 10 basta colocar convenientemente la coma que ha de separar la parte decimal en los valores que dan las tablas.

635. *Tabla de Francœur modificada.*—Algunos geómetras emplean la tabla que copiamos á continuacion, y contiene las cuerdas de los arcos de 0 á 90°, para los que crecen en progresion aritmética, cuya razon es 10′, siendo el rádio de 100 partes.

Esta tabla está dispuesta como las de logaritmos, con las diferencias de las cuerdas consecutivas en la última columna para evitar el cálculo de las diferencias al tratarse de hallar arcos ó cuerdas que no estén en las tablas (628 y 630). La letra G, ó en las ediciones francesas la D, que encabeza la primera columna, es la inicial de grados.

Tabla de las cuerdas para un rádio igual á cien unidades.

G.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	DIF.
0°	0,00	0,29	0,58	0,87	1,16	1,45	29
1	1,75	2,04	2,33	2,62	2,91	3,20	
2	3,49	3,78	4,07	4,36	4,65	4,94	
3	5,23	5,53	5,82	6,11	6,40	6,69	
4	6,98	7,27	7,56	7,85	8,14	8,43	
5	8 72	9,01	9,31	9,60	9,89	10,18	
6	10,47	10,76	11,05	11,34	11,63	11,92	
7	12,21	12,50	12,79	13,08	13,37	13,66	
8	13,95	14,24	14,53	14,82	15,11	15,40	
9	15,69	15,98	16,27	16,56	16,85	17,14	
10	17,43	17,72	18,01	18,30	18,59	18,88	
11	19,17	19,46	19,75	20,04	20,33	20,62	
12	20,91	21,20	21,48	21,77	22 06	22,35	
13	22,64	22,93	23,22	23,51	23,80	24,09	
14	24,37	24,66	24,95	25,24	25,53	25,82	
15	26,11	26,39	26,68	26,97	27,26	27,55	
16	27,83	28,12	28,41	28,70	28,99	29,27	
17	29,56	29,85	30,14	30,42	30,71	31,00	
18	31,29	31,57	31,86	32,15	32,44	32,72	
19	33,01	33,30	33,58	33,87	34,16	34,44	
20	34,73	35,02	35 30	35,59	35,87	36,16	
21	36,45	36,73	37,02	37,30	37,59	37,88	
22	38,16	38,45	38,73	39,02	39,30	39,59	
23	39,87	40,16	40,44	40,73	41,01	41,30	
24	41,58	41,87	42,15	42,44	42,72	43,00	28
25	43,29	43,57	43,86	44,14	44,43	44,71	

636. **Tablas de Boudusson.**—Mr. Boudusson ha publicado tambien unas tablas que contienen las cuerdas de los arcos de minuto en minuto hasta 180°, siendo el rádio igual á 1000 partes, y su disposicion es la siguiente:

Tabla de las cuerdas para un rádio de mil partes.

		45 grados.			765	37
Minutos.	Cuerdas.	Fracciones		Minutos.	Cuerdas.	Fracciones
1	765	64		31	773	69
2	765	90		32	773	96
3	766	17		33	774	23
4	766	44		34	774	49
5	766	71		35	774	76
...	....	...		...	....	..
10	768	05		40	776	10
		48 grados.			813	47
Minutos.	Cuerdas.	Fracciones		Minutos	Cuerdas.	Fracciones
1	813	74		31	821	70
2	814	00		32	821	97
3	814	27		33	822	23
4	814	54		34	822	50
5	814	80		35	822	76
...	....	....		....	....	....
		90 grados.			1414	21

En la primera columna de la izquierda se hallan los minutos de cada grado: en la segunda las cuerdas de cada número de minutos en la progresion de los números naturales, y en la tercera las fracciones de cada cuerda, cuyo denominador es siempre 100; es decir, que las fracciones son céntimos de la unidad.

Si se desea conocer la cuerda del arco de 45º, se hallará en las tablas 765p ,37. La cuerda del arco de 45º40′ es 776p ,10.

637. **Tablas de Thiollet.**—Las tablas publicadas por este autor están calculadas en la hipótesis de ser tambien el rádio de 1000 partes; comprenden hasta 90º, y los arcos crecen en progresion aritmética, cuya razon es 30′, es decir, comprenden los arcos de 30 en 30′.

En su uso y aplicaciones se sigue el método explicado para las anteriores.

Tabla de las cuerdas para un rádio de mil partes iguales.

Grados y minutos		Cuerdas.	Fracciones.	Grados y minutos		Cuerdas.	Fracciones.	Grados y minutos		Cuerdas.	Fracciones.
0	30	8	73	9	30	162	62	18	30	321	49
1	»	17	45	10	»	174	50	19	»	330	10
1	30	26	18	10	30	183	10	19	30	338	70
2	»	34	90	11	»	191	69	20	»	347	30
2	30	43	63	11	30	200	38	20	30	355	89
3	»	52	35	12	»	209	06	21	»	364	47
3	30	61	08	12	30	217	73	21	30	373	05
4	»	69	80	13	»	226	41	22	»	381	62
4	30	78	52	13	30	235	07	22	30	390	18
5	»	87	24	14	»	243	74	23	»	398	74
5	30	95	96	14	30	252	40	23	30	407	28
6	»	104	67	15	»	261	05	24	»	415	82
6	30	113	39	15	30	269	70	24	30	424	36
7	»	122	10	16	»	278	35	25	»	432	88
7	30	130	81	16	30	286	99	25	30	441	39
8	»	139	51	17	»	295	61	26	»	449	90
8	30	148	22	17	30	304	25	26	30	458	40
9	»	156	92	18	»	312	87	...	...	...	...

638. **Formacion de las tablas.**—Para la formacion de una tabla de las cuerdas, podemos valernos de las tablas de logaritmos de las líneas trigonométricas, haciendo uso del principio establecido (10) por el cual se tiene en la fig. 385 (lám. 26),

$$\text{AD} = 2\text{AE} \quad \text{ó}$$
$$\text{cuerda } 2a = 2 \text{ sen. } a \quad [2]:$$

lo que nos dice que para hallar la cuerda de un arco $2a$ se determinará con auxilio de las tablas el seno de su mitad a, y se le multiplicará por 2.

Para hallar, por ejemplo, la cuerda del arco de 25° 30', se buscará en las tablas de logaritmos de las líneas trigonométricas el que corresponde al seno de 12° 45', cuyo logaritmo es 9,3437973; buscando en la de logaritmos de los números naturales el que corresponde á este logaritmo, y multiplicándole por 2, se tendrá la cuerda pedida. Debemos tener presente que el número hallado está expresado con relacion al rádio dividido en diez mil millones de partes, por lo que suponiendo que se hace el rádio igual á la unidad, se tendrá para valor del seno de 12° 45' el número 0,2206975 tomando siete decimales; y multiplicándole por 2, será 0,441395 el valor de la cuerda del arco de 25° 30' para el rádio 1.

Las tablas de Chevallot dan desde luego el valor 0,2206975 del seno de 12° 45'.

Si hacemos al rádio de las tablas R = 10, la cuerda del mismo arco será 4,41395.

Si R = 100, la cuerda será próximamente 44,14, como puede verse en la tabla modificada de Francœur (635).

639 **Construccion de los ángulos por los senos naturales.**—Para construir el ángulo ABC (fig. 386; lám. 26), conocido que sea su valor en grados, bastará conocer el del seno AD ó CE de dicho ángulo, y tomando una distancia AB igual al rádio á qué la magnitud del seno se refiere, se hace centro en A, y con la magnitud del seno como rádio se traza un arco indefinido *mn*: la tangente BC á dicho arco tirada desde el punto B dará el ángulo ABC.

Para hallar el valor del seno pueden emplearse las tablas de logaritmos de las líneas trigonométricas. Sea, por ejemplo, 25° 30' el valor del ángulo que se trata de construir. Se busca en las tablas el logaritmo del seno de 25° 30', que es 9,6339844, y buscando en las de logaritmos de números naturales el que corresponde á este logaritmo, se le dividirá por 10^{10}: el resultado obtenido 0,4305111, será el seno natural del arco de 25° 30' en la hipótesis de ser el rádio igual á la unidad.

Las tablas de líneas trigonométricas de Chevallot dan desde luego los valores de estas líneas para el rádio 1.

Si el rádio es igual á 10, el seno será 4,305111.

Si el rádio es 100..... 1000..... 10000....., el seno del mismo ángulo será respectivamente 43,05111 ..... 430.5111 ..... 4305,111......

Por consiguiente, puede trazarse el ángulo haciendo AB igual á 1..... 10 ..... 100..... partes de escala, y trazando desde A como centro, y con un rádio respectivamente igual á 0,4305..... 4,305..... 43,05..... partes de escala, el arco indefinido *mn*: la tangente BC á este arco dará siempre el ángulo ABC de 25° 30'.

640. Cuando el valor del ángulo dado se aproxima á 90°, como el ABC (fig. 387; lám. 27), el valor del seno AD se acerca al del rádio AB de las tablas, y no puede trazarse bien la tangente BC. En este caso, se levanta en B una perpendicular BE á la AB, y sobre ella se construye el ángulo EBC complementario del ángulo dado, por el mismo

procedimiento que se construye el ángulo ABC (fig. 386; lám 26).

641. Tambien puede construirse el ángulo pedido, en este como en los demás casos, hallando el coseno del ángulo dado, que es el seno del arco complementario (3), llevándole de B á E (fig 386; lám. 26), levantando E una perpendicular á él, y tomando en ella la magnitud EC del seno del ángulo dado El punto C unido con el vértice B determina la recta CB que resuelve el problema.

642. Cuando no se dispone de tablas de líneas trigonométricas, ya logarítmicas ó naturales, pueden emplearse las tablas de las cuerdas. Si se quiere hacer uso de las de Francœur, por ejemplo, la fórmula [2] establecida (638) nos da, despejando sen. a,

$$\text{sen. } a = \frac{\text{cuerda } 2a}{2} \quad [3];$$

la cual nos dice: que para tener el seno de un ángulo a, se duplica este ángulo, se busca en las tablas la cuerda del arco $2a$, se toma su mitad, y se tendrá el seno del arco a. Para hallar el de 25° 30′ se buscará en las tablas de cuerdas la del arco de 51°, duplo del dado, la cual es 8610: su mitad 4305 es en efecto el seno del arco de 25° 30′ para el rádio 10000 de las tablas de Francœur, despreciando la fraccion 0,111. Una vez conocido el seno, se construirá el ángulo como ya hemos dicho

Cuando el ángulo dado pasa de 90°, se buscarán el seno y el coseno de su suplemento.

643. **Construccion de los ángulos por las tangentes naturales.**— Para construir un ángulo ACB (fig 388; lám. 27) conocido que sea el número de grados de su arco correspondiente AD, bastará hacer centro en C con una abertura de compás AC igual al rádio de las tablas logarítmicas de las líneas trigonométricas, se buscará despues en dichas tablas el logaritmo de la tangente del ángulo dado, y viendo en las de logaritmos de los números naturales el número que corresponde á este logaritmo, se tendrá la tangente natural del ángulo dado Levantando en el punto A una perpendicular AB igual en longitud á dicho número, y uniendo el punto B con el vértice C por medio de la BC, tendremos construido el ángulo ACB que se deseaba. Si el rádio se quiere tomar igual á la unidad, no habrá más que dividir por 10^{10} el número obtenido para valor de la tangente.

Para construir el ángulo AOD $= a$ (fig. 389; lám. 27), que suponemos de 25° 30′, en la hipótesis de ser el rádio la unidad, buscaremos en las tablas de logaritmos de las líneas trigonométricas el logaritmo de la tangente de 25° 30′, que es 9,6784961; veremos en las tablas de números naturales á qué número corresponde, y dividiendo este número por 10^{10}, obtendremos para valor de la tangente natural del ángulo de 25° 30′ la cantidad 0,4769755.

Por medio de las tablas de Chevallot hallaríamos inmediatamente este número buscando en ellas la tangente de 25° 30′

Si el rádio = 10, se tendrá: tangente = 4,769755.
Si R = 100............ la tangente = 47,69755.
Si R = 1000............ la tangente = 476,9755.

Donde vemos que tomando en una línea de la magnitud *Om* igual á tantas partes de escala como tenga el rádio, por ejemplo, 100 partes, levantando en el punto *m* una perpendicular á OA y tomando en ella la longitud *mn* igual á 47,69 partes de dicha escala, se une el punto *n* con el O por medio de la recta OD, y se tendrá el ángulo AOD que se trataba de hallar.

Si el ángulo fuese de 45°, la tangente sería igual al rádio; por consiguiente se haría *mn* igual á *Om*.

Cuando el ángulo fuese el AOE = a' mayor que 45°, la tangente sería mayor que el rádio; y lo que se hace es buscar la tangente de su complemento EOC, y levantando la CO perpendicular á la AO, se toma en ella *Os* igual á la magnitud del rádio, y tirando por el punto *s* una paralela á la AO, se toma en ella la magnitud *rs* igual al número de partes del rádio que corresponden á la tangente del complemento EOC: tirando por los puntos O y *r* la recta EO, tendremos construido el ángulo AOE que se pedia.

Cuando el ángulo pasa de 90° y no llega á 135°, como el AOF = a'', se restará de él 90°, que buscará la tangente correspondiente á la diferencia, y haciendo la construccion citada á la derecha de la perpendicular OC, la tangente sr' nos dará el punto r', por el cuál y el O se tirará la recta OF, con lo que se tendrá el ángulo AOF que se buscaba.

En el caso de que el ángulo pase de 135°, como el AOG = a''' se buscará el valor de su suplemento GOB, que será menor que 45°, y tomando en la prolongacion OB de AO la magnitud O*q* igual al rádio, se levanta la perpendicular *pq* igual á la tangente del suplemento GOB. Haciendo pasar por el extremo de esta perpendicular la recta OG, se tendrá el ángulo pedido AOG.

Si no puede hacerse la construccion en la prolongacion de AO, se hará por la parte inferior de esta recta, como se vé en la figura, y la prolongacion OG de la On' resolverá del mismo modo el problema.

No debe olvidarse que por las tablas de Chevallot se hacen todas estas operaciones con la mayor prontitud.

644. **Tablas de Leterrier.**—Las tablas de Leterrier comprenden las tangentes naturales de los arcos que crecen de minuto en minuto, para el rádio de 500 partes. En ellas se encontrará, por lo tanto, el número 238,49 para la tangente de 25° 30′, que es en efecto el producto que se obtiene multiplicando por 5 el valor 47,698 hallado (643) para el rádio 100.

Tabla de las tangentes naturales para el rádio de 500.

′	25°	Tang			′	25°	Tang		
0		233.15		60	30		238.49		30
1		233.33		59	31		238.67		29
2		233.51		58	32		238.85		28
3		233.68		57	33		239.02		27
4		233.86		56	34		239.20		26
5		234.04		55	35		239.38		25
6		234.22		54	36		239.56		24
7		234.40		53	37		239.74		23
8		234.57		52	38		239.92		22
9		234.75		51	39		240.10		21
10		234.93		50	40		240.28		20
11		235.10		49	41		240.45		19
12		235.28		48	42		240.63		18
13		235.46		47	43		240.81		17
14		235.63		46	44		240.99		16
15		235.81		45	45		241.17		15
16		235.99		44	46		241.35		14
17		236.17		43	47		241.53		13
18		236.35		42	48		241.71		12
19		236.53		41	49		241.89		11
20		236.71		40	50		242.07		10
21		236.88		39	51		242.25		9
22		237.06		38	52		242.43		8
23		237.24		37	53		242.61		7
24		237.42		36	54		242.79		6
25		237.60		35	55		242.97		5
26		237.77		34	56		243.15		4
27		237.95		33	57		243.33		3
28		238.13		32	58		243.51		2
29		238.31		31	59		243.69		1
30		238.49		30	60		243.86		0
		Tang	64°	′			Tang	64°	′

CAPITULO XIII.

Alineaciones.—Trazado y medicion de las líneas en el terreno.

Generalidades.—Determinacion de las líneas accesibles.—Trazado de las líneas en el terreno.—Circunstancias que deben tenerse presentes en la práctica del trazado.—Empleo de los instrumentos angulares.—Prolongacion de las líneas trazadas.—Interseccion de dos alineaciones.—Medida de las líneas.—Cadena.—Uso de la cadena.—Cinta metálica.—Rodete.—Cuerda métrica.—Medios que pueden emplearse para la valuacion aproximada de las distancias.—El paso del hombre y el del caballo.—Odómetro ó cuenta-pasos.—El tiempo.—El sonido.—Bases geodésicas y topográficas.—Medida de la base.—Renglones.—Aparato de Mr Clerc.—Aparato de Porro.—Trasportacion de las líneas.—Resolucion de los triángulos por la geometría.—Problemas.—1.° Dados en el terreno un ángulo, una recta y un punto en ella, tirar por este punto otra recta que forme con la primera un ángulo igual al dado.—2.° Dados un punto y una recta, trazar otra que sea perpendicular á la primera, y pase por dicho punto.—3.° Por un punto dado fuera de una recta tirar una paralela á esta recta.—4.° Dividir una recta dada en un cierto número de partes iguales ó proporcionales.—5.° Dadas dos rectas que se cortan en un punto, trazar por otro invisible desde él la recta que los une.—6.° Dividir un ángulo en dos partes iguales.—Trazado y medicion de las rectas en parte inaccesibles.—Trazado y medicion cuando se conocen los extremos de la alineacion.—Caso en que la línea es de corta extension.—Caso en que la extension de la línea es considerable.—Trazado y medicion de la línea determinada por dos puntos cualesquiera de su direccion.—Prolongacion de las alineaciones en parte inaccesibles.—Trazado y medicion de las líneas completamente inaccesibles.—Problemas acerca de la determinacion de rectas y de ángulos inaccesibles.—Aplicacion de las teorías expuestas á la resolucion de otros varios problemas.

645. **Generalidades.**—Entre todas las líneas que pueden imaginarse en el espacio desde un punto A (fig. 390; lám. 27) á otro B, solo consideraremos ahora las que resultan de la interseccion del plano vertical que pasa por dichos puntos con la superficie del terreno, y con otros planos horizontales ó inclinados.

En efecto, desde el punto A al B se puede considerar: 1.° La línea ondulada AEFB, que es la interseccion del plano vertical de los puntos A y B con la superficie del terreno, constituyendo su perfil (Acotaciones.—124); la que desarrollada se llama la *distancia natural* entre A y B. 2.º La línea recta AB que los une, la cual se llama su *distancia geométrica*, y es la interseccion del plano vertical con cualquiera de los inclinados que pueden pasar por A y B. 3.º La *distancia horizontal*, representada por una de las líneas horizontales AC ó BD tirada por uno de los extremos de AB hasta su encuentro con la vertical, que pasa por el otro extremo; ó bien por una cualquiera GH paralela á las anteriores. Estas líneas son las intersecciones del plano vertical indicado con los horizontales que pasan por A, B, ú otro punto cualquiera H.

La distancia horizontal es la proyeccion comun á la natural y á la geométrica. Estas últimas deben reducirse siempre á su proyeccion horizontal (160), considerando á la distancia natural como compuesta de elementos rectilíneos cuyas pendientes deben conocerse.

Tambien se considera muchas veces en las operaciones de nivelacion la distancia BC del punto B al plano vertical que pasa por el punto inferior A, ó su igual AD, que vá desde este último al plano horizontal de B.

Todas las líneas de que nos hemos ocupado se hallan en el plano vertical de los puntos A y B.

646. Sabemos que la direccion de una recta se obtiene por medio de dos puntos; bien sean sus extremos si es de longitud determinada, bien dos puntos cualesquiera de su direccion si es de longitud indefinida. En el terreno bastará por lo tanto, colocar verticalmente por medio de la plomada un jalon en cada uno de estos dos puntos para tener el plano vertical que ellos determinan, y se obtendrá la *direccion* ó *alineacion de la recta*.

En la mayor parte de los casos se necesitan otros puntos de la línea; ya por ser esta de mucha extension y desigual el terreno, que no permite ver á un tiempo los dos jalones, ó para no separarse de la alineacion al recorrerla. La determinacion de estos puntos tiene lugar por la colocacion de otros jalones, situados entre los que marcan la alineacion ó á continuacion de ella, y cuyos ejes deben hallarse en el plano vertical determinado por estos últimos.

La determinacion de las longitudes de las líneas comprendidas entre los jalones se llama su *medicion*.

El trazado se obtiene valiéndose de los dos jalones de la alineacion para colocar un tercero en su plano vertical; y en general, valiéndose de dos jalones plantados ya para colocar otro cualquiera. Cada uno de los jalones plantados con estas condiciones, se dice que se halla en la alineacion de los dos que han servido para su colocacion, y por consiguiente en la misma alineacion de la recta que se considera.

647. Se dice que un punto es *accesible*, cuando colocado el observador sobre él, puede manejar los instrumentos de que haga uso; y se llama *inaccesible* en el caso contrario.

Una recta se llama *accesible* cuando se puede recorrer en sentido de toda su longitud; ó *inaccesible* en el caso contrario, á causa de hallarse interceptada por obstáculos que lo impidan.

Un punto y una línea accesibles en el sentido que hemos dicho, se consideran á veces como inaccesibles, ya por la posicion que ocupan con respecto al observador, ó bien en virtud de otras circunstancias. Tales serian, por ejemplo, un punto y una línea situados en un campo enemigo; ó á la otra parte de un rio, no teniendo el observador medios de trasladarse á la orilla opuesta.

648. Distinguiremos tres casos en el trazado y medicion de una línea, considerada en cualquiera de los sentidos que hemos indicado:

1.° Que sea accesible; ó lo que es lo mismo, que se pueda recorrer en toda su longitud.

2.° Que en parte sea accesible y en parte inaccesible; es decir, que parte de ella pueda recorrerse y parte no.

3.° Que no pueda recorrerse ninguna parte de ella, ó que sea completamente inaccesible.

649 **Determinacion de las líneas accesibles.—Trazado de las líneas en el terreno.**—Los dos puntos dados que determinan la alineacion pueden ser los extremos de la recta ó dos puntos cualesquiera de ella. Supongamos primero que los puntos A y E (fig. 391; lám. 27) sean los extremos de una línea AE situada en un terreno horizontal ó próximamente horizontal: se plantarán (159) en dichos puntos los jalones a' y e', con lo cual se tendrá determinada la alineacion; para trazar la línea ó marcar otros puntos intermedios en el terreno, se plantará otro jalon c' de manera que la visual $a'\,e'$, dirigida desde uno de ellos a' al otro e', pase por un punto del jalon c', con lo cual este se hallará en el plano vertical de los a' y e' y se obtendrá el punto C del terreno. En efecto, los planos verticales $ACc'a'$ y $CEe'c'$, que tienen comunes la recta Cc' y la visual $a'\,e'$, son un solo y mismo plano vertical $AEe'a'$.

Para situar un cuarto jalon d' intermedio entre los c' y e' que nos dé el punto D del terreno, nos valdremos como antes de los dos c' y e' entre quienes se halla; ó bien de los a' y c' situados á un mismo lado del d'. El primer caso es el acabado de explicar, y en el segundo se hará que la visual $a'c'$ dirigida por los jalones a' y c' pase por un punto del jalon d'. En efecto, los planos verticales $ACc'a'$ y $CDd'c'$, que tienen comunes las rectas Cc' y $a'd'$, serán un solo y mismo plano vertical $ADd'a'$; y los dos planos $ADd'a'$ y $AEe'a'$, que tienen comunes las verticales Aa' y Cc', serán un solo y mismo plano vertical $AEe'a'$; luego los cuatro jalones a', c', d', e' se hallan situados en dicho plano vertical $AEe'a'$.

Al tratarse de colocar un quinto jalon b' y todos los demás que se quiera, nos podremos valer de los dos a' y c', entre quienes se halla, ó bien de los c' y e', situados á uno de sus lados, y en general de dos jalones consecutivos cualesquiera c' y d', situados á un mismo lado del jalon b'. La distancia entre dos jalones es variable, y puede tomarse como tipo la de 80 metros.

650. Cuando la mucha distancia entre los puntos A y E impide el que se perciba desde uno de estos puntos el jalon colocado en el otro, se colocan dos observadores con jalones en dos puntos 1 y 2, proyecciones horizontales de dos puntos del terreno situados entre A y E, los cuales se proyectan en *a* y *e*. El primer observador, que debe ver el jalon fijo en *e*, hará que el segundo mueva el jalon 2 hasta que entre en línea con los 1 y *e*; con lo que vendrá á ocupar la posicion 3. Este hará á su vez que el primero mueva el jalon 1 hasta entrar en línea con los 3 y *a* en la posicion 4. El primer observador hace despues pasar al otro al punto 5 en línea con los 4 y *e*; y así se continúa hasta que los jalones ocupen las posiciones *b* y *d* tales, que dirigiendo la visual desde el *b* á *e*, el jalon *d* se halle en línea recta con ellos, y lo mismo se verifique con el *b* respecto á los *d* y *a*. Entonces los cuatro jalones *a*, *b*, *d*, *e*, que se proyectan verticalmente en a', b', d', e', estarán en un mismo plano vertical, por ser comunes á los planos verticales AD$d'a'$ y BE$e'b'$ las verticales Bb' y Dd'. Se seguirá enfilando nuevos jalones intermedios, valiéndose para ello de los ya colocados.

Si no se hallan dos puntos intermedios desde los cuales puedan verse los jalones colocados en los extremos de la línea, habrá necesidad de trazarla por tanteos con mayor número de jalones.

Este mismo procedimiento se sigue cuando el operador se halla entre los extremos de la línea AE, no pudiendo trasladarse á ninguno de ellos.

651. Si el terreno está en pendiente subiendo, como sucede de E á G, se procederá del mismo modo en el trazado de la línea EG, cuyos extremos se suponen dados, colocando primero un jalon f' próximo al e'. Y si además es muy desigual ó media una colina más ó menos elevada, como tiene lugar entre los puntos dados E y K, y se trata de trazar esta alineacion, podrá suceder que desde uno de los jalones e' se descubra ó no el otro k', segun sea poca ó mucha la curvatura del terreno. En el primer caso, se procede como hemos explicado, sirviéndonos de los jalones extremos para colocar el f' tan próximo como sea necesario, á fin de que la visual $e'k'$ pase por él; se colocará con auxilio de este jalon otro g', y así sucesivamente. En el segundo caso, no descubriéndose desde el e' el jalon k', se sustituirá este por una banderola k'', y hasta se empalmará una con otra si es necesario. Cuando á pesar de todo no es aun visible, se seguirá el método expuesto (650), colocando si es preciso en los extremos las banderolas e'', k'' en vez de los jalones.

Cuando por el contrario baja el terreno, como de N á P, extremos de la recta dada, se dispondrá el jalon intermedio o' próximo al n' del extremo N, á fin de que la visual que va desde n' á p', pase por o'; continuando en la colocacion de los demás como acabamos de dar á conocer. Tambien se puede fijar en el extremo P una banderola p'', que con el jalon n' facilite la colocacion de los intermedios. Si el terreno presenta una hondonada, como sucede de N á T, nos valdremos de los jalones extremos n' y t' para colocar el o' próximo al n', y seguir disponiendo los demás como en los casos anteriores. Tambien se puede enfilar m' con los n' y t', y servirse de m' y n' para continuar el trazado.

Para una hondonada no muy profunda, se colocarán banderolas p'', r'' en los puntos P y R del centro, para comprobar si pasa por ellas la visual dirigida por los jalones extremos n' y t', ó se examinará si la dirigida por los s', t' pasa tambien por los extremos n', o'. Puede empezarse la operacion valiéndose de los jalones intermedios p', r', ó de las banderolas p'', r'', y siguiendo el método que hemos indicado (650).

652. Cuando los extremos de la recta dada están marcados por objetos determinados, como árboles, veletas de las torres, etc., habrá que seguir siempre el procedimiento expuesto (650).

653. **Circunstancias que deben tenerse presentes en la práctica del trazado.**—Al dirigir las visuales con el objeto de observar si un jalon cubre á los demás que se plantan detrás de él, hay que colocarse á cierta distancia del primero, y dirigir á derecha é izquierda visuales tangentes á todos los demás; pues si la observacion se hiciese dirigiendo desde el jalon A (fig. 392; lám. 27) las visuales Aa, Ab, estas se separarian cada vez más, no descubriéndose jalones que, como el C, estuviesen dentro del ángulo formado por ellas y fuera de la alineacion MN.

Deben tenerse jalones y banderolas de diferentes longitudes, para colocarlas segun las desigualdades del terreno, de modo que la visual dirigida por dos de ellos pase por un punto de la parte visible de un tercero, pudiéndose empalmar unos con otros cuando la necesidad lo exija. Si se empleasen jalones encorvados por el uso, ó porque haya necesidad de hacerlos en el campo mismo, donde no siempre es fácil disponer de medios á propósito para obtenerlos con toda perfeccion, deben situarse de modo que el eje curvo se halle en el plano vertical de la alineacion. Este eje se determina en la práctica considerando el pié, el punto medio y la cabeza del jalon.

654. El trazado de las líneas debe hacerse con mucha precision para que resulten exactamente situadas en planos verticales, pues de esto depende en gran parte la exactitud de las operaciones topográficas. En efecto, siendo necesario determinar los lados de los polígonos, y teniéndose que valer en los casos más principales de una sola línea, si se trazasen curvas en el terreno, al reproducir las figuras semejantes en el papel no se podrian obtener los verdaderos resultados. Se evitará siempre que se pueda el empezar el trazado por el medio de la línea, pues es más exacta la operacion cuando se puede trazar desde uno de sus extremos.

655. *Verticalidad de los jalones.*—El *porta-jalon* ó peon encargado de la colocacion de un jalon, debe cogerle con la mano derecha y presentarle bien verticalmente, algo separado del cuerpo, moviéndole á derecha é izquierda segun el sentido de las señales que le haga el observador.

Para plantar bien el jalon cuando el terreno es blando, una vez hallado el punto que aquel debe ocupar, procurará el peon tener el cuerpo bien á plomo, colocándose de modo que dicho punto se halle próximamente en la bisectriz del ángulo que forman los piés: tomando el jalon entonces por más arriba de su centro de gravedad, y presentándole delante de la mitad del cuerpo, le hundirá en el suelo de un solo golpe dado con fuerza. La costumbre de plantar así los jalones, hace que queden verticales ó próximamente verticales, debiendo comprobar su posicion con la plomada, como ya hemos indicado. El mejor medio de comprobacion consiste en separarse á cierta distancia del jalon *ab* (fig. 393; lám. 27) y suspender una plomada *a'b'*, para ver si el hilo le cubre en toda su longitud, rectificando en caso contrario hasta conseguir la verticalidad: se repetirá esta misma operacion en otro sentido con la plomada *a''b''*, y si en las dos queda el jalon cubierto por el hilo estará vertical, pues se hallará coincidiendo con la recta *ab* interseccion de los dos planos verticales *aba'b'* y *aba''b''* (Geom. Teor. 143).

Cuando por ser el terreno duro, ó por cualquiera otra circunstancia no se puede clavar el jalon, despues de determinado el punto de éste, se le sostendrá por medio de piedras, y tambien se pueden usar jalones ligeros cuya punta se clava en una peana cuadrangular de madera de encina de 0,m05 de altura, y 0,m20 de lado.

656. **Empleo de los instrumentos angulares**.—La determinacion de los puntos intermedios en el trazado de una recta cuyos extremos son dados, se facilita extraordinariamente, y se hace con más exactitud, empleando cualquiera de los instrumentos angulares que tienen un anteojo susceptible de moverse en un plano vertical, como la brújula de limbo zenital y el teodolito. Para ello se coloca el instrumento en uno de los extremos A (fig. 394; lám. 27), y se dirige la visual al jalon B del otro extremo. Despues se fijarán jalones intermedios que queden cubiertos por la cerda vertical del anteojo. Conviene tener presente que la línea queda mejor determinada haciendo coincidir el pié del jalon con el cruzamiento de las cerdas del retículo. Los puntos así determinados pertenecen al mismo plano vertical en que se encuentra siempre este último punto, en el que no se hallaria otro cualquiera del jalon, si éste no está exactamente vertical.

La alineacion que se traza puede ser subiendo ó bajando, y atravesar una colina ó una hondonada (figs. 395 y 396; lám. 27); y á pesar de eso, es posible á veces que se vea el jalon B; entonces no habrá más que hacer girar convenientemente al anteojo en su plano vertical, lo mismo que en el caso anteriormente indicado, en que el terreno es próximamente horizontal.

Con la plancheta provista de la alidada de pínulas, y con las escuadras se puede operar igualmente si la distancia AB no es muy grande; en el caso contrario, se puede hacer uso de la plancheta con las alidadas de anteojo.

Cuando se emplea un instrumento de anteojo excéntrico, es preciso colocar el eje óptico en el plano de la alineacion, como se indica al final del párrafo 364 para la alidada de la brújula.

657. En los mismos casos acabados de citar, y más particularmente cuando los extremos no son visibles entre sí, se colocará el instrumento en un punto intermedio auxiliar, desde el cual se divisen dichos extremos; se dirigirá primero el anteojo al jalon A (figs. 397 y 398; lám. 27) despues de haber puesto en coincidencia los ceros de la graduacion azimutal: se hará girar al limbo horizontal del instrumento la cantidad 180°, y si la visual no va á parar al jalon B, se cambiará la posicion del instrumento hasta que se encuentre el punto del terreno desde el cual puedan dirigirse ambas visuales, y en sentido de las cuales se establecerán los jalones intermedios. El mismo método se seguirá cuando en vez de los jalones de los extremos se tengan dos árboles, las veletas de dos torres, ú otros dos objetos determinados cualesquiera.

Con la plancheta y la alidada de pínulas ó con la escuadra, se puede trazar la recta cuando no hay mucha distancia entre los puntos extremos, colocándolas en uno intermedio, dirigiendo alternativamente las dos visuales, y moviendo el instrumento en el sentido conveniente, cuando la segunda visual no va á parar al extremo correspondiente de la alineacion. Si la distancia es mucha, y se usa la plancheta, conviene que la alidada sea la de anteojo; pero al dirigir la primera visual, se trazará una línea de lápiz por el canto de la regla para hacer coincidir con ella de nuevo dicho canto al invertir la alidada para dirigir la segunda visual.

Muchas veces se evita el movimiento de la plancheta colocándola á ojo próximamente horizontal en un punto que equidiste poco más ó ménos de los extremos, y de modo que la alineacion pase por el tablero. Se marcará despues un punto *o* (fig. 399; lám. 28), y haciendo girar á la alidada alrededor de este punto, se dirigirá una visual al extremo A, y se trazará la línea *ab*, haciéndola girar de nuevo alrededor del mismo punto, despues de invertirla si es la de anteojo, dirigiendo la visual al otro extremo B, y trazando la línea *cd*; se divide en dos partes iguales al ángulo *bod*, y poniendo el canto de la regla de la alidada en contacto con la bisectriz *mn*, no habrá más que mover aquella paralelamente á sí misma, hasta que se halle sobre la AB, que es una de sus posiciones, y que no tardará en encontrarse. Cuando no se consiguiese despues de haber movido la alidada todo lo que permite el tablero, la línea AB se hallará fuera de los límites de éste, y habrá que mover toda la plancheta del lado conveniente.

Con la escuadra de reflexion se pueden hallar tambien los puntos intermedios de una línea, segun dijimos (478).

658. Si la línea es de mucha longitud, pero se puede descubrir desde el punto A (fig. 394; lám. 27) el punto B, y si se quiere hacer el trazado desde éste al A, se colocará en este último un instrumento con anteojo, y se dirigirá la visual á B de manera que el hilo vertical cubra exactamente al jalon colocado en este punto. Para colocar otro jalon, acompaña al peon que ha de plantarle otro con un *anteojo de observacion*, para distinguir las señales que hace el operador, y que no se percibirian á simple

vista. El que lleva el jalon le coloca próximamente en la línea, y le mueve á izquierda ó derecha en virtud de las señales que le son trasmitidas por el que está á su lado observándolas con el anteojo. Cuando el jalon se halla cubierto por la cerda, y se advierte la nueva señal hecha con este objeto, se clava verticalmente en el terreno, se rectifica con la plomada, y el que dirige las operaciones comprueba de nuevo si está bien situado. Del mismo modo se irán estableciendo los demás jalones intermedios, caminando hácia el punto A.

En vez del anteojo de observacion se puede hacer uso de una corneta, conviniendo primero en la señal que indica cada sonido, y entonces el la que lleva se coloca al lado del que maneja el instrumento que le indica las señales para que las trasmita al que ha de plantar los jalones. Cuando no se tiene anteojo ni corneta, se podrán trasmitir las señales y plantar los jalones agitando otro jalon en el aire ó un pañuelo blanco, á izquierda y derecha ó de arriba abajo, segun la señal que se quiere indicar; ó bien se colocarán tres ó cuatro hombres unidos en fila, en sentido perpendicular á la línea, y detrás del que observa con el instrumento, los cuales se mueven á izquierda ó derecha, segun las indicaciones de este, para que los descubra el que planta los jalones, y que se desunen y separan á distancia de la línea cuando el jalon se halla cubierto por la cerda.

659. **Prolongacion de las líneas trazadas.**—Supongamos ahora que se tienen dos puntos de la recta, y se trata de prolongar el trazado de la misma en uno de los sentidos de su alineacion ó en ambos. Sean los puntos A y B (fig. 391; lám. 27); se colocarán los jalones a' y b', y por medio de ellos el c' en la alineacion que determinan: valiéndose despues de los b' y c', para alinear el d', y así sucesivamente hasta llegar á E donde cambia el terreno, como en el ejemplo actual en que empieza á elevarse, en cuyo punto se fijará el jalon e' ó la banderola e'' y otro f' próximo al e', continuando del mismo modo hasta el punto K, donde vuelve á cambiar el sentido de la inclinacion del terreno. Para comprobar el trazado, se dirigirá desde un jalon g' situado en la cumbre, una visual que pase por el e' ó la banderola e'', y si pasa tambien por un punto de un jalon d' del terreno llano, los dos planos verticales A$Ee'a'$ y E$Gg'e'$, que tienen comunes la visual y la línea Ee', serán un solo plano vertical A$Gg'a'$. En el punto K se colocará otro jalon k' ó banderola k'' y el l' por medio de estos y el i'; siguiendo el trazado en el terreno llano hasta N. Para comprobar de nuevo, se verá si la visual dirigida por un jalon de la cumbre h' y el k' ó la banderola k'' pasa por un punto de un jalon l' del llano. Próximo al punto N, donde el terreno empieza á bajar, se colocará otro jalon o' por medio de los m' y n', y despues otro p' en línea con los n' y o'; y así se continuará hasta llegar al punto T, donde otra vez cambia el terreno. Si desde N á T no hubiera mucha distancia, se podria situar desde luego el jalon t' por medio de los m' y n', y despues establecer con el auxilio de estos los o' y p'. . . ó bien servirse de los n' y t' (650

para la colocacion de los jalones p' y r' ó las banderolas p'' y r''. Se procederia del mismo modo en caso necesario, para prolongar la recta á la izquierda de los puntos A y B.

660. *Prolongacion de las alineaciones empleando los instrumentos angulares.*—Con el auxilio de los instrumentos que llevan anteojo dispuesto para moverse en sentido vertical, se facilita la prolongacion de una recta: pues si los puntos dados fuesen A y B, situando el eje óptico del anteojo en la alineacion de los jalones a' y b', no habria más que ir colocando otros jalones en el sentido de esta alineacion (656), y supongamos que el h' sea el último que se pueda establecer. Se trasladará el instrumento á H, y dirigiendo la visual por el anteojo al jalon a', se hará girar al nonius del círculo azimutal la cantidad de 180°, ó se invertirá el anteojo entre sus collares, y se continuará el trazado á partir de h' moviendo el anteojo en su plano vertical, y cuidando de poner banderolas en los puntos más bajos P y R. Si la visual no pasase por ellas, se trasladaria el instrumento á N: alineando el anteojo con los jalones anteriores, y haciéndole girar 180° se irian fijando los o', p', r'..... ó bien colocando el instrumento entre N y T, por ejemplo en P, se procederia como en el caso indicado (657), supuesto que los jalones n' y t' estaban ya en la alineacion.

Con la escuadra y la plancheta provista de alidada de pínulas ó de anteojo se puede tambien prolongar una alineacion.

661. Concluido el trazado de la línea desde A hasta Z, todos los jalones que le determinan se hallan en el plano vertical AZ$z'a'$, cuya interseccion con el terreno nos da el perfil ó longitud natural de la línea ABCDE..... siendo az la traza de dicho plano vertical en uno horizontal inferior á todos los puntos del terreno, y por lo tanto, la distancia geométrica ó topográfica entre los puntos A y Z.

Una vez trazada una línea en el terreno, para dejarla señalada se tenderá una cuerda que pase por los piés de los jalones y se clavarán de trecho en trecho en sentido de ella piquetes ó clavos grandes; ó bien se hará un surco con el zapapico, ó se echará cal ú otra materia cuyo color difiera del que presente el terreno.

662. **Interseccion de dos alineaciones.**—Trazadas en el terreno dos líneas que se cortan, se halla su interseccion colocándose el observador en un punto A (fig. 400; lám. 28) de una de ellas AB, y valiéndose de los jalones que la determinan ó de la alidada de un instrumento, esperará el momento en que un peon, caminando en la direccion de la otra alineacion CD, entre en la línea AB; trasladándose el observador entonces á un extremo D, por ejemplo de la CD, hará disponer de la misma manera el jalon en esta línea. Se repetirá la observacion desde A, continuando del mismo modo hasta asegurarse de que dicho jalon ocupa la posicion EO que corresponde á ambas alineaciones. La interseccion buscada será el punto O, junto al cual se acostumbra clavar un piquete P, para indicar el jalon que marca la interseccion de las alineaciones.

Colocados dos observadores, uno en A, y otro en D, resolverian con más facilidad este problema, obedeciendo el peon alternativamente á las señales que le hiciesen. Si se ha cuidado de tender una cuerda en sentido de una de las alineaciones CD, el porta jalon puede recorrerla hasta que un solo observador colocado en A, haga la señal que le indique hallarse en la alineacion AB.

663. **Medida de las líneas.**—Hemos dicho (243) lo que se llama medida de las líneas y su division en *directa* é *indirecta*. La unidad de medida es el metro; pero con el fin de abreviar la operacion y facilitar las anotaciones necesarias para llevar en cuenta las distintas partes de que ha de constar la medida general, se usan las cadenas, cintas y otros aparatos, que no son otra cosa que múltiplos del metro, y que se acostumbra llamar *instrumentos para la medida de las líneas*. Nos ocuparemos por ahora de la medida directa de las líneas accesibles.

664. **Cadena.**—Se compone de eslabones de alambre de hierro no muy grueso, unidos por anillas de lo mismo, á fin de que no sea muy pesada. La longitud *bc* (fig 401; lám. 28) de cada eslabon es de dos decímetros, comprendida entre los centros de las anillas que los unen, y de cinco en cinco eslabones las anillas *d'* son de laton para que se distingan los metros; llevando algunas cadenas unas medallas, tambien de laton, en las que va marcado el número de metros que hay á partir de un extremo de la cadena. La mitad de la longitud de esta se señala por un medio eslabon que pende de la anilla correspondiente, ó con una medalla de mayor tamaño que las que señalan los metros. Terminan las cadenas en ambos extremos por agarraderos dispuestos de manera que la distancia *ab* de su extremo al centro de la primera anilla, compone los dos decímetros que segun hemos dicho hay igualmente entre *b* y *c*. La longitud total de la cadena es ordinariamente de 10 ó de 20 metros. Tambien las hay de metal de estas dimensiones; unas y otras tienen estuches de cuero para el trasporte.

Acompaña á la cadena un juego de diez agujas formadas del mismo alambre que la cadena, y de una longitud variable de 0,^{m}35 á 0,^{m}40, y de 0,^{m}004 de diámetro, aguzadas por un extremo *a* (fig. 402; lám. 28), y terminadas en el otro *b* por una anilla de 0,^{m}03 á 0,^{m}04 de diámetro; pero es preferible el empleo de un juego de once agujas, como veremos más adelante.

665. *Verificaciones y correcciones de la cadena.*—El uso hace que la cadena aumente de longitud, por alargarse las anillas que unen los eslabones, ó disminuya encorvándose estos por los golpes que suelen recibir; variando tambien en virtud de las influencias atmosféricas.

Para comprobar su longitud, se marca con toda precision en un terreno llano, y mejor en el suelo ó en un muro de un edificio, la longitud exacta que deba tener la cadena, y se compara esta de cuando en cuando con el marco ó patron establecido. Para corregirla si ha aumentado de longitud, se cerrarán bien las anillas que unen los eslabones, y si no es suficiente, se encorvarán ligeramente uno ó algunos de estos, ó se quitará alguno de los anillos; pero esta última correccion no es exacta por corresponder solamente á una parte de la cadena: por lo que es más conveniente la primera que hemos indicado, cerrando tambien los anillos en que los eslabones terminan. Si ha disminuido la longitud, se recorrerán todos los eslabones para rectificar los que hayan podido torcerse.

666. **Uso de la cadena.**—Para medir una línea AB (fig. 403; lámina 28), que supondremos en un terreno llano y próximamente horizontal, son necesarios dos peones; despues de contadas las agujas, rectificada la cadena y quitados todos los nudos que se suelen formar al extenderla, se clava una aguja en el extremo de la línea; los dos peones cojen la cadena por sus extremos, colocándose todo lo posible en direccion de la alineacion; para lo cual el más inteligente, que marchará detrás dirigiendo la medida, despues de haber entregado al otro las diez agujas restantes, coloca el extremo de la cadena en contacto con la que se ha clavado en el punto A, y hace señas al segundo para que entre en la línea: bien tendida la cadena horizontalmente, el segundo peon clava verticalmente en el terreno una aguja que enrase con el extremo de aquella.

Hecho esto, el primer peon coje la primera aguja colocada en el extremo de la línea, y levantando ambos la cadena, con el objeto de no tropezar á la segunda aguja, dan un paso á la derecha ó izquierda de la línea, y siguen marchando en direccion de aquella hasta que el primer peon llega á la segunda aguja; entonces coloca el agarradero de la cadena de modo que enrase con esta aguja, y teniendo cuidado de no moverla, hace entrar en línea al segundo peon; clava este la tercera aguja como hemos dicho, y cogiendo el primer peon la segunda, teniendo siempre cuidado de no cogerla hasta que el otro haya puesto la suya, se continuará la operacion de la misma manera, hasta que el segundo peon haya clavado las diez agujas que llevaba, cuidando de no levantar la última aguja clavada, para no perder el punto donde concluye la medida; y debiendo tener recogidas el primero diez agujas, resulta que segun que la cadena es un decámetro ó dos decámetros, se habrán medido uno ó dos hectómetros.

El primer peon apunta en un cuaderno la medida, entrega despues al segundo las diez agujas, y en el terreno queda clavada la que marca el punto hasta donde se ha medido. A partir de este se repite de nuevo la operacion explicada, hasta llegar al extremo B de la línea. En la última *tirada ó cadenada*, despues de contadas las agujas recogidas por el primer peon, se verá el número de eslabones comprendidos entre la última y otra que el segundo peon clava donde termina la línea, para añadir al número de hectómetros los decámetros, metros y dobles decímetros que resulten. Si además hubiese una fraccion de eslabon, se apreciaria por medio del doble decímetro de madera ó marfil que se lleva en el bolsillo, y que con este objeto los hay que pueden doblarse por medio de una charnela. Tambien hay metros de bolsillo de marfil, de ballena y de boj ó metal.

Cuando solo se hace uso de diez agujas, no se puede colocar una en el punto de partida, y cuando se han clavado todas hay que levantar la última para entregárselas todas al segundo peon, quedando así sin fijar estos puntos, con exposicion de que no salga tan exacta la medida y presentándose dudas muchas veces acerca del punto en que termina, á causa de no hallarse marcado como lo está por la última clavada cuando se emplea el juego de once agujas. Aun cuando en los extremos de la línea haya jalones, como sucede casi siempre, es mejor quitarlos y colocar agujas; y como además hay que levantar las de los puntos donde concluyen los hectómetros, es mejor usar, como decimos, el juego de once agujas que el de diez que está tan generalizado.

Ejemplo de una medicion.—Supongamos que en la medida de una línea se haya empleado la cadena de la longitud de un decámetro, que el peon que va detrás haya recogido y apuntado cuatro veces las diez agujas, y que al final tenga tres, habiendo además una fraccion de cadena compuesta de cuatro eslabones y una parte de eslabon valuada en $0,^{m}13$; resultará para el valor de la línea

$$100^{m} \times 4 + 10^{m} \times 3 + 0,^{m}2 \times 4 + 0,^{m}13 = 430,^{m}93.$$

667. *Diferentes medios adoptados en la práctica para procurar la exactitud en la medida de las líneas.*—Para facilitar el uso de la cadena se sirven algunos de bastones atravesados por un perno de hierro, representado en la fig. 404 (lám. 28), á fin de que la cadena descanse en él, y armado de un regaton en su parte inferior. Estos bastones hacen el efecto de palancas al extender la cadena, y permiten operar con más comodidad, no teniendo que tomar el operador una postura tan violenta.

La exactitud de la medida de las líneas depende en gran parte de las precauciones que se toman para ejecutarla; pues es necesario que la direccion de la recta se halle perfectamente determinada por el suficiente número de jalones, para no separarse de ella en toda la extension que deba medirse; que la cadena se halle bien tendida y tirante, y las agujas bien verticales y en contacto con sus extremidades.

Es necesario mucho cuidado en todos los detalles de la medicion para no cometer errores; pues el descuido en hacer los apuntes en el cuaderno cada vez que se han clavado las diez agujas, produce errores de 100^{m}. Si cada vez que el primer peon entrega las agujas al segundo, no hay cuidado de contarlas, la pérdida de una aguja causaria un error de 10^{m}, que repitiéndose en los decámetros ó dobles decámetros sucesivos, sin poderse averiguar cuándo ha empezado á cometerse, inutilizaría por completo la medicion. Si los peones, ó al menos uno de ellos, no son muy inteligentes, es conveniente que dirija y presencie la operacion el encargado de ella, y aún que la verifique él mismo.

Con el fin de obtener la medida de la línea con más exactitud, sobre todo en los parajes que presentan dificultades, se repite la operacion dos ó tres veces y en sentidos contrarios; y si los resultados obtenidos no son iguales, como sucede generalmente, se sumarán todos y se dividirá la suma por el número de veces que se ha hecho la medicion; el resultado expresará la medida de la línea (Aritm. 211. Nota *b*). Tambien puede tomarse la menor de todas las medidas, pues suele ser la más exacta, en atencion á que no es posible obtener dos iguales de una misma línea por no tener siempre los peones igualmente tirante la cadena en ambas operaciones. De aquí resulta, que la medida que se obtiene suele ser casi siempre mayor que la verdadera; pues cuanto menos tirante se halle la cadena, es menor la unidad de medida, y mayor el número de veces que se hallará contenida en la línea cuya longitud se trata de determinar. Por el contrario, cuanto más tirante se halle la unidad de medida, mayor será ésta y menor el valor hallado, acercándose más al verdadero. Por consiguiente, debe preferirse el menor resultado obtenido, cuando no se sospecha la existencia de otros errores que los que son inherentes al procedimiento empleado.

668. *Medida de las líneas inclinadas.*—Cuando la línea que se mide no es próximamente horizontal, puede medirse con la inclinacion que tiene, siguiendo enteramente la marcha explicada, aplicando la cadena al terreno; ó bien puede medirse disponiéndola horizontalmente. En el primer caso será necesario reducir al horizonte la distancia medida (160); y en el segundo se obtendrá desde luego la proyeccion horizontal.

Para esto último, sea AD (fig. 405; lám. 28) la línea cuya proyeccion A'D se trata de conocer; se hace que un extremo de la cadena descanse siempre en el terreno como en A, y para clavar la aguja en el punto B, que es la proyeccion del otro extremo *b* que no está en contacto con el terreno, se hace uso de otra aguja que debe acompañar tambien al juego de las once y que en su parte inferior lleva una esfera (fig. 406; lám. 28) ó tiene la disposicion que se indica en la fig. 407 (lám. 28), á fin de que su peso haga que puesta en la posicion vertical, recorra esta línea y se clave bien en el terreno cuando se la abandona á su propio peso; debiéndola quitar despues y sustituirla por una de las agujas ordinarias para continuar la operacion.

Tambien se puede hacer uso del perpendículo para determinar la proyeccion del extremo de la cadena.

La posicion horizontal que esta última debe tener en la medida de las rectas inclinadas, puede obtenerse, juzgando de ella á simple vista, hábito que se adquiere con la práctica; pero es preferible tomar en la cadena una longitud *ab* (fig. 408; lám. 28) de cuatro eslabones, y fijar en sus extremos *a* y *b* un cordon con un peso *d* en su punto medio. De *c* pende una plomada *p*, y la cadena estará horizontal cuando el hilo de la plomada enrase con el peso *d*.

Algunas veces se hace uso de caballetes para sostener la cadena.

669. El producto del número de metros que tenga la longitud de la cadena por el que indica las veces que se haya colocado, dará el valor de la distancia horizontal A'D (fig. 405; lám. 28) entre los puntos A y D. Cuando es muy rápida la pendiente hay á veces que medir con la mitad de la cadena, á fin de que esta se pueda colocar horizontalmente; y tal puede ser la disposicion del terreno, que haya que ir tomando sucesivamente fracciones de cadena; en cuyo caso debe seguirse, para evitar errores, la marcha que vamos á indicar: supongamos que la distancia A*b* es de 3 metros; el peon que va delante recoje la aguja clavada en B, y el que va detrás toma la cadena á los 3 metros para medir la B*c*, que supondremos de 4 metros; vuelve á cojer aquel la misma aguja, y el que va detrás toma la cadena á los 7 metros, para medir de C á *d* los tres restantes. La aguja clavada en D permanece en este punto para marcar el decámetro medido y partir de él, siguiendo la marcha que exija la disposicion del terreno.

Las distancias horizontales A'B', B'C', C'D', obtenidas por los procedimientos indicados, son las proyecciones respectivas de las porciones AB, BC, CD de la línea AD, y su suma A'D la proyeccion de la misma línea.

670. **Cinta metálica**.—Es un resorte de acero empavonado de la longitud de 10 ó de 20 metros, siendo su ancho de 0m,016, y su grueso y temple tales que se la puede arrollar con facilidad para el trasporte; no presentando inflexiones ni dobleces cuando hay que extenderla para hacer uso de ella. Se hallan señalados los metros con discos *l* (fig. 409; lámina 28) de metal amarillo, de 0,m015 de diámetro unidos á la cinta, siendo sus centros, que se hallan bien marcados, los puntos de division; para señalar los dobles decímetros lleva otros discos *e* de 0,m008 de diámetro, y los decímetros se marcan tambien por medio de unos agujeros pequeños *d* taladrados en la misma cinta y de 0,m002 de diámetro. Una plancha *s* en figura de rombo indica con la interseccion de sus diagonales, que debe estar bien marcada, el punto medio de la cinta.

El agarradero *(m, m')* en que termina por cada uno de sus extremos, forma parte del último doble decímetro, como se ve en la figura; de modo que la longitud total de la cinta, inclusos los agarraderos, es la que le hemos asignado desde luego. En las caras extremas de los agarraderos, y en sentido de su longitud y latitud, lleva dos canales semicilíndricas perpendiculares entre sí, y cuyo diámetro es igual al de las agujas que acompañan tambien á la cinta. La longitud del primer doble decímetro se hace variable por medio de un tornillo de paso muy pequeño que une el agarradero con la cinta, y que se puede fijar invariablemente cuando se quiera por medio de una tuerca *t*.

671. *Verificaciones y correcciones*.—Se verifica como la cadena (665), comparando su longitud con el patron elegido de antemano, cuya confrontacion es más fácil de hacer que con la cadena. Se corrige en virtud de los tornillos, alargando ó acortando, segun convenga, los dobles de-

címetros extremos, y apretando fuertemente las tuercas cuando marca la longitud exacta que debe tener.

672. *Uso de la cinta metálica*.—La marcha de las operaciones en la medida de una recta es la misma que la explicada para la cadena (666); advirtiendo que las agujas se colocan en las canales que presentan los agarraderos; pues de este modo la medida es la que existe entre los centros de las agujas, que representan los verdaderos puntos del terreno (fig. 440; lám. 28). El uso de esta cinta presenta ventajas sobre el de la cadena; pues aunque expuesta como esta á alterarse por las variaciones atmosféricas, es menor la alteracion, hallándose exenta de la producida por alargarse los anillos ó torcerse los eslabones como en la cadena; se corrige mejor como hemos visto, y es mucho menor el pandeo que experimenta cuando hay que ponerla horizontal por la naturaleza del terreno: resultando por lo tanto con más exactitud la medida.

673. **Rodete**.—Es una cinta de hilo de longitud variable, barnizada y dividida en metros, decímetros y centímetros, con la expresion de los números que indican las divisiones de los metros y decímetros. El primer decímetro se halla dividido en milímetros, y antes de él hay un pequeño trozo que está en blanco y termina por una sortija de metal. La cinta está arrollada dentro de una caja cilíndrica de cuero (c, c') (figura 441: lám. 28) alrededor de un eje metálico e, que pasa por el centro de la caja y lleva en su extremo un pequeño manubrio (m, m'), el cual sirve para arrollar la cinta introduciéndola en la caja por una abertura lateral que presenta el canto de la misma; sirviendo para desarrollarla la anilla (a, a'), que no puede pasar por la abertura.

Esta unidad de medida se emplea lo mismo que la cadena y cinta de acero: es más cómoda que estas; pero tiene grandes inconvenientes por su poca duracion, sus más frecuentes variaciones en sentido longitudinal, y la imposibilidad de usarla en terrenos algo húmedos, que quitándola el barniz y borrando la numeracion la inutilizan por completo. Sin embargo, es preferible su uso en circunstancias dadas, y se aplica de contínuo para obtener las dimensiones de las obras de fábrica. Debe confrontarse la cinta y rectificarse con frecuencia.

En el comercio se encuentran cintas francesas é inglesas de 10, 15, 20, 25, 30 y 40 metros de longitud. Para evitar los inconvenientes de la humedad se usan rodetes ingleses de cinta de acero de 20 y 25 metros, con la graduacion métrica marcada por un lado y los piés castellanos por el otro. Tambien los hay franceses, de acero empabonado, de 5 y de 10 metros, é ingleses con la cinta de trama de hilo y alambre.

674. **Cuerda métrica**.—En la medida de las líneas puede hacerse uso de una cuerda de cáñamo de 20 á 25 metros de longitud, y á fin de que sea invariable y no se acorte con la humedad, se prepara torciendo sus hebras hácia distintos lados, sumergiéndola en un baño de aceite hirviendo, pasándola por cera derretida despues de seca, y encerándola bien por último. Puede usarse despues con toda confianza, pues así pre-

parada no se contrae aun cuando permanezca un dia entero dentro del agua. Las divisiones que han de marcar los metros se obtienen cosiendo trozos de cinta blanca, en los que se marcan los números correspondientes.

675. **Medios que pueden emplearse para la valuacion aproximada de las distancias.—El paso del hombre y el del caballo.—** En el párrafo 193 hemos indicado el empleo del paso como unidad de medida, el modo de hallar su relacion con el metro y la formacion de la escala correspondiente. Cuando no se quiere emplear tiempo en determinar la relacion del paso con el metro, puede tomarse como relacion aproximada que tres pasos ordinarios equivalen á dos metros; de donde resulta que 1200 pasos equivalen á 800 metros.

Siendo métrico el paso del caballo, basta contar el número de pasos dados para obtener la distancia recorrida. Tambien se obtiene por medio de la rueda de un carruaje, multiplicando el desarrollo de su circunferencia por el número de vueltas dadas al recorrer la distancia.

676. **Odómetro ó cuenta-pasos.—**Este instrumento, de la forma y tamaño de un reló de bolsillo, presenta en su muestra varias circunferencias divididas en diez partes iguales, numeradas de 0 á 10. Una manecilla correspondiente á cada circunferencia se mueve con una velocidad diez veces menor que la que le precede, y todas funcionan en virtud del movimiento de una péndola, movida á cada paso de una persona ó de su caballo. Para hacer uso del odómetro, cuando se quiere averiguar el número de pasos que dá una persona, se coloca al costado sujetándole á la cintura con una correa, y la péndola se asegura al muslo del mismo costado; produciendo cada paso una oscilacion en la péndola y una unidad de movimiento en la primera manecilla en virtud de la construccion del instrumento, la cifra señalada en esta circunferencia indicará las unidades, en la siguiente decenas, porque su manecilla recorre una division á cada diez de la anterior, en la otra centenas, y así sucesivamente; de modo que si antes de emprender la marcha se ponen en *cero* todas las manecillas, y al detenerse se observan las cifras que señalan, no habrá más que escribirlas unas á continuacion de otras, y resultará el número que indique los pasos andados. El paso del caballo es métrico, y para averiguar los que dá se fija el instrumento en la parte exterior de una pistolera y la péndola en el pretal. Tambien se puede colocar en el costado de un carruaje, poniendo un clavo en el cubo de la rueda de modo que tropiece á la péndola en cada vuelta. Con este instrumento se evita el inconveniente de perder la cuenta de los pasos por distracciones del observador ó por cualquier otra causa.

677. **El tiempo.—**Conocida la velocidad v, que es el espacio recorrido en la unidad de tiempo, se tendrá el espacio e recorrido en el tiempo t por medio de la fórmula

$$e = vt.$$

Este procedimiento se emplea con frecuencia en los itinerarios. Conocida la distancia que en una hora, por ejemplo, recorre el caballo al trote, y la que anda al paso en el mismo tiempo, bastará anotar el que se emplea sucesivamente caminando de una y de otra manera, para multiplicarle por la velocidad respectiva. La suma de ambos productos será la distancia *e*. Este valor debe disminuirse en $^1/_7$ en los terrenos llanos ó poco accidentados, para compensar el aumento de longitud debido á las vueltas y recodos del camino; y en $^1/_5$ cuando el terreno es muy accidentado, para tener además en cuenta el aumento producido por las pendientes.

Se valúa ordinariamente en 10 decámetros, 15 y 25 las velocidades respectivas del peaton, el caballo que camina al trote y el que marcha en posta

678. **El sonido.**—La uniformidad de la propagacion del sonido dá tambien otro medio para la valuacion de las distancias. La experiencia ha dado á conocer que el sonido recorre una longitud de 337 metros por segundo, cualquiera que sea su intensidad: multiplicando 337 por el número de segundos trascurridos desde el momento en que un observador colocado en uno de los extremos de la línea que se trata de medir percibe el fogonazo de un arma de fuego disparada en el otro extremo hasta que oye el ruido del disparo, se tendrá la medida de la línea.

Cuando se emplean las pulsaciones para la valuacion del tiempo, será necesario disminuir en $^1/_4$ el producto obtenido.

La velocidad del sonido varía por la accion del viento, cuando este sigue la direccion de la línea que se mide, en una cantidad que puede llegar á 10 metros para los vientos ligeros y á 30 para los fuertes; aumentándola ó disminuyéndola segun vaya en el mismo sentido que el ruido del disparo ó en sentido contrario.

Puede evitarse el tener en cuenta esta alteracion, por una observacion recíproca, hecha antes de que pueda haber variado el estado de la atmósfera, tomando un término medio entre los resultados obtenidos.

679. **Bases geodésicas y topográficas.—Medida de la base.**—Por mucho que sea el esmero con que se mida una línea sobre el terreno, son tantas las causas que pueden motivar errores, que se puede asegurar no ser posible obtener su valor exacto. Esto há hecho que los geómetras eviten todo lo posible la medida de las líneas, en términos que se concretan á la determinacion de una sola recta en una cuestion dada, y hacen depender de ella los valores de las demás con el auxilio de la resolucion de triángulos por medio del cálculo. Esta línea principal recibe el nombre de *base*, y se comprende la necesidad de medirla con todo el cuidado posible, tomando las precauciones más minuciosas. La base es *geodésica* ó *topográfica*, segun las operaciones que han de depender de su medida.

680. *Bases geodésicas.*—En las operaciones geodésicas se consideran superficies de mucha extension, y hay que tener en cuenta la esfericidad de la tierra, la refraccion atmosférica, las variaciones de temperatura y

otra porcion de circunstancias, por cuya razon la medida de la base conduce á la adopcion de precauciones y cálculos, cuya descripcion nos llevaría más allá de los límites naturales de una obra de Topografía. Nos concretaremos, por lo tanto, á remitir á nuestros lectores á las interesantes noticias que inserta Vallejo en el tomo 1.°, parte 2.ª de su tratado elemental de Matemáticas, en el párrafo 665, en el que describe las operaciones practicadas en la expedicion ya citada (40), que en compañía de los académicos franceses hicieron D. Jorge Juan y D. Antonio Ulloa, para la medicion de un arco del meridiano terrestre, y á la Memoria publicada de Real órden por la Comision del Mapa de España, acerca de las experiencias hechas con el aparato de medir bases, perteneciente á la misma Comision, por los señores D. Cárlos Ibañez y D. Frutos Saavedra, y de la medicion de la base de Madridejos, provincia de Toledo, que tambien verificaron en union con D. Fernando Monet y D. Cesáreo Quiroga. La medicion de esta base de 14 kilómetros y medio de longitud, y la construccion y preparacion del aparato, las minuciosas y delicadas precauciones empleadas haciendo uso de los recursos que proporcionan los adelantos de las ciencias físico-matemáticas, y los prolijos cálculos que han ejecutado, dan una gran importancia á estos interesantes trabajos, que tanto honran á sus ilustrados autores.

681. *Bases topográficas.*—En las operaciones topográficas en que las superficies que se consideran son más limitadas, y en las que no se tiene en cuenta la esfericidad del globo, no es necesario obtener con tanta exactitud la medida de la base; debemos advertir sin embargo que el cuidado que algunas operaciones exigen, la extension ó la importancia que tienen, y el uso frecuente que en ellas se hace en la actualidad de los instrumentos geodésicos, hasta el punto de no poder señalarse distintamente la línea divisoria entre las operaciones geodésicas y las topográficas, ha dado lugar á la adopcion de aparatos destinados á proporcionar la medida de las bases con bastante exactitud, de los cuales nos ocuparemos con algun detenimiento.

Observaremos con este objeto, que á pesar de las precauciones que se adopten, no se puede conseguir la perfecta horizontalidad de la cadena ó de la cinta cuando el terreno es inclinado, ni tampoco impedir el pandeo por completo; y con el fin de evitar estas causas de error, es conveniente emplear en la medida de las bases reglones de pino, de hebra recta, los cuales se barnizan para evitar las influencias atmosféricas; si bien las variaciones de longitud, que es lo esencial, no son sensibles en la madera.

Las reglas ó reglones metálicos que se han empleado otras veces en vez de las de madera, están por el contrario muy expuestas á las variaciones de longitud debidas á las alteraciones de la temperatura, y es conveniente indicar la manera de llevarlas en cuenta, observando en cada posicion de la regla, ó á lo menos de tiempo en tiempo, su longitud exacta deducida de la temperatura t, que en el momento de la observacion marca el termómetro centígrado. Sea l la longitud de la regla á 0°; l' la que le corresponde á la temperatura t; y k el *coeficiente de dilatacion* que corresponde al metal de que se halla formada la regla, ó el aumento constante que experimenta por cada grado entre 0 y 100° la unidad de longitud de la regla: esta unidad á los $t°$ habrá tenido un aumento representado por kt, y toda la regla habrá aumentado en ktl; se tendrá entonces para la regla una longitud

$$l' = l + ktl = l\ (1 + kt).$$

Si suponemos que la regla es de platino, cuyo coeficiente de dilatacion es 0,000008845; que su longitud á 0° es 5m, y se quiere saber la que le corresponde á 12°, se tendrá:

$$l' = 5\ (1 + 0{,}000008845 \times 12) = 5{,}0005307.$$

682. **Reglones.**—Los reglones que se usan para la medida de líneas de poca extension, tienen la forma octogonal, como se vé en la fig. 412 (lám. 28); su longitud es de 4 metros y se hallan divididos en decímetros. En sus extremos llevan unas rodajas de hierro r con una ranura en sentido de su diámetro para colocar el hilo de la plomada. Se puede tender una cuerda á lo largo de la línea, que debe estar señalada por jalones para que sirva de guia en la medicion, y dos peones la ejecutan con dos reglones iguales. Para esto colocan en el punto de partida A (fig. 413; lámina 28) el extremo del primer reglon; uno de los peones le mantiene fijo en esta posicion, y hace que el otro le coloque sobre la línea con el auxilio de uno de los jalones que la señalan; colocado este primer reglon, toman el segundo y le colocan del mismo modo á continuacion del primero, procurando no tocar á éste y poniéndole cuidadosamente en contacto con él. Se levanta despues el primero para colocarle del mismo modo á continuacion del segundo, que queda fijo, y así se continúa hasta llegar al extremo B de la línea.

En los terrenos inclinados se mide la AB (fig. 414; lám. 28), valiéndose de las agujas (figs. 406 y 407; lám. 28) ó de la plomada, y del nivel de aire que se coloca encima de los reglones.

683. **Aparato de Mr. Clerc.**—Se compone de dos reglas (r, r') (figura 415; lám. 29) de forma rectangular, de madera fuerte y resistente, que se barnizan despues de impregnadas en aceite hirviendo; su longitud es de 4 metros, ó mejor de 5, para adelantar tiempo en la medida; y á fin de que su longitud no sea un obstáculo para el trasporte, se pueden doblar por su mitad en virtud de charnelas (c, c'): una plancha de hierro se asegura á cada regla por cuatro tornillos de union e (317) cuando ha de hacerse uso de ella, formando entonces una sola pieza. Están divididas en metros, decímetros y centímetros, y en una de sus extremidades b llevan un semi-cilindro de acero de generatrices horizontales, y

en la otra el *d* de generatrices verticales, con el objeto de que al colocar ambas reglas en una misma línea, el cilindro horizontal de una de ellas sea perpendicular al vertical de la otra, y el contacto tenga lugar en un punto El cilindro vertical va unido á una lengüeta dividida en milímetros, que se ve en la proyeccion horizontal, la cual se introduce en la regla, y puede moverse en sentido horizontal aflojando el tornillo (*t*, *t'*); fijándola cuando convenga con sólo apretar el mismo tornillo: de este modo, al colocar las reglas se puede dejar un pequeño intervalo, y se establece el contacto por el movimiento del cilindro vertical y su lengüeta, evitando así el choque de las reglas, que pudiera separarlas de la posicion que deben ocupar. Los mismos cilindros tienen unas ranuras en sentido de la generatriz más saliente, destinadas á dar paso al cordon de una plomada, á fin de que pueda colocarse el extremo de la regla en la vertical que pasa por el punto medio de un piquete de los que marcan la direccion de la línea; para más exactitud en la medida, pudiera ir provista la lengüeta de su correspondiente nonius. La longitud asignada á cada regla se cuenta entre las generatrices extremas de ambos cilindros, cuando se halla introducida en la regla toda la lengüeta que acompaña al vertical.

Las reglas pueden correr en sentido de su longitud entre unas dobles cajas (*a*, *a'*), y fijarse á ellas por los tornillos de presion *s* (318), así como pueden tambien correr los piés *p* en sentido de su longitud, y fijarse á las cajas por los tornillos (*z*, *z'*) Por medio de estos movimientos independientes, y de un nivelito de aire *n* que se coloca sobre las reglas, se disponen éstas perfectamente horizontales. Las reglas tienen marcados los números 1 y 2, y los piés derechos llevan unos regatones cilíndricos de hierro terminados en punta, para que sólo ésta se introduzca en el terreno; teniendo en uno de sus lados el estribo *h*, que sirve para apoyar el pié y sujetar el aparato cuando se quiere elevar la regla. Pueden tambien sostenerse los piés derechos y mantenerse con mayor estabilidad en la posicion vertical, valiéndose de los trípodes ó caballetes representados en la fig. 416 (lám. 29).

Sobre las reglas, y en sentido de su longitud, se pueden disponer dos pínulas ó un anteojo con movimiento vertical, y valerse de los jalones que marcan la direccion de la línea, para la colocacion de las reglas en sentido de ésta; ó bien se tiende una cuerda de un jalon á otro con el mismo fin. Las reglas empleadas por Delambre y Méchain en las operaciones geodésicas de Francia eran de metal, y los ingleses han hecho uso de tubos de vidrio.

684. *Uso del aparato.*—Supongamos en primer lugar que se trata de medir una línea en un terreno horizontal. Marcada la línea y bien determinada su direccion, son necesarios cinco hombres para verificar la medida: el que dirige la operacion, dos peones que se encargan de la regla número 1, y otros dos de la regla núm. 2 Los que llevan la regla número 1 la colocan en sentido de la longitud de la línea, de manera que el extremo que lleva el cilindro movible se halle próximo al punto de par-

tida A (fig. 415; lám. 29), en el cual se ha clavado un piquete cuyo centro se halla señalado por un clavo de cabeza cónica. El que dirige la operacion la hace entrar en línea, valiéndose de cualquiera de los medios explicados, y despues de puesta horizontal, hace mover el cilindro vertical, hasta que el vértice de la plomada coincide con el del clavo del piquete.

Se dispone un estado ó registro con tres columnas: en la primera se coloca el núm. 1 de la regla; en la segunda el núm. 5, que indica la longitud de la misma, y en la tercera la fraccion señalada por la lengüeta, que suponemos es 0,m025. Durante esta operacion, los dos peones que llevan la regla núm. 2, la colocan en sentido de la línea á continuacion de la núm. 1 y algo separada de ésta: el que dirige la operacion pasa á ponerla en línea y horizontal, y mueve el cilindro vertical hasta su contacto con el horizontal de la núm. 1, que han de sostener perfectamente en su posicion primitiva los dos peones encargados de ella. Hecha la lectura y escrito en la primera columna del registro el núm. 2, dejando en blanco la segunda columna por ser constante la longitud de la regla, y poniendo en la tercera la fraccion 0,04 que señala la lengüeta, el que dirige la operacion da un empuje hácia atrás á la regla núm. 1, para separarla de la número 2 sin tocar á ésta, despues de haber introducido la lengüeta; los que la sostienen la levantan del suelo dando un paso hácia atrás y empiezan á marchar paralelamente á la regla núm. 2, hasta que pasada ésta, la aproximan á la línea colocándola á continuacion de la núm. 2 con las mismas precauciones que se colocó ésta con respecto á la núm. 1, y se procede de este mismo modo durante toda la operacion, haciendo en el registro los apuntes correspondientes. Al llegar al otro extremo B de la recta, se aprecia la fraccion de la última regla disponiendo una plomada que enrase con el extremo de la línea, y valuando con el doble decímetro de bolsillo la fraccion del último centímetro. Para no equivocarse, se escribirá en el registro en la segunda columna, y al frente del número de la última regla colocada, la fraccion de ésta 2,m658 que se ha obtenido, para indicar que no se ha de tomar en cuenta la longitud total; siendo la 0,m056 que se halla en la tercera columna la última de la lengüeta.

1	5	0,025
2	»	0,040
1	»	0,034
2	»	0,012
1	2,658	0,056
		0,167

Para mayor claridad haremos aplicacion á una línea AB (fig. 417; lám. 29) de muy corta extension, que es suficiente para nuestro objeto, disponiendo el registro como se vé al márgen. Para valuar la longitud de la recta medida, se multiplicará el número 5m por el que indica las veces que haya tomado la longitud total de la regla, añadiendo á este producto la fraccion de la última regla y la suma de las lecturas de las lengüetas: de modo que en el ejemplo que proponemos se tendrá:

$$5^{m} \times 4 + 2,^{m}658 + 0,^{m}167 = 22,^{m}825$$

Cuando el terreno es inclinado como en este caso, puede suceder que al disponer una de las reglas no se pueda colocar el cilindro vertical en contacto con el horizontal de la anteriormente colocada, por lo elevada que esta se halla, como tiene lugar en la segunda posicion de la regla núm. 1; entonces se hace el contacto del cilindro de la lengüeta con una plomada pendiente del extremo a de la regla anterior.

Si á pesar de hallarse el extremo de la regla horizontal en contacto con el terreno, uno de los piés derechos b no llegase al suelo por la mucha pendiente, se aproximará todo lo necesario al otro hasta que descanse en el terreno, valiéndose como antes de la plomada para el contacto de los cilindros.

685. **Aparato de Porro.**—La regla dividida es en este aparato una varilla cilíndrica de pino, impregnada en aceite y cuidadosamente barnizada, que ocupa el interior de un tubo metálico, en el que se mantiene por anillos de corcho concéntricos. Tanto la regla como el tubo están divididos en tres partes A, B, C (fig. 418; lám. 29), que se unen enchufándolas unas en otras constituyendo una sola regla de 3,^{m}07 de longitud. Los extremos de esta regla se apoyan por unos soportes s en las mesetas de unos trípodes, á los que Porro dá una forma especial, que permite situar sus distintas partes en la posicion conveniente por el movimiento de un solo tornillo; y el tubo tiene una contra-curvatura tal, que el eje de la varilla queda entonces perfectamente en línea recta.

Un nivel m, provisto de su tornillo de correccion t, está graduado de manera que la suma de las lecturas hechas en las divisiones marcadas por los extremos de la burbuja en cada posicion de la varilla dá el valor del ángulo zenital correspondiente á su inclinacion, expresado en grados centesimales. A la posicion c (fig. 419; lám. 29) de la burbuja, en que su centro ocupa el medio del tubo ab marcado con el núm. 50, corresponde el valor $i = 48° + 52° = 100°$, que en la graduacion centesimal indica la posicion horizontal del eje de la varilla. En la c' se tiene $i = 43° + 47° = 90°$.

Cada grado se halla dividido en 10 partes, apreciando así los ángulos zenitales de 10 en 10'. Otro nivel n (fig. 418; lám. 29) sirve para disponer convenientemente el tubo en el sentido perpendicular á la longitud de este último.

La varilla termina por ambos extremos en unas lengüetas l planas, de metal blanco, divididas de dentro afuera en milímetros y décimas de milímetro. La distancia entre los ceros de ambas divisiones es constante, y debe determinarse préviamente con toda exactitud.

686. *Microscopios.*—Forman parte del aparato tres microscopios acromáticos, llamados por el autor *megáscopos panfocales*, en razon á que pueden ser puestos en foco á todas las distancias á que se hallan los objetos, desde cero hasta el infinito. Los primitivos microscopios no gozaban de esta propiedad, que facilita mucho las operaciones. El eje óptico del anteojo m (fig. 420; lám. 29), que constituye realmente el microscopio, puede variar de inclinacion entre los brazos en que des-

cansa, girando en dos sentidos diferentes por medio de los tornillos t.

El z sirve para hacer variable la distancia entre el ocular y el objetivo, á fin de que se formen en el foco las imágenes de los objetos. El retículo tiene cinco hilos paralelos, que constituyen el aparato micrométrico destinado á la lectura de las divisiones que presentan las lengüetas de la regla. Otro hilo perpendicular á ellos, determina en su interseccion con el central de los primeros el cruzamiento, que debe hallarse en el eje óptico.

La columna a en que se apoya el microscópio termina en su parte superior por un semi-objetivo simple situado de modo que la prolongacion de su plano pase por el eje óptico del anteojo; está provisto de una escala e dividida en milímetros, la cual puede quitarse cuando conviene ó girar alrededor de uno de sus extremos; y descansa sobre una plataforma que se puede horizontar por medio del nivel n.

El cero de la escala e debe corresponder al punto en que su prolongacion corta á dicho eje óptico, y la division correspondiente al centro óptico de la semi-lente señalar 125 milímetros.

Este aparato es susceptible de verificaciones y correcciones, disponiendo verticalmente el eje de la columna a por el nivel n y los tornillos de la plataforma (402), dando despues la misma posicion al eje óptico del microscopio por los tornillos t, observando un nivel esférico, que para esta operacion se hace sustituir al ocular.

687. *Uso del aparato.*—Para la medida de una base se empieza por determinar claramente sus extremos clavando piquetes, ó mejor sillares, sólidamente fijos en el terreno, sobre los cuales se señalan las intersecciones de dos líneas delgadas que se practican en un boton metálico empotrado en cada uno de los sillares. Estos puntos de interseccion determinan á su vez la base que se traza por completo con jalones.—Se coloca el trípode núm. 1 sobre el punto que marca el origen de la base y sobre él el microscopio, de modo que la direccion de los brazos que sostienen el anteojo sea perpendicular á la línea que se trata de medir en lo que puede juzgarse á la vista; disponiendo verticalmente el eje óptico del microscopio por los tornillos de la plataforma, y de modo que el cruzamiento de las cerdas del retículo cubra el punto que señala el orígen de la base, lo que se verifica á través de un taladro circular que presenta la meseta del trípode. A tres metros próximamente de distancia, que se determinan por una varilla suelta que acompaña al instrumento, se disponen del mismo modo en un punto de la base el trípode y el microscopio núm. 2, y despues se coloca sobre los trípodes la regla dividida de modo que las lengüetas queden debajo de los microscopios. Entonces se puede determinar la longitud de la varilla comprendida entre las verticales correspondientes á dichos ejes ópticos, añadiendo á la constante entre los ceros, que designaremos por C, las letras a, b hechas en las lengüetas. Cada una de estas lecturas se obtiene dividiendo por 5 la suma de las que marcan los cinco hilos del micrómetro. La longitud l será por lo tanto igual á $C + a + b$

Colocando el trípode núm. 3 y su microscopio á continuacion del número 2, de la misma manera que se colocó este con respecto al primero, y colocando la regla debajo de los microscopios 2 y 3, se obtendrá la nueva lectura $l' = C + a' + b'$; y pasando el núm. 1 á continuacion, se tendrá asimismo $l'' = C + a'' + b''$.

688. *Determinacion de la constante de la varilla.*—Esta constante, que segun hemos dicho (685) debe determinarse cuidadosamente, se obtiene colocando en primer lugar los trípodes y microscopios núms. 1, 2 y 3, de modo que los cruzamientos de las cerdas estén en línea recta, lo que se asegura tendiendo un cordon debajo de ellas, y equidistantes exactamente en un metro, para lo que se usa un patron de platino en el que esta magnitud esté perfectamente señalada. Despues se pasa el trípode núm. 2 con su microscopio á continuacion del núm. 3, para obtener del mismo modo otro punto de la línea á un metro de distancia. Entonces el cruzamiento de las cerdas del microscopio núm. 2, en esta nueva posicion, determina con el del núm. 1 la longitud exacta de 3 metros, en una línea horizontal, porque el patron debe haberse colocado siempre horizontalmente por medio de un nivel de aire. Se coloca la varilla debajo de estos microscopios, y se hacen las lecturas a y b de las lengüetas; colocándola de nuevo en distintas posiciones se hallan sucesivamente las a' y b', a'' y b''.... en tanto mayor número n de ellas cuanto mayor sea la exactitud que se trata de conseguir; los términos medios

$$\frac{a + a' + a'' + \dots}{n} = l, \quad \text{y} \quad \frac{b + b' + b'' + \dots}{n} = l'$$

serán las porciones de las lengüetas comprendidas entre sus ceros correspondientes y las posiciones de los microscopios; por lo que se tendrá

$$l + C + l' = 3 \text{ metros}:$$

de donde resulta la magnitud de la constante

$$C = 3^m - (l + l').$$

689. *Reduccion al horizonte.*—Para hallar la distancia horizontal entre las verticales de los microscopios extremos en cada posicion de la varilla, se hace la suma de las graduaciones marcadas por los extremos de la burbuja, con lo que se tendrá el valor del ángulo zenital, y se multiplica el seno de este ángulo, que hemos llamado i, por la longitud calculada de la varilla. Esta longitud reducida L estará dada por la fórmula

$$L = (C + a + b) \text{ sen } i.$$

Otra lo estaría por

$$L' = (C + a' + b') \text{ sen } i',$$

y así sucesivamente.

Se multiplica la longitud hallada por el seno del ángulo, y no por el coseno (160), en atencion á que el ángulo de que se hace uso ahora es el zenital, complemento del de elevacion ó depresion que dará la pendiente de la varilla.

La longitud total de la línea medida será la suma

$$L + L' + L'' + \ldots$$

690. *Correccion del paralelismo de las reglas respecto de la base.*—La suma obtenida, como acabamos de decir, está afectada de un error debido á que cada una de las cantidades L, L′, L″ .... se ha determinado en una direccion que no es exactamente paralela á la de la base, resultando así una línea quebrada, horizontal y mayor que ella en longitud. Se comprende que proyectando sobre la base (Geom. 42) los distintos elementos L, L′, L″ .... de esta línea quebrada, la proyeccion total que así resulte será la verdadera medida de la base.

Para determinar la proyeccion de cada elemento se dispone préviamente en la alineacion de la base una ó más plomadas de cordones bastante gruesos suspendidas de caballetes elevados, y se dirige la visual al cordon de una de las plomadas que se halle de las más lejanas, por un anteojo de mano que se coloca de modo que su objetivo quede en parte cubierto por el semi-objetivo director del microscopio más distante de la plomada: esta visual, que segun las leyes de la óptica, pasa por el centro óptico del semi-objetivo, corta á la escala *e* (fig. 420; lám. 29) del otro microscopio, en una graduacion que aparece coincidiendo con el cordon de la plomada. La diferencia, que designaremos por d, entre esta graduacion y los 125^{mm} que marca el centro óptico, es uno de los catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es el elemento L, y el otro cateto la proyeccion p que se busca; tendremos por lo tanto

$$p = \sqrt{L^2 - d^2};$$

que se convierte en

$$p = \sqrt{(L + d)\ (L - d)},$$

mejor dispuesta para el cálculo logarítmico.

691. **Trasportacion de las líneas.**—Se dice que una línea AB (figuras 107 y 108; lám. 9) del terreno se trasporta al papel, cuando por el

empleo de una regla ya comprobada (Geom. 33) se traza en el plano otra línea *ab*, de modo que forme con la *ns*, que representa la meridiana, el ángulo que marca el rumbo de la AB en el terreno, y que tenga una longitud que represente con arreglo á la escala adoptada, la que tiene dicha línea del terreno. Cuando se han de trasportar las varias líneas que componen el contorno de un polígono, despues de situar la primera como hemos dicho, para situar la segunda *bc*, se hará por medio de los trasportadores, que forme con la primera *ab* el mismo ángulo *abc* que la BC del terreno forma con la AB, dándola despues la longitud que con arreglo á la escala la corresponda, y así sucesivamente, con lo cual resultará tambien trasportado el polígono.

Análogamente á lo que hemos indicado para la plancheta (450), las letras mayúsculas puestas en una figura ó citadas en ella, representarán en lo sucesivo puntos del terreno, y las minúsculas correspondientes sus homólogas en el papel, acentuando unas y otras segun convenga.

Cuando citemos una letra mayúscula, tratándose de la plancheta, que no se halle en la figura, pero sí la minúscula correspondiente con acentos ó sin ellos, se entenderá siempre que se habla del punto del terreno en cuya vertical se halla indicado por dichas letras minúsculas. Otras veces convendrá escribir juntas las dos letras mayúscula y minúscula.

Cuando en el uso del mismo instrumento se quiera expresar que una línea *ab* se ha de situar en el plano vertical de otra AB del terreno, usaremos indistintamente de las expresiones *orientar la línea* ab *con la* AB *ó declinar la línea* ab *sobre la* AB.

Para abreviar se llama á la línea *ab* la proyeccion de la AB, y al polígono *abcdef* la proyeccion del ABCDEF, aunque es, como ya hemos dicho, la figura semejante á la proyeccion horizontal del polígono del terreno.

En la trasportacion de las líneas, lo más cómodo y más exacto es valerse de los juegos de escalas de madera ó de marfil (490), adaptando su borde á la línea trazada en el papel, colocando la *línea de fé* ó el *cero* en el punto que ha de representar el extremo de la línea, y haciendo una señal con una aguja ó la punta muy fina de un lápiz en la division que señala la longitud que ha de tener dicha línea. Para más precision se puede tambien hacer uso de escalas dispuestas con su correspondiente nonius.

Á pesar del cuidado que se ponga en las operaciones gráficas, siempre se cometen errores; y por otra parte, los instrumentos no permiten apreciar cantidades tan pequeñas como se quiera. En el papel es inapreciable la magnitud $^1/_{10}$ de milímetros ó $0^m,0001$, y aun $0^m,0002$. Estos errores, constantes siempre en el papel, cualquiera que sea la escala que se adopte, alteran las dimensiones naturales cuando se quieren deducir de las gráficas, y recíprocamente.

En efecto, sea AB (fig. 421; lám. 29) una línea del terreno que pudiera considerarse aislada, ó constituyendo un lado de un polígono; al trasportarla al papel, en vez de tener su homóloga la ab, que suponemos ser su representacion exacta, se cometerán los errores dichos por exceso ó por defecto, y tendríamos la ab' ó la ab'', siendo el error $bb'=bb''$. Este error produciria al querer establecer en el terreno la AB el $BB'=BB''$, y la línea establecida sería AB' ó AB''. Recíprocamente, al medir la AB en el terreno, no se obtendrá en el papel la ab sino la ab' ó la ab''.

Habrá, pues, necesidad de resolver las dos cuestiones siguientes:

Siendo $\frac{ab}{AB'}=\frac{bb'}{BB}$, la relacion [1] (188) se convertirá, llamando D y d los errores ó diferencias de las apreciaciones en el terreno y en el papel, en

$$\frac{d}{D}=\frac{1}{M} \text{ de donde } d=\frac{D}{M}, \text{ y } D=dM.$$

Siendo d constantemente igual á $0^m,0001$, ó á lo más á $0^m,0002$, la expresion $D=dM$ se convertirá en

$$D=0^m,0001\times M=0^m,000M$$

lo que nos dice que conocido el error gráfico constante, se le ha de multiplicar por el denominador M de la escala adoptada para obtener el error D con que resultará la línea al reproducirla en el terreno; y por lo tanto, no pudiéndose apreciar las cantidades gráficas menores que d, al medir la línea AB no se deberán tener en cuenta las magnitudes menores que $D=0^m,000M$.

Ejemplo.—Siendo $d=0^m,0001$, y la escala $\frac{1}{500}$, tendremos:

$$D=0^m,0001\times 500=0^m,05.$$

Luego en la escala de $\frac{1}{500}$ no se pueden apreciar longitudes inferiores á medio decímetro; luego estas se despreciarán en la medida de las líneas en el terreno.

Si $d=0,^m0001$, y la escala $\frac{1}{1000}$, se tendrá:

$$D=0,^m0001\times 1000=0,^m1$$

Si $d = 0,^m0002$, y la escala $\frac{1}{500}$ .... $D = 0,^m0002 \times 500 = 0,^m1$.

Si $d = 0,^m0002$ y la escala $\frac{1}{1000}$ .... $D = 0,^m0002 \times 1000 = 0,^m2$.

Donde se ve que para un error gráfico constante, el natural aumenta tanto cuanto mayor es el denominador M de la escala, ó lo que es lo mismo, cuanto menor es esta.

692 Al contrario, si se quiere averiguar cuál ha de ser la escala que debe adoptarse para que los errores gráficos correspondan á cantidades que no excedan del error dado en las dimensiones naturales, despejaríamos el denominador de la escala M en la ecuacion $D = dM$, y tendriamos $M = \frac{D}{d}$; lo que nos dice que habrá que dividir el error, de que no se quiere pasar en las dimensiones naturales, por el error gráfico.

Si $D = 0,^m05$, y $d = 0,^m0001$, se tendrá:

$$M = \frac{0,^m05}{0,^m0001} = 500; \text{ luego la escala será de } \frac{1}{500}.$$

Si $D = 0,^m1$, y $d = 0,^m0001$ .... $M = \frac{0,^m1}{0,0001} = 1000$;

luego la escala será de $\frac{1}{1000}$.

Si $D = 0,^m1$, y $d = 0,^m0002$ .... $M = \frac{0,^m1}{0,^m0002} = 500$;

luego la escala será de $\frac{1}{500}$.

Si $D = 0,^m2$, y $d = 0,^m0002$ .... $M = \frac{0,^m2}{0,^m0002} = 1000$;

luego la escala será de $\frac{1}{1000}$.

Donde vemos que para un error gráfico constante, cuanto mayor es el error natural, es mayor el denominador de la escala ó menor esta.

693. Cuando se han de medir ó trasportar varias partes AB, BC, CD (fig. 422; lám. 29) de una recta, unas á continuacion de otras, convendrá lo mismo en la medicion que en la trasportacion, partir siempre del

mismo orígen A; pues de este modo el error de medicion ó trasportacion originado en cada una, no se acumulará al de la anterior, y ambas operaciones se aproximarán más al resultado verdadero. Además, un error de medicion ó de lectura de la escala en la determinacion de una de las rectas dadas no afectará tampoco á las siguientes.

694. **Resolucion de los triángulos por la Geometría.**—Sabemos que en la Trigonometría se resuelven los triángulos por el cálculo, valiéndose de las tablas de logaritmos de las líneas trigonométricas, y hemos enseñado además á resolverlos por medio de las tablas de las líneas naturales. Habiendo tratado despues de la medicion de rectas y ángulos, tenemos todos los medios para determinar los datos en virtud de los cuales y de las fórmulas establecidas se obtiene el conocimiento de las demás partes del triángulo. La resolucion por Geometría consiste en trasportar las líneas y ángulos dados al papel, por medio de las escalas y trasportadores, verificando así la construccion geométrica del triángulo, y hallando despues el valor de las otras partes por medio del trasportador y la escala adoptada. Expondremos sucesivamente los casos que suelen ocurrir en la práctica.

Primer caso.—Dados los lados AB y AC (fig. 423; lám. 29) *y el ángulo comprendido* A, *hallar el tercer lado* BC *y los otros dos ángulos* B *y* C.

Se construye en el papel un triángulo abc haciendo que el ángulo a sea igual al A por medio del trasportador, y que los lados ab y ac representen en la escala adoptada las longitudes de los AB y AC. Se miden despues con el trasportador los ángulos b y c, y tomando la longitud bc en la escala se tendrá resuelto el triángulo.

En efecto, el triángulo abc es semejante al ABC, pues si m y n son los números de unidades que contienen respectivamente AB y AC, m y n serán tambien los números de partes de escala de ab y ac, y se tendrá $\frac{AB}{AC}=\frac{ab}{ac}$; y como es el ángulo $a=A$, estos triángulos tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo comprendido, de donde resulta que el tercer lado bc tendrá tantas partes de escala como unidades tenga BC, y los ángulos b y c serán iguales á los B y C.

En dos triángulos que son semejantes, basta que un lado del uno tenga tantas partes de escala como unidades su homólogo en el otro triángulo, para que los otros dos lados del primero tengan tambien tantas partes de escala como unidades los otros dos lados del segundo, homólogos á los del primero; pues si m, n y p son los números de unidades de los tres lados del triángulo ABC, y m', n', p', los de partes de escala de sus homólogos del triángulo abc, se tendrá $\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}=\frac{p}{p'}$; y si se supone como hemos dicho $m=m'$, resultará $n=n'$ y $p=p'$.

695. *Segundo caso.—Dados un lado* AC *y los ángulos adyacentes* A *y* C, *hallar los otros dos lados* AB *y* BC *y el tercer ángulo* C.

Se construirá un triángulo *abc* en el papel, cuyo lado *ac* tenga tantas partes de escala como unidades el lado AC, y por medio del trasportador se harán los ángulos *a* y *c* iguales á los A y C: resultará que dicho triángulo será semejante al ABC por tener dos ángulos iguales. No habrá más que tomar en la escala las longitudes *ab* y *bc* para saber el valor de AB y BC, y medir el ángulo *b*, ó deducirle restando de 180° la suma de los *a* y *c*.

696 *Tercer caso.—Dados los tres lados* AB, AC *y* BD *del triángulo* ABC, *hallar los tres ángulos.*

Con tres líneas *ab, ac, bc*, que tengan tantas partes de escala como unidades los tres lados AB, AC y BC del triángulo propuesto, se construirá un triángulo *abc*, que será semejante al ABC por tener sus tres lados proporcionales. No habrá más que medir con el trasportador los tres ángulos *a, b, c*, que son respectivamente iguales á los A, B, C.

697. *Cuarto caso.—Conociendo la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo, resolver el triángulo.*

Se construirá en el papel un triángulo rectángulo dando á la hipotenusa y á uno de los catetos tantas partes de escala como unidades tengan estos lados en el triángulo propuesto, con lo cual resultará un triángulo semejante á este, por tener la hipotenusa y un cateto respectivamente proporcionales. No habrá más que tomar en la escala la magnitud del otro cateto del triángulo construido y medir los dos ángulos agudos para conocer estas partes del triángulo propuesto.

698 **Problemas.**—En los problemas de que vamos á ocuparnos, y en todas las operaciones sucesivas, expondremos la resolucion: 1.° con los goniómetros, inclusos los de reflexion; 2.° con la brújula, que aunque considerada como goniómetro, difiere esencialmente de todos ellos en la manera de tomar los ángulos; 3.° con la plancheta; 4.° con las escuadras, inclusa la de reflexion; y 5.° con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones, empleando todos ó varios de los medios comprendidos en este último caso, ó uno de ellos solamente.

Debemos tambien advertir que la cadena ó cuerda, piquetes y jalones, entran siempre como auxiliares al hacer uso de los demás instrumentos.

En los problemas de cuya resolucion vamos á ocuparnos ahora, supondremos que los puntos y líneas de que hablemos son todos accesibles.

699. 1.° **Dados en el terreno un ángulo, una recta y un punto en ella, tirar por este punto otra recta que forme con la primera un ángulo igual al dado.**—Para resolver este problema hay que medir el ángulo dado, y formar otro igual á él sobre la recta, teniendo por vértice el punto dado.

700. *Con todos los goniómetros, brújula y plancheta.*—Se ha expuesto en cada uno de estos instrumentos la manera de medir el ángulo, y la referencia á otro punto del terreno de un ángulo dado. Tambien se ha dicho la manera de trasportarles al papel en cada caso.

701 *Con las escuadras.*—Sea BAC (fig. 424; lám. 29) el ángulo dado,

así como A'C' y A' la recta y punto dados tambien. Mídase una distancia AD, y levántese en el punto D una perpendicular DE, que termine en el otro lado AB del ángulo, la cual se mide tambien. Se toma en el lado A'C' una parte A'D' = AD, se levanta en D' la perpendicular D'E' igual á DE, y uniendo el punto A' con el E' se tendrá formado el ángulo B'A'C'= BAC.

Para trasportarle al papel se formará un ángulo recto, y se tomarán en sus lados con arreglo á escala las partes que han de representar á las A'D' y D'E', y uniendo sus extremos resultará el ángulo igual al B'A'C' que se podrá medir con el trasportador.

702. Si se quiere hallar el valor en grados del ángulo BAC (fig. 424; lámina 29), se medirá á partir del vértice A una longitud AD de 10^m por ejemplo, al extremo de la cual se levantará y medirá la perpendicular DE, que suponemos de $5,^m143$; se tendrá entonces (20)

$$\text{tg. BAC} = \frac{\text{ED}}{\text{DA}} = \frac{5,143}{10} = 0,5143,$$

que corresponde al ángulo de 27° 13'.

Si por el contrario, se quiere construir en A sobre la línea AC el ángulo de 27° 30', se tomará la longitud arbitraria AD y se calculará DE por la misma fórmula Hallando la tangente 0,5143 del ángulo dado, se tendrá:

$$\text{ED} = \text{DA} \times \text{tg. BAC} = 10^m \times 0,5143 = 5,^m143;$$

tomando esta longitud en la perpendicular levantada en D, se tendrá el punto E, que unido con A resuelve el problema.

Si el ángulo es obtuso, se construirá el ángulo suplementario.

703. *Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.*—Clávense tres piquetes ó agujas en el vértice A y en los puntos E y D (fig. 424; lám. 29), tomados á arbitrio uno en cada lado del ángulo, y circunscríbase al triángulo AED una cuerda tirante, señalando en ella los puntos en que toca á los tres piquetes. Dispóngase luego la cuerda de modo que la señal hecha en A esté en A', y atirántese para señalar el punto D en D' en la línea dada y marcar en el terreno el E', que corresponde al E; se tendrá así el ángulo B'A'C' igual al BAC, que se trasportará fácilmente al papel construyendo un triángulo semejante al AED, con tres líneas tomadas con arreglo á escala que representen á los lados de aquel.

Si se quisiese construir en el terreno en el punto A de la AB (figura 425; lám. 30) un ángulo igual al *cab* trazado en el papel, se tomará como rádio una línea *ab* que tenga un cierto número de partes de escala, se trazará el arco correspondiente y se averiguará el valor de la cuerda *bc* en la misma escala. Tomada en el terreno la distancia correspondiente AB, y atando en los puntos A y B dos cuerdas de las longitudes correspondientes á *ac* y *bc*, se extenderán hasta que concurran en C, y se tendrá el ángulo BAC = *bac*.

La trasportacion de un ángulo trazado en el papel á otra parte del mismo plano se hará midiéndole con el trasportador, y formando despues otro igual á él; pudiendo tambien determinarse por medio de la regla y el compás (Geom —Probl. 5)

Todos los problemas que se resuelven por este último medio en la Geometría elemental, pueden ponerse en práctica en el terreno con cuerdas y piquetes, para lo cual no habrá más que hacer oportuna aplicacion de las sencillas construcciones que se acaban de explicar.

704. 2.° **Dados un punto y una recta, trazar otra que sea perpendicular á la primera y pase por dicho punto.**—*Con los goniómetros.*—Sea AB (fig. 426; lám. 30) la recta: si el punto dado E se encuentra en ella, se colocará el goniómetro de modo que su centro se halle en la vertical de este punto; se dirigirá una de las alidadas en sentido de la AB, y formando el ángulo recto en el instrumento, se establecerá un jalon C en direccion de la otra alidada. Solo habrá que tener presente la manera explicada de formar un ángulo dado con cada uno de los goniómetros.

705. Si el punto dado se halla fuera de la AB como el C, se formará el ángulo recto en el goniómetro, se establecerá una de las alidadas en sentido de AB, y se moverá el instrumento en este mismo sentido hasta que se descubra el punto C por la otra alidada, lo mismo que se ha explicado para la escuadra (467); el pié del instrumento determinará el otro punto E de la perpendicular CE.

Cuando C no se puede descubrir desde el punto de la línea AB que debe corresponder á la perpendicular, se tomará otro punto D en la AB, desde el cual pueda verse; se medirá el ángulo BDC, y en el punto C se tomará tambien un ángulo DCE de un número de grados igual al complemento de BDC, con lo que quedará determinada la direccion de la perpendicular CE.

Tambien se puede resolver este problema levantando una perpendicular EF (fig. 427; lám. 30) á la AB, que pase lo más próxima posible al punto invisible C; desde este punto se bajará á la EF la perpendicular CE, que se medirá; tomando despues la FD = CE, y levantando en D la perpendicular DC, esta pasará por el punto C. Cuando no hay necesidad de trazar la perpendicular DC y sí solo conocer su longitud, se medirá desde luego su igual EF. Este problema es de la mayor importancia cuando se opera en los bosques, y se quiere referir un punto C marcado por un jalon ó piquete á la línea AB, desde la cual no se puede descubrir; en cuyo caso un peon colocado en dicho punto dispara un cohete ó un arma de fuego, ó dá una voz fuerte para poder dirigir la perpendicular EF de manera que pase cerca del punto C.

Se puede resolver igualmente formando un triángulo ACB rectángulo en C (fig. 428; lám. 30), midiendo sus tres lados AC, BC y AB, y determinando los segmentos AD y BD por las proporciones

AB : AC :: AC : AD:
AB : BC :: BC : BD.

Una vez determinado uno de estos segmentos, tendremos conocido el pié D de la perpendicular CD. Si se quisiese además conocer su longitud, se obtendría por cualquiera de las proporciones siguientes:

AD : CD :: CD : BD ó AB : BC :: AC : CD

706. *Con la brújula.*—Se seguiría la misma marcha determinando los ángulos por las diferencias de los rumbos (370).

707. *Con la plancheta.*—Se puede operar con este instrumento como con los goniómetros y las escuadras, trazando sobre el papel del tablero dos rectas perpendiculares entre sí, y cuyo punto de interseccion sea el centro del tablero. Tambien se puede trazar una recta en cualquiera parte del mismo, orientar esta línea con la del terreno y referir á esta recta el punto del terreno donde deba levantarse la perpendicular. Levantando en este punto del tablero una perpendicular á la recta trazada en él, y poniendo el canto de la regla de la alidada en contacto con esta perpendicular, se colocarán uno ó más jalones en direccion de la visual

708. Para bajar una perpendicular á la recta del terreno desde un punto dado fuera, se colocará la plancheta próxima al punto que parezca corresponder al pié de dicha perpendicular, se orientará una recta trazada en la plancheta con la del terreno, y se moverá la alidada en sentido perpendicular á dicha recta hasta que se descubra el punto dado; en cuyo caso se marcará el punto de interseccion del canto de la alidada con la línea del tablero, y se levantará en éste una perpendicular á dicha línea; se hará coincidir la línea de fé con esta perpendicular, y si la visual no fuese á parar al punto dado, se hará la coincidencia por medio del movimiento de traslacion del tablero, y se referirá entonces al terreno el pié de la perpendicular para obtener el punto que se deseaba.

709. *Con las escuadras.*—Hemos dicho (466 y 467) la manera de levantar y bajar perpendiculares con este instrumento, y además muchas de las resoluciones dadas con los goniómetros se verifican del mismo modo con las escuadras, que si bien presentan por una parte la ventaja de tener fijo el ángulo recto, en cambio no pueden usarse en todos los casos como aquellos, por el menor alcance y la menor exactitud de las visuales. Para emplear la escuadra de reflexion, véase lo dicho en el párrafo 477

710. *Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.*—Para levantar la perpendicular AC (fig. 429; lám. 30) en el punto A de una recta AB, se tomarán en una cuerda ó cadena las tres distancias consecutivas AB de 4 metros, AC de 3 y BC de 5; se afianzarán los puntos de estas divisiones de modo que formen el triángulo CAB, y se tendrá el ángulo recto CAB

por ser $CB^2 = CA^2 + AB^2$, ó $5^2 = 3^2 + 4^2$. El punto A se coloca en aquel en que se ha de levantar la perpendicular y AB en la línea dada.

Tambien se puede resolver tomando á ambos lados del punto dado D (fig. 430; lám. 30) las distancias iguales AD y DB, y fijando en A y B los extremos de una cuerda, que se pone tirante cogiéndola por su punto medio C, en el que se clava un piquete. Este punto determina con el D la perpendicular pedida.

711. Para bajar desde un punto dado C una perpendicular á la recta EF, se afianzará el punto medio de una cuerda ó cadena ACB en el piquete clavado en C; despues se extenderán las dos partes AC y CB hasta que sus extremos terminen en la EF en dos puntos A y B, que se señalarán en el terreno; se dividirá despues la distancia AB en las dos partes iguales AD y DB, lo que se puede siempre ejecutar marcando en el terreno con un piquete D el punto medio de una cuerda igual á AB: los piquetes C y D determinarán la perpendicular.

La division de la recta AB en dos partes iguales se puede ejecutar cogiendo la cuerda ó cadena por el punto medio C, estando sujeta por sus extremos en los A y B, trasportando el punto C al C′, y clavando el piquete C′ de modo que la cadena quede bien tirante; la recta CC′ determina la perpendicular, y divide además á la AB en dos partes iguales en el punto D.

712. Se puede bajar una perpendicular á la AB desde el punto dado D (fig. 431; lám. 30), marcando con piquetes dos puntos E y F que con el D formen el triángulo DEF, cuyos tres lados se medirán, y tendremos (Geom.—Teor. 72):

$$DE^2 = DF^2 + EF^2 - 2EF \times CF \qquad [1];$$

de donde resulta

$$2EF \times CF = DF^2 + EF^2 - DE^2;$$

y despejando CF,

$$CF = \frac{DF^2 + EF^2 - DE^2}{2EF} \qquad [2].$$

Conocido el segmento CF, se tomará esta distancia á partir de F, y se tendrá el pié C de la perpendiculer DC. Lo mismo se hubiera podido hallar el segmento EC. Aunque de este modo se obtienen directamente los segmentos, la fórmula [2] no es muy á propósito para el cálculo numérico, y se puede trasformar la expresion [1] en la siguiente:

$$DE^2 - DF^2 = EF^2 - 2EF \times CF;$$

de donde

$$(DE + DF)(DE - DF) = EF(EF - 2CF);$$

pero EF — 2CF es la diferencia de los segmentos EC y CF, que llamaremos d, y EF es la suma de los mismos, que llamaremos s; de donde resulta (Alg., pár. 105):

$$EC = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}, \text{ y } CF = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}.$$

713. Si el punto dado fuese el extremo A de la línea AB (fig. 432; lámina 30), que no se puede prolongar á la izquierda de A, se eligirá un punto C, en el cual se clavará un jalon; tomando despues una cuerda de la longitud CA se llevará de C á D, y en sentido de la alineacion CD se tenderá la misma cuerda de C á E; los puntos A y E determinarán la perpendicular.

Tambien se puede resolver (fig. 429; lám. 30) marcando en una cuerda tres partes consecutivas que contengan 3, 5 y 4 unidades, metros por ejemplo; se unirán sus extremos en el punto A, y haciendo coincidir con la AB una de las partes de tres ó de cuatro unidades que constituyen el ángulo recto, se atiranta la cuerda para sujetarla con un piquete en el punto C de las otras dos divisiones, el cual con el A determina la perpendicular AC.

Pudiera resolverse además tirando por un punto E (fig. 433; lámina 30) fuera de la AB las oblícuas EC y AE, y hallando el valor del segmento CD (712), con lo que se tendrá:

$$CA : CD :: CF : CE;$$

se medirá la CF dada por esta proporcion, y se tendrá el punto F de la perpendicular pedida; ó bien se trasformará la proporcion anterior en la

$$CA - CD : CD :: CF - CE : CE;$$

la cual dá directamente CF — CE = FE, que se medirá desde E á F.

La resolucion de este problema en el papel se consigue por medio de la regla y el compás (Geom.—Probls. 1, 2 y 3); ó bien valiéndose de la escuadra (Geom., 39).

714. Cuando en varios puntos, determinados como se ha dicho (693), en una recta trazada en el papel, se quiere levantar perpendiculares, se colocará el canto de una regla en contacto con la recta, y se irá deslizando la escuadra en contacto con ella, deteniendo el movimiento en cada uno de los puntos marcados, para trazar la perpendicular correspondiente, procurando tener bien sujeta la regla durante la construccion. Cualquier error cometido en la determinacion de uno de los puntos de la recta, solo afectará á la posicion de su perpendicular respectiva, no trasmitiéndose á las demás.

El problema que hemos estudiado de bajar una perpendicular á una recta accesible desde un punto accesible, comprende el de *medir la distancia de un punto accesible á una recta accesible.*

715. 3.º **Por un punto dado fuera de una recta, tirar una paralela á esta recta.**—*Con los goniómetros.*—Sea E (fig. 434; lám. 30) el punto y AB la recta. En un punto cualquiera F de la AB se mide el ángulo AFE$=m$, y trasladando el instrumento al E se referirá al terreno dicho ángulo, representado ahora por el FED; colocando jalones en la direccion ED prolongada cuanto se quiera en ambos sentidos, se tendrá la paralela CD. Se concibe que por medio de la teoría de las paralelas este problema se puede resolver de muchos modos.

716. *Con la brújula.*—Se puede resolver de la manera que acabamos de explicar; pero es más breve el método siguiente: se determina en un punto F (fig. 435; lám. 30) el rumbo de la AB, y trasladando la brújula al punto dado E, se traza en el terreno con jalones la recta CD que tenga el mismo rumbo.

717. *Con la plancheta.*—Se resuelve este problema del mismo modo que con los goniómetros, orientándola con respecto á AB (fig. 436; lámina 30) en un punto cualquiera F de esta recta. Dirigiendo la alidada de F á E, se trazará en el tablero la *ef*, y por uno cualquiera *e* de sus puntos, se tirará la *cd*, paralela á *ab*. Trasladando la plancheta al punto E, y orientándola con respecto á *e* y á *ef*, no habrá más que referir la línea *cd* al terreno por medio de jalones.

Tambien puede resolverse con la declinatoria, empleando el procedimiento explicado (451).

718. *Con las escuadras.*—Tírese desde el punto E (fig. 437; lám. 30) la perpendicular EF á la AB, y trasportando la escuadra al punto E y dirigiendo una de las alidadas en el sentido EF, la otra alidada perpendicular á la primera determinará la direccion de la paralela pedida CD. Tambien se puede resolver levantando en otro punto H de la AB una perpendicular, en la que se medirá una magnitud GH exactamente igual á EF, y los jalones colocados en E y G determinarán la direccion de la paralela.

719. *Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.*—*Primer método.*—Fíjense los extremos de una cuerda en dos estacas ó piquetes, colocados uno en el punto dado E (fig. 438; lám. 30), y otro en un punto cualquiera G de la recta dada AB, póngase tirante el resto de la cuerda, llevando uno de sus puntos sobre la AB y sujetándola con el piquete F; se hará una señal en este punto de la cuerda, se desatará de los piquetes E y F, fijando de nuevo el extremo E en el piquete G, y el extremo G en el piquete E; y volviéndola á poner tirante, sujetándola por medio de otro piquete H puesto en la señal que se hizo en el punto F, los E y H pertenecerán á la paralela pedida. Colocando jalones en estos puntos, se podrá trazar por medio de ellos la paralela CD de la longitud que se quiera.

Segundo método.—Desde el punto dado E (fig. 439; lám. 30) trácese una oblícua EF á la recta dada AB; por un punto G tomado en esta recta, y por O medio de EF tírese la GH, tomando con la cadena ó cuerda OH=OG, y los puntos E y H determinarán la paralela CD.

Tercer método.—Por un punto O (fig. 440; lám. 30) tomado á arbitrío y el punto dado E, trácese una línea OF que encuentre á la dada AB trácese tambien desde el mismo punto O otra línea OG, que encuentre á la AB; mídanse con la cadena las tres distancias OF, OE y OG, y la proporcion

OF : OE : : OG : OH

nos dará la longitud OH, que llevada con la cadena en sentido de la OG á partir de O, nos dará á conocer el punto H, que con el dado E determinará la paralela CD.

Por las sombras.—En un punto A (fig. 441; lám. 30) de la recta dada AB, se plantará verticalmente un jalon, y tambien dos piquetes, uno en el extremo F de la sombra del jalon, y el otro en un punto G de la recta AB, y se fijará á los A y F una cuerda que pase por G, señalándola en este punto Se plantará despues el mismo jalon ú otro de igual longitud en el punto dado E, fijando los extremos de la parte EF de la cuerda en este mismo punto y el extremo I de la sombra del jalon; poniendo tirante la cuerda, se marcará con un piquete el punto señalado antes en ella, lo que nos dará el punto H, que con el E determinará la paralela CD pedida.

720. En virtud de este problema se puede resolver de otro modo el que hemos resuelto (650), y tiene por objeto determinar el trazado de una recta desde un punto A (fig. 442; lám. 30) á otro punto B, siendo este segundo invisible desde el primero: para lo cual se tirará por el punto A una línea cualquiera MN, y se tomarán á uno y otro lado de este punto otros dos M y N desde los cuales se descubra el extremo B: tirando una paralela PR á la MN por un punto P de la BM, y midiendo las MN, PR y MA, tendremos la proporcion

MN : PR : : MA : PD

Conocida la distancia PD, se la llevará desde P á D y se tendrá otro punto D de la recta AB.

721. Este problema se resuelve en el papel por medio de la regla y el compás (Geom., Probl. 6), ó valiéndose de la escuadra (Geom., 35), ó del trasportador (Geom., 39.)

Para trazar varias paralelas á una línea dada se seguirá el método expuesto (714).

722. 4.° **Dividir una recta dada en un cierto número de partes iguales ó proporcionales.**—Sea la recta AB (fig. 443; lám. 30): por los extremos A y B de esta recta se tiran las paralelas indefinidas AC y BD, sobre las cuales se toman á partir de A y B tantas partes de igual magnitud como expresa el número en que se ha de dividir la AB, colocando

jalones en los puntos de division. Estos jalones determinarán un sistema de rectas paralelas entre sí, cuyas intersecciones *a*, *b*... con la AB resuelven el problema.

723. Esta misma marcha se sigue para dividir una recta en partes proporcionales. En el caso en que haya que dividirla en dos, proporcionales á números dados, 3 y 5 por ejemplo, se toman estos mismos números de partes iguales en las paralelas AC y BD (fig. 444; lám. 30), uniendo despues los puntos C y D. La interseccion M de CD y la recta dada divide á esta en la proporcion pedida.

724. 5.° **Dadas dos rectas que se cortan en un punto, trazar por otro invisible desde él la recta que los une.**—*Con los goniómetros.*—Tírese por el punto dado D (fig. 445; lám. 30) la línea arbitraria BC, que cortará á las rectas dadas en los puntos B y C; tómese en la BD otro cualquiera *b*, y determínese el *c* por la proporcion

$$BD : DC :: Db : Dc;$$

en el punto *b* fórmese el ángulo $Dbb' = DBA$, y en el *c* el $Dcc' = DCA$: el punto de interseccion *a* de las rectas bb' y cc' pertenecerá á la recta DA; pudiéndose determinar del mismo modo los puntos que se quiera.

725. *Con las escuadras.*—Se bajan desde el punto D (fig. 446; lám. 31) las perpendiculares DB y DC á las rectas AB y AC; se levanta en un punto cualquiera *b* de la DB una perpendicular indefinida bb' á esta recta, y se determina como antes el punto *c* de la DC por la proporcion

$$BD : DC :: Db : Dc.$$

Tomando en la DC la magnitud de Dc dada por la proporcion, se levanta en *c* la perpendicular indefinida cc', cuyo punto de interseccion *a* con la bb' será un punto de la recta AD. Del mismo modo se pueden determinar otros puntos.

Este problema tiene aplicacion en los bosques, cuando dado el punto de partida se quiere hacer concurrir un camino ó vereda á la interseccion de otros varios.

726. 6.° **Dividir un ángulo en dos partes iguales.**—*Con los goniómetros.*—Se mide el ángulo ABC (fig. 447; lám. 31), y tomando su mitad en el instrumento haciendo con precision la coincidencia del nonius, se asegura la alidada móvil en esta posicion y se coloca un jalon *d*, en la direccion de la visual. Este jalon determina con el punto de estacion la direccion de la bisectriz del ángulo. Para comprobar, se dirige la alidada fija al punto *d*, y si la visual tirada entonces por la móvil vá á parar á C, el ángulo estará bien dividido. En el caso contrario, suponiendo que sea *e* el jalon colocado primeramente por la alidada móvil, se dirige esta al punto C, y entonces se planta otro *e'* por la alidada fija, que habrá tomado la direccion Be'. Un jalon d equidistante de los e y e', dará el punto de la bisectriz, que puede comprobarse como en el primer caso.

Aplicando el mismo procedimiento á cada una de las mitades halladas, se tendrá dividido el ángulo ABC en cuatro partes iguales; y así sucesivamente en 8..... 16..... 32.....

727. *Con la plancheta.*—Sea el ángulo ACB (fig. 448; lám. 31): se colocará la plancheta de modo que su centro se halle en la vertical del punto de estacion, y se trazará el ángulo aCb, que se dividirá en dos partes iguales por medio de una línea Cm, segun la cual se dirigirá una visual para colocar el jalon M; se declinará la mC con respecto á la CA, con lo cual esta tomará la posicion Ca y la Cb la de la Cm, y si la visual va á parar al punto M, el ángulo estará bien dividido. En el caso contrario, despues de colocado un jalon n en sentido de la línea trazada en la plancheta como bisectriz, y declinando esta línea con relacion á la CA, habrá que colocar otro jalon n' en sentido de la nueva direccion de la dicha línea Cb, y el punto medio M de la distancia nn' pertenecerá á la bisectriz; pudiendo repetirse la comprobacion como en el primer caso.

La manera de levantar con la plancheta una perpendicular á una recta dada AC en un punto C, es el caso particular de este problema, en el que se tiene por objeto comparar dos ángulos adyacentes gráficos aCe, eCd, con un mismo ángulo tomado sobre el terreno, para disminuir sucesivamente su diferencia hasta que se haga nula; haciendo la comprobacion por el mismo método acabado de exponer, despues de haber trazado en la plancheta la perpendicular Ce y colocado el jalon E.

728. *Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.*—Tómense á partir del vértice A (fig. 449; lám. 31), en los lados del ángulo las distancias iguales AB, AC, y hállese despues el punto medio D de la BC, el cual, unido con el A, dá la direccion de la bisectriz del ángulo BAC.

Para resolver este problema en el papel, véase (Geometría, Probl. 20).

729. **Trazado y medicion de las líneas en parte inaccesibles.**—Supongamos que se pueda recorrer parte de la línea que se trata de trazar y medir, y parte no, ó lo que es lo mismo, que sea en parte accesible y en parte inaccesible. Puede suceder que se den los extremos ó dos puntos cualesquiera de su direccion.

730. **Trazado y medicion cuando se conocen los extremos de la alineacion.—Caso en que la línea es de corta extension.**—Cuando se conocen los extremos A y B (fig. 450; lám. 31), bien sean ambos accesibles, uno accesible y otro no, ó ambos inaccesibles, puede establecerse la alineacion determinando por medio de jalones los puntos intermedios m, n, p, q, por los métodos generales expuestos para el caso de ser la línea accesible, siempre que los obstáculos no impidan que se vea desde un extremo de la línea el jalon dispuesto en el otro, el terreno sea despejado, y los obstáculos queden comprendidos donde no hay necesidad de establecer jalones, como sucede con la laguna C y el rio D de la figura.

Si los obstáculos fuesen edificios como el C (fig. 451; lám. 31), y la naturaleza del terreno permitiese descubrir un extremo D de la línea dada BD, desde el otro B, se colocarían en dichos extremos banderolas, por medio de las cuales pudiésemos establecer dos jalones *a* y *b*; y entonces por medio de la banderola B y el jalon *a* podríamos establecer la alineacion á la izquierda del obstáculo, y á la derecha por medio de la banderola D y el jalon *b*.

Cuando por la naturaleza del terreno ó de los obstáculos los extremos no sean visibles entre sí, y se hallen puntos intermedios desde los cuales se descubran aquellos, se seguirá el método expuesto (650), análogo al caso que consideramos cuando toda la línea es accesible.

Tambien se pueden hallar los puntos intermedios en el caso de ser los extremos accesibles, pero invisibles entre sí, tomando un punto C (fig. 452; lám. 31), desde el cual se descubran los A y B, y midiendo las dos líneas AC y BC y el ángulo ACB, la resolucion del triángulo ABC nos dará el ángulo en A; el que formado en dicho punto y colocando jalones en direccion de la visual AB en los puntos que lo permita el terreno, se tendrá trazada la AB, que pasará por el punto B. Este procedimiento se puede aplicar tambien al caso de ser toda la línea accesible, sean ó no visibles entre sí sus extremos.

Una vez trazada la recta, se medirá directamente la parte accesible é indirectamente la inaccesible, por cualquiera de los métodos que exponemos á continuacion.

731. *Con los goniómetros.—Primer método.*—Por medio de la resolucion de un triángulo ABC (fig. 453; lám. 31), en el cual se pueda medir el ángulo ACB y los lados AC y BC, se obtendrá la medida indirecta (28) de la parte interceptada AB.

Segundo método.—Tambien podrá resolverse midiendo una línea cualquiera EF (fig. 454; lám. 31) y los ángulos DEF y DFE; se resolverá el triángulo DEF (29) y se obtendrá la medida indirecta de la DE. Esta resolucion se aplica con especialidad cuando D es inaccesible.

732. *Con la brújula.*—Se procede del mismo modo, como se vé en las figuras 455 y 456. (Lám. 31.)

733. *Con la plancheta.—Primer método.*—Si se emplea este instrumento para la medida del ángulo A″C″B″ (fig. 457; lám. 31), tomadas las partes *c″a″* y *b″c″* con arreglo á la escala dada, la línea *a″b″* nos daría en la misma escala la medida indirecta de la A″B″.

Segundo método.—Despues de medida una línea cualquiera E″F″ (figura 458; lám. 31) y tomados con la plancheta los ángulos D″F″E″ y D″E″F″, se verá el valor de *d″e″*, en la escala adoptada para la trasportacion de la E″F″ á la plancheta, y se tendrá la medida indirecta de la parte interceptada D″E″.

734. Observaremos antes de continuar, que en atencion á que la marcha de las operaciones es la misma, ateniéndose en cada instrumento á la manera explicada para medir los ángulos, emplearemos en lo sucesivo los goniómetros, inclusos los de reflexion, en las cuestiones que se

resuelvan; y lo que digamos se entenderá lo mismo con respecto á la brújula y á la plancheta, por lo que solo presentaremos de estos últimos las figuras de las construcciones; ocupándonos en particular de la resolucion con estos instrumentos cuando la marcha de las operaciones sea diferente.

Cuando se usen los goniómetros, inclusa tambien la brújula, en la resolucion de los triángulos á que den lugar los datos que se elijan, se podrán obtener las incógnitas por medio del cálculo trigonométrico ó de las construcciones geométricas, segun convenga; empleando estas últimas siempre que se opere con la plancheta, que presenta desde luego trazadas las proyecciones horizontales de las líneas y de los ángulos, y por consiguiente las figuras semejantes á las proyecciones horizontales de las figuras del terreno. En cuanto á las cuestiones que se resuelvan con las escuadras, inclusa la de reflexion, y con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones, se hará siempre uso de la geometría en la resolucion de los triángulos ó determinacion de las incógnitas.

735. *Con las escuadras.—Primer método.*—Sea AB (fig. 459; lám. 31) porcion de la recta interceptada por un obstáculo; se levantarán á la recta en los puntos A y B á uno y otro lado del obstáculo las perpendiculares AC y BD (466) de la misma longitud, y los extremos C y D servirán para el trazado de la recta CD, que medida da indirectamente el valor de su igual AB.

Segundo método.—Para obtener la EF (fig. 460; lám. 31) se levantará la perpendicular FG, buscando por tanteo un punto G de esta línea tal, que dirigida la visual al F por una de las alidadas, la que se dirige por la que forma con ella el ángulo de 45° vaya á parar al punto E; se tendrá entonces FG que se podrá medir directamente, y dará la medida indirecta de su igual EF. Si no puede medirse la FG se levanta en G una perpendicular GH á la EG, y se halla su punto de interseccion H con la FH: se medirá la FH que es igual á EF. Si la FH no puede medirse, y sí la GH, se tendrá

$$EF = FH = \frac{GH}{\sqrt{2}} = \frac{GH\sqrt{2}}{2} \text{ (Geom. Teor. 81)}$$

Tercer método.—Para determinar la YL (fig. 461; lám. 31) se levantará en L una perpendicular LN que se medirá, otra perpendicular MN á la YN, y se hallará su punto de interseccion M con la LM: midiendo esta última línea se tendrá la proporcion

$$ML : NL :: NL : YL;$$

que nos dará la medida indirecta de la YL.

Cuarto método.—Para determinar la OQ (fig. 462; lám. 31) se puede tambien trazar una recta OP y sobre esta la perpendicular PQ; se medirán OP y PQ, y el triángulo rectángulo OPQ dará

$$OQ = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OPQ}^2}.$$

Si el obstáculo fuese de tal naturaleza que no permitiese trazar la OP, se bajarían los perpendiculares OO′ y QP′ sobre otra línea O′P′, y midiendo estas tres líneas se tendría:

$$OQ = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{\overline{O'P'}^2 + (QP' - OO')^2}$$

Quinto método.—Para obtener la RZ (fig. 463; lám. 31), se puede levantar en Z la perpendicular ZT de una cierta longitud, tirar por uno de sus puntos X una paralela XS á la RZ, y trazando la RT, hallar su punto de interseccion S con la SX; midiendo despues TX, TZ y SX, la proporcion

$$TX : SX :: TZ : RZ$$

nos dará la medida indirecta de RZ.

Sexto método.—Para medir la R′Z′ (fig. 464; lám. 31) se levantará en R′ una perpendicular R′T′, y en T′ otra T′X′ á la R′T′; trazando la línea que pasa por Z′ y el punto medio S′ de la R′T′, y prolongándola hasta que encuentre á la perpendicular T′X′, los triángulos iguales R′Z′S′ y S′T′X′ darán T′X′ que se podrá medir, y se tendrá el valor de su igual R′Z′. Tambien puede hacerse á X′T′ una parte alícuota cualquiera de R′Z′.

736. *Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.—Primer método.*—Cuando el terreno es llano, se pueden medir con la cuerda (703) los ángulos E y F (fig. 454; lám. 31) de los extremos de la línea FE, que se mide; construyendo en el papel un triángulo semejante al DEF, se obtendrá en la escala adoptada el valor de DE.

Segundo método.—En el mismo caso de ser llano el terreno, aunque no sea horizontal, se pueden emplear los jalones: para lo cual se traza por el punto F (fig. 465; lám. 31) una recta FH, y por el H de ésta se tira la paralela HY á la EF (719); el punto E y el G medio de la FH determinarán una alineacion, por medio de la cual se trazará la EG, prolongándola hasta su encuentro en Y con la YH. Los triángulos iguales EGF y HGY nos darán HY=EF. Midiendo la primera de estas líneas se tendrá indirectamente el valor de la segunda.

Tambien se puede tomar en la alineacion FH un punto G′, tal que HG′ sea una parte alícuota de HF, por ejemplo, la cuarta parte con lo que será FG'=3G'H; se trazará la alineacion EY', y los triángulos semejantes EFG' y G'HY' darán la proporcion

$$HG' : FG' :: Y'H : EF;$$

de donde resultará EF=3HY'; se medirá por lo tanto HY', y triplicando su valor se tendrá la medida indirecta de la EF.

Tercer método.—Para determinar la QR (fig. 466; lám. 31), tómese en la parte accesible y en su prolongacion la longitud arbitraria QP, y trácese á arbitrio en direccion y magnitud la PZ; por el punto S medio de la PZ y por el Q, trácese la QSX tomando SX igual á QS, y se tendrán los puntos X y Z para trazar una recta ZXT hasta que encuentre á la RS prolongada en el punto T; los triángulos iguales STX y SQR dan TX=QR; la medida de la recta TX nos dará por lo tanto la medida indirecta de la QR.

Cuarto método.—Para determinar la AB (fig. 467; lám. 31) tómese en la prolongacion de la línea y en la parte accesible la longitud arbitraria BC, trazando en una direccion cualquiera otra línea CE; tomando despues CD=BC, divídase en dos partes iguales (728) el ángulo ACE; trácese despues la alineacion AD y determínese su interseccion F con la bisectriz hallada. Uniendo despues los puntos B y F, y hallando la interseccion E de las rectas BF y CE, la DE que se medirá directamente nos dará la medida indirecta de AB.

En efecto, los triángulos iguales BCF y CFD (Geom. Teor. 15) dan BF=DF; de donde resulta la igualdad de los ABF y FDE (Geom. Teor. 16), que dan DE=AB.

Quinto método.—Sea DB (fig. 468; lám. 32) la parte cuya longitud se quiere determinar: se trazará una línea AC y se colocarán jalones en las direcciones AB y BC, tomando en ellas las partes arbitrarias AD y CE; midiendo las AC, AD, DC, AE y EC se construirán en el papel los triángulos *adc* y *aec* semejantes á los ADC y AEC, y prolongando las *ad* y *ce*, su punto de encuentro *b* será la proyeccion del B del terreno; no habrá más que averiguar en la escala adoptada el valor de *db*, y se tendrá la medida indirecta de la DB. La escala nos daría tambien los valores de AB y BC si en la cuestion fuesen necesarios.

Sexto método.—Si la FH (fig. 469; lám. 32) que se halla tambien interceptada por el mismo obstáculo fuese conocida por el método anterior ú otro cualquiera, y no se pudiesen trazar las FG y HG, se tomarian las *ab* y *cd* y se construirán sobre el papel los triángulos semejantes á los F*ab* y H*cd*, que resolverian la cuestion de un modo análogo al anterior. Si no es posible la construccion en el terreno de los triángulos F*ab* y H*cd*, se formarían los F*a'b'* y H*c'd'*, que se trasportarían al papel.

Sétimo método.—Supongamos que al determinar la parte OP (fig. 470; lámina 32) interceptada por un obstáculo, lo esté á su vez por otro la línea MN que es preciso medir, y que el punto O sólo sea visible desde el M; se elegirá en la alineacion MO un punto L visible desde N, y se construirá en el papel el triángulo *lmn* semejante al LMN; prolongando LN y MN hasta su encuentro con la QO en los puntos Q y P, y construyendo en el papel el triángulo *npq* semejante al NPQ, la interseccion de las rectas *ml* y *qp* prolongadas, nos dará la proyeccion *o* del punto O Tomando en la escala adoptada el valor de *op*, tendremos la medida indirecta de la OP.

Octavo método.—Sea el mismo caso anterior en que MN (fig. 471; lámina 32) es la línea conocida, y se trata de determinar NO, siendo O visible solamente desde el punto N. Se tomará en la alineacion NO un punto L visible desde M, y en la ML otro P desde el cual se vea O, y se prolongará OP hasta su encuentro en S con MN; concibiendo la LR paralela á OS, los triángulos semejantes MPS y MLR nos darán la proporcion

$$MP : MS :: ML : MR,$$

cuyos tres primeros términos se obtienen por la medida en el terreno. Conocida la distancia MR, se tendrá tambien NR=MN—MR; y como es NS=MN—MS, midiendo la NL, los triángulos semejantes NLR y NSO darán la proporcion

$$NR : NL :: NS : NO,$$

que nos dará la medida indirecta de NO.

737. Algunas veces los obstáculos son de tan poca importancia, que no impiden la medicion de la recta con la cadena, como se ve en las figuras 472 y 473 (lám. 32).

738. *Problemas que se resuelven por los métodos expuestos en esta teoría.*—Muchos de los métodos expuestos para la medida de las líneas en parte inaccesibles, siendo accesibles sus dos extremos, ó uno de ellos solamente, comprenden la medida de la *distancia de un punto accesible á otro inaccesible;* de la que media entre *dos puntos accesibles*, cuando no se puede ir directamente del uno al otro, y se hacen extensivos á la *determinacion de la posicion de un punto inaccesible conocidas las de dos puntos accesibles.*

739. *Observaciones acerca de la horizontalidad de las líneas y de los ángulos considerados en los problemas.*—Todo cuanto hemos dicho acerca de la medida de las líneas y de los ángulos, supone que se han medido en sentido horizontal. Cuando se necesite la distancia verdadera ó geométrica entre dos puntos, se verificarán las medidas en el plano de los objetos, lo que siempre puede tener lugar cuando se trata de tres puntos que constituyen los vértices de un triángulo, y el terreno no presenta desigualdades que pudieran dificultar la medida geométrica de sus lados; pero si hay que resolver dos ó más, que generalmente se hallarán en distintos planos, formarán entre sí ángulos diedros, á los que no pueden aplicarse sin cometer errores las resoluciones de que nos ocupamos, si se exceptúa el caso particular de hallar todos los vértices en un mismo plano; lo que se conocería si dispuesta la alidada de un instrumento pa-

ralelamente al plano del limbo, y éste situado en el plano determinado por tres de los vértices, las visuales tiradas á los demás fuesen á parar exactamente á todos ellos, conservándose la alidada paralela al limbo. Cuando esto no se verifica y el instrumento no permite tomar los ángulos azimutales, hay necesidad de reducir al horizonte (162) los ángulos obtenidos, y de medir horizontalmente las líneas ó reducirlas tambien á su proyeccion horizontal (160).

Una vez conocidas en sentido horizontal las distancias interceptadas por los obstáculos y medidas en este sentido las partes accesibles, que así pudieran hallarse en terreno llano como presentar todo género de desigualdades, la suma de todas ellas nos dará la distancia horizontal entre los extremos de la recta.

740. *Reduccion al centro de la estacion.*—Cuando no pueda hacerse estacion en el vértice de un ángulo que debe medirse, se puede elegir otro próximo á él y obtener su verdadero valor por la reduccion al centro de la estacion (169).

741. *Medicion de la línea cuando ambos extremos son inaccesibles.*—No siendo de mucha longitud la línea que se trata de medir, pueden emplearse los procedimientos que indicamos á continuacion para la determinacion de su medida horizontal.

Con los goniómetros.—Método 1.º—Haciendo estacion en C (fig. 474; lámina 32), mídanse por cualquiera de los métodos expuestos las distancias AC y BC que tienen un extremo accesible y otro inaccesible, y además mídase el ángulo comprendido ACB. La resolucion del triángulo ABC nos dará el valor AB (28).

Método 2.º—Sea la recta AB (fig. 475; lám. 32), que suponemos se halla en el mismo plano que la CD. En la parte accesible mídase con exactitud una base CD, cuyos extremos C y D sean visibles entre sí, y desde los cuales se vean tambien los extremos de la AB, y mídanse igualmente los cuatro ángulos BCD, ACD, ADC, BDC. En los triángulos ACD y BCD se conocerá un lado y los dos ángulos adyacentes, y se podrán calcular los lados AC y BC. En el triángulo ACB se conocerán entonces dos lados, y el ángulo comprendido ACB, que será igual á ACD—BCD, y se podrá calcular la distancia AB.

Ejemplo.—Supongamos que se haya encontrado CD=394^{m},82; BCD =28° 40′ 51″,3; ACD=75° 28′ 44″,6; ADC=41° 10′ 32″,7 y BDC=83° 41′ 17″,8; verificando los cálculos se obtiene AB=307^{m},931.

Debe advertirse en general, que la base CD se ha de tomar siempre de una longitud proporcionada á las distancias AC, AD, BC y BD, con el fin de que los ángulos observados en los extremos de dicha base no resulten muy agudos ni muy obtusos.

Si se trata de hallar la distancia natural de los puntos A y B, se seguirá el mismo método si los cuatro puntos A, B, C, D están en un mismo plano, lo que se conocerá si puesto el limbo del instrumento en el plano de los puntos B, C, D, la visual dirigida al punto A pasa precisamente por él; pero si dichos cuatro puntos no estuviesen en un mismo plano, habría que medir directamente el ángulo ACB, pues no sería entonces igual á ACD—BCD. Fácil es convencerse de ello, observando que los tres ángulos son entonces los ángulos planos de un ángulo triedro, que daría ACB > ACD — BCD. (Geom. Teor. 148 Corol.)

Ejemplo.—Supongamos que se haya encontrado CD = 60m; BCD = 31° 22′ 30″; ACD = 89° 36′ 35″; ADC = 49° 20′; BDC = 121° 35′ y ACB = 67° 15′ 40″; verificando los cálculos se obtiene AB = 106m,856.

742. *Con la brújula*.—Se procederá del mismo modo y se obtendrá la medida de la distancia horizontal de los puntos inaccesibles A y B (figura 476; lám. 32). La sola trasportacion de la base y los rumbos nos daría gráficamente la medida de AB.

743. *Con la plancheta*.—La *ab* (fig. 477; lám. 32) obtenida en el tablero representará en la escala correspondiente la magnitud de la AB.

744. *Con las escuadras*.—*Primer método*.—Sea la recta AB (fig. 478; lámina 32) la que se trata de determinar. Trazada una línea cualquiera CD en la parte accesible, se bajarán sobre ella desde los extremos A y B de la AB las perpendiculares AC y BD, cuya medida se obtendrá por cualquiera de los métodos explicados para el caso de medir una recta que tiene un extremo inaccesible; prolongando la menor BD en una magnitud DE = AC — BD, y trazando y midiendo la CE, que será igual y paralela á AB, se tendrá la longitud de esta última.

Cuando se puede hacer estacion en un punto F situado en la prolongacion de AB, se levantará la perpendicular FG y se determinarán como ya se sabe las distancias AF y BF de los extremos A y B al punto F; la AB será igual á BF — AF.

Segundo método.—Sea la recta AB (fig. 479; lám. 32): se elegirá una base CD en la parte del terreno en que se pueda operar libremente, y se bajarán sobre ella desde los puntos A y B las perpendiculares AC y BD que se prolongarán hasta su encuentro en los puntos E y F con las líneas AF y BE, trazadas por los puntos A y B y el medio O de la base CD. Se trazará y medirá la EF, que es igual y paralela á la AB. En efecto, los triángulos rectángulos iguales AOC y ODF dan AC = DF, y los BOD y COE tambien iguales dan CE = BD; de donde se deduce AE = BF, siendo además paralelas estas rectas por ser perpendiculares á CD; luego ABFE es un paralelógramo.

Si el terreno no permite operar con esta extension, se toman O*c* y O*d* iguales á las mitades de OC y OD, se levantan las perpendiculares *ac* y *bd* á la CD prolongándolas hasta su encuentro con AO y OB tambien prolongadas, y resultará *ab* igual á la mitad de AB, por la semejanza de los triángulos O*bd* y ODF, de la que resulta la de O*ab* y OEF ó su igual OAB. Las partes O*c* y O*d* pueden ser en caso necesario otra parte alícuota cualquiera de OC ó de su igual OD.

Tercer método.—Trácese una recta cualquiera AOH (fig. 480; lam. 32) y bájese sobre ella la perpendicular BO, que se prolongará al otro lado de AH. Como las líneas AO y OB son accesibles por el extremo O, se determina su longitud (735—2.º método) formando los triángulos BOH y AOE, y como además las mismas líneas AO y OB son catetos del triángulo rectángulo AOB, conocidos sus valores se tendrá $AB = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}$.

745. *Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.—Primer método.*—Desde el punto C (fig. 481; lám. 32) se trazarán dos rectas CD y CE, y se dirigirán las alineaciones CA y CB, así como las DA y BE desde los puntos D y E; tomando *Cm* y *Cn* que sean respectivamente la misma parte alícuota de CD y CE, tirando las paralelas *am* y *nb* á las AD y BE (719) y uniendo los puntos *a* y *b* por una recta, esta será la misma parte alícuota de AB. Midiendo por lo tanto la *ab*, no habrá más que multiplicar el resultado por el número que indique las veces que deba estar contenida en la AB, y se tendrá el valor de esta recta.

Segundo método.—Por un punto *o* (fig. 482; lám. 32) y los A y B, trácense las líneas A*o* y B*o* que se prolongarán cuanto sea necesario; plántense jalones en dos puntos *m* y *n* en línea con el *o*, y de modo que sea *mo*=*on*; trazando la A*m* y otra línea cualquiera *rs* por *o*, se tendrá el punto de interseccion *r*; tomando *os*=*or*, los puntos *s* y *n* servirán para trazar una recta que se prolongará hasta encontrar á la A*o* prolongada tambien, y se tendrá el punto *a*, siendo *oa*=A*o*; pues de los triángulos iguales *osn* y *omr* se deduce la igualdad de los A*or* y *aos*. Del mismo modo se construirían los triángulos iguales B*to* y *obx* que nos darían B*o*=*ob*, de donde resulta que los triángulos A*o*B y *oba* son iguales (Geom. Teor. 15) y dan *ab*, que se puede medir, igual á AB.

746. Todos los métodos acabados de exponer para hallar la distancia horizontal de dos puntos inaccesibles, se aplican igualmente al caso en que los puntos son accesibles cuando no se puede ir directamente desde el uno al otro.

747. *Determinacion de puntos intermedios de las líneas, siendo invisibles los extremos entre sí.*—Si el terreno es de tal naturaleza, que desde un extremo no puede descubrirse el otro, y no se hallan tampoco puntos intermedios auxiliares desde los cuales se descubran los extremos, bien sea por los obstáculos ó por la naturaleza del terreno, se pueden seguir los varios métodos puestos á continuacion para determinar los verdaderos puntos intermedios de la recta.

Con los goniómetros.—Primer método.—Supongamos que la línea AB (fig. 483; lám. 32) no es de mucha longitud, y los puntos A y B no son visibles entre sí, ni hay puntos intermedios desde los cuales se descubran los extremos: se elegirá un punto C desde el cual se divisen aquellos y se trazarán las rectas AC y BC, que se medirán así como el ángulo comprendido C; se resolverá el triángulo ABC, y conocidos los ángulos CAB y CBA se formarán en A y B dichos ángulos, y se colocarán jalones D, E.... en direccion de las visuales AD y BE.

Segundo método.—Tambien se puede resolver este caso eligiendo un punto de estacion C (fig 484; lám. 32) desde el cual se descubran los extremos A y B de la recta AB; se medirán el ángulo ACB y las líneas AC y BC, y se calculará el ángulo BAC del triángulo ACB; se marcará con jalones una línea indefinida cualquiera Cd y se medirá el ángulo ACd, con lo cual se podrá calcular el lado CD del triángulo ACD; y tomando en Cd una parte igual á CD, el punto D pertenecerá á la línea AB; pudiéndose determinar del mismo modo otro punto cualquiera E.

Si no se hallase un punto de estacion desde el cual pudieran verse los A y B, se elegirá uno C desde el cual pueda verse uno de los extremos B, y otro F desde el cual se vean el otro extremo A de la recta y el punto de estacion C. Se medirán las distancias AF, FC, BC y los ángulos AFC y FCB: se calcularán el lado AC y el ángulo ACF del triángulo AFC, y como entonces tendremos conocidos en el triángulo ACB los lados AC y BC y el ángulo ACB=BCF—ACF, se reducirá la cuestion al caso anterior en que los dos puntos extremos de la línea son visibles desde el mismo punto de estacion.

La resolucion del triángulo ACB (figs. 483 y 484; lám. 32) nos dará la medida indirecta de AB. Si el ángulo A fuese de 45º, y la BC perpendicular á la AC, se tendria AC=BC, y $AB=\sqrt{2\,\overline{AC}^{2}}$.

748. *Con la brújula.—Primer método.*—Trácense en A dos rectas AD y AC (fig. 485; lám. 32), anotando sus correspondientes rumbos, y trasladando la brújula al punto B, trácense tambien líneas del mismo rumbo en el sentido conveniente para que corten á las primeras, determinando los puntos de interseccion D y C (662) con lo cual se tendrá el paralelógramo ACBD. Trazando la diagonal CD, su punto medio E pertenecerá á la recta AB; dividiendo en dos partes iguales las rectas BC y DB, se trazarán por sus puntos medios H y F las rectas CF y DH, se hallará su interseccion G y éste será otro punto intermedio de la recta AB. Conocidos los puntos E y G y colocando en ellos jalones, se podrá trazar la recta AB.

Segundo método.—Tambien se puede resolver trazando como anteriormente el paralelógramo ACBD (fig. 486; lám. 32), y por el punto medio F de la BD una recta en la misma direccion que la AD; tomando en ella una parte $EF=\frac{AD}{2}$, el punto E pertenecerá á la recta AB; trazando por el punto medio H de la FB otra recta en la misma direccion y tomando $HG=\frac{EF}{2}$, el punto G será tambien de la recta AB, y tendremos como antes conocidos los puntos intermedios E y G. Si los obstáculos no permiten seguir este procedimiento, se tomarán las líneas en otra relacion cualquiera. La proporcion

$$BH : BD :: BG : BA$$

que se puede establecer en este segundo caso, nos dará la medida indirecta de la AB, y análogamente se podría determinar en el primero.

749. *Con la plancheta.*—Se concibe el uso de este instrumento en el órden de operaciones establecido en estos problemas para los goniómetros.

750. *Con las escuadras.*—Elíjase un punto C (fig. 487; lám. 33) desde el cual se descubran los extremos A y B de la recta, y trácense las CA y CB; en los puntos D y E medios de AC y BC colóquense jalones que servirán para trazar una recta HM, que será paralela á AB, sobre la cual se bajarán las perpendiculares AH y BM, que medidas deben resultar iguales; levantando despues en los puntos D y E perpendiculares á la HM y tomando en ellas las partes DF y EG iguales á AH ó BM, tendremos los puntos intermedios F y G de la recta AB, que nos servirán con los A y B para completar el trazado á derecha é izquierda del obstáculo.

La medida de la HM nos dará la medida indirecta de la recta AB.

751. *Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.*—Se pueden determinar las partes AB y CD (fig. 488; lám. 33) de la línea AD, tomando un punto E en el terreno desde el cual se vean los extremos accesibles A y D; se trazarán y medirán las AE y ED, y tomando las EF y EG iguales á la mitad ó tercera parte de AE y ED, y trazando la FG, no habrá más que tirar á esta por A y D las paralelas AB y CD, y se obtendrán los puntos intermedios B y C. Midiendo además la FG, la proporcion

$$FE : FG :: EA : AD$$

nos dará la medida indirecta de la recta AD.

Otras muchas construcciones pudiéramos indicar y se ocurrirán al geómetra segun las circunstancias, debiendo emplear en todo caso aquellas que permita mejor la forma del terreno y los medios de que dispone.

752. **Caso en que la extension de la línea es considerable.**—Pasemos ahora al caso en que la línea es de mucha longitud; si la naturaleza del terreno ó de los obstáculos no permite descubrir uno de los extremos desde el otro, ni hallar puntos intermedios desde donde se descubran los A y E (fig. 489; lám. 33) de la alineacion AE, se envía un peon á uno de estos extremos E de la recta, con el fin de que á una hora dada haga una señal, bien disparando un arma de fuego ó haciendo una hoguera. El otro peon que se halla en A ó próximo á este punto, coloca un jalon A, y otro *a* de modo que se halle en la direccion de la señal, ó bien dos *a* y *b* (650), segun la naturaleza del caso, y por medio de ellos irá estableciendo los demás jalones *c*, *d*.... procurando que las visuales tiradas en sentido perpendicular á la recta A*abc*.... que se vá trazando y midiendo al mismo tiempo, salven los obstáculos. Como esta línea AB no irá á parar precisamente al punto extremo E, sino que se apartará más ó menos á izquierda ó derecha, cuando se llegue á un punto desde el cual se descubra el E se bajará con la escuadra una perpendicular E*e* á la AB, que se medirá, concluyendo tambien la medida de la base A*e*. Falta solamente

rectificar las posiciones de los jalones a, b, c..... para lo cual se levantarán en los puntos a, b, c..... las perpendiculares indefinidas aa', bb'..... moviendo en sentido de la línea AB cualquier jalon d desde el cual la perpendicular dd' no salve el obstáculo, y haciéndole tomar una nueva posicion d'' para levantar la perpendicular $d''\,d'''$; entonces por medio de las proporciones

$$\mathrm{A}e : \mathrm{E}e :: \mathrm{A}a : aa'; \qquad [a]$$
$$\mathrm{A}e : \mathrm{E}e :: \mathrm{A}b : bb';$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

se tendrán hallados los puntos a', b'..... de las perpendiculares donde se habrán de trasladar los jalones a, b, c..... debiendo examinar despues si se hallan colocados en el mismo plano vertical.

Si por ejemplo la Ae resultase de 500 metros, se separase á la derecha de AE la cantidad Ee = 5 metros, y la Aa tuviese 100 metros, aa' valdría un metro, y habria que mover el jalon a un metro á la izquierda de la Ae en sentido de la perpendicular aa'; análogamente se obtendrian los demás puntos de la alineacion AE.

Lo mismo resultaría teniendo la Ee una posicion oblícua á la AB, trazando las aa', bb'..... paralelas á la Ee haciendo los ángulos Aaa' Abb' ..... iguales al AeE, y de este modo el problema resuelto con las escuadras, puede serlo tambien por medio de los goniómetros, y de la brújula y plancheta.

La operacion se simplifica, y basta solo la primera proporcion [a], cuando al establecer los jalones a, b..... se pueden colocar de 50 en 50 ó de 100 en 100 metros, de modo que Aa = ab = bc =..... pues entonces se tiene Ab = 2Aa, y bb' = 2aa'; Ac = 3Aa, y cc' = 3aa'..... y así sucesivamente, hasta que el trazado venga á parar al punto E.

Tambien se pueden hallar los puntos intermedios a', b'..... trazando una recta cualquiera BC (fig. 490, lám. 33) y las paralelas AB y Ee, así como las aa', bb'..... tambien paralelas é indefinidas además, midiendo las AB, Ee, Ba, Bb y Be, y observando que en la série de razones iguales

$$\mathrm{B}e : \mathrm{E}e - \mathrm{AB} :: \mathrm{B}b : bb' - \mathrm{AB} :: \mathrm{B}a : aa' - \mathrm{AB}$$

la primera razon es conocida, así como los antecedentes de las demás, se podrán determinar los consecuentes; y añadiéndoles la AB se tendrán las paralelas bb' y aa', y por tanto, los puntos a' y b' donde deben establecerse los jalones.

La medida indirecta de la recta AE se obtendrá en el caso de la figura 489 (lám. 33) por la proporcion

$$\mathrm{A}a : \mathrm{A}e :: \mathrm{A}a' : \mathrm{AE};$$

y en el de la fig. 490 (lám. 33) tomando DE = AB y trazando y midiendo la BD = AE; y en el caso particular de ser AB perpendicular á BC, concibiendo tirada la BD y midiendo la AB se tendrá:

$$AE = BD = \sqrt{\overline{Be}^2 + \overline{eD}^2} = \sqrt{\overline{Be}^2 + (eE - AB)^2}.$$

753. Cuando sucede en el caso de que nos ocupamos que uno de los extremos ó ambos son inaccesibles, se trazará una recta cualquiera indefinida CD (fig. 491; lám. 33), sobre la cual se bajarán desde los puntos A y B las perpendiculares Aa y Bb; se medirá el ángulo Bab y la ab, y resolviendo el triángulo rectángulo Bab se obtendrá el valor de Bb; por un punto c de esta recta se tirará otra cualquiera cd; sobre la ab se levantarán perpendiculares indefinidas ee', mm'... y midiendo las líneas bc, ec', mc''.... se obtendrán los puntos intermedios e', m', n'..... por las proporciones

$$bc : Bc = Bb - bc :: ec' : c'e';$$
$$bc : Bc :: mc'' : c''m';$$

....

Conocida la Ad por este medio y por lo tanto la Aa, tomaremos en esta á partir de a, la longitud $ab' = $ Aa — Bb, y trazando y midiendo la bb' se tendrá la medida indirecta de la recta AB.

754. Todos estos métodos pueden emplearse igualmente para determinar los puntos intermedios en el caso análogo (650) en que se puede recorrer la recta en toda su longitud, y por lo tanto en el trazado y medida de una recta cualquiera accesible. Tambien se puede hacer aplicacion en el caso del problema quinto (725) para obtener los puntos intermedios a, m, m' (fig. 446; lám. 31), ó bien los m y m' conocido el punto a por el método explicado en dicho problema, cuando se puede recorrer una de las líneas dadas AC en toda su longitud; pero es un inconveniente tener que medirla cuando es muy larga, y además si el punto D está muy distante de dicha línea, resultarán perpendiculares oa, nm, $n'm'$, cuya longitud será tambien otro inconveniente para operar con alguna exactitud cuando se hace uso de estos procedimientos en los bosques, segun hemos indicado en otro lugar.

755. **Trazado y medicion de la linea determinada por dos puntos cualesquiera de su direccion.—Prolongacion de las alineaciones en parte inaccesibles.**—Supongamos que se dan dos puntos cualesquiera de una línea indefinida en parte accesible y en parte no, tales como los A y B (fig. 451; lám. 31), y se quiere obtener su trazado en uno de los sentidos de su direccion ó en ambos: toda la cuestion está reducida á encontrar á la otra parte de un obstáculo C otros dos puntos tales

como b y D, que hallándose en línea con los A y B sirvan á su vez para la continuacion del trazado en la parte accesible del terreno hasta el encuentro de nuevos obstáculos. Si valiéndose de los instrumentos angulares, los jalones y banderolas, permite la naturaleza del terreno dirigir visuales que salven los obstáculos, como la $a'b'$ por los jalones a y b, la prolongacion de la línea se verifica con la mayor facilidad. Para prolongarla en caso contrario, expondremos á continuacion varias de las diversas construcciones que pueden emplearse, con el objeto de hacer uso de la más á propósito en cada uno de los casos que se presenten, segun las circunstancias.

756. *Con los goniómetros.—Primer método.*—Si se tratase de prolongar la AB (fig. 492; lám. 33) se trazará una recta AF, que se medirá, así como los ángulos BAF y AFD, y resolviendo el triángulo ADF se tendrá la longitud de FD, y el punto D pertenecerá á la prolongacion de AB. La resolucion del mismo triángulo nos da el ángulo CDF; formándolo en el punto D sobre la DF, ó el suplemento FDE $= 180^\circ -$ CDF, y colocando jalones en direccion de la visual dirigida por la alidada movible se tendrán otros puntos C, E de la prolongacion de AB. Se pudiera obtener otro segundo punto C ó E que con el D sirviese para prolongar la línea, resolviendo como el primero otro triángulo AFC ó AFE; pero sería más largo el procedimiento.

La resolucion del triángulo ADF nos da igualmente la medida indirecta de la línea AD.

Segundo método.—Tambien se puede prolongar la AB (fig. 493; lámina 33) sin resolver el triángulo BEC: formando un ángulo cualquiera CBE y tomando un punto E á arbitrio en la BE, se hará el ángulo BEC = ABE — CBE; tomando CE = BE y haciendo en C el ángulo BCE = EBC ó ECD = ABE, se tendrá la CD prolongacion de la AB. Para la mayor exactitud conviene tomar el punto E á bastante distancia de la AB.

Si se quiere además obtener la medida de la BC se podrá resolver por el cálculo ó por la geometría el triángulo BEC. Tambien se podrá evitar la resolucion de este triángulo haciendo el ángulo CBE de 45°, y trazando la CE perpendicular á la BE; pues entonces resulta CE = BE. El ángulo BCE sería tambien de 45° y el ECD de 135°.

757. *Con la brújula.*—Para prolongar la AC (fig. 494; lám. 33) trácese un triángulo BFC y una recta FD que vaya á parar al otro lado del obstáculo. Mídanse las BF y CF y tómense los puntos medios b y c, por medio de los cuales se trazará la bcd determinando su punto de interseccion d con la FD; tómese Dd = Fd, hállese el rumbo de la AB, y trasladando la brújula al punto D se establecerán jalones en direccion de la visual que forme el mismo rumbo. Midiendo la cd y doblando su valor se tendrá la medida indirecta de la parte CD interceptada por el obstáculo.

758. En el caso particular de hallarse en la alineacion un punto muy elevado como la veleta de una torre M (fig. 495; lám. 33), se suspende el trazado en un punto B antes del obstáculo, y trasladando la brújula al

otro lado, se busca por tanteos un punto C desde el cual la visual dirigida á M tenga el rumbo hallado, prolongándola segun CD con el mismo rumbo. Este procedimiento es expedito cuando no se trata de conocer la magnitud BC interceptada por el obstáculo.

759. *Con la plancheta.*—Se concibe el modo de servirse de este instrumento para la resolucion del problema que nos ocupa, empleando un procedimiento análogo al que se sigue con los goniómetros, y valiéndose de la escala adoptada para la determinacion de las distancias.

760. *Con las escuadras.*—*Primer método.*—Para prolongar la AB (figura 496; lám. 33) se formará en el punto B el ángulo ABG de 135°; se levantarán en dos puntos F y G perpendiculares que vayan á parar á la otra parte del obstáculo, y tomando en ellas las longitudes FC = BF y GD = BG, los extremos C y D pertenerán á la prolongacion de la AB, y por su medio se podrá continuar el trazado de la recta.

Segundo método.—Cuando hay varios obstáculos en sentido de la longitud de la línea, pueden emplearse los métodos expuestos (752). Si empleando el primero de estos métodos se trata de prolongar la Aa' (figura 489; lám. 33) se determinarán los puntos b', c'..... de la prolongacion por medio de las proporciones

$$\mathrm{A}a : aa' :: \mathrm{A}b : bb' ;$$
$$\mathrm{A}a : aa' :: \mathrm{A}c : cc' ;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y empleando el segundo se miden las AB, aa', Ba, Bb y Be (fig. 490; lámina 33), y observando que en la série de razones iguales

$$\mathrm{B}a : aa' - \mathrm{AB} :: \mathrm{B}b : bb' - \mathrm{AB} :: \mathrm{B}e : e\mathrm{E} - \mathrm{AB}$$

la primera razon es conocida, así como los antecedentes de las demás, se podrán determinar los consecuentes; y añadiéndoles la AB se tendrán las longitudes de las paralelas bb', eE.....

La medida de la AE se obtendrá de la manera explicada (752).

Tercer método.—Para prolongar la AB (fig. 497; lám. 33), se levantará en el punto B una perpendicular BE á esta línea, dándole la longitud necesaria para que la perpendicular EF á ella, resulte trazada fuera del obstáculo. Se elige despues un punto F de esta última de modo que satisfaga tambien á la condicion de que la perpendicular FC á EF salve el obstáculo; y haciendo CF=BE, se tirará por el punto C la perpendicular CD á CF, la cual resultará en prolongacion de AB. En efecto: siendo AB y CD paralelas entre sí por serlo ambas á la EF, distando igualmente de ésta y hallándose situadas en la misma region del plano con respecto á ella, no son más que una sola y misma recta AD.

Cuarto método.—Para prolongar la AB (fig. 498; lám. 33), se levantarán en dos puntos a y b de esta línea bastante distantes entre sí, las perpendiculares aa' y bb' de la misma longitud; se colocarán jalones en los extremos a' y b', por cuyo medio se trazará la recta indefinida a' d, y levantando á ésta otras dos perpendiculares cc' y dd' á la otra parte del obstáculo é iguales á las aa' y bb', los jalones colocados en los puntos c' y d' servirán para trazar la prolongacion CD de la recta AB.

761. Estos dos últimos métodos tienen tambien aplicacion á la prolongacion de una línea en el interior de una poblacion, cuando se quieren sujetar las nuevas construcciones á una línea de fachada de algun edificio ya construido, ó cuando se trata de sustituir á una calle tortuosa otra regular ó *tirada á cordel*, como se dice comunmente. En efecto; supongamos que las líneas de fachada AB y OP (fig. 499; lám. 33) son paralelas, y que se trata de prolongar estas líneas con el objeto de trasformar en la calle regular determinada por las rectas AZ y OX, la irregular ó tortuosa formada por las líneas quebradas ABCDFGYJMN y OPQRTVV'Z'. Para esto trazaremos la perpendicular AO á las AB y OP y sobre ella bajaremos desde el punto saliente D la perpendicular Dd, que se prolongará hasta que encuentre á la línea de fachada PQ; sobre la Dd se levantará la perpendicular ab prolongándola hasta su encuentro con DF; sobre la ab se bajará desde el punto saliente Q la perpendicular Qb, prolongándola hasta la GY; en el punto r se levantará á la br la perpendicular rx, sobre la cual se bajará desde el punto saliente J la perpendicular Js, suficientemente prolongada. Una vez trazada esta série de perpendiculares, será fácil prolongar cada una de las líneas AB y OP. Para prolongar la AB se levantarán á la br dos perpendiculares ce, mn, iguales en longitud á AO—(Od+ab), y se tendrán los puntos e y n para el trazado de la prolongacion EH; despues se levantarán sobre la sz' otras dos perpendiculares tv y z'Z iguales á rs+mn, y se tendrán los puntos v y Z para el trazado de la prolongacion LZ. Para prolongar la OP se levantarán sobre la sz' dos perpendiculares sx y $s'x'$ iguales á AO—(mn+rs), y se tendrán los puntos x y x', que servirán para el trazado de la prolongacion SX.

La medida de la AZ ó XO es igual á la suma de las da, br y sz'.

762. Segun la posicion de los obstáculos pueden emplearse tambien los siguientes medios para la prolongacion de la recta.

Quinto método.—Para prolongar la AB (fig. 500; lám. 33), se levantarán en los puntos A y B perpendiculares á esta línea, y tomando en ellas Aa=Ac y Bb=Bd, y trazando las rectas ab y cd, su punto de interseccion C pertenecerá á la prolongacion de AB. Determinando del mismo modo otro punto C', podremos continuar el trazado de la recta AD por medio de los puntos C y C'.

La medida de la BC se obtendrá por la proporcion

$$ab : b\text{C} :: \text{AB} : \text{BC}.$$

Sexto método.—Para prolongar la AB (fig. 501; lám. 33), se traza por el punto B una recta cualquiera CD en la direccion que sea posible, y la perpendicular AC á esta línea desde el punto A; tomando BD=BC y levantándola en el punto D la perpendicular DE=AC, el punto E pertenecerá á la prolongacion de AB. Del mismo modo se tendría el otro punto E′. La medida de la BE es la de su igual AB.

Sétimo método.—Para prolongar la AB (fig. 502; lám. 33), se levantará la perpendicular BC á la AB, y la CD á la AC; los triángulos semejantes ABC y ACD dan la proporcion

$$AB : BC :: AC : CD;$$

y se obtendrá el punto D, pudiéndose hallar otro nuevo punto del mismo modo.

La medida de la BD se obtendrá por la proporcion

$$AB : BC :: BC : BD,$$

que resulta de los triángulos ABC y BCD semejantes tambien.

763. *Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.*—*Primer método.*—Para prolongar la AB (fig. 503; lám. 33) se trazarán dos rectas AE y BE que se encuentren en un punto E desde el cual se vea la parte que se halla al otro lado del obstáculo; se tomarán las EF y EG que sean la misma parte alícuota de las AE y BE, y los jalones colocados en los puntos F y G servirán para el trazado de la FL, que será paralela á la AD. Se trazarán las EC y ED en una direccion cualquiera al otro lado del obstáculo, se hallarán sus puntos de interseccion H y L con la FL, y en la série de razones iguales

$$EF : EA :: EG : EB :: EH : EC :: EL : ED$$

se podrán conocer EC y ED, y por lo tanto, los puntos C y D de la prolongacion, supuesto que todas las demás líneas se pueden medir.

El valor de BC se determinará por la proporcion

$$EG : GH :: EB : BC.$$

Segundo método.—Para prolongar la AB (fig. 504; lám. 33) trácense dos líneas cualesquiera AG y BG que se encuentren en un punto G, desde cuya interseccion se descubra la parte del terreno al otro lado del obstáculo; trácese tambien otra línea BD que encuentre á la AG; tómense EG y GF que sean una misma parte alícuota de las GD y GB, trazando despues la EFC, cuya longitud se obtendrá por los triángulos semejantes ABD y AEC, que dan la proporcion

$$AD : DB :: AE : EC.$$

Conocido el punto C de la prolongacion de AB, y pudiéndose determinar otros del mismo modo, el problema quedará resuelto.

La medida de la recta BC se obtendrá por la proporcion

AD : DE :: AB : BC.

764. **Trazado y medicion de las líneas completamente inaccesibles.**—Puede suceder que se den los extremos ó dos puntos cualesquiera de su direccion.

Cuando se dan los extremos A y B (fig. 505; lám. 33), no es posible la determinacion de puntos intermedios; pero se puede averiguar si un punto C colocado entre los A y B se halla en línea con ellos. Para ver si sucede así, se medirá una base DE y los ángulos formados por las líneas tiradas desde sus extremos á los puntos A, C y B, con lo cual se podrán resolver los triángulos ADE, CDE y BDE para determinar las longitudes AD, DC y DB. Como se deducen fácilmente los ángulos ADC y CDB, los triángulos ACD y CDB se podrán resolver tambien para conocer los ángulos adyacentes ACD y DCB cuya suma, segun sea ó no igual á 180°, indicará si los tres puntos A, C y B están ó no en línea recta.

Para medir la recta inaccesible AB se seguirán los mismos métodos explicados (741) para cuando solo los extremos son inaccesibles, pues estos puntos bastan para determinarla.

765. Cuando se dan dos puntos cualesquiera A y B (fig. 506; lám. 34) de una línea inaccesible AB con el objeto de prolongarla, y esta prolongacion ha de ser en el sentido inaccesible, tampoco se podrán fijar otros puntos; pero se podrá averiguar, como en el caso anterior, si otro punto C se halla en línea con los A y B. Si AB ha de prolongarse en el terreno accesible, se podrá hallar otro punto cualquiera E de la prolongacion, resolviendo como auxiliar el problema de medir la AB con los goniómetros ó con la plancheta (741—742—743), y al resolver el triángulo ABH con este fin, hallaremos tambien el ángulo ABH, y entonces como el HBE es igual á 180°—ABH y el BHM se puede medir, se conocerá en el triángulo BHE la base BH y los ángulos adyacentes; resolviéndole para hallar HE, se tomará esta distancia horizontal en el terreno, se formará en el punto E el ángulo DEH, suplemento de la suma de los otros dos, y se tendrá la prolongacion DE de la recta AB.

Se concibe la manera de medir la línea en este caso, cuando se han fijado los límites de la alineacion, bien resulte toda la línea en terreno inaccesible ó tenga alguna parte accesible, haciendo uso de los procedimientos explicados para cuando solamente los extremos son inaccesibles.

766. **Problemas acerca de la determinacion de rectas y de ángulos inaccesibles.**—La medicion de las rectas inaccesibles ó en parte accesibles, entra como auxiliar en la resolucion de varios de los problemas que exponemos á continuacion; advirtiendo que solamente indicaremos el uso de los goniómetros, tanto porque es el método preferible

bajo el punto de vista de la exactitud, cuanto porque se está ya en el caso de comprender fácilmente la manera de resolverlos por cualquier otro medio de los que hemos indicado anteriormente.

Problema 1.º—*Medir un ángulo horizontal cuyo vértice es inaccesible.*—Sea el ángulo ABC (fig. 507; lám. 34) en cuyo vértice no es posible colocar el instrumento; se levantarán en uno de sus lados AB dos perpendiculares de igual magnitud *mn*, *m'n'*, y por los puntos *n* y *n'* se trazará la *ab*, que será paralela á AB, y midiendo el ángulo *ab*C se tendrá conocido su igual ABC.

Haciendo uso de la brújula no hay necesidad de establecer primero la paralela á uno de sus lados, pues bastaría tomar los rumbos *a* y *b* (figura 508; lám. 34) de los lados AB y BC, de los que se deduciría (287) el valor del ángulo ABC.

Tambien se resuelve este problema con mucha facilidad estableciendo una base AB (fig. 509; lám. 34), y hallando el valor de los ángulos A y B, cuya suma, restada de 180º, da el valor del ángulo inaccesible C.

Problema 2.º—*Medir un ángulo horizontal en que el vértice y uno de los lados son inaccesibles.*—Sea el ángulo ABD (fig, 505; lám. 33) siendo sólo accesible el lado BD en su extremo D: elíjase un punto E desde el cual sean visibles los A, B y D; determínese la base DE, y háganse las mismas operaciones que para medir la recta inaccesible AB, y al resolver el triángulo ADB se hallará el valor del ángulo ABD que se buscaba.

Problema 3.º—*Medir un ángulo horizontal completamente inaccesible.*—Supongamos primero que el ángulo ACB (fig. 510; lám. 34) sea saliente; se elegirán en el terreno accesible dos puntos D y E visibles y accesibles entre sí, tales que desde el punto D sean visibles los B, C y E, y que además dicho punto D se halle en el plano vertical que pasa por la BC; debiendo reunir tambien el punto E las mismas condiciones respecto á los A, C y D. Mídanse los ángulos horizontales CDE y CED, y restando de 180º la suma de estos ángulos, se tendrá el valor del DCE ó de su igual ACB.

Si el ángulo ACB (fig. 511; lám. 34) fuese entrante, se elegirían dos puntos D y E, desde los cuales fuesen visibles los A, C y B, midiendo despues los ángulos ADE, CDE y BDE formados en el punto D sobre la base DE, é igualmente los AED, CED y BED; con lo cual se podrán resolver los triángulos ADE, CDE y BDE, y por medio de estos los ACE y BCE; hallando en el primero de estos triángulos el valor del ángulo ACE, y en el segundo el del ángulo BCE, tendremos

$$ACB = ACE + ECB.$$

En general, se puede medir un ángulo cualquiera horizontal é inaccesible ACB (fig. 512; lám. 34) eligiendo dos puntos D y E desde los cuales sean visibles los A, C y B, y suponiendo unidos los puntos A y B por medio de la AB, determinar valiéndose de la base DE las tres rectas horizontales é inaccesibles AC, BC y AB, cuya construccion se ve en la figura; en el triángulo ABC, en el que se conocerán entonces sus tres lados, se podrá determinar el valor del ángulo pedido ACB.

Cuando los puntos A, B y C no se hallan en un plano horizontal, y se quiere conocer el ángulo ACB en el plano que determinan, se calcularán las distancias naturales é inaccesibles AC, BC y AB, y la resolucion del triángulo ABC nos dará el ángulo ACB.

Problema 4.°—Dada una recta AB (fig. 513; lám. 34) *accesible solamente por uno de sus extremos* B, *determinar la direccion y magnitud de la perpendicular* DC, *bajada á dicha recta desde un punto accesible* C.

Mídase el ángulo horizontal ABC, y suponiendo trazada la CD se conocerá el ángulo BCD del triángulo rectángulo DCB; fórmese este ángulo en el punto C y se conocerá la direccion de la CD. Midiendo la distancia horizontal BC se podrá resolver dicho triángulo, y se tendrá la magnitud de la CD.

Las partes BD y AD se pueden conocer tambien; la primera por el triángulo BCD, y la segunda resolviendo el ADC en el cual se conoce DC, el ángulo recto ADC y el ACD, que es igual al ángulo horizontal ACB, que se puede medir, ménos el DCB que ya se conoce.

Problema 5.°—Dada una recta AB (fig. 514; lám. 34) *accesible solamente por uno de sus extremos* B, *determinar la magnitud de la perpendicular* DC, *bajada á la misma desde un punto inaccesible* C.

Tómese otro punto E desde el cual se descubran los A, B y C, y sea accesible el punto B: midiendo la base horizontal BE, háganse las mismas operaciones que si se tratase de medir la AC que tiene sus extremos inaccesibles. Cuando se tenga resuelto el triángulo ABC se determinará la magnitud de la CD, y tambien se podrán hallar las partes AD y DB como en el caso anterior.

Problema 6.°—Dada una recta inaccesible AB (fig. 515; lám. 34), *determinar la direccion y magnitud de la perpendicular* DC, *bajada á la misma desde un punto accesible* C.

Elíjase otro punto E desde el cual se descubran los A, B y C, y sea accesible el punto C: mídase la base horizontal CE; y haciendo las mismas operaciones que si se tratase de medir la AB, cuando por la resolucion del triángulo ABC se conozca el ángulo horizontal ABC, que es el que ahora se necesita, nos hallaremos ya en el caso del problema 4.° y se continuará del mismo modo.

Problema 7.°—Dada una recta inaccesible AB (fig. 515; lám. 34), *determinar la magnitud de la perpendicular* DC, *bajada á la misma desde un punto inaccesible* C.

Tómense dos puntos E y F que sean visibles y accesibles entre sí, y desde los cuales se descubran los A, B y C; mídase la distancia horizontal EF, y tomándola por base mídanse tambien las rectas inaccesibles AB y BC, que son lados del triángulo ABC, y dedúzcase el valor del ángulo comprendido ABC, que es igual á ABF—CBE—EBF, ángulo que se procura obtener al resolver los triángulos BEF, BCE y ABF. Una vez conocido el triángulo ABC, se determinará la magnitud de la perpendicular CD y se podrán hallar asímismo las AD y BD. Tambien puede resolverse el triángulo ABC determinando el valor de sus tres lados.

Estos problemas comprenden el de *medir la distancia horizontal de un punto accesible ó inaccesible á una recta accesible, en parte accesible y en parte inaccesible, ó completamente inaccesible*.

Problema 8.º—*Dada una recta accesible solamente por uno de sus extremos, tirarle una paralela por un punto accesible*. Este problema se resuelve como se dijo (715); cuando la recta y el punto son accesibles.

Problema 9.º—*Dada una recta* AB (fig. 516; lám. 34), *accesible solamente en uno de sus extremos* B, *tirarle una paralela por un punto inaccesible* C.

Se buscarán en el terreno dos puntos D y E desde los cuales sea visible y accesible el punto B, y se mide la distancia BE y los ángulos horizontales ABC, CBD, CBE y BEC, con lo cual se conocerá en el triángulo BCE un lado y los dos ángulos adyacentes, y se podrá determinar la magnitud de BC; suponiendo ahora que la recta BD encuentre en el punto F á la paralela CH que se trata de determinar, se sabrá en el triángulo BCF el valor del ángulo BCF = ABC, y tambien el de BFC = 180° — (ABC + CBD), y tendremos la proporcion

$$\text{sen. BFC} : \text{sen. BCF} :: \text{BC} : \text{BF};$$

de la que se deduce el valor de BF y se determina el punto F, desde el cual se tira (715) una paralela FH á la AB, en cuya prolongacion se debe hallar el punto C. Si éste fuese visible desde F, bastaría trazar la alineacion que estos dos puntos determinan.

Problema 10.—*Dada una recta inaccesible* AB (fig. 517; lám. 34), *tirarle una paralela por un punto accesible* C.—Elíjase un punto D desde el cual sean visibles los A, B y C: tomando la CD como base, háganse las mismas operaciones que si se tratase de medir la AB, y en el triángulo ABC determínese el ángulo ABC, por medio del cual se podrá tirar en el punto C la paralela CE.

Problema 11.—*Dada una recta inaccesible* AB (fig. 518, lám. 34), *tirarle una paralela desde un punto inaccesible* C.—Tómense dos puntos D y E visibles y accesibles entre sí, y desde los cuales se descubran los A, B y C; mídanse los ángulos horizontales que se forman en los puntos E y D, y entonces los triángulos BDE, ADE y CDE, en los que se conoce la base DE y los ángulos adyacentes, nos darán las longitudes de las rectas BD, AD y CD. En el triángulo ABD, en el que se conocen los lados AD y BD y el ángulo comprendido ADB, determínese el ángulo ABD, el cual es suplemento del BFC que forma la BD con la paralela CG que suponemos pasar por el punto C. En el triángulo CDF se tendrá entonces conocido el lado CD y los ángulos CDF y DFC; resolviéndose se tendrá la magnitud de DF, la cual, tomada en la FD, ó en su prolongacion si D cae en D' dentro de las paralelas, determina el punto F, por el cual se podrá tirar la paralela FG que pasará por el punto C, valiéndose de la construccion del ángulo ABF ó el BFC. Si la paralela no pasa por C, puede consistir en haber equivocado la posicion del punto D con relacion á las paralelas.

Problema 12.—*Hallar la bisectriz de un ángulo inaccesible.*—Tírese una línea cualquiera AB (fig. 509; lám. 34) determinando sus intersecciones con los lados del ángulo, y mídanse los ángulos CAB y CBA, teniéndose entonces

$$CAB + CBA = 180^\circ - C.$$

Para determinar el punto D que satisfaga á la condicion de ser $CA = CD$, será preciso calcular el valor del ángulo CAD ó de su igual CDA; pero en el triángulo isósceles ADC se tiene que verificar la ecuacion

$$2CAD = 180^\circ - C;$$

y de las dos ecuaciones halladas resulta entonces

$$CAD = \frac{CAB + CBA}{2}:$$

formando este ángulo en el punto A, se tendrá la verdadera direccion de la AD y se podrá hallar su interseccion con la CD. Dividiendo la AD en dos partes iguales, su punto medio E determinará con C la bisectriz pedida. Si C no es visible desde E, se podrá tirar una paralela á la AD desde otro punto cualquiera de la CA, y se hallará su punto medio, que con el E dará la direccion de la bisectriz.

767. **Aplicacion de las teorías expuestas á la resolucion de otros varios problemas.**—*Problema* 1.°—*Conocida la altura* CD (fig. 519; lámina 34) *de una torre, determinar desde el punto* C *la longitud de una recta* AB *situada en el plano horizontal que pasa por la base de dicha torre.*—Determínense desde el punto C los ángulos DCA, ACB y BCD, y resolviendo los triángulos rectángulos DCA y DCB se obtendrán las rectas AD y BD; reduciendo el ángulo ACB al horizonte (162) se tendrá el ADB; y en el triángulo ABD, en el cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se podrá calcular la AB que se trataba de conocer.

Problema 2.°—*Determinar el rádio de una torre circular inaccesible.*—Es el mismo que hemos resuelto (180) al reducir los ángulos al centro de la estacion.

Problema 3.°—*Dados cuatro puntos inaccesibles* A, B, C, D (fig. 520; lámina 34), *averiguar si están situados en un mismo plano.*—Mídase una base EF y los ángulos que se forman en sus extremos por las visuales dirigidas á los puntos dados; y resolviendo los triángulos AEF, BEF y CEF se obtendrán los lados AE, BE y CE y se podrán resolver tambien los triángulos EAB, EAC y EBC que nos darán los tres lados AB, AC y BC del triángulo ABC, en el cual se hallará el valor del ángulo ACB. Procediendo del mismo modo para los triángulos BCD y ACD, se podrán hallar los ángulos BCD y ACD; y si la suma de los ACB y BCD componen el ángulo ACD, los cuatro puntos se hallarán en el mismo plano.

Se podrá averiguar en este caso si pertenecen á una circunferencia de círculo; para lo cual es preciso que el cuadrilátero ABCD sea inscriptible, es decir, que dos ángulos opuestos CAB y CDB sean suplementarios.

Problema 4.º—Dada la distancia AB (fig. 517; lám. 34) *entre dos puntos* A *y* B, *determinar la de otros dos* C *y* D, *desde los cuales pueden observarse los primeros, siendo invisibles desde estos los* C *y* D.— Se tomarán en C los ángulos ACD y BCD, y en D los CDA y CDB, Dando un valor aproximado á CD, se podría calcular en el triángulo ACD el correspondiente á AC, y en el triángulo CBD el que corresponde á CB; hallando el valor de ACB= ACD — BCD si los cuatro puntos A, B, C y D están en un plano, ó midiéndole directamente en caso contrario, se calcula en el triángulo ACB el valor aproximado de AB. Llamando D á la distancia verdadera CD que se busca y D′ á la que se tomó aproximada, d la distancia conocida AB y d' la aproximada obtenida, la proporcion

$$d' : d :: D' : D$$

nos dará el valor de D que se trata de obtener.

Este problema se puede enunciar tambien así: *Medir indirectamente una base accesible* CD *por medio de otra inaccesible y conocida* AB.

CAPITULO XIV.

Telémetros

Telémetros en general.—Estadia ó micrómetro de Green.—Estadia de ángulo fijo y estadia de ángulo variable.—Mira ó escala.—Uso de la estadia.—Reduccion de las distancias al horizonte.—Estadia de anteojo.—Estadia de retículo móvil.—Telémetro de Ertel.—Usos del telémetro de Ertel.—Anteojo micrométrico de Amici.—Teoría del aparato micrométrico.—Usos del anteojo micrométrico de Amici.—Anteojo micrométrico de Rochon.—Teoría en que se funda el instrumento.—Usos del micrómetro de Rochon.—Telémetro ó Diastimómetro analático de Porro.—Disposicion uso y lectura del micrómetro.—Micrómetro del teodolito de Porro.—Reduccion al horizonte de las distancias medidas con el telémetro de Porro.—Anteojo-corneta de Porro.—Uso del anteojo-corneta.—Anteojo biprismático de Porro.—Teoría y usos del micrómetro.—Omnímetro de Eckhold.—Telémetros de reflexion.

768. **Telémetro en general.**—Ya hemos dicho (243) que se entiende en general por *telémetro*, los instrumentos que sirven para la medida indirecta de las distancias, y al ocuparnos ahora de los más comunmente adoptados en la práctica, diremos que su aplicacion está limitada á la valuacion aproximada de aquellas; no habiéndose resuelto aun de una manera satisfactoria el problema de determinarlas por su medio con la aproximacion que suministra la medida directa. En efecto, casi todos ellos exigen el conocimiento de la relacion que existe entre la imágen de un objeto formada en el foco de un anteojo y su distancia focal, cantidad que solo puede considerarse como constante para los objetos colocados á distancias sumamente grandes; y fundándose la teoría en la invariabilidad de esta relacion, se comprende la imposibilidad de obtener con una aproximacion suficiente, los valores de las distancias que se miden en las aplicaciones ordinarias de la Topografía, y para las cuales es muy sensible la variacion que experimenta la distancia focal, así como

la magnitud de la imágen. Por esta razon solo tienen aplicacion los telémetros para los reconocimientos y tanteos, y para la apreciacion de una distancia cualquiera cuyo valor no se necesita conocer exactamente; pudiendo tenerla muy importante para asegurarse de que en las medidas obtenidas directamente no se han cometido errores de consideracion.

La parte de un telémetro cualquiera dispuesta para proporcionar la relacion de que acabamos de ocuparnos, toma el nombre de *aparato micrométrico* en razon á estar destinada á la medida de pequeñas magnitudes, como son las imágenes de los objetos obtenidas por medio de los anteojos.

769. **Estadia ó micrómetro de Green.**—Fundado en la teoría de las líneas proporcionales, este sencillo instrumento da la distancia entre dos puntos *m* y *n* (fig. 521; lám. 34) por una simple lectura hecha en la regla graduado *nb*. La estadia puede componerse de un tubo *t*, ligeramente cónico, cerrado en uno de sus extremos por una placa que presenta en su centro un pequeño taladro destinado á servir de ocular, y provisto en su interior del retículo *r*, con dos cerdas paralelas proyectadas en los puntos *a* y *a'*

Disponiendo horizontalmente el eje de figura del tubo y dirigiendo sucesivamente visuales á las reglas *bn*, *cp* .... colocadas verticalmente en los puntos *n*, *p*..... las porciones *bb'*, *cc'*.... interceptadas en estas reglas por las visuales dirigidas segun el ocular *h* y las cerdas *a*, *a'* bajo el ángulo visual constante *aha'*, serán proporcionales (Geom. Teorema 67) á las distancias horizontales *hh'*, *hh''*..... ó *mn*, *mp*..... del punto de estacion á los ocupados por la regla.

770. *Graduacion de la regla.*—Si la regla se coloca en un punto *n* que diste de *m* una longitud determinada, 100 metros, por ejemplo, dividiendo en 100 partes iguales la porcion *bb'* interceptada por las visuales en la mira, cada una de estas partes corresponderá en el terreno á un metro de la distancia horizontal.

Si la magnitud hallada para un metro en la regla es susceptible de dividirse en 2..... 5 ... 10 .... partes iguales y claramente perceptibles, cada una de estas subdivisiones corresponderá á $0^m,5$.... $0^m,2$... $0^m,1$..... de distancia horizontal.

771. **Estadia de ángulo fijo, y estadia de ángulo variable.**—La magnitud de las divisiones es arbitraria, y depende del valor del ángulo micrométrico: razon por la cual, si la posicion de las cerdas varía, es necesario proceder á una nueva division de la regla.

Para evitar este inconveniente y valerse de una regla dividida de antemano, puede hacerse variable la posicion de una de las cerdas ó de ambas, por medio de tornillos de correccion convenientemente dispuestos, constituyéndose así la *estadia de ángulo variable* para distinguirla de la primera, que se llama *estadia de ángulo fijo*.

772. *Correccion de las cerdas en la estadia de ángulo variable.*—Colocada la regla á una distancia *mn* de 100 metros, cuidadosamente medida,

se mueven las cerdas del retículo hasta que el ángulo visual intercepte en la regla la distancia bb', que en ella marca los 100 metros. Esta distancia puede ser la magnitud real del metro, en cuyo caso cada centímetro de la regla corresponde á un metro de la distancia horizontal; y apreciando en la regla los milímetros, se llevará hasta decimetros la apreciacion de las distancias.

773. **Mira ó escala**.—Se llama así la regla dividida cuando está convenientemente dispuesta para las observaciones. Tiene una longitud ab (fig. 522; lám. 34) de dos metros, y presenta en su parte posterior una ranura longitudinal por la cual corre un liston mn, á fin de poder alcanzar una longitud doble en caso necesario. Este liston lleva consigo dos rectángulos r, r', llamados *tablillas de la mira*, cuyas mitades inferiores están pintadas de negro ó de rojo, y las superiores de blanco, á fin de que se destaquen mejor sus líneas de separacion. Estas rectas, llamadas *líneas de fé*, se hallan á la distancia constante que media entre las divisiones 0 y 100 de la regla, y corresponden exactamente á las que en la armadura c, que sujeta las tablillas al liston, están en contacto con las divisiones de la regla.

Para hacer uso de estas miras se hace subir el liston, á fin de dirigir el hilo inferior de la estadia á un trazo grueso, y hecho con tinta negra, que marca el cero en el frente de la regla, y se continúa el movimiento del liston hasta que el otro hilo cubra á una de las líneas de fé de las tablillas. La lectura de la regla se hará entonces en las divisiones de la izquierda ó en las de la derecha, segun que el hilo superior de la estadia cubre á la línea de fé de la tablilla inferior ó á la de la superior.

774. **Uso de la estadia**.—La estadia se emplea para la medida de una línea determinada por dos puntos del terreno, colocando verticalmente la regla en uno de estos puntos y dirigiendo á ella desde el otro extremo el tubo que lleva las cerdas, de modo que su eje sea sensiblemente paralelo á la recta que se trata de medir. La lectura que se obtiene en la regla de la manera que hemos indicado dará la longitud pedida.

775. **Reduccion de las distancias al horizonte**.—Cuando la recta que se trata de medir es inclinada como la AB (fig. 523; lám. 35), sería preciso colocar la mira en una posicion Bc, perpendicular á AB, para que el eje óptico ds fuese perpendicular á ella, como se supone en la teoría fundamental de la estadia (769); pero como sería difícil conseguirlo con la prontitud y la exactitud necesarias, se la coloca verticalmente, obteniendo una lectura Bb que designaremos por M. Esta lectura no es la verdadera, Bc ó m, la cual se obtiene observando que en razon á que el ángulo dcB es poco diferente de 90° por la pequeñez del ángulo micrométrico d en el triángulo dcB, resulta en el Bbc

$$m = \text{M} \cos. a \quad [1],$$

siendo a el ángulo formado por las dos posiciones de la regla, igual al

ABC, que indica la pendiente de la recta dada, por tener el mismo complemento.

Si representamos ahora respectivamente por L y l la recta AB y su proyeccion CB, se tiene tambien

$$l = L \cos. a;$$

y poniendo en vez de L su valor representado por m en la ecuacion [1], se tendrá

$$l = M \cos.^2 a \quad [2];$$

que nos dice que *para obtener el valor de la proyeccion de una recta, cuya longitud se ha obtenido por medio de la estadia, se multiplica por la lectura obtenida en la regla colocada verticalmente, el cuadrado del coseno que corresponde á la pendiente de la misma recta.*

Para la resolucion de este problema, acompaña al tubo de la estadia un arco vertical graduado, con su nonius correspondiente.

776. Por medio de la fórmula [2] hemos hallado los valores de l, correspondientes á las inclinaciones que crecen de grado en grado, desde 5° hasta 30°, para el valor constante 100m de la lectura M obtenida en la regla. Para inclinaciones menores que 5°, la reduccion es muy pequeña; y pasando de 30°, es difícil la medida de las distancias con la estadia. De aquí los límites asignados á las pendientes en la siguiente

Tabla de la reduccion al horizonte de una lectura de 100 metros obtenida en la estadia.

Pendiente.	Proyeccion de 100m.	Pendiente.	Proyeccion de 100m.	Pendiente.	Proyeccion de 100m.
5°	99m,20	14°	94m,09	23°	84m,82
7	99 ,00	15	93 ,32	24	83 ,54
8	98 ,60	16	92 ,35	25	82 ,08
9	98 ,01	17	91 ,39	26	80 ,82
6	97 ,61	18	90 ,44	27	79 ,39
10	97 ,02	19	89 ,49	28	77 ,97
11	96 ,43	20	88 ,36	29	76 ,56
12	95 ,65	21	87 ,24	30	75 ,00
13	94 ,88	22	85 ,93		

El uso de esta tabla es análogo al de la inserta (161) para la reduccion de las distancias medidas directamente.

Una tabla más extensa y calculada con mayor aproximacion, constituye la tercera de las publicadas por Chevigné en París el año 1858, cuyas tablas recomendamos á nuestros lectores, porque son muy interesantes para otras operaciones topográficas, y que citaremos en lugar oportuno.

777. **Estadia de anteojo**.—La estadia que hemos descrito apenas tiene otra aplicacion que la de prestarse fácilmente á la comprension de la teoría y el uso de este instrumento, siendo casi inaplicable á la práctica. Seria necesario suponer en el observador una vista muy buena ó una longitud muy grande de la regla para la percepcion de sus divisiones, siendo con todo muy cortas las distancias á que pudiera aplicarse. Para evitar este inconveniente, las cerdas se disponen en el retículo de un anteojo, lo que facilita las lecturas de las divisiones de la regla y permite su observacion á distancias mucho mayores.

Para darnos cuenta de la aplicacion de un anteojo á la construccion de la estadia, sea AB (fig. 524; lám. 35) un objeto, cuya imágen ab se forme en el foco de la lente objetivo L, y supongamos que en los puntos a y b se proyectan los hilos del retículo, situados en un diafragma, como en la estadia explicada anteriormente. Sean además d y d' las distancias del objeto y de su imágen al centro óptico o de la lente, y m el ángulo micrométrico formado por los ejes secundarios (225) de los extremos del objeto. La semejanza de los triángulos oAB, oab nos dará

$$\mathrm{AB} : ab :: d : d',$$

de la que se deduce

$$d = \frac{d'}{ab} \times \mathrm{AB} \quad [3].$$

Si suponemos constante la relacion $\frac{d}{ab}$, lo que tiene lugar sensiblemente para los objetos muy lejanos, no habrá más que multiplicar esta razon por la magnitud AB interceptada en la mira para tener la distancia que se busca.

Sea por ejemplo $0^{m},004$ la separacion de los hilos del micrómetro, y $0,^{m}4$ la distancia d'; se tendrá

$$\frac{d'}{ab} = \frac{0,^{m}4}{0,^{m}004} = 100;$$

la fórmula [3] se convertirá en

$$d = 100 \times \mathrm{AB} \quad [4]:$$

y para una longitud de $2{,}^m37$, por ejemplo, interceptada en la mira, la distancia que se trata de medir será de 237m.

778. *Causas de error en la estadia de anteojo.*—La teoría de este instrumento supone la invariabilidad del ángulo micrométrico m; invariabilidad que no existe, porque la cantidad d' está muy lejos de ser constante, variando para un mismo observador como sabemos (224.—2.°) con la distancia d á que se halla el objeto AB.

Para hacerlo ver, sea f la distancia focal principal del objetivo: despejando d' en la fórmula [6] (228), tendremos:

$$d' = \frac{fd}{d-f} \quad [5];$$

en el triángulo bho se tiene (20) $bh = d' \text{ tg } \frac{m}{2}$;

y como es $bh = \frac{ab}{2}$, resulta

$$\text{tg. } \frac{m}{2} = \frac{ab}{2\, d'}.$$

Sustituyendo en esta última ecuacion el valor d' [5], se obtiene

$$\text{tg. } \frac{m}{2} = \frac{ab\ (d-f)}{2fd}.$$

En el segundo miembro de esta ecuacion f es constante, y ab tambien lo es sensiblemente; por lo que el valor de m varía con la distancia d al objeto AB.

Para atenuar el error en lo posible, se gradúa la mira colocándola á una distancia media de las que su longitud permite apreciar con el micrómetro.

Además de esta causa de error, hay otra que proviene de que el ángulo visual ó micrométrico varía con el tiro del ocular; y como este es diferente por lo general para dos observadores que traten de hallar el valor de una misma distancia, claro es que no deberá nunca emplearse la estadia sin haber dispuesto convenientemente las cerdas del retículo, si son variables de posicion, ó de haber dividido la regla en caso contrario.

779. **Estadia de retículo móvil.**—Se compone de un tubo ab (figura 525; lám. 35), abierto por uno de sus extremos y cerrado por el otro a, en el cual tiene un pequeño taladro que sirve de ocular. En el interior se halla una placa r, perpendicular á su eje, representada aparte en r', y en la cual hay practicada una ventanilla.

Esta placa puede colocarse á distancia variable del ocular, corriendo á lo largo del tubo paralelamente á sí misma, por medio de una pequeña pieza unida á la placa, y que sale al exterior del tubo por la hendidura *h* practicada en la direccion de las generatrices de este último.

Para graduar este instrumento, se coloca á cierta distancia, 20^m, por ejemplo, del punto de estacion *a* (fig. 526; lám. 35), un objeto *b* de magnitud determinada, y se corre la placa hasta una posicion *r*, en la cual las visuales tiradas por el marco superior é inferior de su ventanilla vayan á parar exactamente á los extremos de dicho objeto, marcando con un trazo y con el número 20 la posicion ocupada por la placa. Colocando el mismo objeto en *b'* á 40^m de *b*, se marcará del mismo modo la posicion correspondiente á la distancia 30^m del punto de estacion, y así sucesivamente. Si la porcion del tubo comprendida entre las divisiones practicadas lo permite, puede dividirse cada una de ellas en 10 partes iguales, para apreciar así las distancias de metro en metro.

780. *Uso del instrumento.*—Se coloca en uno de los extremos de la alineacion que se trata de medir el objeto de magnitud determinada que ha servido para la graduacion del tubo, y desde el otro extremo se dirige á él la visual, corriendo la placa á lo largo del tubo hasta la coincidencia de los extremos del objeto con los marcos superior é inferior de la ventanilla, como hemos indicado; el número que señale entonces el índice en la graduacion del tubo, dará aproximadamente la distancia que se trataba de conocer.

Por la altura media que corresponde á una casa de uno, dos ó más pisos, la de un árbol ú otro objeto cualquiera, se puede determinar aproximadamente con este instrumento la distancia á que se halla de él el observador.

781. **Telémetro de Ertel.**—El *telescopio micrómetro* ó *telémetro de Ertel*, se compone de un anteojo formado por cuatro tubos AC, CD, DE, EB (fig. 527; lám. 35), que pueden introducirse los unos en los otros como en los telescopios ordinarios. En el tubo DE, y cerca del extremo D, se halla un segundo objetivo, al que llamaremos así para distinguirle del objetivo principal A del anteojo.

En el foco principal de esta última lente se halla un diafragma con dos hilos paralelos *ab*, *cd* (fig. 528; lám. 35) y dos estilos de acero *m*, *n*, cuyas puntas distan entre sí una magnitud igual á la distancia de los hilos paralelos. El ángulo que en cada posicion del ocular B (fig. 527; lámina 35) determinan las visuales tiradas por él y los hilos del diafragma, ó bien por las puntas de acero, es el ángulo visual, cuyo valor en minutos y segundos se obtiene por las divisiones marcadas en los tubos movibles CD y DE.

Cuando estos tubos están encerrados en el AC, el ángulo visual es de 180', que es el que señala la escala en el punto E: sacando el tubo DE, los ángulos visuales van disminuyendo, y sus valores se obtienen en la escala de este mismo tubo por las divisiones que van coincidiendo con el borde D del otro. Si se continúa del mismo modo sacando el tubo CD los ángulos se obtendrán tambien en su escala por el borde C del tubo que lleva el objetivo principal. En C se halla el ángulo menor de la escala, que generalmente es de 60'.

La misma escala, dividida convenientemente, puede servir para apreciar ángulos menores, por ejemplo, de 60' á 20', determinando los ángulos visuales con uno de los estilos *m* ó *n* (fig. 528; lám. 35) y un tercero *c* que generalmente lleva el diafragma.

Si la distancia correspondiente á 1' está dividida en 10 partes iguales, se podrán obtener los ángulos con una aproximacion de 6''; y bastará, en general, observar el número de divisiones para apreciar el grado de aproximacion angular que permite la escala.

782. **Usos del telémetro de Ertel.**—Para obtener por su medio la distancia $db = x$ (fig. 529; lám. 35) á que se halla del observador en *d* un objeto *ab*, se dirigirá á este último el anteojo con los dos tubos graduados encerrados dentro del tubo del objetivo principal, y se sacará el del ocular hasta percibir claramente dos puntos notables *a* y *b*, del objeto, siendo indiferente que la línea *ab* que los une sea horizontal, vertical ó inclinada: se sacará despues el tubo del segundo objetivo, y si no bastase, se sacaría el otro tubo móvil, como hemos indicado (781), hasta que las imágenes de los puntos *a* y *b* coincidiesen exactamente con las puntas de acero del diafragma, en cuyo caso la graduacion del tubo dará el valor v del ángulo visual. Se mide despues la distancia $dc = l$ del punto de estacion á otro *c* situado en prolongacion de la que se trata de conocer, y se observa desde él el nuevo ángulo visual v' del mismo modo que se observó el v desde *d*; podemos entonces hallar x en funcion de los datos adquiridos.

En efecto, en el triángulo rectángulo *abd* se tiene (20) $ab = x$ tg. v, y en el *abc* del mismo modo, $ab = (x + l)$ tg. v'.

Igualando estos valores de *ab*, tomando los arcos v y v', por sus tangentes, en lo que no hay error apreciable por la pequeñez de los ángulos, ejecutando las operaciones indicadas y haciendo la trasportacion, resulta

$$x = \frac{l \text{ tg. } v'}{\text{tg. } v - \text{tg. } v'} \quad [6], \text{ ó } x = \frac{l\, v'}{v - v'} \quad [7].$$

Ejemplo. Sea $v = 127'$; $v' = 86'$; $l = 120^{m}$: empleando la fórmula [6], se tendrá

$$x = \frac{120 \times 0{,}025}{0{,}037 - 0{,}025} = \frac{3}{0{,}012} = 250^{m};$$

y por la [7] se hallará

$$x = \frac{120 \times 86}{127 - 86} = \frac{10320}{41} = 251^{m}{,}7.$$

783. Puede ocurrir que el ángulo visual sea tan grande, que la distancia aparente entre los puntos elegidos del objeto sea mayor que la que media entre los estilos del diafragma: entonces se elige uno ó más puntos del objeto comprendidos entre los dos primeros, se hallan separadamente los ángulos visuales de cada dos de ellos consecutivos, y la suma de estos ángulos será el valor del que se trataba de conocer.

784. Si la distancia que se busca es la $dh = x$ (fig. 530; lám. 35), en la que la recta medida cd no va á parar á uno de los puntos a ó b determinados del objeto, ó en que no es perpendicular á la línea ab, pueden todavía emplearse las mismas fórmulas que en el caso anterior, en atencion á la pequeña diferencia entre las magnitudes de las rectas ch y cb, y en lo poco que difiere de 90° el ángulo b por la pequeñez de v y v'.

785. La distancia del objeto al extremo c, se hallaría añadiendo á la longitud l medida directamente, el valor de x obtenido por el cálculo. Por este procedimiento se halla tambien la distancia de un punto c al objeto ab, cuando la longitud l se mide hácia este último.

786. Cuando el terreno no se presta fácilmente á la medida de una base á las inmediaciones del punto cuya distancia pq (fig. 531; lám. 35) al objeto ab se trata de hallar, se eligen otros dos que se hallen en el plano vertical del primer punto y el objeto, y desde ellos se miden como hemos dado á conocer los ángulos v y v', así como la distancia mn, de donde puede deducirse por la fórmula [6] la magnitud de nq. Hallando el valor del ángulo r, se tendrá sensiblemente la proporcion

$$\text{tg } v : \text{tg. } r :: nq : pq;$$

de donde resulta

$$pq = \frac{nq \text{ tg. } r}{\text{tg. } v}$$

Si la línea ab no es vertical, el plano en que deben ser elegidos los puntos de estacion debe ser el que pasa próximamente por el punto medio de dicha recta.

787. **Anteojo micrométrico de Amici.**—Un anteojo astronómico cuyo objetivo tiene un diámetro de 0,^{m}042 y una distancia focal de 0,^{m}37, y que está provisto de un aparato micrométrico, constituye el telémetro de Amici. El ocular es el de Ramsden, que ya hemos descrito (235); pero que puede reemplazarse por otro del mismo autor, que amplifica más las imágenes de los objetos.

El tubo del objetivo se pone en movimiento por medio del engranaje de un piñon con una rueda dentada; y su mayor ó menor salida con respector al del cuerpo del anteojo se mide en una graduacion que presenta el tubo fijo, por el número de divisiones que recorre la extremidad del tubo móvil en contacto con la graduacion.

El micrómetro es un aparato compuesto de dos lentes plano-cóncavas gq, $g'h'$ (fig. 532; lám. 35), cuyas superficies curvas tienen un rádio de 5,^{m}5 próximamente. La lente gq es fija, y la otra movible á lo largo de la primera por medio del engranaje de un piñon y una barra dentada, conservándose en un mismo plano las caras planas de ambas lentes. La amplitud del camino recorrido por la lente móvil se obtiene por medio de una graduacion cuya menor division es de 30″, y un nonius dividido en 10 partes, que aprecia por lo tanto de 3 en 3″. La coincidencia del cero del nonius con el de la graduacion corresponde á posicion gh de la lente móvil, en la cual su parte superior se halla lateralmente en prolongacion de la gq, constituyendo así una sola lente. La mayor graduacion es generalmente de 38′ 30″.

Los arcos recorridos pueden expresarse en minutos y segundos, dividiendo por 2 el número de las divisiones de la regla comprendidas entre los ceros, y multiplicando por 3 el número de divisiones marcadas por el nonius.

788. **Teoría del aparato micrométrico** —Supongamos dirigida la visual al extremo B de un objeto AB, despues de haber puesto en coincidencia los ceros de la graduacion del micrómetro y de su nonius, en cuyo caso la lente móvil ocupará la posicion gh como acabamos de indicar: se formará entonces la imágen ab del objeto, casi en las mismas condiciones que la hubiéramos obtenido (226) sin la interposicion de las lentes del micrómetro, en razon á que estas presentan al paso de la luz una curvatura insensible, y la refraccion se verifica á través de ellas como si estuviesen terminadas por superficies planas (218).

Supongamos ahora que la lente móvil ha pasado á ocupar otra posicion $g'h'$: un rayo de luz emitido del punto B y que sigue la direccion Bo del eje principal de la lente objetivo l, atravesará la cara plana de la lente $g'h'$ sin experimentar refraccion (211 — 3.ª), y al llegar al punto e de la otra cara en que la curvatura es mayor, tomará una direccion ea, alejándose de la normal cn al punto e (211—2.ª), y siendo i, r, los ángulos correspondientes de incidencia y de refraccion. Los demás rayos emitidos del punto B, concurriendo en a, formarán en este último punto la segunda imágen del B; imágen que puede formarse sucesivamente en varios puntos del espacio, segun las distintas posiciones que se den á la lente movible, pero que nosotros suponemos ocupando aquella en que la imágen se forma precisamente en a. La luz emitida por el otro extremo A del objeto AB se refractará en e' de una manera análoga, é irá á concurrir al punto a', formándose como antes una nueva imágen aa' del objeto AB, sensiblemente de la misma magnitud que la primera y á la misma distancia focal.

Con la posicion de la lente móvil del micrómetro varían los ángulos i, r, de incidencia y de refraccion, así como el de desviacion z; pero en atencion á que el mayor arco recorrido por un punto de la cara curva de la lente no llega á 1°, podemos hallar una relacion sensiblemente constante entre estas cantidades para las indicadas posiciones de la misma lente.

Si tiene en efecto (213), tomando los arcos por los senos, la relacion constante $\frac{i}{r} = n$; de la que se deduce $i = rn$, y la proporcion

$$r : i :: 1 : n,$$

de la que se obtiene

$$r - i : i :: 1 - n : n \quad [a]:$$

observando en la figura que se tiene $i = t = c$, y tambien por la igualdad de los dos primeros ángulos, $r - i = r - t = z$, la proporcion [a] se convierte en

$$z : c :: 1 - n : n;$$

de la que se deduce la ecuacion

$$z = c \times \frac{1 - n}{n} \quad [8].$$

El valor n es una cantidad constante, que depende de la naturaleza del cristal que forma la lente: si suponemos $n = \frac{2}{3}$, como se verifica (213) para la luz que pasa del cristal ordinario al aire, será $\frac{1-n}{n} = 0{,}5$, y la fórmula [8] se convertirá en la

$$z = 0{,}5\, c \quad [9].$$

En el triángulo rectángulo abo, se tiene (20) $ab = bo$ tg. v, por ser v igual al ángulo aob; y en el abe, $ab = be$ tg z; de donde se deduce la ecuacion

$$bo \text{ tg. } v = be \text{ tg } z;$$

llamando k á la distancia be del aparato micrométrico al foco principal de la lente objetivo, f á la distancia focal bo, y observando que siendo los arcos v y z muy pequeños son sensiblemente proporcionales á sus tangentes, la ecuacion última se convertirá en

$$\frac{v}{z} = \frac{k}{f};$$

poniendo en ella en vez de z su valor sacado de la ecuacion [8], y multiplicando entonces ambos miembros de la ecuacion por $\frac{1-n}{n}$, resultará

$$\frac{v}{c} = \frac{k}{f} \times \frac{1-n}{n} \quad [10].$$

Por medio de esta fórmula se puede determinar el valor de v para una posicion cualquiera del instrumento, midiendo las distancias k y f, que por otra parte pueden considerarse sin error sensible, como constantes para los objetos muy lejanos, y el arco ep, sensiblemente igual al camino recorrido por el cero de la regla dividida que acompaña á la lente gh. El conocimiento de este arco y del rádio de curvatura da el valor del ángulo c (Geom. Teor. 40). En cuanto á n, ya sabemos que es una cantidad constante.

789. *Relacion entre el ángulo visual* v, *la magnitud* m *de un objeto* AB, *y su distancia* d *al punto de estacion.*—En el triángulo rectángulo ABo, se tiene (20)

$$\text{tg. } o\text{AB} = \frac{d}{m}:$$

y como por otra parte es tg. oAB = cot. v (10), resulta

$$\text{cot. } v = \frac{d}{m} \quad [11].$$

Esta relacion da el valor de cualquiera de las cantidades v, d, m, conocidas las otras dos.

790. *Determinacion de los valores del ángulo visual.*—El ángulo v puede determinarse por medio de la fórmula [10]; pero siendo difícil medir con exactitud el arco ep y las distancias k y f, es preferible obtenerle experimentalmente, colocando un objeto de una magnitud dada m á una distancia conocida d; dirigiendo entonces la visual á dicho objeto, se hace mover la lente gh del micrómetro hasta que tenga lugar el contacto de las imágenes: el valor del ángulo visual dado por la fórmula [11], en virtud de ser conocida la relacion $\frac{d}{m}$, corresponderá el arco ep recorrido por la lente móvil: dividiendo este arco por el número de minutos del ángulo hallado, y cada minuto en dos partes, se tendrá la graduacion de la regla y los valores de v correspondientes á las diversas posiciones de la lente móvil del micrómetro. Debe tenerse en cuenta, por lo tanto, que la graduacion del micrómetro corresponde al ángulo visual v, y no al ángulo c, como pudiera creerse equivocadamente.

791. *Tabla de las cotangentes del ángulo visual*.—Al instrumento de que nos ocupamos acompaña una instruccion impresa para facilitar su uso, la cual contiene una tabla de los valores de $\frac{d}{m}$ para todos los correspondientes de v, señalados por la graduacion del micrómetro, y de la que á continuacion copiamos una pequeña parte. En la primera columna de esta tabla se hallan inscritos los minutos; en la segunda los valores de $\frac{d}{m}$, correspondiéndose en los mismos renglones con los valores angulares de la columna anterior; y en las siguientes, los que corresponden á un valor angular determinado por un número de minutos de la primera y la fraccion decimal de minuto que encabeza la columna de que se trata.

Tabla de los cotangentes del ángulo visual obtenido en el micrómetro.

Minutos	0′,0	0′,1	0′,2	0′,3	0′,4	0′,5	0′,6	0′,7	0′,8	0′,9
0....	∞	34380	17190	11460	8600	6876	5730	4910	4300	3820
1....	3437,75	3126	2865	2647	2456	2292	2147	2022	1910	1810
2....	1718,87	1637	1563	1495	1433	1375	1322	1273	1228	1185
3....	1147,92	1100	1074	1042	1011	982	954	929	905	882
4....	859,44	838	819	800	781	764	747	732	716	702
5....	687,55	674	661	649	636	625	614	603	593	583
....	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......

792. **Usos del anteojo micrómetro de Amici**.—Este instrumento se emplea para determinar la magnitud de un objeto, conocida la distancia que le separa del observador, ó recíprocamente, la distancia á que se halla un objeto de magnitud conocida; pero antes de todo es preciso determinar la situacion del ocular con respecto al aparato micrométrico. Para ello se colocará el observador á la distancia d de un objeto cuya magnitud sea conocida, habiendo hallado de antemano el valor correspondiente de v en la tabla ó por medio de la fórmula [11], y dispuesto la lente del micrómetro de modo que el cero del nonius señale el valor hallado para v. Dirigiendo el anteojo al objeto, moverá el ocular y el objetivo hasta que perciba claramente las dos imágenes que se forman como ya sabemos, y observará si ambas imágenes se sobreponen en parte ó aparecen separadas: en el primer caso será preciso separar el ocular y acercar el objetivo al aparato micrométrico, y hacer lo contrario en el segundo, hasta que las imágenes se hallen en contacto. Entonces se

marca el tiro del ocular para hacer que sea el mismo en todas la observaciones sucesivas, en las que se buscará el contacto de las imágenes por el solo movimiento del objetivo.

Conviene señalar tambien la division que marca despues el cero de la graduacion exterior del objetivo en el tubo del anteojo, para la superposicion de las imágenes de un astro ó de un objeto terrestre muy lejano; en cuyo caso la distancia f de la fórmula [10] es sensiblemente la distancia focal principal, y en cuya hipótesis se han hallado las fórmulas que hemos establecido.

Preparado el anteojo, se dirige la visual al objeto, que supondremos bastante lejano, y se dá movimiento á la lente del aparato micrométrico hasta el contacto de las imágenes, observando el valor del ángulo v dado por la graduacion del micrómetro; valiéndose despues de la tabla ó de la fórmula [11] para determinar la cantidad que se trataba de conceder.

Ejemplos.—1.° *Conocida la distancia* 5500m *á que se halla de un buque una torre de la costa, hallar desde él la altura de la torre.*—Supongamos que al contacto de las imágenes el ángulo v sea de 5′: buscando en la tabla el valor de la relacion $\frac{d}{m}$, ó la cotangente de 5′ en las tablas de líneas trigonométricas naturales, encontraremos 687,55, y la fórmula [11] vendrá á ser en este caso

$$687{,}55 = \frac{5500}{m},$$

de la que se deduce $m = 8^{m}$ próximamente.

2.° *Hallar la distancia á que se encuentra un hombre del observador, suponiéndole la altura media* 1,m 55.—Sea 5′,7 el valor obtenido en la graduacion del micrómetro á la superposicion de las imágenes: se buscará el valor de $\frac{d}{m}$ en el renglon correspondiente á los 5′ y en la columna encabezada con la notacion 0′,7, el cual es 603. La fórmula [11] da entonces

$$603 = \frac{d}{1{,}55},$$

de la que resulta $d = 935^{m}$ próximamente.

793. *Correccion debida al tiro del objetivo para los objetos próximos al observador.*—Dispuesto el instrumento como hemos indicado, es claro que para la percepcion de las imágenes la salida del objetivo debe ser mayor que la marcada (792) para los objetos muy distantes; y como esta salida aumenta la distancia focal, los valores de v resultarán demasiado pequeños y sus cotangentes demasiado grandes; lo que hace aumentar

el valor de d en la fórmula [11], y exige la correccion de este valor. Observaremos para ello, que la graduacion del tubo está hecha de manera que sus divisiones son milésimas de f, y que el número de ellas recorrido por el objetivo á partir de la posicion marcada para los objetos lejanos indicará el aumento de f. El valor hallado para d se corregirá restando de él tantas milésimas partes de este mismo valor como divisiones recorridas se han observado. Representando por u el número de estas divisiones, por x la distancia que se busca, y siendo d el valor deducido de la fórmula [11], se tendrá

$$x = d - \frac{du}{1000} \qquad [12].$$

Ejemplo.—Supongamos que en la resolucion del problema segundo la salida del objetivo, con respecto á la division marcada para los objetos lejanos, sea de cinco divisiones: sustituyendo en la fórmula [12] este valor y el 935 hallado para d, resultará $x = 930^{\mathrm{m}}$.

794 *Determinacion de la distancia á que se encuentra del observador un objeto de magnitud desconocida.*—Cuando no se conoce la magnitud de un objeto, se puede sin embargo resolver el problema segundo (792). Sea ab (fig. 529; lám. 35) el objeto: determínese desde un punto c el ángulo visual v' como ya hemos indicado (792); mídase una recta l en direccion al objeto, y desde su extremo d hállese el nuevo ángulo visual v; podemos determinar entonces la distancia bd como hemos procedido con el telémetro de Ertel (782).

795 **Anteojo micrométrico de Rochon.**—Se compone de un prisma de cristal de roca, cuya seccion es el rectángulo $rpr'p'$ (fig. 533; lám. 35), formado de dos prismas triangulares p, p', cuyas caras de contacto constituyen el plano diagonal rr' del prisma total. El cuarto hialino ó cristal de roca de que están formados tiene la propiedad de dar orígen á dos rayos refractados; uno de ellos, el ***rayo ordinario***, que sigue las leyes generales de la refraccion (211), y el otro, llamado ***rayo extraordinario***, cuyo índice de refraccion es diferente.

Para mayor comodidad en la colocacion del prisma dentro del anteojo suele estar tallado en forma de cilindro, siendo su eje perpendicular á las caras rp' y pr'.

El aparato micrométrico se mueve longitudinalmente por medio de un tornillo acompañado de un piñon, cuyos dientes engranan con los de una barra dentada fija al tubo de un anteojo terrestre. Este anteojo tiene un objetivo de 0,$^{\mathrm{m}}$36 de diámetro y 0,$^{\mathrm{m}}$41 de distancia focal. Con el mismo aparato se mueve el nonius correspondiente á la graduacion que lleva el tubo del anteojo. Las divisiones de esta graduacion son los valores del ángulo visual v (791) de 30 en 30″, hallándose marcadas con cifras las que corresponden á un número exacto de minutos. El nonius comprende cuatro de las divisiones menores y está dividido en cinco partes, apreciando por lo tanto décimas de minuto. Al lado de cada uno de los valores del ángulo visual se halla grabado tambien el de su cotangente $\frac{d}{m}$ (791). Las cotangentes de los demás ángulos se encuentran en la tabla inserta para el micrómetro de Amici.

796. **Teoría en que se funda el instrumento.**—Sea AB (fig. 533; lám. 35) un objeto cuya imágen se forma en el prisma cuando éste se halla en el foco principal del objetivo, marcándose esta posicion en la graduacion del tubo del anteojo por la coincidencia de su cero con el del nonius correspondiente. Dando movimiento al aparato micrométrico, empezarán á aparecer dos imágenes del mismo objeto confundiéndose en parte, hasta una posicion en la que se hallarán en contacto, y pasada la cual las imágenes se separarán. Supongamos que ocupan la posicion de contacto, y tratemos de darnos cuenta de la formacion de la doble imágen. Un rayo luminoso emitido del punto A en la direccion A*o* atravesará la cara *pr'* del prisma *p* sin experimentar refraccion, por penetrar en él siguiendo la direccion de cierta línea que se considera en el cristal, llamada *eje de refraccion*, que es paralela á la cara *rp*, y en la cual no tiene lugar la doble refraccion; no experimentando tampoco el mismo rayo la refraccion ordinaria, por la circunstancia indicada de ser normal á la cara *pr'* del prisma *p*. Al llegar al punto *c* del segundo prisma, cuyo eje es perpendicular á la cara *rp*, se verificará el fenómeno de la doble refraccion, produciéndose una imágen *a* del punto A, formada por el rayo ordinario *ca*, que continuará en la direccion normal á *pr'* como si se tratase de un prisma de caras paralelas (218), y otra *b* del mismo punto por el rayo extraordinario *ceb*. De un modo análogo, los rayos luminosos emitidos del punto B, formarán una imágen *b* por los rayos ordinarios, tales como el *c'b*, y otra *b'* del mismo punto por los extraordinarios como el *c'e'b'*: resultando dos imágenes, una *ab*, formada por los rayos ordinarios, y otra *bb'* por los extraordinarios; llamándose de aquí *imágen ordinaria* la primera, y *extraordinaria* la segunda.

El valor del ángulo de incidencia i (fig. 534; lám. 35) es constante é igual á z, ángulo refringente del prisma (219), por tener el mismo complemento. El valor de z y el índice de refraccion n, sirven para determinar (220) el ángulo de refraccion r: de estos ángulos se deduce el valor de i', pues se tiene $i' = ecm$ (Geom. Teor. recíp. del 8), y $ecm = i - r$; de donde resulta $i' = i - r$. Conocido el ángulo i' y el índice de refraccion correspondiente, se hallará el del r', que es igual al de desviacion s. Fácil es ver que este ángulo de desviacion tiene un valor constante, que se determina por el cálculo como acabamos de ver, mediante el conocimiento del ángulo refringente del primer prisma. Las rectas h y h' son las normales á las caras de los cristales en que se verifican las refracciones indicadas.

Representando por k la distancia at, poco diferente de la ac que media entre la imágen y el centro c del prisma, y por f la distancia focal ao, los triángulos rectángulos abt, abo dan (20):

$$ab = k \text{ tg. } s;$$
$$ab = f \text{ tg } v;$$

de donde resulta

$$\text{tg. } v = \frac{k}{f} \text{ tg } s \quad [13];$$

fórmula de la cual pueden deducirse los valores de v que presenta la graduacion del tubo del anteojo, en funcion de las cantidades variables k y f y de la constante s; aun cuando pueden tambien determinarse experimentalmente de un modo análogo al que hemos indicado (790) para el micrómetro de Amici.

Si se miran con el anteojo objetos muy distantes, f es sensiblemente la distancia focal principal del objetivo.

797. **Usos del micrómetro de Rochon.**—Conocidos los valores del ángulo visual v y de su cotangente $\frac{d}{m}$, podemos servirnos de la fórmula [11] (789) para la determinacion de cualquiera de las cantidades v, d, m, conocidas que sean las otras dos.

Para determinar el ángulo visual, se pone en movimiento el ocular hasta que se percibe claramente la imágen del objeto ó las dos imágenes del mismo, segun la posicion del prisma micrométrico; moviendo despues éste hasta que tenga lugar el contacto de las imágenes: el cero del nonius marcará entonces el valor del ángulo visual. Conocido este ángulo, se pueden resolver los problemas indicados (792 y 794), del mismo modo que con el micrómetro de Amici.

Cuando la distancia d no es bastante considerable, aumentan f y k; y la fórmula [13] no da los verdaderos valores de los ángulos, como sucede cuando d es muy grande, porque en este caso dichas cantidades permanecen sensiblemente constantes. Sin embargo, el error que puede resultar se considera nulo para las distancias que exceden de 100^m, en atencion al límite de la exactitud que puede proporcionar el instrumento de que nos ocupamos.

798. **Telémetro ó Diastimómetro analático de Porro.**—Los telémetros hasta aquí explicados están sujetos á varias causas de error, entre las cuales figura la variacion que experimenta el valor del ángulo visual ó micrométrico (778). Mr. Porro, haciendo uso de sus vastos conocimientos en la óptica, ha evitado este inconveniente de una manera sumamente ingeniosa, con su anteojo analático; entendiéndose por *analatismo* la invariabilidad del ángulo micrométrico. La observacion de que entre los infinitos rayos luminosos emitidos de los puntos extremos de un objeto, existe para cada extremo uno que pasa por el foco principal del ob-

jetivo, y de que ambos rayos, despues de las refracciones que en esta lente experimentan, salen paralelos á su eje principal (225), le ha sugerido la idea de sustituir al ángulo micrométrico m (fig. 524; lám. 35) de los telémetros ordinarios, el formado por estos rayos; ángulo que es invariable para todas las distancias á que pueda hallarse el objeto, por ser constantemente de igual magnitud la imágen del mismo objeto comprendida entre los hilos del retículo, y fija la posicion del foco.

El ángulo micrométrico invariable, cuya existencia acabamos de manifestar, se determina de otra manera en la construccion del telémetro que nos ocupa. Se emplea para ello una segunda lente C (fig. 535; lámina 35), á la que su autor llama *lente colectora*, colocada á una distancia fija de la lente objetivo L del anteojo, y se trata de determinar un punto P tal, que los rayos luminosos que partiendo de los A y B del objeto, cuyas imágenes coinciden con los hilos del retículo, vendrian á reunirse en el punto P en caso de que no existiese el objetivo L, se refracten al atravesarle de manera que vayan á pasar por el foco F de C; en cuyo caso, al atravesar esta lente, saldrian paralelos á su eje principal (224—2.°), como en el caso citado en que sólo existía una lente.

La situacion del punto P depende del rádio de curvatura de la lente colectora. En efecto, llamando x á la distancia OP del punto al centro de la lente objetivo, l la distancia OO′ constante entre las dos lentes, y r la distancia focal principal FO′ de la lente colectora, podemos suponer que el punto F es un punto luminoso, y P su foco virtual conjugado, y tendremos (229) [7] la relacion

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d'}$$

entre las distancias respectivas d y d' de estos puntos á la lente L y su distancia focal principal f.

Observando que en la figura se tiene $d = l - r$, y $d' = x$, y sustituyendo en la ecuacion anterior, se tendrá

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{l-r} - \frac{1}{x} \qquad [14],$$

de la cual se deduce sucesivamente:

$$\frac{1}{l-r} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x} = \frac{f+x}{fx},$$

$$l - r = \frac{fx}{f+x};$$

$$r = l - \frac{fx}{f+x} \qquad [15];$$

de cuya fórmula se deduce el rádio del cristal colector. Conviene tener presente que la distancia x debe elegirse de modo que el valor de r sea positivo.

Si este rádio fuese dado, se deduciría de la misma ecuacion [14] el valor de x, y se tendría sucesivamente:

$$f\,x - (l - r)\,x = (l - r)\,f;$$

$$x = \frac{(l - r)\,f}{f - l + r}$$

El valor x debe tambien ser positivo.

799. *Valor del ángulo micrométrico.*—Para calcular el ángulo micrométrico t y demostrar su invariabilidad, deduciremos del triángulo A'PB' (20) la ecuacion

$$\frac{A'B'}{2} = OP \operatorname{tg} \frac{t}{2} \qquad [16];$$

poniendo en vez de OP su valor x y despejando $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$, resultará

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{A'B'}{2\,x} \qquad [17]$$

Por otra parte, en el triángulo A'B'F se tiene sensiblemente

$$\frac{A'B'}{2} = OF \operatorname{tg} \frac{s}{2} = (l - r) \operatorname{tg} \frac{s}{2};$$

y en el abF,

$$\frac{ab}{2} = O'F \operatorname{tg} \frac{s}{2} = r \operatorname{tg} \frac{s}{2};$$

de las cuales se deduce sucesivamente:

$$\frac{A'B'}{ab} = \frac{l - r}{r};$$

$$A'B' = \frac{ab\ (l - r)}{r};$$

y sustituyendo este valor en la [17] resulta la expresion

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{ab\,(l - r)}{2\,r\,x} \qquad [18]:$$

en cuyo segundo miembro todas las cantiddades son constantes, siéndolo por consiguiente el valor de t.

La invariabilidad tan ingeniosamente obtenida, hace que la imágen de la parte de mira interceptada por los rayos visuales sea constante en sus distintas posiciones $a'b'$, $a''b''$... independientemente de la distancia á que se encuentre en ella el ocular, y por lo tanto tambien independiente de la fuerza visiva del observador

800. Pudiendo el punto P ocupar una posicion cualquiera en la línea O'O, podemos suponer que se halla en el centro mismo O del objetivo; en cuyo caso se tendrá $x = 0$: la fórmula [15] dará $r = l$ ó $l - r = 0$, de donde $l - r = x$; por lo que la [18] se convierte en

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{ab}{2r} \qquad [19].$$

Esta fórmula es la que se empleará en la práctica; pues en el telémetro de Porro se ha elegido la posicion del punto P, sujetándole á la condicion que acabamos de establecer.

La circunstancia de ser $l = r$, hace ver que el foco de la lente colectora coincide tambien con el centro óptico del objetivo.

801. *Graduacion de la mira*.—Para hallar la magnitud de la porcion de mira que ha de corresponder á un metro de distancia horizontal, dado el valor de $r = 0{,}^{m}4$ y la separacion de los hilos $ab = 0{,}^{m}006$, la fórmula [19] nos dará el que corresponde á la tangente del ángulo micrométrico

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{0{,}006}{2 \times 0{,}4} = 0{,}0075$$

En el triángulo AHP, se tiene

$$AH = HP \operatorname{tg} \frac{t}{2}$$

y sustituyendo el valor de $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$,

$$AH = 0{,}0075 \ HP.$$

Poniendo en vez de AH su duplo AB, se tendrá por último

$$AB = 0{,}^{m}015 \ HP.$$

Si HP = 1, será AB = $0{,}^{m}015$; lo que nos dice que á la distancia 1^{m} de la mira al punto de estacion, en lo que debe suponerse el objetivo del anteojo, la parte de la mira interceptada por los rayos visuales es de 0,^{m}015. A la de 100^{m}, interceptarian 1,^{m}5. Dividiendo, pues, la mira en partes iguales cuya magnitud fuese de 0,^{m}015 se podrian apreciar las distancias expresadas en metros, y aun en dobles decímetros, subdividiendo la unidad de la mira en cinco partes iguales. La division en diez partes para la apreciacion de los decímetros seria confusa.

En el caso de ser $\operatorname{tg} \dfrac{t}{2} = 0,^{m}01$, se tendria

$$AB = 0,01\ HP$$

y cada centímetro enla mira corresponderia á un metro de distancia horizontal.

Representando por L el número de metros que comprende la distancia que se trata de medir, y por S el número de divisiones interceptadas en la mira, se tiene

$$S \text{ partes de mira} = L \text{ metros}$$

802. **Disposicion, uso y lectura del micrómetro**.—La disminucion que experimenta la imágen de un objeto para una distancia dada, debida á la que sufre el ángulo diastimométrico ó telemétrico cuando aumenta el poder amplificativo del anteojo, y la consiguiente disminucion en la magnitud de las divisiones de la mira, que se leen entonces con mayor dificultad, ha sugerido á Mr. Porro la idea de sustituir al ocular ordinario tres oculares situados delante de un retículo de siete hilos *c*, *d*, *b*.... (fig. 536; lám. 35). La amplitud de los tres oculares reunidos es igual á la del ocular único á que sustituyen.

La disposicion de los hilos es tal, que la separacion *cd* de los primeros, así como la $c'\ d'$ es $^{1}/_{10}$ de la distancia que media entre *m* y *n*, puntos medios de las mismas separaciones. La bb' es $^{1}/_{5}$ de *mn*.

Representado por *c* la lectura *zc* que cubre en la mira el primer hilo, y que es su distancia al cero de la graduacion, el cual suponemos en el punto *z* de la mira invertida como se vé á través del anteojo, y análogamente por *d*, *b*, *a* ... las marcadas por los demás hilos, la posicion de estos satisface á la ecuacion

$$(d' - c) + (c' - d) = S \qquad [20],$$

representando por S con Mr. Porro el número de divisiones de la mira que marca la distancia D á que esta lectura corresponde, de modo que se tiene

$$S \text{ partes de mira} = D \text{ metros} \qquad [21],$$

y además $S = 2mn$: tambien hemos indicado que se verifican las igualdades

$$d' - c' = \frac{mn}{10}; \qquad d - c = \frac{mn}{10};$$

de las que se deduce

$$(d' - c') + (d - c) = \frac{2mn}{10} = \frac{S}{10} \qquad [22]:$$

de esta y la [20], resulta

$$(d' - c') + (d - c) = \frac{(d' - c) + (c' - d)}{10};$$

pero el primer miembro se puede expresar tambien por $d' - c' + d - c$, de cuya expresion se pasa fácilmente á la ecuacion

$$(d' - c) - (c' - d) = \frac{(d' - c) + (c' - d)}{10} \qquad [23]$$

Esta última ecuacion, además de darnos el valor de S que buscábamos, ofrece una verificacion de este mismo valor, sustituyendo en ella las lecturas obtenidas. Supongamos que estas lecturas sean: $c = 12{,}27$; $d = 19{,}43$; $c' = 83{,}87$; $d' = 91{,}03$; sustituyendo estos valores en la ecuacion [23], resultará sucesivamente:

$$(91{,}03 - 12{,}77) - (83{,}87 - 19{,}43) = \frac{(91{,}03 - 12{,}77) + (83{,}87 - 19{,}43)}{10};$$

$$14{,}32 = \frac{143{,}2}{10}.$$

El valor de S será por lo tanto 143,2 divisiones de la mira, que corresponden á $D = 143{,}^{m}2$, sin que se haya cometido error en la lectura de las divisiones marcadas por los hilos.

803. Si la distancia á que se halla la mira hace que su imágen sea menor que la que media entre los hilos extremos, se dirige el hilo central a á una division de la parte superior de la mira, que aparecerá ser la inferior á causa de la inversion de ésta, y se hace la lectura de los hilos c, d; despues se lleva el hilo a á un punto próximo al cero de la graduacion, haciendo entonces la de los hilos c' y d'; y en el caso que nos ocupa se emplea la fórmula [22]: sean por ejemplo $c = 2{,}38$;

$d = 17,62$; $c' = 71,93$; $d' = 87,17$; sustituyendo estos valores, se tendrá

$$(87,17 - 71,93) + (17,62 - 2,38) = \frac{S}{10};$$

$$15,24 + 15,24 = \frac{S}{10}$$

$$30,48 = \frac{S}{10}; \text{ de donde}$$

$$S = D = 304,^{m}8.$$

La comprobacion es ahora la igualdad de los valores $(d' - c')$ y $(d - c)$.

El mismo método puede seguirse cuando algun obstáculo impide ver toda la mira, á pesar de ser la distancia suficientemente pequeña para seguir el método general.

804. Si la distancia es muy considerable, se recurre á los hilos b y b', cuya separacion es $^1/_5$ de mn, y se tiene por lo tanto

$$(b' - b) = \frac{mn}{5} = \frac{S}{10}.$$

Para comprobacion puede anotarse la lectura del hilo a y ver si las diferencias de lecturas son iguales. Sea, por ejemplo, $b = 16,54$; $a = 48,94$; $b' = 81,34$; se tendrá

$$(81,34 - 48,94) + (48,94 - 16,54 = \frac{S}{10};$$

$$32,40 + 32,40 = \frac{S}{10};$$

$$64,80 = \frac{S}{10}; \text{ de donde}$$

$$S = D = 648^{m}.$$

805. **Micrómetro del teodolito de Porro.** — El micrómetro que Mr. Porro ha adaptado al anteojo de su teodolito descrito en el párrafo 576, consta de diez y siete hilos: para las distancias menores que 100^{m} se sirve de los que están enfrente del primer ocular (fig. 537; lám. 35), empleando las fórmulas

$$a' - a = S,$$

$$b' - b = 0,1S.$$

Para las comprendidas entre 100 y 200m, emplea el segundo (fig. 538; lám. 35) y las fórmulas

$$(d' - d) + (c' - c) = S,$$

$$(d' - c') + (d - c) = 0{,}1S.$$

Entre 200 y 400m, hace uso del tercer ocular (fig. 539; lám. 35) y de las fórmulas

$$(i' - i) + (g' - g) + (f' - f) + e' - e) = S,$$

$$(i' - g') + (g' - f') + (f' - e') + (i - g) + (g - f) + (f - e) = 0{,}1S.$$

Y por último, para las distancias mayores se vale de los hilos b, o, b' (fig. 537; lám. 35) del primer ocular, del modo que ya hemos dado á conocer (804).

806. **Reduccion al horizonte de las distancias medidas con el telémetro de Porro.**—Sea $od = D$ (fig. 540; lám. 35) la proyeccion horizontal de la distancia os obtenida por la lectura $m'm'' = S$ hecha en la mira, y representemos por a'', a, a', los ángulos zenitales de las visuales tiradas por los hilos del micrómetro empleados en la determinacion de S. El triángulo $om'm''$ dará (21),

$$om' : m'm'' :: \text{sen. } om''m' : \text{sen. } m'om'';$$

en esta proporcion se tiene $m'm'' = S$; $om''m' = a''$ (Geom. Teor. recíp. del 7); $m'om'' = t$, ángulo micrométrico del anteojo: sustituyendo, y despejando om', resultará

$$om' = \frac{S}{\text{sent. } t} \times \text{sen. } a''$$

El triádgulo odm' da tambien (19)

$$od = om' \cos. m'od;$$

pero $\cos. m'od = \text{sen. } a'$ (3); luego será

$$od = om' \text{ sen. } a';$$

sustituyendo en esta ecuacion en vez de od su expresion D, y de om' su valor hallado, resultará

$$D = \frac{S}{\text{sen. } t} \text{ sen. } a'' \text{ sen. } a'$$

Observando que se tiene $a'' = a - \frac{t}{2}$, $a' = a + \frac{t}{2}$, se sustituirán estos valores en la última ecuacion, resultando

$$D = \frac{S}{\text{sen.}\ t}\ \text{sen.}\left(a + \frac{t}{2}\right)\text{sen.}\left(a - \frac{t}{2}\right)$$

Desarrollando los valores sen. $\left(a + \frac{t}{2}\right)$ y sen. $\left(a - \frac{t}{2}\right)$ valiéndonos de las fórmulas [p] y [q] (Trig. 15), se obtendrá:

$$D = \frac{S}{\text{sen.}\ t}\left(\text{sen}\ a \cos\frac{t}{2} + \cos.\ a\ \text{sen.}\frac{t}{2}\right)\left(\text{sen}\ a \cos\frac{t}{2} - \cos\ a\, \text{sen}\frac{t}{2}\right).$$

Haciendo la multiplicacion indicada, y simplificando,

$$D = \frac{S}{\text{sen.}\ t}\left(\text{sen.}^2 a\ \cos.^2\frac{t}{2} - \cos.^2 a\ \text{sen.}^2\frac{t}{2}\right);$$

pero $\cos.^2 a = 1 - \text{sen.}^2 a$; $\cos.^2\frac{t}{2} = 1 - \text{sen.}^2\frac{t}{2}$ (Trig. 13); luego sustituyendo estos valores, será

$$D = \frac{S}{\text{sen.}\ t}\left[\text{sen.}^2 a\left(1 - \text{sen.}^2\frac{t}{2}\right) - \text{sen.}^2\frac{t}{2}\left(1 - \text{sen.}^2 a\right)\right].$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas y simplificando, se obtendrá

$$D = \frac{S}{\text{sen.}\ t}\left(\text{sen.}^2 a - \text{sen.}^2\frac{t}{2}\right) \qquad [24];$$

y observando que sen.$^2\frac{t}{2}$ puede despreciarse á causa de la pequeñez del ángulo t, será

$$D = \frac{S}{\text{sent.}\ t}\ \text{sen.}^2 a \qquad [25].$$

Por otra parte se tiene sensiblemente la ecuacion

$$\frac{S}{2} = D\ \text{sen.}\frac{t}{2},$$

deducida de las mismas consideraciones que nos han servido para obtener la fórmula [16] (799), con la sola diferencia de tomar el seno por la tangente. Teniendo además en cuenta, que por la misma pequeñez del ángulo micrométrico se tiene de un modo sensible

$\text{sen.}\,\frac{t}{2} = \frac{\text{sen.}\,t}{2}$, la expresion hallada se convierte en

$$S = D\ \text{sen.}\ t \qquad [26],$$

ó $\frac{S}{\text{sen.}\ t} = D$; que nos dá á entender que sen. t es la unidad de medida á que se refieren las divisiones de la mira, y por lo tanto la ecuacion [25] se reduce á

$$D = S\ \text{sen.}^2\ a \qquad [27],$$

que es la fórmula que se aplica para la reduccion; siendo a el ángulo zenital, complemento del de elevacion correspondiente al eje óptico del anteojo.

807. **Anteojo-corneta de Porro.**—Este nuevo telémetro, representado en la fig. 541 (lám. 36), está reducido á pequeñas dimensiones, y es por lo tanto de un uso muy cómodo: el objetivo está en *a*; el ocular, que se halla en *b*, es susceptible del movimiento necesario dentro de su tubo para que las imágenes de los objetos se formen en el plano del retículo (238 — 239), y la distancia entre el ocular y el objetivo puede hacerse variar por la manivela *m* para la percepcion distinta de las imágenes.

En el interior hay dos prismas de cristal, cuya disposicion ha permitido acortar la longitud del tubo. En efecto, sea M (fig. 542, lám. 36) la lente objetivo, y A un punto cuya imágen se formaría en el punto *a*, á las inmediaciones del foco principal de M, sin la interposicion de un prisma rectangular isósceles que Mr. Porro coloca en *p*, próximamente al tercio de la distancia que media entre M y *a*; pero la luz que formaría esta imágen se refleja como hemos indicado (221) en el interior del prisma, saliendo paralelamente á la direccion que llevaba al entrar en él, y entonces la imágen tiende á formarse en *a'* á una distancia del prisma *p*, próximamente doble de M*p*. Colocando un nuevo prisma *p'* á la mitad de *a'h*, la luz experimenta en él reflexiones análogas, y la imágen se forma al fin en el plano del retículo *r* entre las lentes del ocular O. Se vé que la distancia focal M*a* resulta como doblada en tres partes, y que la longitud del anteojo puede ser así reducida al tercio de la que tendría el anteojo ordinario.

La imágen se presenta invertida como sabemos; y para rectificarla, Mr. Porro hace dar un cuarto de revolucion al prisma *p'* alrededor de *a'h* y en un plano perpendicular á este eje, con lo que la imágen da una semirevolucion en virtud de los principios de óptica demostrados (207).

El retículo tiene cinco hilos, dispuestos de modo que la separacion de los *o* y *m* (fig. 543; lám. 36) es mitad de la de los *m* y *n*: la de los *r* y *s* es un quinto de la *mn*.

808. **Uso del anteojo-corneta**.—Para el empleo de este telémetro se necesita conocer la magnitud del objeto cuya distancia al punto de estacion se trata de conocer, ó la de alguna de sus partes. Se dirigirá para ello la visual á dicho objeto, y la distancia que se trata de hallar será igual á tantas veces 100 metros, como metros del objeto se hallan comprendidos entre los hilos *m* y *n* del retículo. Para facilitar la apreciacion de las distancias, acompaña al instrumento en el estuche en que se guarda, la viñeta fig. 544 (lám. 36), que representa un soldado de infantería y otro de caballería, comprendidos en una escala de paralelas: á la derecha se hallan las alturas que pueden ser interceptadas por los hilos del micrómetro, y á la izquierda las distancias correspondientes. Si se dirige por ejemplo el anteojo á un cuerpo de tropas y el hilo *n* (fig. 543; lám. 36) al pié de un soldado de infantería, y se ve que el *m* va á parar á su cintura, la altura interceptada segun la escala será de $1^m,20$, y 120^m su distancia al observador. Cuando esta misma altura en el soldado estuviese comprendida entre los hilos *n* y *o*, la distancia sería de 240^m; y de 600^m, si lo estuviese entre los hilos *r* y *s*.

El anteojo-corneta de Porro constituye así un telémetro militar; pero pueden tambien construirse escalas análogas empleando dimensiones medias conocidas de otros objetos, como, por ejemplo, la altura media de los pisos en los edificios particulares, ó de los árboles segun su naturaleza; y tener así medios de aplicar este telémetro á los trabajos topográficos en general.

809. **Anteojo biprismático de Porro**.—Además de los prismas que lleva el telémetro acabado de explicar, el anteojo AB (fig. 545; lám. 36) tiene un micrómetro compuesto de dos cristales de $0^m,01$ de espesor, terminados por caras planas paralelas, el cual sustituye al retículo de hilos de los demás aparatos telemétricos del mismo autor.

El micrómetro está situado entre el objetivo B del anteojo y su foco principal, y los cristales que le constituyen están representados por *b* y *c* en la seccion S dada al anteojo perpendicularmente á su eje. El cristal *b* está fijo perpendicularmente al eje óptico, y el *c* es susceptible de variar de inclinacion con respecto á este eje por el movimiento que se le puede dar por la cabeza de tornillo (*t*, *t'*), determinándose la inclinacion correspondiente á cada posicion del cristal, por el arco que ha recorrido el cero de un limbo circular (*l*, *l'*), que se mueve con el cristal, á partir de aquella en que los cristales se hallan en un mismo plano, y en la cual dicho cero coincide con el del nonius *n* grabado en una pieza fija al tubo del anteojo.

810. **Teoría y uso del micrómetro**.—Cuando los dos cristales están en un mismo plano, la luz emitida por un punto A del objeto AB (figura 546; lám. 36) no experimentará refraccion al atravesarlos (211) y se for-

mará la imágen del punto en a, á una distancia que sólo depende de la curvatura del objetivo; pero haciendo girar al cristal móvil, se tendrán dos imágenes a, a' del mismo punto: la primera formada por la luz que pasa por el cristal fijo b, y la otra por la que atraviesa el c, formando el ángulo de incidencia i con la normal n al punto d, el de refraccion r, menor que el primero, y saliendo del cristal segun oa' paralelamente á su primitiva direccion Ad (218). Variando el ángulo de los cristales, varía la posicion de la imágen a', y se trata de hallar el valor del ángulo micrométrico t en el momento en que esta imágen coincide con la del extremo B del mismo objeto, que es tambien la a': para lo cual se tiene en el triángulo $aa'd$ (18)

$$\text{sen. } t = \frac{aa'}{a'd} \quad [28]:$$

el dmo da tambien

$$mo = od \text{ sen. } mdo = od \text{ sen. } (i - r) \quad [29],$$

y el opd (19),

$$od = \frac{pd}{\cos. \ r}.$$

Sustituyendo este último valor en la ecuacion [29], y poniendo en vez de mo su igual aa', se tendrá

$$aa' = \frac{pd}{\cos. \ r} \text{ sen } (i - r),$$

que sustituido á su vez en la [28] dará

$$\text{sen. } t = \frac{pd}{a'd} \times \frac{\text{sen. } (i - r)}{\cos. \ r} \quad [30];$$

dividiendo los miembros de esta ecuacion por sen $1''$, y observando que se tiene sensiblemente $\frac{\text{sen. } t}{\text{sen. } 1''} = t$, en razon á que siendo los valores de t muy pequeños, puede suponerse que el arco de $1''$ está contenido tantas veces en el arco t como el seno de $1''$ en el seno de t, se tendrá

$$t = \frac{pd}{a'd \text{ sen. } 1''} \times \frac{\text{sen. } (i - r)}{\cos \ r} \quad [31],$$

en la que t representa el valor del ángulo micrométrico expresado en segundos.

Las cantidades pd y $a'd$ se deducen de las dimensiones del instrumento, y la última puede considerarse como constante para las distancias muy grandes. El ángulo r se deduce (213) del índice de refraccion del cristal y del ángulo de incidencia i dado por el limbo (l, l') (fig. 545; lámina 36), y se halla despues el valor $i-r$.

811. *Medida de las distancias.*—Conocido el valor de t y la magnitud S interceptada en el objeto situado al extremo de la línea que se trata de medir, se halla el valor D de esta distancia por la fórmula [26] establecida (806).

812. *Determinacion experimental de la distancia de la imágen á la cara de incidencia en el prisma.*—El valor de t dado por la fórmula [31] depende de la medida directa de la distancia $a'd$, que presenta alguna dificultad; por lo cual conviene hallar el valor que puede tener en las observaciones ordinarias, y considerarle como constante. Con este objeto, se coloca una mira al extremo de una distancia D cuidadosamente medida, y se intercepta en ella una magnitud S determinada de antemano, anotando el valor del ángulo de incidencia i correspondiente. La fórmula [26] dará el valor de sen. t, que se sustituirá en la ecuacion [30], así como los valores de i y de r, deducido este último del i y del índice de refraccion: la misma ecuacion dará entonces el valor de $a'd$.

Una vez hallado este valor, se tendrá el de $\dfrac{pd}{a'd \text{ sen. } 1''}$, que se considera como constante, y representándole por C la fórmula [31] se convierte en

$$t = \mathrm{C} \times \frac{\text{sen. } (i-r)}{\cos.\ r} \qquad [32].$$

812 *a*. **Omnímetro de Eckhold.**—Este instrumento está destinado á simplificar notablemente los trabajos de campo en los proyectos y presenta alguna analogía con el taqueómetro ó estadia. Se le puede aplicar á medir bases de triangulaciones, distancias horizontales ó inclinadas, alturas y ángulos.

Para su descripcion y modo de usarlo, copiamos á continuacion el artículo tomado de la *Revista de Obras públicas*. Consta este instrumento (fig 756; lám. 57) de las partes siguientes:

«*A*, es un limbo con un nonius, que sirve para apreciar con una aproximacion de 10 segundos los ángulos horizontales.

B, es un anteojo que tiene su movimiento en un plano vertical.

C, es un microscopio de gran potencia unido al anteojo invariablemente.

D, es un nivel muy sensible, que se apoya en una regla *E* horizontal, de 20 centímetros de longitud.

F, es una escala vertical colocada al extremo de la regla *E*, en el mismo plano en que se mueve el eje óptico del anteojo. Esta escala está dividida en medios milímetros.

G, es un tornillo micrométrico, unido á la base de la escala, y por su medio pueden apreciarse las dos diezmilésimas de cada division de esta, ó sean $^1/_{10000}$ de cada milímetro, legibles en el pequeño limbo del tornillo.

H, es otro nivel muy sensible que sirve para asegurarse de la horizontalidad del anteojo, en el caso en que sea necesario colocarlo en esta posicion.

No hay, por lo demás, que decir que tiene este instrumento todos los demás accesorios indispensables á su buen uso, y que garantizan el resultado de las operaciones con él practicadas.

Acompaña, además, al omnímetro una mira sin dividir (fig. 757; lámina 57), de longitud invariable de 3 metros, por ejemplo, teniendo en cada extremidad un trazo blanco sobre fondo negro, para hacerlo más visible.

Esta descripcion es suficiente para hacer comprender las correcciones que el instrumento necesita al tratar de emplearlo, y que cualquiera persona acostumbrada á operaciones topográficas podrá hacer con facilidad.

Instalado el anteojo en un punto O (fig. 758; lám. 57) del terreno, y colocada la mira $m\,m'$ en el D, será fácil determinar cuantos elementos se necesiten relativos á la posicion del punto O respecto á uno cualquiera de la vertical D m. En efecto, si por medio del microscopio y del micrómetro hacemos las dos lecturas AH, BH en la escala vertical que acompaña al instrumento, correspondientes á las dos visuales Om, Om', será fácil determinar los términos siguientes:

1.° Distancia horizontal OD;
2.° Distancia inclinada Om';
3.° La cota Dm'.

Veamos de qué manera.

Los triángulos semejantes O A B y O $m\,m'$ (fig 758; lám. 57), dan la proporcion

$$\frac{\mathrm{AB}}{mm'} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OD}}$$

y por tanto,

$$\mathrm{OD} = \frac{\mathrm{OH} \times mm'}{\mathrm{AB}} \qquad [1]$$

En el triángulo rectángulo ODm', tenemos tambien

$$\mathrm{O}m' = \sqrt{\overline{m'\,\mathrm{D}}^2 + \overline{\mathrm{O\,D}}^2} \qquad [2]$$

Por último, en las dos paralelas AH y mD, cortadas por las tres secantes que parten del punto O, se tiene

$$\frac{Dm'}{mm'} = \frac{BH}{AB};$$

de donde

$$Dm' = \frac{BH \times mm'}{AB} \qquad [3].$$

Las tres fórmulas [1], [2] y [3] nos dan los elementos que buscamos en funcion de términos, que todos son conocidos, como vamos á hacer ver. OH es la distancia invariable $0^m,20$, que está medida por la regla E de la figura 756 (lám. 57).

$m\,m'$, es la longitud fija de la mira, 3^m;

$O\,H \times m\,m'$, es, por tanto, el número constante $0^m,60$;

AB es la diferencia de las dos lecturas AH y BH, números que están apreciados hasta diez milésimas de milímetro.

Así, pues, colocada bien verticalmente la mira en el punto D y el omnímetro en el O, se empezará por situar el limbo en un plano horizontal, por medio del nivel D de la figura 756 (lám. 57), y de los tornillos de aproximacion. Dirigiendo luego la visual al trazo blanco m de la mira, se fijará el anteojo por medio del tornillo de presion, y se mirará al microscopio, que señalará en la escala la altura correspondiente á aquella inclinacion del eje óptico del anteojo. Supongamos que el número colocado inmediatamente bajo el hilo horizontal del microscopio sea 67: es claro que será 67 milímetros más una fraccion la altura buscada. Esta fraccion se apreciará por medio del limbo del tornillo micrométrico; sea 2.035 (que expresarán diez milésimas de milímetro). La altura AH será, pues, $0^m,0672035$. De la misma manera se determinará la BH: supongámosla de $0^m,0609400$. La altura AB será en este ejemplo de $0^m0062635$.

La fórmula (1) dará

$$OD = \frac{0,60}{0,0062635} = \frac{6000000}{62635} = 95^m,79,$$

y las otras darán análogamente los otros elementos.

No tenemos que decir que la medicion de la distancia entre dos puntos, puede hacerse tambien colocando el instrumento fuera de la alineacion de ambos, y calculando el triángulo correspondiente á los tres, tomando el ángulo comprendido entre los dos lados conocidos por el procedimiento anterior. Aplicando este método á pequeñas distancias de 10 á 27 metros, se podrá medir una alineacion de 1.000 metros en varias operaciones, con un error de $0^m,004$. Por lo demás, la base de una triangulacion exige una extremada exactitud, que requiere una mira especial tambien. Esta mira podría tener ambas caras semejantes á la antes descrita; apoyos convenientemente dispuestos nos asegurarían de su verticalidad, y una punta de acero serviría para hacerla descansar sobre los piquetes de hierro colocados en la alineacion de la base.

La práctica ha demostrado, que para la medida de longitudes que exijan gran exactitud, no es prudente dirigir visuales á distancias mayores de 200 metros. A 500 metros, y con una mira de 4 metros de longitud, la aproximacion no es ya sino de 0m,17; resultado, sin embargo, aceptable, si se atiende á que la medicion con cadena da un error medio de 1 por 700.

Las cotas se obtienen con gran exactitud, puesto que no es necesario centrar el anteojo, ni hay que dudar en la lectura como en una mira parlante. Para distancias aun mayores de 100 metros se obtienen las cotas con un error de ménos de un milímetro.

No dudamos que en terrenos poco accidentados el instrumento no presenta grandes ventajas sobre los usados; pero estas aumentan gradualmente con las irregularidades del suelo, y aseguran una gran rapidez en las operaciones y una exactitud muy notable cuando se hace un trazado en país de montañas. Los cálculos á que da lugar, son extraordinariamente sencillos, y evitan la incomodidad consiguiente á largas mediciones con la cadena.

813. **Telémetros de reflexion.**—Los principios de la reflexion se han aplicado tambien á la medida indirecta de las distancias. El *telémetro de reflexion ó estadia de espejos*, se compone de una regla dividida AC (fig. 547; lám. 36) y dos espejos M, N, perpendiculares de su plano: el primero, todo azogado, puede variar de inclinacion con respecto al eje de figura de la regla, girando alrededor de un eje de rotacion perpendicular al plano de la misma, y moverse además paralelamente á sí mismo á lo largo de la regla con la armadura en que se apoya, por medio del tornillo t, que girando sin avanzar pone en movimiento á la tuerca que se halla en la armadura. El espejo N, mitad azogado y mitad trasparente, se apoya en la armadura fija A, y forma con el eje de la regla un ángulo constante de 45°. Un anteojo d, cuyo eje es perpendicular á la direccion de la misma regla, se halla fijo tambien á su extremo A, descubriéndose por él á la vez la parte azogada y la trasparente del espejo.

Para graduar este instrumento, se mide con exactitud una distancia AB de 100m, y se colocan los espejos á una distancia dada de 0m,4 por ejemplo. Colocando un jalon en B y el instrumento en A, se dirige una visual á B por el anteojo y la parte trasparente del espejo N, haciendo variar el ángulo que forma el espejo M con el eje de la regla, hasta que el jalon B visto directamente como hemos indicado coincida con su imágen doblemente reflejada por los espejos segun las normales n y n', siguiendo la direccion BCAd: se fija entonces el espejo M á la armadura, á fin de que conserve respecto del eje la inclinacion que se acaba de determinar.

Fácil es asegurarse ahora, de que si se hace mover á M á lo largo de la regla, las distancias AB, AB′ .... serán proporcionales á las porciones AC, AC'...... comprendidas sucesivamente entre los espejos; y como los $0^m,4$ de la regla corresponden á 100^m del terreno, cada uno de estos estará representado en aquella por 4^{mm}. La division se establece, por lo tanto, de A á C, y dividiendo cada unidad de la regla en cinco partes, se podrá apreciar hasta dobles decímetros en el terreno.

814 *Uso del instrumento.*—Para medir una distancia se hace estacion en uno de sus extremos, dirigiendo la visual al otro y poniendo en movimiento al tornillo *t* hasta la coincidencia de la imágen directa y la producida por la doble reflexion. La simple lectura hecha en la escala de la regla dará la distancia pedida.

Los límites del empleo del telémetro de reflexion son muy reducidos; pues pasando de 150 á 200^m, no se percibe claramente la imágen producida por las reflexiones, á causa de la pérdida de luz que en ellas se experimenta.

815. *Telémetro de reflexion de Grœtaers.*—Consta de dos escuadras de reflexion (476), cuyos espejos forman el ángulo de 45°. Á la primera se halla fija una regla dividida, á lo largo de la cual puede correr una tablilla que presenta una línea de fé trazada en su centro, y fijarse á ella cuando convenga. La segunda tiene otra tablilla igual, con un pequeño taladro cónico destinado á servir de ocular. Un cordon de la longitud exacta de 20 metros se desarrolla del mango de la primera y se fija á un ganchito en el de la segunda.

Para medir una distancia cualquiera AB (fig. 548; lám. 36), se coloca un observador con la primera escuadra en el extremo A, y dispone la regla que la acompaña en prolongacion de la AB. Desarrollando el cordon y fijando su extremo á la otra escuadra D, el observador que lleva esta se mueve, hasta que el primero hace la señal que le indica hallarse en la posicion en que la línea de fé de la tablilla *m'* de la escuadra D, vista directamente, coincide con la imágen doblemente reflejada del punto B, en cuyo caso el ángulo DAB será recto (477). El segundo observador hace entonces que el primero mueva la tablilla *m* á lo largo de la regla AC hasta que la línea de fé de esta tablilla, vista directamente desde D, coincida con la imágen reflejada del punto B; el ángulo CDB será recto tambien, y se tendrá la proporcion

$$AC : AD :: AD : AB;$$

midiendo la magnitud AC, que supondremos de $1^m,724$, no habrá más que sustituir este valor y el de AD, que es la longitud del cordon, con lo que se tendrá:

$$AB = \frac{20^m \times 20}{1,724} = 232^m.$$

Por esta misma proporcion pueden hallarse los valores de AB correspondientes á distintas magnitudes de la regla, y escribirlos en los puntos de division correspondientes. Así, á las distancias $0^m,1$ .... $0^m,5$ .... 1^m .... $1^m,5$ .... 2^m, contadas en la regla á partir de A hácia C, corresponden las numeraciones 4000^m .... 800^m .... 400^m .... 267^m .... 200^m ....

Los resultados obtenidos con este telémetro ofrecen poca exactitud, y exigen una longitud demasiado grande de la regla para la medida de las distancias muy cortas.

CAPITULO XV.

LEVANTAMIENTO DE LOS PLANOS TOPOGRÁFICOS.

Problemas preliminares.

Generalidades.—Problemas en que se funda el levantamiento de los planos.—Determinacion de la posicion absoluta y relativa de un punto del terreno con relacion á dos puntos dados.—1.° Por el trazado y medicion de dos rectas perpendiculares entre sí.—2.° Por el trazado y medicion de dos rectas cualesquiera.—3.° Por la medicion de una recta y un ángulo.—4.° Por la medicion de dos ángulos haciendo estacion en los puntos dados.—5.° Por la medicion de dos ángulos haciendo estacion en uno de los puntos dados y en el que se trata de determinar.—Resolucion de otros casos particulares que completan la teoría de la determinacion de un punto con relacion á dos puntos dados.—Determinacion de la posicion absoluta y relativa de un punto del terreno con relacion á dos rectas que se cortan y cuyo ángulo es conocido.—Determinacion de la posicion de tres ó más puntos con relacion á otro cuya proyeccion es conocida.—Problemas que pueden tener aplicacion en el levantamiento de los planos.—Determinacion de la posicion de un punto con relacion á tres puntos dados.—Problema de la carta.—Resolucion gráfica.—Resolucion analítica.—Determinacion de la proyeccion de un triángulo conocidos sus lados y las distancias de un punto interior á sus vértices.—Consideraciones acerca de los problemas resueltos y del levantamiento de los planos en general.

816. **Generalidades.**—Hemos dicho (152) lo que se entiende por *plano geométrico* ó *topográfico*, y el objeto que se propone la *planimetría* (151). Para obtener el plano de un terreno, la cuestion está reducida á la determinacion absoluta y relativa (197) de cierto número de sus puntos principales, por medio de los cuales sea fácil hallar las de todos los demás; pero antes nos ocuparemos de la resolucion de varios problemas en que se funda el conjunto de las operaciones que nos han de conducir al objeto que nos proponemos.

817. **Problemas en que se funda el levantamiento de los planos. —Determinacion de la posicion absoluta y relativa de un punto del terreno con relacion á dos puntos dados.—1.° Por el trazado y medicion de dos rectas perpendiculares entre sí.**—Sean A y B (fig. 549; lám. 36) los puntos dados, y C el que se trata de determinar, designando del mismo modo estos puntos en todos los casos que vamos á considerar. Se bajará desde C una perpendicular CD á la AB, que une los puntos dados, y se medirán las distancias AD y CD.

Si no se tuviese en cuenta más que el valor de estas líneas, para hallar en el papel que ha de contener el plano la proyeccion del punto C, se trazará una recta *ab* que contenga tantas partes de la escala adoptada como unidades tiene la AB, y á partir de los puntos *a* y *b* las *ad* y *bd'* que representen del mismo modo á la AD; por los puntos *d* y *d'* se levantarán perpendiculares indefinidas á la *ab*, y la proyeccion del punto que buscamos deberá hallarse en las intersecciones de estas perpendiculares con una de las dos paralelas tiradas á la *ab* á una distancia $cd = dc'$, que represente en la escala á la CD; con lo que los puntos c, c', c'' y c''' satisfarán á la cuestion.

Pero si se expresa además, que la magnitud *ad* que ha de representar á la AD ha de contarse desde el orígen ó punto de partida *a*, y que *c* ha de hallarse á la izquierda de *ab*, como sucede para C, suponiendo que las operaciones se ejecutan en el sentido AB, como haremos siempre en lo sucesivo, la posicion de *c* quedará completamente determinada.

La línea AD y su proyeccion *ad* se llaman *abscisas*, las CD, *cd ordenadas*, y ambas las *coordenadas* respectivas de los puntos C y *c*. Las líneas AB y *ab* se llaman *ejes de las abscisas*, y tambien *directrices*.

Del modo explicado se habrá obtenido la posicion relativa de los puntos A, C y B; y para obtener la absoluta ó su *orientacion*, será necesario hallar el rumbo *r* de la AB, para colocar esta línea en el papel como se ha dicho (197). Cuando los dos puntos dados A y B se hallan en una línea AB situada en la direccion Este-oeste, la perpendicular CD representa la meridiana del punto C.

818. Recíprocamente, dada en el papel la proyeccion *c*, conocidos en el terreno los puntos A y B, se obtendrá el punto C en la hipótesis del caso directo relativa á su situacion, trazando por dichos puntos A y B la recta AB, ó bien desde uno de ellos A la que forma el rumbo *r*, la cual pasará por el otro punto B. Tomando con la cadena la longitud AD que tiene *ad* en la escala, y levantando en D la perpendicular DC de la longitud que marque la *cd*, su extremo C será el punto pedido, en el cual se colocará un jalon ó piquete para fijarle en el terreno. En general, la operacion por medio de la cual se fijan en el terreno y en su verdadera posicion los puntos y rectas cuyas proyecciones se hallan en el plano, se llama *replanteo*.

819. Esta resolucion es propia de las escuadras, y debemos entenderla en el supuesto de ser accesibles los puntos dados y el que se trata de determinar, y además visibles entre sí.

El método expuesto, aplicado á la determinacion de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, y en el cual vemos que solamente hay que trazar y medir líneas perpendiculares entre sí, le llamaremos por *alineaciones perpendiculares*.

820. 2.º—**Por el trazado y medicion de dos rectas cualesquiera.** —Se trazarán y medirán las dos rectas AC y BC (fig. 550; lám. 36) desde el punto C á los dos dados A y B.

Si solo se tuviese en cuenta el valor de las distancias AC y BC para hallar en el papel la proyeccion del punto C, vemos tambien que habría cuatro soluciones: los dos puntos de interseccion c y c' de las dos circunferencias trazadas, la una desde el extremo a de la ab, que representa en la escala á la AB, con un rádio ac que equivalga á AC, y la otra desde el otro extremo b con el rádio bc que represente á la BC; los otros dos puntos serán los c'' y c''', intersecciones de otras dos circunferencias iguales á las anteriores y trazadas desde los mismos puntos a y b, pero tomando los rádios en sentido inverso del anterior. Pero se tendrá una sola solucion, la c por ejemplo, si se indica además que el punto C se halla á la izquierda de la AB y más cerca de A que de B. Conocida su posicion relativa, y hallando el rumbo r de la AB se tendrá la absoluta que le corresponde.

Recíprocamente, para hallar el punto C del terreno, dada su proyeccion c en el papel, se fijarán en los extremos A y B de la AB, determinada como hemos dicho en el caso anterior, los extremos de dos cuerdas cuyas longitudes sean las que indiquen en la escala las ac y bc; y poniéndolas tirantes á la izquierda de la AB hasta que se unan los otros dos extremos, el punto de union será el punto pedido C.

Esta resolucion es peculiar de la cadena ó cuerda, piquetes y jalones; debiendo entenderse en el supuesto de ser los tres puntos accesibles y visibles entre sí, y cortas además las distancias que median entre ellos cuando han de replantearse de la manera que acabamos de indicar.

El mismo método, aplicado á la determinacion de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, cuyas proyecciones pueden obtenerse trazando y midiendo rectas como las AC y BC, suele llamarse *por alineaciones oblícuas*.

821. *Casos particulares.*—Si el punto C (fig. 551, lám. 36) se halla situado en una alineacion AB cuya proyeccion ab se conoce, así como la d de un punto accesible D, para hallar la proyeccion c del punto C, puede trazarse y medirse la CD, y haciendo centro en d con esta distancia reducida á escala, describir un arco que corte á ab; el punto c de interseccion será la proyeccion pedida.

Si el punto C (fig. 552; lám. 36) pertenece á una sola AB de dos alineaciones AB y DE, y se conoce las proyecciones ab y de, se prolongará en el terreno la DE hasta su encuentro en C′ con AB, y se medirá CC′; se prolongará la de en el papel hasta encontrar á ab en c', se tomará $c'c$ que represente en la escala á CC′, y se obtendrá la proyeccion c de C.

Cuando el punto C′ pertenece en el terreno á dos alineaciones AB y

DE, cuyas proyecciones *ab* y *de* se conocen, prolongando estas líneas ó solo una de ellas como en el caso actual, hasta su encuentro, el punto *c'* de interseccion será la proyeccion de C'.

Si el punto se halla fuera de las dos alineaciones AB y DE (fig. 553; lám. 36) como en C ó C', y se conocen las proyecciones *ab* y *de*, se bajará en el terreno sobre la AB una perpendicular CM' ó C'M', y se medirán MM' y CM' ó C'M'; se tomará *mm'* que represente á la MM', y levantando en *m'* una perpendicular, se tomará *cm'* ó *c'm'* que represente á CM' ó C'M'.

Si el punto C se halla fuera y es inaccesible, pero visible desde otro punto N (fig. 554; lám. 36), y se conocen en el papel *ab*, *ed* y *n*, se determinará la alineacion CN y se medirán CP y MP; se llevará la MP reducida á escala de *m* á *p*, se trazará la *np* indefinida, y tomando *cp* que represente á CP se tendrá la proyeccion *c* de C. En el caso de poderse medir la MC no se necesita conocer la proyeccion *n*; pues midiendo además una parte arbitraria MP de la AB y la CP, se tomará *mp* equivalente á MP, y haciendo centro en los puntos *m* y *p* con las *mc* y *pc* que representen á MC y PC se obtendrá la interseccion *c*, que será la proyeccion que se busca.

822. 3.º—**Por la medicion de una recta y un ángulo.**—*Con los goniómetros.*—Se trazará y medirá la BC (fig. 555; lám. 36) que va desde el punto dado C á uno de los extremos B de la AB, y se medirá tambien el ángulo ABC que forman entre sí estas dos rectas.

Para hallar en el papel la proyeccion del punto C, si sólo se diesen los valores de la recta y el ángulo, podrían satisfacer á la cuestion los cuatro puntos *c*, *c'*, *c''* y *c'''*, que son las intersecciones de los arcos trazados desde los puntos *a* y *b* de la *ab*, que representa en la escala á la AB, siendo el rádio una recta que representa á la BC, con las líneas *bc*, *bc'*, *ac''* y *ac'''*, las cuales forman con la *ab* en sus extremos ángulos iguales al ABC; pero si se dice además que el ángulo se ha de formar en el punto B y á la izquierda de la AB, entonces no habrá más que una sola solucion que será el punto *c*, el cual representará la verdadera proyeccion del C; con lo que tendremos la posicion relativa de dicho punto: hallando el rumbo *r* se tendrá la posicion absoluta. Dado el sentido AB de la marcha, el vértice B y el ángulo de direccion, la indeterminacion cesa por completo, como ya hemos indicado (282).

Recíprocamente, para hallar en el terreno el punto C, conocida en el papel su proyeccion *c*, despues de determinada la AB, como ya se ha dicho, se formará en B el ángulo ABC igual al *abc*, y tomando la BC de la longitud que marque en la escala la *bc*, su extremo C será el punto pedido.

823. *Con la brújula.*—Los rumbos de las BA y BC darán la posicion relativa de estas líneas, y tambien la absoluta si la brújula está bien orientada (378). El punto C se determina por la longitud de BC.

824. *Con la plancheta.*—Conocida la *ab* (fig. 556; lám. 36), proyeccion de AB y su rumbo *r*, se hace estacion en B, colocando *b* en la vertical de

B; se declina *ab* sobre AB, se dirige la visual *bc*, y se mide BC: tomando en la escala la longitud *bc* que la represente, el punto *c* será la proyeccion de C.

Puede aplicarse esta resolucion no solo al caso en que los tres puntos A, B y C son accesibles y visibles entre sí, sino tambien para cuando solamente lo sean los B y C, pudiendo ser accesible ó inaccesible el otro punto A, pero visible solamente desde B. Cuando es invisible tambien, se orienta *ab* por la declinatoria (451).

825. La aplicacion de este método á la determinacion de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, en el cual se conoce de antemano ó se mide una recta AB, despues el ángulo ABC, y por último, la recta BC, como hemos indicado en los párrafos que preceden, repitiéndose estas operaciones para la determinacion de los demás puntos, se llama *levantamiento del plano por rodeo*, en atencion á que se ejecuta recorriendo el contorno del polígono.

826. 4.º—**Por la medicion de dos ángulos haciendo estacion en los puntos dados**.—*Con los goniómetros*.—Para determinar la posicion absoluta y relativa del punto C (fig. 557; lám. 37) no habrá más que medir los ángulos CAB y CBA y determinar el rumbo *r*, expresando además que el punto C se halla á la izquierda de la AB, para que análogamente á los casos anteriores, veamos que de las dos soluciones *c* y *c'* que presenta este caso en el papel, el punto *c* resuelve la cuestion y es la verdadera proyeccion del C. Pudiera haber cuatro soluciones si no se sabe á qué extremo de la AB corresponde cada ángulo. La necesidad de tomar en el caso actual y en todos los expuestos anteriormente el rumbo *r* de la línea que une los puntos dados, ó el de otra cualquiera, es la razon de que hasta los instrumentos más sencillos vayan acompañados de su correspondiente brújula.

827. *Con la brújula*.—Conocida y orientada la base AB, basta hallar los rumbos de las líneas AC y BC. Si los puntos dados A y B fuesen inaccesibles, se podrían tomar los rumbos de estas líneas desde el C que se trata de determinar; advirtiendo que las observaciones son *inversas* (369), y deben hacerse con el extremo blanco de la aguja. Esta circunstancia coloca á los rumbos en las mismas condiciones que si se hubiesen obtenido directamente desde los puntos dados, y la determinacion de *c* se consigue del mismo modo que en el caso general de ser A y B accesibles.

828. *Con la plancheta*.—Colocaremos este instrumento en el extremo A (fig. 558; lám. 37) y hallaremos la proyeccion *a* de este punto en el tablero: dirigiendo la alidada á B, y trazando *ab* que represente en la escala á AB, dirigiremos la visual *a*C y trazaremos *ac'*. Trasladando despues la plancheta á B, se colocará *b* en la vertical de B, se declinará *ba* sobre BA, y trazando *bc''* se obtendrá la proyeccion *c* del punto C por la interseccion de las *ac'* y *bc''*. Se hallará además el rumbo *r* por medio de la declinatoria.

829. Este método, aplicado á la determinacion de los vértices y otros

puntos cualesquiera de un polígono, en el cual queda fijo el punto que se busca por la interseccion de dos rectas, se llama propiamente *por interseccion*, y se aplica cuando el punto accesible ó inaccesible C, que se quiere determinar, es visible desde los puntos A y B. Se puede comprobar trazando una nueva línea DE desde un punto D, que se refiere á *ab* por su distancia AD á uno de los puntos dados, orientando en D la plancheta con relacion á la base AB, y viendo si la línea *de* tirada segun la visual dirigida á E pasa por el punto *c*, interseccion de las *ac' bc''*.

830. Se comprende fácilmente la manera de hacer el replanteo en los casos 3.º y 4.º explicados (822 y 826).

831. 5.º—**Por la medicion de dos ángulos haciendo estacion en uno de los puntos dados y en el que se trata de determinar.**—*Con los goniómetros.*—Cuando conocida la proyeccion *ab* (fig. 559; lám. 37) de la AB, no se puede hacer estacion en uno de los puntos dados A por ser inaccesible, pero sí en el otro B y en el que se trata de hallar C, siendo los tres visibles entre sí, y queriendo evitar la medida de la recta BC, se tomarán los ángulos en B y C, y restando su suma de 180º se tendrá el valor del ángulo A para hacer en el papel la construccion como anteriormente.

Tambien se puede hallar la proyeccion *c* en el papel formando en *b* el ángulo *abd* = ABC, tirando la *ae* paralela á *bd*, y formando sobre ella el ángulo *eaf* = ACB: el punto de interseccion *c* de *bd* y *af* será la proyeccion que se busca; puesto que se tiene *eac* = *acb* = ACB.

Por último, se puede hacer la construccion tomando *ab* (fig. 560; lám. 37) que representa á AB (fig. 559; lám. 37); se construirá entonces el ángulo *abc'* = ABC y en un punto cualquiera *c'* de la recta *bc'* se formará igualmente el ángulo *a'c'b* = ACB; por el punto *a* se tirará una paralela *ac* á la *a'c'*, y se tendrá el punto *c* hallado tambien por la interseccion de las *ac* y *bc* como en los casos anteriores.

Obsérvese que como las BC y AC se obtienen en el papel sin medirlas en el terreno, este problema resuelve el de hallar la posicion de un punto C con respecto á otros dos dados A y B, siendo inaccesible uno de dichos puntos A y las distancias del punto C á los dos lados.

832. *Con la brújula.*—Hállese desde C (fig. 559; lám. 37) el rumbo de CA como observacion inversa (827) y tírese *af* desde *a* con el rumbo hallado: su interseccion *c* con la recta *bc* obtenida directamente dará la proyeccion buscada.

833. *Con la plancheta.*—Despues de tomado en la plancheta el ángulo en *b* (fig. 561; lám. 37) igual al B del terreno y *ab* equivalente en la escala á AB, se trasladará el instrumento al punto C que se quiere determinar, y como la longitud BC no se ha podido medir ó no se ha creido conveniente, no se conoce en la línea indefinida *bc'* el punto que es la proyeccion de C, por lo que se hará corresponder un punto cualquiera *c'* de dicha línea con el del terreno C, y se declinará *bc'* sobre BC; por el punto *c'* se dirigirá la visual *c'*A por medio de la alidada, y la línea *c'd*

trazada en la plancheta no pasará por a; tirando por este punto una paralela ac á $c'd$, cortará á la bc' en un punto c, que será la verdadera proyeccion de C; en términos que si ahora se mueve la plancheta para hacer corresponder c con C y se declina cb sobre CB, quedará ca en el plano vertical de CA.

Este método, aplicado á la determinacion de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, en el cual se determina primero un punto c' por la interseccion con la bc de una línea auxiliar, y despues se la vuelve á cortar con la ac paralela á la anterior, resultando dos puntos de interseccion, de los cuales el segundo es la proyeccion que se busca, le llamaremos *por doble interseccion*. Los franceses le llaman *par recoupement*. En la construccion de la fig. 559 (lám. 37) vemos sin embargo que el punto c se ha obtenido por una sola interseccion.

Este método podria comprobarse tambien por una nueva línea que pasase por la interseccion de las dos que dan el punto c.

El método por doble interseccion sirve para auxiliar al método *por rodeo* en el caso de no poderse medir directamente la BC (fig. 555; lámina 36) y de no convenir la aplicacion de ninguno de los métodos establecidos para medirla indirectamente como una línea inaccesible.

834. En la práctica puede abreviarse del modo siguiente el método *por doble interseccion*. Sea c'' (fig. 562; lám. 37) el punto de la línea bc'' que se ha situado en la vertical de C: despues de haber declinado $c''b$ sobre CB, en vez de trazar como antes la $c''d$ y su paralela ac, se hará girar á la alidada alrededor de a hasta descubrir A, y se trazará la ac' que nos dará c' en lugar de c para proyeccion de C. La distancia cc' de estos puntos solo podrá apreciarse cuando la escala sea muy grande; pero en las adoptadas ordinariamente es inapreciable. En efecto, los triángulos semejantes $ac'c$ y $Ac'c''$ dan la proporcion

$$Ac'' : ac :: c'c'' : cc';$$

pero ac representa en la escala adoptada á la Ac'' del terreno, luego cc' representará á la distancia $c'c''$ comprendida entre las verticales de los puntos c' y c'' que pasan, la primera por el punto C del terreno, y la segunda por el nuevo punto de este á quien representa la proyeccion c'; y como esta distancia horizontal del terreno, siendo igual á la $c'c''$ de la plancheta, no puede exceder de la diagonal del tablero, cuya magnitud es inapreciable en las escalas que se suelen adoptar, tambien lo será la cc', la cual hemos visto por la proporcion anterior que es el valor de dicha distancia en el terreno tomada en la escala adoptada. Por consiguiente, el punto c' podrá representar la proyeccion verdadera c y la ac' se podrá considerar confundida sensiblemente con la paralela ac á la dc'' y tomarse por esta; pudiendo en lo sucesivo hacerse uso de esta observacion en los casos análogos.

835. La consideracion anterior nos da tambien el medio de trazar en

el tablero de la plancheta una paralela á una recta dc'' por un punto c valiéndonos de la alidada. Para esto, se coloca la línea de fé de esta última en contacto con la dc'', y se clava un jalon en sentido de la visual, en un punto A á la distancia de 300 á 400 metros; se dirije despues otra visual por el punto c' al mismo jalon, y se traza la $c'a$ que será gráficamente paralela á la dc'' En efecto, unamos el punto c' con el c'' y tiremos por a la ad paralela á $c'c''$ y la ac paralela á dc''. Los triángulos semejantes $c'ac$ y $c'Ac''$ nos dan la proporcion

$$Ac'' : ca = dc'' :: c'c'' : cc';$$

de donde resulta $$Ac'' = \frac{dc'' \times c'c''}{cc'}.$$

Por esta expresion se podrá obtener el menor valor que debe darse á la distancia Ac'', si sustituimos por dc'' y $c'c''$ los mayores valores que se presentan en general y por cc' una cantidad que no exceda de $0,^{m}0001$ ó $0,^{m}0002$, límites de las cantidades apreciables en el papel (504).

Sean $dc'' = 0,^{m}2$; $c'c'' = 0,^{m}1$, y $cc' = 0,^{m}0001$:

tendremos $$Ac'' = \frac{0,^{m}2 \times 0,^{m}1}{0,^{m}0001} = \frac{0,^{m}02}{0,^{m}0001} = 200^{m}.$$

Sean $dc'' = 0,^{m}2$; $c'c'' = 0,^{m}1$, y $cc' = 0,^{m}0002$:

tendremos $$Ac'' = \frac{0,^{m}2 \times 0,^{m}1}{0,^{m}0002} = \frac{0,^{m}02}{0,002} = 100^{m}.$$

Por consiguiente, si la distancia Ac'' á que se coloca el jalon es de 300 á 400 metros, las líneas dc'' y $c'a$ serán gráficamente paralelas.

836. Obsérvese que los métodos acabados de exponer para la determinacion de un punto con relacion á otros dos dados, no son otra cosa que los distintos casos de resolucion de triángulos. Advertimos de paso, que si bien hemos asignado los instrumentos más propios para cada uno de los dichos métodos, se pueden emplear todos con un mismo instrumento.

837. **Resolucion de otros casos particulares que completan la teoría de la determinacion de un punto con relacion á dos puntos dados.**—Apreciando las distintas circunstancias que más generalmente suelen presentarse, y valiéndonos del método de interseccion solamente, ó midiendo una nueva línea además en algunas cuestiones, se pueden resolver los casos siguientes, que completan la resolucion del problema general que nos ocupa. En ellos haremos uso de la plancheta, siendo análoga la marcha que se seguiría con los goniómetros, y generalmente más sencilla.

6.° *Determinar un punto* C (fig. 563; lám. 37) *haciendo estacion en otro* E, *que pertenece á la recta que une los dos dados* A *y* B, *cuya proyeccion* ab *es conocida, siendo* A *y* B *inaccesibles, pero accesible el* C *cuya proyeccion se busca, y visibles desde él los* A, E *y* B.—Se coloca un punto cualquiera *e* de la *ab* en la vertical del punto E y se orienta *ab* con AB; se hace girar á la alidada alrededor de *e* hasta que se descubra C y se traza una línea en la plancheta en esta direccion; se traslada el instrumento al punto C y se hace coincidir con la vertical de C un punto cualquiera c'' de la línea trazada; se declina $c''e$ sobre CE, y dirigiendo desde c'' visuales á los puntos A y B, y trazando las líneas correspondientes en la plancheta, no habrá más que tirar despues á estas líneas por los puntos *a* y *b* paralelas que se cortarán en el *c*, verdadera proyeccion de C que se busca. Para obtener sobre la *ab* la verdadera proyeccion de E, se trazará ce' paralela á ec'', y se tendrá e'.

Si para resolver este caso se quiere hacer uso de la abreviacion explicada, se trazarán en la plancheta en sentido de las visuales A*a* y B*b* dos rectas cuyo punto de interseccion c' se podrá tomar por el *c* sin inconveniente, puesto que es el caso de tirar la paralela con la alidada (835).

Para indicar ligeramente el modo de resolver este problema con un goniómetro, se medirán en el terreno los ángulos ADC, ACD, DCB (figura 564; lám. 37) desde los puntos D y C en que se puede hacer estacion; se construirá en el papel y en un punto cualquiera d' de la *ab* el ángulo $ad\,c' =$ ADC; en un punto cualquiera c' de $d'c'$, se construyen los ángulos $d'c'a'$, $d'c'b'$ respectivamente iguales á los DCA, DCB; y tirando por *a* y *b* paralelas á los lados así determinados, su interseccion *c* será la proyeccion de C.

Con la brújula se resolverian como hemos indicado (827).

838. 7.°—*Hallar la proyeccion de* C *haciendo estacion en un punto* E (fig. 565; lám. 37) *de la línea que une los dos puntos dados, cuya proyeccion* ab *es conocida, siendo visible desde dicho punto* E *el* C, *cuya proyeccion se busca, é invisible desde* C *uno de los puntos dados* A.

Se coloca un punto cualquiera *e* de la *ab* en la vertical del E, y se orienta *ab* con AB; se hace girar á la alidada alrededor de *e* hasta que se descubra C, y se traza una línea en la plancheta en esta direccion; se mide EC en el terreno y se toma la ec'' que representa esta distancia reducida á escala; se traslada el instrumento al punto C, y se hace coincidir c'' con la vertical de C; despues de tirar por c'' una paralela á *ab*, en la cual debe hallarse la proyeccion que se busca, se declina $c''e$ sobre CE, y trazando en la plancheta una línea en la direccion c''B y una paralela á ésta por *b*, el punto *c* de encuentro de esta paralela con la paralela á *ab* tirada por el punto c'', será la proyeccion verdadera de C. Si se quiere obtener sobre *ab* la verdadera proyeccion de E, se trazará ce', paralela á ec'', y se tendrá e'.

Si se quiere resolver abreviadamente, se trazará una línea en sentido de la visual Bb, y su interseccion c' con la paralela tirada á ab por c'' se podrá tomar por c sin inconveniente como en el caso anterior.

Con los goniómetros se resuelve midiendo la línea DC (fig 566; lámina 37) y los ángulos ADC y DCB: se construye despues en el papel el ángulo $ad'c'$ = ADC en un punto cualquiera d' de la ab, tomando $d'c'$ en la escala con la magnitud hallada para DC, y construyendo en c' el ángulo $d'c'b'$ = DCB; tirando por b una paralela á $b'c'$, su interseccion con la paralela á ab por c' dará el punto c que se pedía.

839. 8.°—*Hallar* C (fig 567; lám. 37) *haciendo estacion en este punto, y no pudiendo hacerla en los intermedios de la* AB, *siendo los dados* A *y* B *inaccesibles, pero visibles desde* C, *conocida de antemano la proyeccion* ab *de* AB *y tambien la distancia desde uno de los puntos dados* A *al punto* C.

Se coloca la plancheta en el punto C, de modo que la vertical de este punto pase por b, y se declina ab sobre AC; se traza la be en direccion de la visual bB, y levantando en b una perpendicular bo á la be y otra á la ab en su punto medio d, el encuentro o de estas dos perpendiculares será el centro del círculo cuyo segmento amb será capaz del ángulo ACB: se tomará, reducida á escala, la AC, que se supone conocida ó que se puede medir y haciendo centro en a con esta distancia como rádio, se trazará un arco cuya interseccion con la circunferencia nos dará el punto c, verdadera proyeccion de C; se tirarán las ca y cb, y la proyeccion acb del ángulo ACB del terreno nos servirá para orientar la plancheta, declinando ca sobre CA y cb sobre CB, y pudiendo de este modo proseguir el curso de las operaciones en cualquiera de los casos en que se presenta este problema en la práctica

Con los goniómetros se reduce este caso á medir el ángulo en C y el lado AC, y con estos datos y la magnitud conocida de AB hacer en el papel las mismas construcciones, que hemos indicado, en el tablero de la plancheta

840. 9.°—*Hallar* C (fig 568; lám. 37) *haciendo estacion en este punto, cuya proyeccion se busca, siendo conocida la proyeccion* ab *de la línea* AB *que une los dos puntos dados* A *y* B, *visibles desde el* C, *pero inaccesibles, y no pudiéndose hacer estacion entre ellos.*

Se buscará un punto auxiliar accesible D desde el cual sean visibles los A, B y C; se trazará en la plancheta una línea cualquiera $c'd'$ de longitud arbitraria, que se tomará provisionalmente como proyeccion de la CD del terreno; se hará estacion con la plancheta en C, colocando c' en la vertical de C, y declinando $c'd'$ sobre CD se trazarán las $c'a'$ y $c'b'$ en direccion de CA y CB; se trasladará la plancheta á D colocando d' en la vertical de D, y se trazarán las $d'a'$ y $d'b'$ en direccion de las DA y DB: los puntos a' y b' de interseccion de estas líneas determinarán con los c' y d' el cuadrilátero $a'b'c'd'$ semejante al ABCD. Sobre $a'b'$ se tomará $a'b''$ igual á ab, y por el punto b'' se tirará $b''d''$ paralela á $b'd'$, y por el d'' en que encuentra á $a'd'$, la $c''d''$ paralela á $c'd'$. El cuadrilátero $a'b''d''c''$ semejante al $a'b'd'c'$ lo será tambien al ABDC, pero reducido á la escala á que lo estaba la ab, por lo que $c''d''$ será la proyeccion de CD No habrá ahora más que construir sobre la ab un cuadrilátero igual al $a'b''d''c''$, y la nueva posicion en que se halle c'' representará la proyeccion de C que se pedía. El trazado en la plancheta de las $b''d''$ y $c''d''$ paralelas á las $b'd'$ y $c'd'$ puede hacerse con la alidada (835).

Tambien se hubiera podido construir desde luego sobre ab un cuadrilátero semejante al $a'b'c'd'$

Con los goniómetros puede tambien resolverse este problema, tomando para $c'd'$ una magnitud arbitraria, y construyendo el polígono semejante como se ha hecho en el tablero de la plancheta.

841. Este caso comprende el problema de *medir indirectamente una base accesible* CD, *por medio de otra inaccesible y conocida* AB

842. 10.º—*Hallar la proyeccion del punto inaccesible* C (fig. 569; lámina 37), *siendo* A *accesible, y* B *accesible ó inaccesible, cuando no puede medirse la distancia* AC.

Se elegirá sobre el terreno un punto auxiliar D desde el cual sean visibles los A, B y C; se medirán los ángulos ADB y DAB, y se podrá determinar el valor de AD; se medirán despues los ángulos CAD y CDA, y se podrá hallar el valor de AC En el caso de no encontrarse un punto D desde el cual puedan verse los A, B y C, se mediría AC indirectamente.

843. * 11.º—*Hallar la proyeccion de un punto* C (fig. 570; lám. 37) *cuando es invisible desde los dos lados* A y B.

Se hallarán dos puntos intermedios D,D′ (650) para establecer la alineacion AC, y otros dos E,E′ para tener la BC por aquel de los métodos expuestos en el capítulo XIII, que sea más conveniente; se medirán los ángulos DAB y EBA, con lo que se podrá resolver el triángulo ABC, puesto que AB siempre se supone conocida ó que se puede conocer Si no es posible determinar puntos intermedios de una de las líneas AC y BC, de la BC por ejemplo, se hallarán los G y G′ de otra CF que encuentre á la AB, ó los H,H′ de la CF′ que encuentre á su prolongacion; se medirá BF en el primer caso para restarla de AB y obtener AF, y los ángulos DAF y AFG para resolver el triángulo CAF. En el segundo caso se medirá la BF′ que se añadirá á la AB para tener AF′ y resolver como en el primero el triángulo CAF′. Si en ninguna de las rectas CA y CB se pueden determinar puntos intermedios, se resuelve el problema por medio de otras dos auxiliares, como las CF y CF′

844. **Determinacion de la posicion absoluta y relativa de un punto del terreno con relacion á dos rectas que se cortan y cuyo ángulo es conocido**.—Sean AB y BD (fig. 571; lám. 37) las rectas dadas, y C el punto cuya proyeccion se busca: se bajarán desde este punto las perpendiculares CC′ y CC″ sobre las AB y BD, y se medirán las distancias AC′ y BC″, pues suponemos conocidos el punto de partida A y el de interseccion B, así como el ángulo ABD. Tomando además el rumbo *r* de una de ellas AB, se podrá hallar en el papel la proyeccion de C en su posicion absoluta y relativa.

En efecto; se trazará en el papel *ab* que represente en la escala á AB, se formará en *b* el ángulo *abd*=ABD, se tomarán *ac'* y *bc''* que equivalgan á AC' y BC'', y levantando las perpendiculares *c'm* y *c'n*, éstas se cortarán en un punto *c* que será la proyeccion de C en su posicion relativa; pues se demuestra en Geometría que si dos rectas se cortan, sus perpendiculares se cortan tambien. Por medio del rumbo *r* se podrá colocar el punto *c* en el plano en su posicion absoluta.

Si las líneas AB y BD (fig. 572; lám. 38) se eligen perpendiculares entre sí, la figura CC'BC'' será un rectángulo, y nos dará CC'=C''B y BC'=CC'', y entonces midiendo BC' y BC'' tendríamos conocidas las longitudes de las perpendiculares CC'' y CC'. Si la línea AB se elige en el terreno en direccion de Este á Oeste, la DB representará la meridiana del punto B, y se tendrá conocida la distancia CC'' á la *meridiana*, así como la CC' á la *perpendicular* á esta en el punto B.

En el replanteo se seguirá una marcha análoga á la seguida en la construccion.

Como en los dos métodos acabados de exponer nos valemos de *abscisas* y *ordenadas*, llamaremos al primero por *coordenadas oblicuas*, y al segundo por *coordenadas rectangulares*. Se puede observar, sin embargo, que en la construccion de este problema la proyeccion del punto se determina por la interseccion de dos rectas.

845. **Determinacion de la posicion de tres ó más puntos con relacion á otro cuya proyeccion es conocida.**—Este problema puede resolverse como vamos á exponer cuando son visibles desde el punto de estacion los que se quiere determinar, no presenta dificultades el trazado y medicion de las rectas tiradas desde dicho punto á los demás, y la longitud de estas líneas no excede de los límites asignados para los valores angulares que deben observarse con cada instrumento. El método que vamos á indicar se llama *por radiacion*.

Con los goniómetros.—Mídanse los ángulos ADB, BDC (fig. 573; lámina 38), que forman las visuales tiradas desde el punto dado á los A, B y C que se trata de determinar, así como las longitudes DA, DB, DC de estas visuales, que pueden obtenerse directa ó indirectamente. El rumbo de una de ellas determinará las posiciones absolutas de los puntos A, B y C.

Con la brújula.—Se determinan las direcciones de las visuales por los rumbos que les corresponden.

Con la plancheta.—Se coloca *d'* (fig. 574; lám. 38), proyeccion de D, en la vertical de este punto, orientando la plancheta por medio de la declinatoria, si se quiere hallar la posicion absoluta de los puntos A, B y C, y se trazan en el tablero las direcciones de las visuales tiradas á estos puntos, tomando en ellas las distancias *d'a'*, *d'b'*, *d'c'*, que representan á las DA, DB y DC.

Con las escuadras.—Pueden determinarse los ángulos ADB y BDC (fig. 573; lám. 38), midiendo las abscisas DP, DQ y las ordenadas EP, QE, y proceder como con los goniómetros; ó bien trazando desde D (fig. 575; lámina 38) las rectas *mn* y *rs* perpendiculares entre sí, que pasen lo más cerca que sea posible de los puntos A, B y C. Trazadas estas alineaciones, se bajan las ordenadas A*a*, B*b*, C*c*, las cuales se miden, así como las abscisas correspondientes. Cuando se aplica este procedimiento á la determinacion de mayor número de puntos, pueden evitarse las ordenadas demasiado grandes, trazando los ejes que forman ángulos de 45° con los primeros.

Con la cuerda ó cadena, piquetes y jalones.—Se resuelve como con los goniómetros, determinando los ángulos por la medida de las rectas iguales DF, DE, DH (fig. 573; lám. 38), y las FE y EH (703).

846. **Problemas que pueden tener aplicacion en el levantamiento de los planos.—Determinacion de la posicion de un punto con relacion á tres puntos dados.—Problema de la Carta.**—Este problema, llamado por los autores franceses *Problema de la Carta*, porque se aplica á la determinacion de un punto con relacion á tres situados en sus posiciones relativas y absolutas en una carta ó plano topográfico, se resuelve tambien cuando se trata de conocer la posicion de un punto accesible D (figura 576; lám. 38), referida á la de otros tres A, B, C inaccesibles, pero visibles desde el primero.

Resolucion gráfica.—*Con los goniómetros.*—Mídanse los ángulos ADB=*m* y BDC=*n*, y construyendo sobre la recta *ab* del papel, homóloga á la AB del terreno, el ángulo *hab*=*m*, se traza sobre ella el arco capaz de este ángulo (Geom. Probl. 19) tirando la *ao*, perpendicular en *a* á la *ah*, y la perpendicular en el punto medio de *ab*; ambas perpendiculares determinan en su interseccion *o* el centro del arco capaz. Trazando despues sobre *bc* el arco capaz del ángulo *n*, la interseccion *d* de estos arcos será la representacion en el plano del punto D del terreno. Es, en efecto, el único punto que satisface á la condicion de que las rectas tiradas desde él á los puntos dados *a*, *b* y *c*, forman los ángulos consecutivos *m* y *n*, como tiene lugar en el terreno para D con relacion á los puntos A, B y C.

Si se unen los *a* y *c*, y se construye sobre la recta así determinada, el arco capaz del ángulo $adc = m + n$, este tercer arco pasará tambien por *d*, lo cual puede servir de comprobacion.

Cuando las circunferencias descritas tienen hácia *d* muchos puntos comunes, se halla el verdadero punto de interseccion tirando desde *b* una perpendicular *be* á la línea *oo'* que une los centros, y prolongándola hasta los arcos. En efecto, la línea que une los puntos de interseccion *b* y *d* es perpendicular á la línea que une los centros (Geom. Teor. 45).

847. *Caso excepcional.*—Puede suceder que las dos circunferencias se confundan: entonces todos los puntos de la que así resulta satisfacen á la doble condicion exigida, el punto *d* (fig. 577; lám. 38) corresponde á la circunferencia que pasa por *a*, *b* y *c*, y queda indeterminado; se vé en la figura que *d'* satisface á las mismas condiciones que *d*. Se recurre en-

tonces á un nuevo punto cuya posicion respecto á dos de los dados primitivamente sea conocida, fijando la de *d* con relacion á los tres acabados de mencionar: y en el caso de no existir el cuarto punto fijo á que nos referimos, se elige en su lugar otro cualquiera, determinándole con relacion á los tres primeros.

848 *Con la brújula.*—Puede resolverse como con los demás goniómetros, hallando *m* y *n* (fig. 576; lám. 38) por la diferencia de los rumbos de las rectas DA, DB, DC; pero si las AB, BC y sus homólogas *ab*, *bc* están orientadas, bastará hallar observaciones inversas (369) los rumbos DA, DB, DC, y marcarlos directamente desde *a*, *b* y *c* en el plano, por medio de rectas, cuya interseccion dará la posicion absoluta y relativa del punto *d*. Se comprende que lo estaría solamente por la interseccion de dos de estas rectas; pero como ellas se cortarían en general aun cuando se hubiese cometido algun error en la determinacion de los rumbos, la tercera visual da á conocer que esto no ha sucedido cuando pasa por el punto de interseccion de las primeras. Muchas veces se refiere un punto á cuatro, cinco ó mayor número de puntos fijos.

849. *Con la plancheta.*—Se coloca un punto cualquiera *d'* (fig 574; lámina 38) del tablero en la vertical del punto de estacion D, y se trazan las rectas *d'a'*, *d'b'*, *d'c'* en direccion de las visuales tiradas desde D á los puntos dados, con lo que se conocerán gráficamente los ángulos *a'd'b'*, *b'd'c'* de estas visuales. Construyendo sobre *ab* y *bc* trazadas en el tablero los arcos capaces de estos ángulos (846), se determinará el punto *d*.

Se podrá evitar el trasladar los ángulos *m* y *n*, construyéndolos desde luego en el lugar que deben ocupar para la determinacion de los arcos capaces. Con este objeto, se hace corresponder el punto *a* (fig 578; lámina 38) del tablero y al de estacion D del terreno en una misma vertical, declinando *ab* sobre DB; se traza entonces una línea *ah* en la direccion de la visual DA, pudiendo hallar entonces como hemos indicado el centro *o* correspondiente al arco capaz del ángulo ADB. Se mueve despues la plancheta, haciendo que *c* ocupe la posicion *c'* en la vertical del punto de estacion D, y *cb* la *c'b'* en la direccion DB, con lo cual el ángulo *abc* se hallará en *a'b'c'* y *o* habrá pasado á *o'*: se halla entonces el centro *o'* del arco capaz del ángulo BDC, determinando este ángulo por la recta D*m* en direccion de la visual DC. La interseccion de las circunferencias dará como en los problemas anteriores el punto *d*.

Tambien se puede resolver el mismo problema disponiendo en el tablero un papel de calcar, determinando el punto *d'* (fig. 574; lám. 38) que se halla en la vertical del de estacion, y marcando con lápiz las direcciones *d'a'*, *d'b'*, *d'c'* de este punto á los puntos dados. Trasladando el papel al sitio del tablero en que se hallan las proyecciones *a*, *b*, *c* de estos últimos, se le mueve sobre ellos hasta que las rectas trazadas pasen respectivamente por estos puntos, calcando entonces el punto *d'*; con lo que se tendrá la proyeccion de su homólogo D en el terreno. Cuando haya más de una posicion en que se verifique la circunstancia acabada de indicar, estaremos en el caso de indeterminacion de que ya nos hemos ocupado (847).

850. El uso del papel trasparente permite resolver este problema con las escuadras acompañadas de la cadena ó cuerda, piquetes y jalones, ó solamente con estos últimos medios. En el primer caso, está reducida la cuestion á establecer alineaciones desde el punto D (fig. 573; lámina 38) á los A, B y C, midiendo únicamente las abscisas PD y DQ, y las ordenadas EP y EQ á fin de que hecha la construccion en el papel de calco, se coloque este sobre el plano moviéndole hasta que las tres líneas pasen por los tres puntos dados, cuyas proyecciones se conocen.

851. En el segundo caso, despues de establecidas las alineaciones, está reducida la cuestion á medir los tres lados de los dos triángulos isósceles DEF y DEH para hacer la construccion en el papel de calco y proceder despues como en el primero.

No creemos conveniente ocuparnos del método de tanteos, indicado por algunos autores, en razon al mucho tiempo que exige, sin proporcionar mayor exactitud que los que hemos dado á conocer.

Cualquiera que sea el procedimiento empleado, se tiene una comprobacion, disponiendo el punto *d* en la vertical de D, y declinando una de las líneas *da*, *db*, *dc* sobre su homóloga en el terreno: haciendo coincidir sucesivamente con las otras dos la línea de fé de la alidada, las visuales deben ir á parar á los puntos dados correspondientes.

852. **Resolucion analítica** —*Determinacion del punto* D (fig. 576; lámina 38) *por sus distancias á dos de los puntos dados*, A *y* C.—Representando por la misma letra D la proyeccion del punto de estacion en la figura 579 (lám. 38) y las que siguen, y por A, B y C las proyecciones de los puntos dados, se coloca el primero en el plano en un punto cualquiera, con tal que se halle situado, respecto de los que representan á estos últimos, de una manera análoga á la que ocupaba con relacion á ellos el de estacion en el terreno, suponiendo además que se han medido los ángulos *m* y *n*, y que se conocen los valores de los dos lados y los ángulos del triángulo ABC, lo que es evidente. Haciendo pasar una circunferencia por los tres puntos D, A, C, las posiciones relativas de los que consideramos dan lugar á varios casos de que vamos á ocuparnos separadamente.

Primer caso.—Cuando la estacion D (fig. 579; lám. 38) se halla en el exterior del triángulo ABC, y el vértice B dentro de la circunferencia.—En el triángulo ACD se conoce el lado AC y el ángulo ADC $= m + n$; falta tan solo conocer uno de los otros ángulos para resolver el triángulo. Observaremos, con este objeto, que en el AHC se conoce el lado AC, así como los ángulos HCA $= m$ y HAC $= n$; resolviéndole se hallará el valor de AH. En el triángulo ABH se conocen entonces los lados AB y AH y el ángulo comprendido HAB $=$ HAC $-$ BAC $= n -$ BAC; resolviéndole, se conocerá el ángulo AHB ó AHD $=$ ACD, que se trataba de hallar. Una vez determinado el triángulo ACD, su resolucion nos dará los valores de las distancias pedidas DA y DC.

Este caso tiene lugar cuando es $m >$ BCA y $n >$ BAC.

Segundo caso.—Cuando la estacion D (fig. 580; lám. 38) se halla en el exterior del triángulo, y el vértice B fuera de la circunferencia.—Se trata de determinar el ángulo ACD como en el caso anterior. El triángulo ACH da tambien el valor de AH; por lo que en el ABH se conocen los lados AB, AH y el ángulo comprendido BAH = BAC — n, y resolviéndole se conocerá el ángulo AHB, y su suplemento AHD = ACD.

Este caso corresponde á $m <$ BCA y $n <$ BAC.

Tercer caso.—Cuando D (fig. 581; lám. 38) se halla en el interior del triángulo.—Se tiene desde luego ACH = ADH = 180° — m; CAH = HDC = 180° — n; y se podrá resolver el triángulo ACH que dará el valor de AH. Conociendo entonces este lado así como el AB, y el ángulo BAH = BAC + CAH, conocidos tambien, se podrá resolver el triángulo BAH, que dará el valor del ángulo ABD. En el triángulo DBA se conocerán además de este ángulo el m y el lado AB; resolviéndole se tendrán las distancias DA y DB, que bastan para determinar el punto D. Este caso se presenta cuando se tiene $m > 90°$, y $n > 90°$.

853. *Casos particulares.*—1.° Que el punto D (fig. 582; lám. 38) se halle en uno de los lados AB del triángulo ABC.—Se mide el ángulo n; y como en el triángulo DBC se conoce BC y el ángulo DBC = ABC, se podrán calcular las distancias DB, DC á los puntos dados B y C. Este caso ocurre cuando se tiene uno de los ángulos $m = 180°$.

2.° Cuando D (fig. 583; lám. 38) está en la prolongacion de uno de los lados AB.—En el triángulo ADC se conoce el lado AC, el ángulo n, y el CAD, suplemento del CAB; resolviéndole se hallarán las distancias DA, DC. Este caso se presenta cuando se tiene $m = 0$.

3.° Cuando los puntos A, B y C (fig. 584; lám. 38) están en línea recta.—Circunscríbase una circunferencia al triángulo ABD y otra al BDC. Tírense los rádios ED, EA, EB, FB, FC y las perpendiculares EG y FH desde los centros de las circunferencias á la recta AC, uniéndolos despues por la EF. En el triángulo rectángulo EGB se conoce el cateto GB = $\frac{AB}{2}$, y el ángulo agudo GEB = m por tener la misma medida; resolviéndole se hallará el valor de EB. De un modo análogo se halla el valor de BF, resolviendo el triángulo rectángulo BHF. Entonces se habrá determinado el EBF, pues se conocerán los lados BE, BF y el ángulo comprendido EBF, igual al suplemento de GBE + FBH, ángulos de los triángulos rectángulos considerados; se podrá, pués, calcular el ángulo BEF, con lo que se hallará el valor de su duplo BED; y como el triángulo EBD es isósceles, se conocerán dos lados EB, ED, y el ángulo comprendido; resolviéndole, se hallará la distancia DB del punto de estacion á uno B de los puntos dados. Su distancia al A se deduce del triángulo DAB, en el que se conocen DB, AB, y el ángulo m.

En este caso corresponde á la hipótesis de ser $ABC = 180°$.

4.° Cuando el punto de estacion pertenece á la circunferencia que puede pasar por los puntos dados.—Es el caso de indeterminacion ya citado (847), y que se verifica cuando se tiene $m = BCA$ y $n = BAC$

854. *Determinacion del punto* D (fig. 576; lám. 38) *por los ángulos que forman respectivamente con las rectas dadas* AB *y* BC *las tiradas desde él á los* A *y* C.—Sean x é y estos ángulos; se tendrá:

$$x + y = 360° - (B + m + n) \qquad [1].$$

Por otra parte, para calcular la diferencia de estos mismos ángulos se tienen las porporciones:

$$\text{sen.}\ m : \text{sen.}\ x :: k : DB;$$
$$\text{sen.}\ n : \text{sen.}\ y :: l : DB;$$

despejando en ellas DB é igualando los valores, resulta

$$\frac{k\ \text{sen.}\ x}{\text{sen.}\ m} = \frac{l\ \text{sen.}\ y}{\text{sen.}\ n},$$

y dividiendo ambos miembros por l,

$$\frac{k\ \text{sen.}\ x}{l\ \text{sen.}\ m} = \frac{\text{sen.}\ y}{\text{sen.}\ n} \qquad [2];$$

haciendo $\dfrac{k\ \text{sen.}\ n}{\text{sen.}\ m} = p$ [3], despejando k en esta ecuacion, sustituyendo su valor en la [2], ejecutando las operaciones indicadas en el primer miembro, suprimiendo el factor comun sen. m, y multiplicando despues ambos miembros por sen. n, se obtiene por último

$$\frac{l}{p} = \frac{\text{sen.}\ x}{\text{sen.}\ y}.$$

De esta ecuacion resulta (Trig.—20),

$$\frac{l+p}{l-p} = \frac{\text{sen.}\ x + \text{sen.}\ y}{\text{sen.}\ x - \text{sen.}\ y} = \frac{\text{tg.}\ \dfrac{x+y}{2}}{\text{tg.}\ \dfrac{x-y}{2}};$$

de la cual se deduce

$$\text{tg.}\ \frac{x-y}{2} = \frac{(l-p)\ \text{tg.}\ \dfrac{x+y}{2}}{l+p} \qquad [4],$$

que da el valor $x-y$. Conocida la suma y la diferencia de los ángulos, se deducen estos fácilmente (Alg.—105). Al resolver esta ecuacion debe observarse, que el ángulo x será mayor que el y cuando el segundo miembro de la misma resulte positivo; en el caso contrario será y mayor que x, y habrá que cambiar el signo en ambos miembros de la ecuacion antes de ejecutar los cálculos.

Ejemplo.—Sean : $k=2925,^{m}31$; $l=3126,^{m}04$; $B=130^\circ\ 40'$; $m=42^\circ\ 43'$; $n=40^\circ\ 17'$. Se tendrá desde luego [1]

$$x+y=146^\circ\ 20'.$$

Aplicando despues el cálculo logarítmico á la determinacion de p [3] se tendrá:

$$\begin{aligned} \log.\ 2925{,}31 &= 3.4661719 \\ +\log.\ \text{sen.}\ 40^\circ\ 17' &= 9.8106141\ ; \\ \hline \text{Suma} &= 13.2767860 \\ -\log.\ \text{sen.}\ 42^\circ\ 43' &= 9.8314688 \\ \hline \log.\ p &= 3.4453172\ ; \\ p &= 2788,^{m}16. \end{aligned}$$

Para hallar tg. $\dfrac{x-y}{2}$ por la fórmula [4], se tendrá:

$$\begin{aligned} \log\ 337{,}88 &= 2.5287625 \\ +\log.\ \text{tg.}\ 73^\circ 10' &= 10.5191989\ ; \\ \hline \text{Suma} &= 13.0479614 \\ -\log.\ 5914{,}20 &= 3.7718960 \\ \hline \log\ \text{tg.}\ \frac{x-y}{2} &= 9.2760654\ ; \\ \frac{x-y}{2} &= 10^\circ\ 41'\ 40''. \end{aligned}$$

Se tendrá entonces $x-y=21^\circ\ 23'\ 20''$. Conocida la suma y la diferencia de x é y, resultará $x=83^\circ\ 51'\ 40''$; $y=62^\circ\ 28'\ 20''$.

Pudiera tambien resolverse este problema por las tablas de líneas trigonométricas naturales, para lo cual hallaríamos: sen. $40^\circ\ 17'=0{,}6466$; sen. $42^\circ\ 43'=0{,}6784$; tg. $73^\circ\ 10'=3{,}3052$. Para tg. $\dfrac{x-y}{2}$ se hallaría 0,18883, que correspende á $10^\circ\ 42'$ próximamente.

885. *Caso excepcional.*—Cuando el punto de estacion d (fig. 577; lá-

mina 38) se halla en la circunferencia que pasa por los puntos dados, se tiene evidentemente (Geom.—Teor. 50)

$$b + m + n = 180°,$$

y el cuadrilátero *abcd* es inscriptible; se tendrá entonces [1]

$$x + y = 180°.$$

Por otra parte se tiene (18):

$$k = 2r \,.\, \text{sen} \,.\, m;$$
$$l = 2r \,.\, \text{sen} \,.\, n,$$

llamando r al rádio de la circunferencia circunscrita; sustituyendo el valor de k en la fórmula [3] se tiene

$$p = 2r \,.\, \text{sen} \,.\, n,$$

y por lo tanto $p = l$.

Teniendo en cuenta lo que acabamos de establecer, la fórmula [4] se convertirá en

$$\text{tg.} \frac{x - y}{2} = \frac{0}{2l} \times \text{tg.}\, 90° = 0 \times \infty \;;$$

símbolo de indeterminacion, pues ∞ se puede poner bajo la forma $\frac{m}{0}$, y entonces se tiene $0 \times \infty = 0 \times \frac{m}{0} = \frac{0}{0}$.

836. **Determinacion de la proyeccion de un triángulo, conocidos sus ángulos y las distancias de un punto interior á los vértices.**— Este problema puede ocurrir cuando pudiéndose hacer estacion en los tres vértices A, B y C (fig. 585; lám. 38), para hallar los valores de los ángulos, no se pueden medir los lados, ni se cree conveniente determinarlos como rectas inaccesibles: así como, por el contrario, se pueden medir las distancias OA, OB y OC á los tres vértices desde el punto O, en el cual no se puede colocar un instrumento en estacion, como sucedería si fuese un pico agudo de una peña, para medir los ángulos AOB, BOC y COA formados á su alrededor, y se quiere evitar la reduccion de los ángulos al centro de la estacion.

Constrúyase en el papel un triángulo $a'b'c'$ semejante al ABC, valiéndose de los tres ángulos conocidos. Supongamos el problema resuelto, es decir, que o sea la proyeccion de O; tirando las rectas oa', ob' y oc', tomando en ellas las oa, ob y oc, que representen reducidas á escala á las OA, OB y OC, y trazando las ab, bc y ac, el triángulo abc será el pedido en la hipótesis que admitimos. Donde vemos que o pertenece al lugar geométrico de los puntos cuyas distancias á los b' y c' están en relacion de OB : OC, pues OB : OC : : ob' : oc' : : ob ; oc. Tambien pertenecerá al lugar geométrico de los puntos cuyas distancias á los C y A estén en la razon de OC : OA, pues OC : OA : : oc' : oa' : : oc : oa; luego dicho punto o se hallará en la interseccion de estos dos lugares geométricos.

De aquí resulta la construccion siguiente: una vez trazado el triángulo $a'b'c'$, se tomarán sobre los lados de un ángulo cualquiera mnp una parte nr que represente á la BO reducida á escala, y otra ns que represente á la OC, y se trazará la rs; tómese despues nr' á arbitrio, y tírese $r's'$ paralela á rs. Haciendo centro en b' con el rádio nr' y en c' con el rádio ns', trácense dos arcos de círculo que se corten, y la interseccion i corresponderá al lugar geométrico de los puntos cuyas distancias están en la razon de OB : OC; determínense otros varios puntos de este lugar, y trácese por ellos una curva xx'; repítase la misma construccion sobre la $a'c'$ y trácese otra curva zz'; la interseccion de estas dos curvas dará el punto o que se busca. Únase este punto á los a', b' y c', tómense oa, ob y oc que sean las distancias OA, OB y OC reducidas á escala, y trazando las ab, ac y bc, que resultarán paralelas á las $a'b'$, $a'c'$ y $b'c'$, se tendrá el triángulo abc, proyeccion del ABC con arreglo á la escala elegida.

Cuando la naturaleza de los obstáculos permite medir dos ángulos OAB, OBA por ejemplo, puede hallarse por interseccion el punto o construyendo como antes el triángulo $a'b'c'$ semejante al ABC, y formando los ángulos $b'a'o$, $a'b'o$ iguales á los BAO, ABO; desde el punto de interseccion o se toman las magnitudes ob y oa que representen á BO y OA, y tirando la ba que deberá ser paralela á $b'a'$, y por a y b las ac y bc paralelas á $a'c'$ y $b'c'$, se tendrá el triángulo abc que se pedia. Como comprobacion se pudiera medir el ángulo OCB y formar su igual $b'c'o$, y la recta $c'o$ deberá pasar por el punto o.

Para resolver este problema por *doble interseccion*, se formará un triángulo $a'b'c'$ (fig. 586; lám. 38) semejante al ABC, como en los casos anteriores. Se construirán los ángulos $o'b'a'$ y $o'a'b'$ iguales á los OBA y OAB; y como la distancia OB es conocida, se tomará la $b'o$ que la represente en la escala, se tirará oa paralela á $o'a'$, y por a la ac paralela á la $a'c'$: el triángulo $ab'c$ será el pedido.

857. **Consideraciones acerca de los problemas resueltos y del levantamiento de los planos en general.**—Los procedimientos empleados en la resolucion de los problemas anteriores, determinan los puntos de una manera exacta bajo el punto de vista geométrico; pero en la práctica solo se obtienen resultados más ó menos aproximados, que aparte de los medios más ó menos á propósito de que se pueda disponer y del cuidado que se emplee en la ejecucion de las operaciones, depende

en general del mayor ó menor número de rectas medidas directamente y de los valores de los ángulos. De aquí la tendencia de los geómetras á medir el menor número posible de rectas, á fin de evitar la acumulacion de errores que produce la dificultad en la exactitud de su medida; reduciendo la cuestion en general á la medida de una sola línea, *base* de las operaciones, haciendo depender de ella por medio del cálculo los valores de las demás, que se obtienen así con mayor exactitud. Con respecto á los ángulos, debe tenerse presente que no deben ser menores que 30°, con objeto de evitar la determinacion de los puntos por la interseccion de rectas que formen ángulos muy agudos; pues esta interseccion no queda entonces bien marcada en las construcciones gráficas, resultando indecisa la posicion del punto de que se trata.

A pesar de esto, las dificultades que á cada paso se presentan en el terreno, obligan á separarse de estas indicaciones generales, combinando los distintos métodos expuestos y empleando diversos instrumentos.

858. Las mismas consideraciones pueden hacerse extensivas al levantamiento del plano de un polígono, tomando como base la distancia horizontal entre dos puntos préviamente elegidos, y en virtud de los cuales pueden determinarse otros varios por los métodos expuestos en este capítulo; estos últimos sirven á su vez para determinar la de nuevos puntos, continuando del mismo modo hasta conseguir la determinacion de todos aquellos que deban figurar en el plano. Todos los ángulos y los lados deben hallarse reducidos á su proyeccion horizontal, así como tambien deben estarlo al centro de la estacion los ángulos en cuyo vértice no pueda colocarse el instrumento.

859. Prévios estos antecedentes, y teniendo además presente cuanto hasta aquí llevamos dicho, pasaremos á ocuparnos de la determinacion de las proyecciones horizontales de los polígonos y de la construccion de sus figuras semejantes en el papel.

Las operaciones que se necesita ejecutar en el campo á fin de tomar los datos necesarios para obtener dichas proyecciones, se llaman *operaciones ó trabajos de campo*, y tambien *levantamiento de los planos*. Las que se ejecutan para la formacion en el papel de las figuras semejantes á las proyecciones horizontales de los polígonos, se llaman *operaciones ó trabajos de gabinete, ó construccion del plano*.

Para proceder con órden en el levantamiento y construccion de los planos de los terrenos, haremos una clasificacion que se refiere á su extension, dividiéndolos en terrenos de corta, de mediana y de mucha extension: se suele entender por terrenos de corta extension los que no pasan de 50 á 60 hectáreas, de mediana los que no exceden de 300, y de aquí en adelante se llaman de grande extension.

No debe creerse que esta division es absoluta, ni que pueden fijarse sus límites con exactitud; muchas veces la adopcion de los medios empleados para el levantamiento de un plano, depende de su importancia y de la naturaleza del terreno, y los procedimientos empleados para los terrenos de mucha extension se aplican á los que la tienen mediana y aun á los de corta extension.

En el levantamiento y construccion de los planos nos ocuparemos:

1.º De los de terrenos de corta extension empleando las escuadras inclusas las de reflexion, y la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.

2.º De los de terrenos de mediana extension, haciendo uso de la brújula, de todos los demás goniómetros, inclusos los de reflexion y de la plancheta.

3.º De los de terrenos de grande extension ó de la *triangulacion*, por ser la base de las operaciones la resolucion de una red de triángulos; para la que solo se emplean los goniómetros de precision.

Una vez hallada la proyeccion horizontal de todo polígono, cualquiera que sea su extension comprendida en los límites topográficos (154), trataremos de la medida de las superficies; no solo valiéndonos de los medios que suministran la Geometría y el cálculo trigonométrico, sino tambien haciendo uso de los instrumentos conocidos con el nombre de *planímetros*; con lo cual habremos llenado el objeto que se propone la *Planimetría*.

Como además de las proyecciones de los distintos puntos del terreno se necesita el conocimiento de sus cotas correspondientes, de lo cual se ocupa la nivelacion, despues de estudiada esta, pasaremos á exponer la *representacion completa del terreno*, que es el verdadero objeto de la *Topografía*. Completaremos, por último, el estudio de la Topografía, exponiendo el método de la trasformacion de las figuras trazadas en un plano en otras más adecuadas al cálculo de sus superficies, si es que se quiere adoptar este medio sobre los demás que tengamos ya explicados, y de la *copia* y *reduccion* de los planos á otros en mayor ó menor escala, valiéndonos, ya de los medios *gráficos* ó *geométricos*, ya de los instrumentos llamados *de reduccion*, y todo como *complemento de las operaciones de gabinete*. Por último, como cuestiones necesarias al Topógrafo y al Agrimensor expondremos la division de los polígonos en el papel para referirla despues á los del terreno, así como de los *deslindes* y *apeos* de los terrenos y de otras cuestiones que se ofrecen en las operaciones de Topografía y Agrimensura.

CAPITULO XVI.

Levantamiento de los planos de terrenos de corta extension.

Idea de las operaciones que constituyen el levantamiento de un plano.—Generalidades.—Reconocimiento del terreno.—Canevas topográfico.—Cróquis ó bosquejo.—Eleccion de escalas.—Registros.—Determinacion del contorno de los terrenos.—Con la escuadra.—Por alineaciones perpendiculares y oblícuas de 45 ó de 135º.—Terrenos accesibles en su interior.—Contornos rectilíneos.—Primer método.—Por el establecimiento de un solo eje.—Segundo método.—Por el establecimiento de varios ejes.—Contornos rectilíneos compuestos de muchos lados.—Contornos curvilíneos.—Terrenos inaccesibles en su interior.—Establecimiento de varios ejes.—Terrenos inaccesibles en su interior y en su exterior.—Terrenos en parte accesibles y en parte inaccesibles.—Por el método de rodeo.—Por el método de interseccion.—Por radiacion.—Con la cuerda ó cadena, piquetes y jalones.—Por alineaciones oblícuas de una inclinacion cualquiera.—Por rodeo.—Por interseccion.—Por doble interseccion.—Por radiacion.—Contornos curvilíneos.—Observaciones acerca de las comprobaciones del contorno.—Levantamiento del plano de los objetos interiores de un polígono.—Lagunas.—Pantanos.—Rios.—Caminos.—Arroyos.—Veredas.—Edificios.—Puentes.—Pontones.—Alcantarillas.—Tajeas.—Situacion de los objetos interiores ó detalles en el plano.—Levantamiento del plano de varios terrenos contiguos ó adyacentes.—Parcelacion.—Con la escuadra.—Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.—Levantamiento del plano de una poblacion pequeña.—Con la escuadra.—Con la cuerda ó cadena, piquetes y jalones.—Construccion del plano.—Observaciones generales.

860. **Idea de las operacionos que constituyen el levantamiento de un plano.**—Habiendo enseñado á medir toda clase de rectas y de ángulos, y el uso de todos los instrumentos, poco habría que decir en el levantamiento de un plano si los terrenos que el geómetra tiene que determinar fuesen, como en la geometría elemental, polígonos terminados por líneas rectas y situados sus vértices en un solo plano, sin presentar ningun otro género de dificultades. Es cierto que algunas veces, aunque

son las menos, se presenta llano el terreno, y que tambien ocurre tener que considerar figuras rectilíneas regulares ó irregulares; pero consiste en que entonces ha intervenido la mano del hombre, como sucede en la construccion de los estanques, cercas de las propiedades y plantas de los edificios y jardines La naturaleza, caprichosa en las formas de la superficie terrestre, no presenta esta regularidad, afectando por el contrario una asombrosa variedad de figuras en todos los campos y terrenos; siendo por lo tanto sus contornos líneas tortuosas compuestas de todo género de curvaturas y zig-zacs, aunque se encuentren algunos lados que se aproximen más ó menos á la línea recta. Esto en cuanto al contorno; pero el geómetra tiene que luchar con nuevas dificultades debidas á los accidentes de los terrenos, unas veces accesibles, ó pudiéndose recorrer en todos sentidos, pero cuyas desigualdades hacen que unos puntos sean ó no visibles desde otros, y otras acompañando á este último inconveniente el de ser completamente inaccesibles por hallarse cercados, estar cubiertos de bosque, ó ser extensas lagunas ó pantanos; y por último, pueden ser en parte accesibles y en parte inaccesibles, resultando á cada paso de aquí, el empleo de distintos procedimientos para lograr satisfacer con la eleccion del más á propósito, las dos condiciones esenciales de pronta y más exacta ejecucion.

Además, no es solo la determinacion del contorno de un polígono lo que ocupa la atencion del geómetra, sino tambien aquella multitud de objetos diseminados sin órden que se hallan en su interior, como son los arroyos, los caminos, los árboles, los edificios y jardines, bosques, plantaciones y manantiales, cada uno de los cuales necesita ser determinado con separacion y situado despues en el plano, guardando con los demás la misma relacion de posicion que tienen en el terreno, y constituyendo así lo que se llama la determinacion de los detalles interiores y su colocacion en el plano

Nos ocuparemos por lo tanto, con el mejor órden posible, de la consideracion de tantas y tan diversas circunstancias.

861. **Generalidades.—Reconocimiento del terreno.**—La primera operacion que siempre debe practicarse, es elegir el punto más elevado, sea una torre, un cerro ú otro objeto cualquiera, desde el cual se descubra mejor la extension del terreno que se quiere representar, para formarse de él una idea lo más exacta posible, fijando la atencion en todos sus accidentes, así como en los diversos objetos que comprende, y con especialidad en la direccion de los caminos, rios, canales arroyos, etc., debiendo además valerse de personas prácticas del país que le puedan suministrar todos los datos necesarios, como son entre otros, los nombres de las distintas localidades, eligiendo sucesivamente nuevos puntos, desde los cuales se vayan descubriendo los objetos restantes En el caso de no ser posible hallar estos puntos, desde los cuales pueda ponerse en práctica este exámen, ó de que la porcion que se ha de representar sea muy reducida, una tierra de labor por ejemplo, se reconocerá el terreno en

todos sentidos, con el objeto de determinar en uno y otro caso, qué método es el más á propósito para obtener aquellos datos que puedan despues servir en la construccion sobre el papel, para determinar con más exactitud y claridad y con menor trabajo, la verdadera posicion de los puntos más principales, tanto del contorno como los interiores y exteriores al polígono que deban tambien ser representados. El resultado de este reconocimiento debe llenar las condiciones siguientes:

1.ª La eleccion del terreno más llano é igual para el establecimiento de la base ó bases que se necesiten medir; que deben ser, si es posible, en sentido de la mayor longitud.

2.ª El que sean visibles desde dichas líneas elegidas el mayor número de puntos notables.

3.ª Que el número de rectas que se establezcan para hacer depender de ellas las demás sea el menor posible, á fin de evitar los errores que producen las medidas.

862. **Canevas topográfico.**—Una vez reconocido el terreno, se colocan jalones ó banderolas en aquellos puntos que no están determinados por otros objetos, como árboles, casas, torres .... y valiéndose del instrumento ó instrumentos de que quiera hacerse uso en la operacion, se procede á establecer aquel conjunto de rectas, convenientemente dispuestas y determinadas con toda la posible exactitud, por ser las bases principales de todos los trabajos sucesivos, que el geómetra haya juzgado más á propósito, para que formando entre sí una red ó una especie de entramado, puedan relacionarse con ellas los diversos puntos del terreno, y sirvan para la más exacta reproduccion en el papel de todas las partes que le componen. Este sistema de rectas ha recibido el nombre de *canevas topográfico*.

Cuando se han de medir ángulos cuyos vértices sean los puntos elegidos, no convendrá en muchos casos que éstos sean de los objetos que se hallan en el terreno, para evitar la reduccion de los ángulos al centro de la estacion.

En los terrenos de grande extension ó en la *triangulacion*, se expondrán todas las circunstancias que deben tenerse presentes en la formacion del *canevas trigonométrico*.

863. **Croquis ó bosquejo.**—A medida que se van estableciendo en el terreno las rectas que componen el canevas, deben irse figurando y disponiendo *á ojo* de una manera análoga en un papel, así como dibujando con el mayor cuidado y en las mismas relaciones de posicion que guardan entre sí todos los objetos y accidentes del terreno y la configuracion de su contorno, anotando en cada una de las líneas y ángulos que se midan los valores obtenidos. El modo de colocar estos números en el croquis y el de representar las diferentes rectas para distinguir unas de otras, será objeto de las indicaciones que haremos en cada caso particular para la mejor inteligencia.

No hay un sistema fijo en la formacion del croquis ó borrador para la representacion de las distintas líneas que le constituyen; resultando de aquí con frecuencia, que no pueda entenderle otro que el que le ha formado, y nosotros haremos uso de aquellos medios que creamos más convenientes y que se hallen en armonía con los sistemas de representacion más generalizados Es de la mayor importancia poner todo el esmero posible en su buena ejecucion; pues figurando con exactitud, así el contorno del terreno como el de los demás objetos, caminos, arroyos, etc., que han de formar parte del plano, y haciendo con claridad las correspondientes anotaciones, será tanto más fácil la reproduccion verdadera del terreno en el papel, cuanto más esmero se haya puesto en la claridad y precision de la colocación de las líneas en el croquis, evitándose de este modo tener que volver de nuevo al campo á rectificar y aclarar las dudas que de otro modo ocurrirían á cada paso en la construccion. Por estas razones, creemos que no es conveniente trazar desde luego á ojo todo el plano del terreno que se trata de determinar, indicando desde luego los accidentes de su contorno y de todos los demás objetos que le constituyen, para despues ir haciendo las correspondientes anotaciones, pues es tarea inútil en los terrenos de alguna extension; salvo á trazar desde luego el sistema de rectas que han de constituir el canevas, deben dibujarse los diferentes objetos y la disposicion y figura de todas las partes del terreno, á medida que se van presentando al relacionarlas con las líneas de aquel.

864. **Eleccion de escalas**.—Entre las diferentes escalas que pueden adoptarse, suele elegirse á arbitrio la que permita incluir en un papel de tamaño regular el plano que ha de contener (195), ó bien se procura que sea lo mayor posible para la mayor exactitud, á excepcion de los casos en que está determinada por la Administrarion, segun el ramo á que el trabajo pertenezca

Una vez delineado el canevas, es decir, puesto el croquis en limpio, formando las líneas los mismos ángulos que en el terreno, despues de sujetas á la escala elegida, y marcada la posicion de todos los objetos y puntos principales con signos establecidos al intento, ó escribiendo sus nombres, ó bien con números á que estos correspondan, en un *estado* ó *tabla* formada al intento, se procede á dibujar el plano con arreglo á los principios que se establecen en los tratados de dibujo topográfico, de los que daremos alguna idea, para que con arreglo á los datos obtenidos en el campo y á las figuras y contornos sacados en el cróquis, se pueda hacer el dibujo de las montañas, rios, puentes, plantas de edificios y demás, ó bien señalando todos estos objetos con los signos topográficos convencionales que se emplean para su representacion, y de los cuales pondremos tambien el *cuadro* más adelante.

865. **Registros**.—Son unos estados compuestos de varias columnas, en las que se inscriben los valores de los lados y de los ángulos, la designacion de los puntos de estacion y demás datos y observaciones que sea necesario tomar en el campo, para reproducir en el papel el polígono

del terreno Deben hallarse dispuestos con claridad y de modo que conduzcan sin dificultad á la buena y más exacta construccion En los casos complicados un solo registro presentaria bastante confusion, por lo que se llevan con separacion registros del canevas, del contorno, de los detalles, etc , que deben hallarse sin embargo relacionados entre sí.

Los registros sustituyen al croquis, y cada geómetra sigue el medio que le parece más conveniente. Ambos son buenos, si el geómetra acompaña á su práctica en cualquiera de ellos, el órden constante en el modo de inscribir los datos que juzgue mejor para no confundirse en los trabajos de gabinete; y hay geómetras que adoptan ambos, disponiendo los cuadernos ó *libretas de campo*, dejando en blanco las llamas de la izquierda para trazar en ellas los croquis y rayando en columnas adecuadas á cada caso las de la derecha para la formacion de los registros; pudiendo así comprobarse y ayudarse ambas indicaciones, proporcionando mayor seguridad en la construccion del plano. Creemos este método preferible pues todo es poco cuando se trata de asegurar el buen éxito de una operacion; y aunque largo, no lo es tanto ni tan costoso, como cuando las dudas dan lugar á volver de nuevo al terreno, para tomar otra vez los mismos datos.

Como los estados ó registros varían segun la naturaleza de la operacion, presentaremos sus modelos á medida que vayan siendo necesarios

Pasemos ya al levantamiento de los planos de corta extension con las escuadras y con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones

866. **Determinacion del contorno de los terrenos —Con la escuadra —Por alineaciones perpendiculares y oblícuas de 45 ó de 135º.—Terrenos accesibles en su interior.—Contornos rectilíneos** —Consideraremos en primer lugar, el caso en que la figura del terreno es un polígono rectilíneo, compuesto de un corto número de rectas. Los accidentes del terreno y la naturaleza de los obstáculos que se pueden presentar, dan lugar en la aplicacion del método por alineaciones perpendiculares, que es el más seguido con la escuadra, á los diversos procedimientos comprendidos en los métodos que exponemos á continuacion

867. **Primer método —Por el establecimiento de un solo eje**.— Sea ABCDEFG (fig. 587; lám 39) el polígono del terreno y al mismo tiempo su croquis, supuesto que todas sus líneas y las que hemos de establecer se han de hallar respectivamente situadas en ambos, por lo que siempre consideraremos que las figuras representan ambas cosas. Se verá si es posible trazar una diagonal ó directriz AE, desde la cual sean visibles todos los vértices del polígono, y que reuna tambien la condicion de ser la mayor, cuyo caso se presenta cuando el terreno es llano y no hay obstáculos, pudiéndose operar en todos sentidos ó en el mayor número de ellos por no estar sembrado ni haber otra circunstancia que lo impida. Sobre dicha línea AE tomada como eje de las abscisas, se bajarán las ordenadas BH, GY, CJ, FL y DM que se medirán con exactitud,

anotando los números que resulten como se vé en el croquis, en sentido perpendicular á las longitudes respectivas. Las abscisas que se deben medir son las AH, AY, AJ ... á partir todas del punto A (693); pero como sería penoso empezar siempre de nuevo desde dicho punto, lo que se hace es determinar el valor de la AH, y continuar midiendo sin levantar la cadena hasta tener del mismo modo la AY, despues la AJ, y así sucesivamente, hasta llegar al punto E. Los números que indican los valores de las abscisas se inscriben en el croquis en sentido de la directriz y próximos al pié de las ordenadas á que corresponden, y al mismo lado de la directriz que se halla la ordenada correspondiente. Señalaremos los ejes con líneas de trazos, y las ordenadas con líneas de puntos. Como comprobacion se mide despues otra vez sin detenerse toda la AE, para ver si resulta la medida indicada por el último número, ó se diferencia en una cantidad insignificante y sujeta á los límites de apreciacion; pues en el caso contrario debe procederse de nuevo á las operaciones. Se cuidará asimismo de tomar en el punto A el rumbo de la AE para orientar el plano. Por último, las diferencias AY—AH, AJ—AY ... dan las distancias HY, YJ ... entre los piés de las ordenadas en caso de ser necesarias. Para que la operacion sea más expedita, mientras unos auxiliares del geómetra miden las abscisas y levantan y trazan las perpendiculares, otros se ocupan de medir estas con todo el cuidado posible.

Para mayor sencillez y mejor comprension del croquis, consideraremos siempre como positivas á todas las abscisas AH, AY ... tomadas desde A á E en sentido de la marcha, por lo que no hay necesidad de acompañarlas de signo alguno. Las ordenadas GY, FL situadas á la derecha las llamaremos positivas, señalándolas con el signo +, y las BH, CJ y DM tomadas á la izquierda, serán negativas y se marcarán con el signo —. Este método tiene la ventaja, de que los signos de las ordenadas indican en el croquis el sentido de la marcha en la operacion; pues mirando la figura se conoce que para levantar el plano se ha caminado desde A hácia E. Si al contrario se hubieran empezado las operaciones en el punto E para dirigirse al A, las abscisas serian EM, EL, EJ... siempre positivas, las ordenadas positivas serian las DM, CJ y BH, y las negativas las FL y GY, al contrario que en el primer caso. En otra clase de operaciones en que la marcha se sigue por el contorno, se puede emprender en cualquiera de los cuatro sentidos AGFE, ABCD, EFGA y EDCB, tomando por punto de partida los vértices A y E, y en general, empezando en cualquier punto del polígono y siguiendo la marcha en cualquiera de los sentidos expuestos; pero á fin de evitar confusion, nosotros supondremos siempre que se camina desde un punto elegido A, y en el sentido AGFE.

868. *Construccion del plano.*—Para construir, valiéndonos del croquis, la figura semejante en el papel, se trazará una línea *ae* de la longitud total con arreglo á la escala elegida, se tomarán en ella las *ah*, *ai*, *aj*... que representen á las AH, AI, AJ ... y levantando perpendiculares en los

puntos *h, i, j*.... en el sentido que indica el croquis, se tomarán en ellas las longitudes *bh, ig, cj*.... que representen á las BH, IG, CJ.... y uniendo los extremos *a, b, c*.... por medio de las rectas *ab, bc, cd*.... se tendrá el polígono *abcdefg* semejante al ABCDEFG por hallarse compuesto de figuras semejantes y semejantemente dispuestas á las del terreno. Uniendo tambien entre sí de tres en tres de una manera análoga los vértices del polígono del terreno y del construido en el papel, se demuestra fácilmente que son semejantes, por hallarse compuestos del mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos. Se trazará por último en el punto *a* la direccion de la aguja con arreglo al rumbo de la AE, para la colocacion de la figura (197) cuando se dibuje en limpio; con lo que quedarán concluidas las operaciones que constituyen el levantamiento del plano del contorno del polígono.

En el método que acabamos de exponer, el error de medicion ó construccion cometido en una abscisa *ah*, aunque acumulado al de la ordenada *bh*, si tambien ha tenido lugar, da por resultado la colocacion de *b* en *b'*; pero este error es parcial y no influye en los demás vértices: debiendo tenerse presente que siendo casi imposible el evitar totalmente los errores, el geómetra debe siempre procurar que sean parciales los que pueden resultar de los medios que elija para el levantamiento del plano.

869. La série de líneas que constituyen la disectriz y las ordenadas que fijan los vértices del polígono, forman en este caso lo que hemos llamado el *canevas topográfico*, que ha sido despues reproducido en el papel para la construccion del polígono, y que si se quiere, puede dejarse de trasladar cuando se pone el plano en limpio.

870. *Registro*.—Se formará como el que presentamos á continuacion, compuesto de cinco columnas para consignar en ellas los datos adquiridos en el campo, con arreglo á lo que hemos dicho (865).

Registro del contorno del polígono ABCDEFG.

RUMBO DE LA BASE AE = 257° 30'.

Abscisas á partir del punto A 1	Ordenadas. 2	Vértices á que corresponden 3	Designacion de los vértices. 4	Observaciones. 5
0	0	A	»	
19,5	— 27,6	B	Arbol.	
41 0	+ 31,7	G	Jalon.	
62,0	— 38,0	C	»	
85,4	+ 24,0	F	»	
95,3	— 23,4	D	»	
107,0	0	E	»	

En la primera columna se colocan las abscisas á partir del punto A: en la segunda las ordenadas á la izquierda y derecha de la directriz AE con el signo que les corresponde, siendo *cero* la abscisa y la ordenada del punto de partida del eje AE y tambien la ordenada de su extremo E: en la tercera los vértices del polígono á que pertenecen: en la cuarta los nombres de los objetos que constituyen dichos vértices, y en la quinta aquellas observaciones que merezcan consignarse para que concurran á evitar las dudas que por cualquier causa pudieran presentarse despues en la construccion; así como las noticias ó circunstancias que se quiera tener presentes por su interés, sean de localidad, de situacion, calidad del terreno ú otras cualesquiera.

871 Para la construccion en el papel valiéndose del registro, no habrá más que trazar una línea indefinida, y poniendo en contacto con ella la escala elegida de boj ó de marfil, se marcarán con un lápiz cuya punta sea muy fina, el punto de partida *a* y los demás que indiquen los valores consignados en la primera columna del registro: se levantarán perpendiculares á la derecha de la *ae* en los puntos *i* y *l*, dándoles los valores $31,^{m}7$ y $24,^{m}0$ que en la segunda columna tienen el signo +; se levantarán igualmente perpendiculares á la izquierda de la *ae* en los puntos *h*, *j* y *m*, tomando en ellas con la escala los valores $27,^{m}6$, $38,^{m}0$ y $23,^{m}4$ que se hallan en la segunda columna con el signo —: y uniendo con rectas los extremos de la directriz *ae* y los de las ordenadas, se tendrá la figura *abcdefg* semejante á la del terreno, en la cual se marcará el rumbo de la *ae*, para su colocacion en el papel cuando se dibuje en limpio.

872. *Replanteo en el terreno.*—Recíprocamente, para trazar el polígono en el terreno, dada su proyeccion *abcdefg*, y colocados en el punto A que se sabe ser el de partida, se trazará una recta al punto E, si este se halla señalado, y en el caso contrario se traza desde A una recta indefinida cuyo rumbo sea el que marque el croquis ó registro: se medirán con la cadena las abscisas consignadas en él, y levantando perpendiculares con la escuadra en sus extremos y en el sentido que se halle indicado, se tomarán en ella las longitudes que deben tener, colocando jalones ó piquetes que señalen los vértices, ó introduciendo estacas en el terreno si se quieren tener señalados para otras operaciones. Cuando el extremo de alguna ordenada es un objeto del terreno, como un árbol, la esquina de un edificio, etc., servirá de comprobacion ver que efectivamente termina en él dicha ordenada.

873. *Casos particularès que suelen presentarse.*—Si el terreno es desigual y la línea mayor AE (fig. 588; lám. 39) no llena la condicion de que todos los demás vértices sean visibles desde ella, se elegirá otra diagonal AD que la satisfaga, como sucederá si la parte ABCD del terreno descendiese mucho, pues colocados en AE pudiera suceder que no se percibiesen los puntos B y C, pero que se descubriesen desde la línea AD, así como los G, F y E que se hallan en la parte de terreno que suponemos más igual.

Si no se halla una diagonal á propósito, se trazará otra línea AM que corte á uno de los lados del polígono, como en la fig. 589 (lám. 39), ó á dos de ellos, como la MN en la fig. 590 (lám. 39). Puede suceder tambien que desde uno de los lados del polígono, prolongado si es necesario, sea desde donde se descubran mejor los vértices, ó desde una línea elegida fuera, como indican las figs. 591 y 592 (lám. 39). En todos estos casos las línea de trazos y de puntos indican las construcciones en las figuras, las cuales sirven al mismo tiempo de croquis; y en los dos últimos en que las operaciones se han llevado fuera del contorno del polígono, se supone que el terreno es accesible en su exterior, y que tambien es más cómoda para la medida la disposicion de las perpendiculares.

874. Vemos, pues, que la eleccion de la directriz ha de ser por precision arbitraria; dependiendo de las condiciones del terreno, que deben ser la guia en estas operaciones. Supongamos, por ejemplo, que se trate de levantar el plano del cuadrilátero ABCD (fig. 593; lám. 39), y que lo que menos inconvenientes ofrezca sea la medida de una recta BE perpendicular al lado AB tomado como eje: despues de establecida esta perpendicular, se medirán AB y BF; se bajará sobre la BF prolongada, la perpendicular CE que tambien se medirá, así como las rectas FE y FD, con lo cual se tendrán los datos necesarios para la construccion en el papel.

Para esto, se trazará la línea *ab* que represente en la escala á la AB, se levantará en *b* la perpendicular *bh*, y tomando *bf* y *fe* que equivalgan á BF y FE, se levantará en *e* la perpendicular *ec* que represente á EC; con lo que fijos en el papel los puntos *b*, *c* y *f*, se trazarán las rectas *bc* y *cf* prolongando esta última en una cantidad *df* que represente á DF; se tirará por último la recta *ad*, y se tendrá construido el cuadrilátero *abcd* semejante al ABCD. Como comprobacion, se puede bajar en el terreno desde el punto D la perpendicular DG sobre la BE, medir BG y DG y construir *dg* en el papel, la cual deberá pasar por *d* si la operacion se ha hecho con exactitud.

875. A veces se hallan tan próximos dos ó más vértices, como los C, D y E (fig. 594; lám. 39), que conviene mejor referir á la ordenada de uno de ellos D los demás C y E, evitándose de este modo la medida de las ordenadas EE′ y CC′, que en general son más largas que las rectas DM y ME que fijan el punto E y las DN y CN que corresponden al punto C; cuyo procedimiento hay que adoptar con precision cuando la desigualdad del terreno ó algun obstáculo dificulta la medida de una ordenada EE′, sin que por eso haya inconveniente en considerar esta clase de polígonos comprendidos en la clasificacion que estamos estudiando de polígonos accesibles en su interior.

En la construccion por el croquis no hay dificultad, y cuando se lleva registro se consigna esta circunstancia en la columna de observaciones. Pero es más claro, aunque más largo, llevar un registro auxiliar de las ordenadas que se hallen en este caso, el cual nos dará el medio de construir los vértices del polígono referidos á ellas y que no se hallan en el registro principal; debemos advertir, sin embargo, que las abscisas siempre positivas, se cuentan desde los vértices al eje AG, es decir, de D á P y de L á R, siendo por lo tanto positivas las ordenadas CN y SY y negativa la EM.

Véase á continuacion el registro auxiliar que da los tres vértices E, C, Y, los cuales no se hallarían en el registro principal.

Ordenadas tomadas por ejes 1	Abscisas 2	Ordenadas. 3	Vértices 4
— 38,2	7,0 13,5	— 11,0 + 10,5	E C
+ 32,5	11,4	+ 9,8	Y

876. Igualmente puede suceder que el obstáculo impida la medida de las abscisas en sentido de la directriz AD (fig. 595; lám. 39) desde la cual se suponen visibles los demás vértices del polígono, en cuyo caso despues de trazada la AY y prolongada segun ND, la medida de la AY más la de la LS dará la abscisa AR, que se anotará en el croquis ó en el registro, y la suma de LY con SE será el valor de la ordenada correspondiente RE. Del mismo modo AR + SM + NP será el de la abscisa AP.

877. Lo dicho basta para que se comprenda ahora cuán importante y delicada es la operacion preliminar del reconocimiento del terreno, pues ha de dar por resultado la adopcion inmediata de aquellos medios más propios y preferibles, atendida la naturaleza del caso, para obtener pronta y ventajosamente los datos que sirvan despues para la ejecucion de las operaciones de gabinete, sin presentar dudas ni dificultades.

878. **Segundo método.—Por el establecimiento de varios ejes.**— Supongamos ahora, que por los muchos accidentes del terreno no baste el establecimiento de una sola directriz; bien por presentarse siempre algun punto que no sea visible desde ella en ninguna de las posiciones en que pueda establecerse, aunque se recurra al medio de empalmar los jalones y banderolas, ó bien por otra causa cualquiera.

En este caso, á partir de uno de los vértices A (fig. 596; lám. 39) del polígono, se establecerán alineaciones en sentido de las diagonales AC, AD y AE, las que dividirán al polígono en triángulos. Sobre estas diagonales se bajarán perpendiculares desde los otros vértices, como se ve en la figura, procurando que la primera diagonal sea base de dos triángulos; se medirán las ordenadas y las correspondientes abscisas, y se anotarán las medidas en el croquis y en un registro como el que insertamos á continuacion.

Registro para la construccion del polígono ABCDEF.

RUMBO DE LA PRIMERA DIAGONAL AC = 241° 15′.

Ejes. 1	Abscisas.	Ordenadas 3	Vértices 4	Designacion. 5	Observaciones. 6
AC	0 87,5 205,0 218,6	0 + 56,3 — 106,5 0	A B D C		
AD	155,0	— 92,4	E		
AE	98,2	— 41,3	F		

Para construir el polígono en el papel pueden consultarse á la vez el croquis y el registro, que deben hallarse en la libreta, como hemos indicado (865). Se trazará una primera recta indefinida *ac* que forme con otra trazada para que sirva de meridiana, el rumbo que se obtuvo en el terreno: á partir del punto *a* que representa al A, se toman con la escala las distancias *ag* y *ah* de 87,m5 y 205,m0, y se levantan las perpendiculares *bg* y *dh* de 56,m3 y 106,m5 en el sentido que indican los signos, marcando el vértice C por medio de la abscisa 218,m6; se trazará despues la línea *ad*, que será la segunda diagonal, y tomando la parte *ai* de 155,m0 y levantando la perpendicular *ei* de 92,m4, se tendrá el punto *e* y así sucesivamente.

879. Supongamos ahora que no sea conveniente establecer los ejes en sentido de las diagonales, y que sea más ventajoso colocarlos en otra direccion, como se ve en la fig. 597 (lám. 40), en la cual los ejes cortan á los lados en los puntos S, O y T. Se seguirá una marcha análoga: advirtiendo solamente que se han de tomar además las abscisas y ordenadas correspondientes á los puntos de interseccion de los lados con los ejes, á fin de poder fijar estos en la construccion, colocando en el registro otra columna encabezada con la notacion de *puntos de los ejes*, para colocar en ella enfrente de las ordenadas correspondientes las letras con que se les quiera designar.

La construccion de este polígono en el papel es tan sencilla como la del anterior.

880. *Replanteos*.—Los replanteos de los polígonos en el terreno, por

este segundo método de considerar varios ejes, se conciben fácilmente en virtud de los conocimientos que ya se tienen.

881. **Contornos rectilíneos de muchos lados** —Pasemos ya al caso en que el contorno del polígono siendo rectilíneo, se halla compuesto de un gran número de rectas.—Sea, por ejemplo, el que representa la figura 598 (lám 40). Se empezará por inscribir en él otro polígono ABCDEFGHY, que estando compuesto de pocas rectas se pueda determinar por aquel de los métodos expuestos que sea más conveniente; y como este polígono es arbitrario, deben elegirse para vértices puntos que lo sean tambien del polígono dado, como C, H.... ó pertenezcan á sus lados, como los B, Y.... reuniendo todos ellos la circunstancia de ser visibles desde un solo eje AE establecido en sentido de la mayor alineacion que pueda trazarse. Este polígono inscrito se llama *polígono principal*, y se procura determinarle con toda precision, como se ha dicho (867), formando cuidadosamente su croquis y registro, por ser la base de las operaciones sucesivas.

Tomando despues por nuevos ejes los lados AB, BC, CD... del polígono principal, que se llaman entonces *ejes secundarios*, para distinguirlos del AE, que se llama *eje principal*, y bajando sobre ellos perpendiculares desde todos los otros vértices del polígono dado, se concibe que la série de líneas que constituyen las del polígono principal con las perpendiculares bajadas sobre sus lados, formarán esa especie de entramado, propio para fijar y relacionar entre sí los puntos todos del contorno, y á que damos, como hemos dicho, el nombre de canevas topográfico.

Además del croquis, se llevará un registro del polígono principal, como se ha explicado (870), y otro registro auxiliar llamado del contorno, como se ve á continuacion: en el cual, así como en la figura, numeramos para más comodidad los vértices del polígono dado, que no forman parte del principal del canevas.

Registro del contorno del terreno referido al del polígono principal ABCDEFGHY del canevas.

Lados del polígono principal, tomados por ejes 1	Abscisas. 2	Ordenadas. 3	Vértices. 4	Nombres. 5	Observaciones. 6
AB	0,0 12,7 40,5	0,0 + 10,2 0,0	A 1 B		
BC	10,0 30,3	+ 10,8 0,0	2 C		
CD	16,4 31,7	+ 6,6 0,0	3 D		
DE	11 8 32,0 43,0 61,5	+ 9,3 0,0 + 9 0 0,0	4 5 6 E		
....	....	....	....	....	....

Este registro sustituye al auxiliar que explicamos (875) cuando para un corto número de puntos se tomaban algunas ordenadas por ejes; resultando en la figura, que se consideran como positivas todas las ordenadas sobre los lados del polígono principal.

La marcha de las operaciones para la construccion del plano es enteramente la misma que se sigue en el terreno; pues se empezará como ya sabemos por la construccion del polígono principal, y despues por medio del croquis y del registro del contorno se irá construyendo este con la mayor facilidad partiendo del punto A y siguiendo en el sentido ABCD.... hasta volver de nuevo al punto de partida

Esta manera de proceder presenta muchas ventajas, pues evita el inconveniente de medir tantas perpendiculares como sería necesario bajar desde todos los vértices del polígono dado, siempre mucho más largas que las bajadas sobre los lados del polígono principal. Por otra parte, muchos vértices podrían no ser visibles desde la AE, y habría que adoptar el medio de establecer muchos ejes á partir de un solo punto; medio más complicado que el actual, en que se toman por tales los lados consecutivos del polígono principal, los cuales, como su disposicion es arbitraria, siempre se podrán colocar de modo que vayan siendo visibles desde ellos todos los puntos del contorno del polígono en cuestion. Además, en la construccion del plano se habrá conseguido que los errores, inevitables en la mayor parte de las ocasiones, sean parciales, tanto los que se cometan en el polígono principal, como en el contorno del propuesto. Pueden conocerse estos errores comprobando el mayor número de puntos, si algunos vértices del primero de estos polígonos se hallan situados en los lados del segundo, como en la figura actual; pues al hacer la construccion y unir los extremos de todas las ordenadas, los puntos 1, B y 2 deben hallarse en línea recta, así como los 6, E y 7, del mismo modo que cada tres puntos que reunan la misma circunstancia.

Servirá igualmente de comprobacion, cuando se miden en el terreno las abscisas de cada lado como por ejemplo las del DE, y se ha obtenido la del último punto 6, concluir ya de medirle y anotar este valor en el registro del contorno, cuya ordenada será *cero;* lo cual tiene por objeto el que al hacer la construccion en el papel, se vea si el valor que dá la DE tomada en la escala, es igual á la medida total obtenida en el terreno. Se observará en el registro que la última abscisa de cada lado es la longitud del mismo desde el vértice del polígono principal; siendo *cero* las ordenadas correspondientes. El punto 5 tiene tambien ordenada *cero*.

882. No es precision absoluta que el polígono principal se halle siempre inscrito; pues sucede muchas veces que pudiéndose operar tambien en el exterior, se salvan mejor las dificultades y se llenan más completamente las condiciones de visibilidad de los puntos y de trazado del menor número de perpendiculares y de la menor longitud posible sobre los lados del polígono principal, estableciendo este de modo que parte se halle inscrito y parte circunscrito, como se vé en la fig. 599 (lám. 40), en la cual el lado AG es comun al polígono dado y al principal ABCDEFG del canevas. La parte ABC de este último se halla inscrita; el lado CD corta al contorno del polígono dado, estando parte inscrito y parte circunscrito, y por último, la parte DEFG del canevas se halla circunscrita al mismo polígono.

Las operaciones de campo y de gabinete, así como las de replanteo, son idénticas á las explicadas anteriormente; debiendo tan sólo observar, que en el registro del contorno habrá en este caso ordenadas positivas y negativas sobre los lados del polígono principal. Las de los puntos 1, 2 y 3 serán positivas y las de los 4, 5, 8, 9, 10 y 11 negativas. Los puntos 6 y 7 tienen ordenada *cero*. En la construccion del plano deberán resultar en línea recta los tres vértices 1, B y 2.

883. **Contornos curvilíneos.**—De los dos casos acabados de exponer en las figuras 598 y 599 (lám. 40) para los polígonos cuyo contorno se halla compuesto de un gran número de rectas, se pasa sin ninguna dificultad y procediendo exactamente de la misma manera al levantamiento del plano de aquellos cuyo contorno es curvilíneo ó mistilíneo, como los representados en las figuras 600 y 601 (lám. 40), que conservan respectivamente la misma forma que los de las 598 y 599, y cuya sola inspec-

cion basta para comprender todo cuanto á ellos se refiere; pues cada trozo de curva A*m*B (fig. 600; lám. 40) puede considerarse como una porcion de contorno rectilíneo compuesto de rectas sumamente pequeñas, por lo que la operacion será tanto más aproximada á la exactitud, cuanto mayor sea el número de ordenadas que se levanten sobre cada uno de los lados del polígono principal; pero con objeto de llevar los trabajos con órden y evitar equivocaciones, es preferible hacer que todas las abscisas sean múltiplas de la primera, levantando, por ejemplo, una perpendicular á cada diez metros, que se determinarán al tiempo mismo de medir con la cadena el lado correspondiente AB del polígono principal, apreciando con exactitud la medida de la última fraccion. Dibujando despues cuidadosamente en el cróquis la parte de curva comprendida entre los extremos de cada dos ordenadas, se obtendrá la figura del contorno con aquella aproximacion que es dable en esta clase de operaciones.

Cuando el terreno es tan irregular como el representado en la figura 602 (lám. 40), y presenta dificultades la inscripcion del polígono principal, se podrá establecer una série de ejes AB, BC, CD y DE perpendiculares entre sí, que se comprobarán repitiendo la operacion en sentido de E á A, y referir á ellos como se vé en la figura, los puntos del terreno. Este método se puede emplear tambien entre otros en el levantamiento del plano de una isla pequeña.

Observaremos que en el caso de los contornos curvilíneos se obtiene mayor expedicion, puesto que se determinan levantando perpendiculares, lo que no exige tanteos; al contrario de lo que se verifica con los rectilíneos, los cuales se hallan bajando perpendiculares.

884. **Terrenos inaccesibles en su interior.—Establecimiento de varios ejes.**—*Contornos rectilíneos.*—Cuando el polígono es rectilíneo y está compuesto de un corto número de rectas, como el ABCDEF (fig. 603; lámina 40), se elegirán los ejes en el exterior de modo que formen un cuadrado ó un rectángulo MNPQ, que es lo más general, para lo cual se trazará una recta MN que pase por uno de los vértices A, sobre la cual se bajará la perpendicular PN desde el punto más saliente C; sobre la NP se bajará la PQ, y sobre ésta la MQ, con lo cual se tendrá el rectángulo circunscrito MNPQ. Bajando ahora perpendiculares sobre los lados de este rectángulo tomados por ejes, desde los otros vértices B y D, y procurando referirlos á aquellos con respecto á los cuales resulten menores las perpendiculares, se tendrán todos los datos necesarios para la determinacion del contorno valiéndose del croquis.

El registro es muy fácil; se toma el punto M como punto de partida siguiendo los lados del rectángulo en el sentido que ya otras veces hemos indicado, observando que en este caso todas las ordenadas son negativas, y *cero* las de los puntos A, C, E y F.

885. *Contornos curvilíneos.*—Si el polígono es curvilíneo ó mistilíneo, como en la fig. 604 (lám. 40), se seguirá el mismo procedimiento, dibujando en el croquis con exactitud las diferentes porciones curvas AB, BC,

CD..... pero si se desea obtener con más precision, puede emplearse el procedimiento siguiente, cuando el contorno no presenta tránsitos violentos en sus curvaturas.

Despues de circunscrito el rectángulo MNPQ (fig. 605; lám. 40) como en el caso anterior, se tantearán cuatro puntos A, B, C y D desde los cuales las perpendiculares bajadas desde cada uno de ellos, B, por ejemplo, sobre los lados contiguos MN y NP del rectángulo sean próximamente iguales, con el fin de evitarse el tener que medir despues perpendiculares mucho más largas. Entre las bajadas desde los puntos A y B, se levantarán sobre la A'B' á distancias iguales otras varias, cuyos extremos servirán para fijar mejor la curva que empieza en A y termina en B, repitiendo la misma operacion sobre los demás lados. Si las circunstancias impidiesen dividir las A'B', C'B'', D'C'' y A''D'' en partes iguales, se dividirian en partes desiguales del modo más conveniente.

Si las curvas que forman el contorno son de la naturaleza de la que representa la fig. 606 (lám. 40) en que los tránsitos de un punto á otro son violentos, entonces será preciso bajar perpendiculares sobre la AB, que representa uno de los lados del polígono principal inscrito ó circunscrito al contorno del terreno, desde los puntos 2, 6 y 8 que se hallan á mayor distancia de la AB y que se llaman *de máxima*, desde los 1, 4 y 9 que están más próximos, y se llaman *de mínima*, y desde los 3 y 5 en que la curvatura cambia de sentido y que se llaman *puntos de inflexion*, así como desde el 7 que es *de retroceso*, salvo á fijar además aquellos otros puntos que puedan servir para la reproduccion más exacta de la curva en el papel.

El modo de llevar el registro y el de hacer el replanteo en los últimos casos expuestos no presenta dificultad alguna.

886. *Contornos muy irregulares en su forma general.*—Si el polígono rectilíneo está compuesto de un gran número de rectas como el que representa la fig. 607 (lám. 41), la circunscripcion de un rectángulo A'B'EF' podría dar lugar segun la forma del terreno á la medicion de perpendiculares de mucha longitud, lo que puede evitarse adoptando el procedimiento siguiente:

A partir del punto A se trazará una línea AB; sobre ésta se levantará la perpendicular BC, sobre la BC la CD, y así sucesivamente procurando acercarse todo lo posible al contorno del polígono dado. Esta série de ejes perpendiculares, marcados con líneas de trazos como se ve en la figura, representa el polígono circunscrito que sustituye con ventajas al rectángulo A'B'EF'. Obsérvese, sin embargo, que al llegar al punto Y, la línea YA no es perpendicular á la HY. En efecto; si se hubiera prolongado la HY hasta su encuentro en A' con la AB prolongada tambien, no sería posible el trazado y medicion de las perpendiculares bajadas desde los puntos 22 y 23 sobre las A'H y A'B, en razon á no poderse penetrar en el interior del polígono propuesto; por lo cual se ha tomado sobre la A'H un punto Y tal, que la visual dirigida al punto A forme el ángulo HYA de

135° ó el AYA′ de 45°. Sobre esta recta YA se pueden bajar perpendiculares de los puntos 21 y 22, y sobre la ordenada de este último las correspondientes á los 23 y 24, con lo cual quedan salvadas todas las dificultades. Obsérvese que por este procedimiento se evita la medicion de cantidades iguales á BC en las perpendiculares correspondientes á los puntos 4, 5, 6, 7 y 8, y á HG en las de los 18 y 19.

887. La circunscripcion de un polígono compuesto de rectas que formen entre sí ángulos de 90°, 45° y 135° es sumamente ventajosa; pero debe tenerse el mayor cuidado, pues una ligera desviacion producida en una perpendicular influye en todas las consecutivas, trastornando el polígono circunscrito cuyos lados han de servir de ejes, y es como sabemos la base principal de las operaciones. Para asegurarse del éxito de estas, conviene hacer las comprobaciones siguientes:

1.ª Se empezará desde el punto A y en sentido contrario al anterior, es decir, caminando segun AYHG... á trazar las perpendiculares y oblícuas de 45° y 135°, para ver si las nuevas visuales van á parar á los jalones colocados en el trazado de la primera operacion. Es conveniente que ejecuten la operacion primitiva dos personas á partir de un mismo punto A y caminando en sentidos contrarios hasta llegar á encontrarse, con el objeto de disminuir los errores que resultan sobre el último ángulo cuando se forman en el terreno muchos ángulos rectos consecutivos.

2.ª Se prolongarán las líneas AB, ED, HY y EF para obtener el rectángulo A′B′EF′, á fin de que colocada la escuadra en los puntos de interseccion de estas cuatro rectas, se pueda comprobar que los ángulos A′, B′, E y F′ son rectos.

3.ª Se examinará si la suma de las líneas BC y DE medidas en el terreno y que están situadas á un mismo lado del polígono, componen tanto como las que se hallan al lado opuesto, que son las FG, HY y A′Y, medidas tambien las dos primeras y fácil de determinar la última; pues el triángulo rectángulo isósceles YA′A en el cual se conoce la hipotenusa YA, nos da $YA^2 = 2A'Y^2$; de donde

$$A'Y = \sqrt{\frac{AY^2}{2}}$$

Tambien se hubiera podido hacer la comprobacion observando que se tiene

$$(BC + ED) - (GF + HY) = YA';$$
$$(EF + GH) - (CD + AB) = AA';$$

y como $YA' = AA'$

$$(BC + ED) - (GF + HY) = (EF + GH) - (CD + AB).$$

Si hubiera más de un triángulo isósceles se seguirían del mismo modo ambos procedimientos

Debe advertirse, sin embargo, que en el establecimiento de las perpendiculares se deben tener presentes, respecto á su longitud, los límites permitidos para la escuadra, así como en las comprobaciones los que corresponden á la medicion de las líneas, y no olvidando que este instrumento cuando se usa solo, no ha de emplearse sino en terrenos de corta extension; bien que como auxiliar de otros para las operaciones secundarias es un poderoso elemento en los trabajos topográficos.

888. *Observaciones acerca de la construccion de los polígonos.*—Las comprobaciones de los ángulos y de los lados del polígono, hechas en el terreno al tiempo de tomar los datos, son tanto más importantes, cuanto que al construir el plano es muy difícil determinar con precision la naturaleza de las causas que han podido influir en que el último punto determinado en la construccion del polígono no coincida con el punto de partida. La coincidencia de estos puntos es lo que comunmente se llama *cerrar el polígono*. No pueden establecerse, por lo tanto, reglas fijas para la correccion de un polígono cuando no cierra La mayor ó menor perfeccion del instrumento empleado y de la cadena, la investigacion de las alteraciones que han podido sufrir, la mayor ó menor confianza en la medida de los lados y en la determinacion de los ángulos, y la relacion de estas consideraciones con la distancia que resulta entre los puntos que deben coincidir y el modo de cortarse las líneas que deben concurrir para el cierre del polígono, pueden á veces suministrar alguna luz para decidirse á adoptar con algunas probabilidades de acierto lijeras alteraciones en los valores de los ángulos, ó en los de las distancias; teniendo presente que en el caso de que estas alteraciones fuesen de alguna consideracion, es conveniente repetir las operaciones en el terreno, á fin de no admitir como verdadero plano, una figura muy distante de representar la verdadera proyeccion del polígono del terreno.

889 *Contornos curvilíneos comprendidos en el caso de que se trata.*—Escusamos decir nada para cuando el contorno del terreno sea curvilíneo ó mistilíneo, en cuyo caso se procederá igualmente. Presentando la figura el resto de la construccion y teniendo presente todo lo dicho anteriormente, á cualquiera le será fácil concebir la manera de formar el registro y de proceder á la construccion en el papel y replanteo en el terreno valiéndose de él ó del croquis, ó mejor consultando á ambos.

890. La figura 608 (lám. 41) manifiesta que se puede circunscribir el polígono principal ABCDEF á alguna distancia del contorno, segun lo exijan las circunstancias; bien se trate de un terreno compuesto de pocas ó muchas rectas, y bien sea curvilíneo ó mistilíneo.

891. **Terrenos inaccesibles en su interior y en su exterior.**—Si el terreno que representa el polígono ABCDE (fig. 609; lám. 41) está sembrado, así como el terreno circundante, ó un obstáculo cualquiera impide la aproximacion al polígono dado, se establecerán en la parte ac-

cesible dos ejes MN y NP que se corten, eligiéndolos de manera que sean visibles desde ellos los vértices del polígono y que formen entre sí un ángulo recto ó de 135°. A partir de un punto M en el eje MN, se bajarán las ordenadas AA′, EE′, BB′... de todos los vértices del polígono, anotando en el croquis los valores de las abcisas MA′, ME′, MB′,... y el valor total del eje MN. Despues, á contar desde el punto N, se irán bajando igualmente las ordenadas BB″, AA″, CC″... anotando como antes los valores de las abscisas NB″, NA″, NC″...

Si se quisiera llevar registro, se formaría con las columnas que se ven á continuacion.

Registro del polígono ABCDE.

ÁNGULO DE LOS EJES = 135°.

ABSCISAS. Primer eje	ABSCISAS. Segundo eje.	Puntos.	Nombres.	Observaciones.
14,2	10,8	A		
26,8	41,0	E		
44,7	6,0	B		
60,4	66,2	D		
70,0	33,6	C		
77,5	»	»		

En la primera columna se anotarán las abscisas consecutivas del primer eje, y en la tercera los vértices á que pertenecen; siendo el último número 77,5 el valor total del eje MN. Despues, en la segunda columna que ha quedado en blanco, se sentará el valor de la primera abscisa NB″, que es 6,0, en el renglon del punto B á que corresponde; el de la segunda NA″ en el renglon del punto A, y así sucesivamente hasta que se hayan tomado todas las abscisas del segundo eje, considerando que este concluye donde la última abscisa ND″, por lo que no se pone ningun número al lado del 77,5, que es el valor del eje MN.

892. Para construir el plano en el papel, se empezará por trazar una línea indefinida *mn* en la cual, á partir del punto *m* y poniendo en contacto con ella la escala elegida de boj ó marfil, entre las que constituyen el juego (190), se irán señalando con la punta muy fina del lápiz las partes que representen los números de las abscisas en el croquis, ó los consignados en la primera columna del registro, hasta obtener el punto *n* y por lo tanto la *mn* cuyo valor 77,5 representa el de todo el eje *mn*. En el punto *n* se trazará otra recta indefinida *np*, que forma con la *mn* un án-

gulo de 135°, como se halla anotado en el croquis ó en el registro, y se irán tomando los valores de las abscisas que señala aquel ó la segunda columna de este último, punteando las distancias tomadas á fin de evitar equivocaciones, hasta tener el punto d''. Hecho esto, se pondrá sucesivamente en contacto el borde de una regla con cada uno de los ejes, levantando con el mayor cuidado con la escuadra de madera perpendiculares indefinidas en todos los puntos marcados en ellos, señalando las del primero con las letras a', e', b'...., y las del segundo con las b'', a'', c''... La interseccion de las ordenadas a' y a'' darán el punto a, proyeccion del vértice A; la de las b' y b'' el punto b, y así sucesivamente. Uniendo con rectas los puntos obtenidos a, b, c, d y e se tendrá la proyeccion $abcde$ del polígono ABCDE, cuyos lados se podrán apreciar con la escala valiéndose de sus homólogos en la proyeccion.

El método que hemos seguido para hacer las anotaciones en el registro, tiene la ventaja de presentar en un renglon las abscisas correspondientes á cada punto. En realidad, el método que acabamos de exponer es el de intersecciones con la escuadra; pero hemos creido conveniente ocuparnos de él ahora atendiendo á la clasificacion que hemos hecho con relacion á la disposicion del terreno.

893. Si no se pudiesen descubrir desde el primer eje MN los puntos D y E visibles desde el segundo NP, se elegiría un tercer eje que formase con el segundo el ángulo de 135°, y se obtendrían del mismo modo los citados puntos por medio de los ejes segundo y tercero. En la fig. 610 (lám. 41) hemos elegido los tres ejes MN, NP y PQ formando ángulos rectos, y la misma manifiesta las construcciones para la determinacion de los vértices del polígono.

Las operaciones de construccion del plano en este segundo caso, son análogas á las del primero, y en el replanteo se sigue en ambos la misma marcha que en la construccion en el papel.

894. **Terrenos en parte accesibles y en parte inaccesibles.**—Para la determinacion del contorno de un polígono de esta especie, se podrá considerar como si todo él fuese inaccesible, ó bien en algunas ocasiones podrá ser más conveniente levantar con separacion el plano de la parte accesible y el de la inaccesible, aplicando en cada caso el método correspondiente, como en el ejemplo que sigue.

Sea el polígono que representa la fig. 611 (lám. 41), en el cual la parte **A** es accesible y la **B** inaccesible. Se empezará por trazar con la escuadra en la parte accesible una série de rectas FE, ED, DC y CB, formando entre sí ángulos de 90° y de 135°, las cuales han de establecer la separacion de la parte accesible de la inaccesible, ó bien una sola recta YB si la disposicion del terreno lo permite. En la parte accesible se vé que por medio de los dos ejes principales AB y AF que parten del punto A á los extremos de la línea quebrada de separacion, y que quedan determinados por sus distancias á los extremos de esta línea, fijos por la naturaleza de las operaciones ejecutadas para determinarla, se pueden referir los puntos 1, 2 y 3 del contorno al eje AB, y los 12, 13 y 14 á los ejes secundarios GF, HG y AH relacionados con el principal AF por medio de las ordenadas de los puntos intermedios H y G de los lados del polígono dado, habiendo dispuesto así la construccion en vez de bajar ordenadas desde los puntos 12, 13 y 14 sobre la AF, con el objeto de comprobar toda la parte AHGF, viendo en la construccion sobre el papel si los puntos 14, H y 13 se hallan en línea recta, así como los 13, G y 12.

Respecto á la parte inaccesible **B**, se ha prolongado la FE, bajando sobre ella la perpendicular JY desde el vértice saliente 8 del polígono; sobre ésta se ha bajado otra perpendicular JL desde el punto 7; sobre esta última la ML que pasa por el punto 5, despues la MN sobre la ML, y por último, sobre la MN la BN desde el extremo B de la línea quebrada de separacion; trazándose además por los extremos de ésta la recta YB. La figura manifiesta la referencia á estas líneas de los demás vértices 4, 6, 9.... del polígono.

Para comprobar esta parte inaccesible **B**, si se ha adoptado la línea quebrada BCDEF, se prolongarán las DC y BN y se observará si el ángulo en O es recto; despues se verá si se tiene

$$YF + FE + DC + CO = JL + MN$$

y si resulta tambien

$$YJ = ML + BN + BO + DE.$$

Si se ha adoptado la recta de separacion YB, se prolongarán las JL y BN para verificar si el ángulo en P es recto, y resultará un trapecio YJPB, parte inscrito y parte circunscrito al terreno inaccesible **B**, y que tendrá el mismo contorno que la figura terminada por las rectas BY, YJ, JL, ML, MN y BN, debiendo resultar

$$BY = \sqrt{(JL + MN)^2 + [YJ - (ML + BN)]^2}.$$

Se emplearán combinaciones análogas para las comprobaciones en las distintas formas que pueden afectar los polígonos.

895. **Por el método de rodeo**.—Este método, llamado así porque segun él se opera siguiendo el contorno, y que puede adoptarse cuando el terreno es llano y accesible en su interior y su exterior, tiene aplicacion tambien en el caso de ser solamente accesible en las proximidades del contorno, siendo inaccesible en su parte interior **A** (fig. 612; lám. 41) por ser el terreno pantanoso, estar cubierto de bosque espeso ó ser un pueblo, representando la figura el contorno de los alrededores cuyo plano se quiere levantar.

Para esto se colocará la escuadra en un punto E, desde el cual se vean á ángulo recto dos puntos notables A y 1 del contorno, trazando y midiendo las rectas AE y E1; se hará estacion en el punto 1 y se levantará á la E1 la perpendicular F1, sobre la cual se bajará otra F2 desde otro punto notable 2, y así se seguirá sucesivamente, como indican las líneas de trazos de la figura, unas veces caminando por el interior como en la parte que hay desde A hasta H, otras por el exterior, como desde H hasta M, y otras por el interior y el exterior, como desde M hasta D, segun sea más conveniente y permitan las condiciones del terreno, hasta volver de nuevo al punto de partida A. Esta operacion puede comprobarse volviéndola á repetir desde este mismo punto, pero en sentido contrario; abreviándose cuando se usan dos escuadras partiendo en sentidos contrarios desde el mismo punto A hasta encontrarse en el opuesto B ó en otro cualquiera.

Se aseguraría más el éxito de la operacion, si el terreno, aunque desigual y montañoso, no estuviese poblado de árboles y permitiese trazar un eje principal AB en sentido de la mayor dimension y otros varios perpendiculares á él, como se vé en la figura, trazándolos y midiéndolos horizontalmente, como hemos explicado en los terrenos inclinados (668); pues fijos entonces los puntos extremos de estos ejes, se podría hacer, independientemente una de otra, la comprobacion de cada una de las partes AH comprendida entre cada dos de ellos.

En ambos casos puede calcularse tambien si la suma de las distancias horizontales medidas á un lado de la recta mayor AB equivale á la de las medidas en el lado opuesto, y lo mismo respecto de las distancias medidas á uno y otro lado de la mayor recta CD, perpendicular á la primera AB, combinándolas en uno y otro caso de la manera conveniente; de modo que deberá resultar:

1.° $AN' + 22M' + 21L' + J'Y' + H'G' + F'E' + D'C' + B'A' + ZY = AE + 1F + 2G + HY + JL + MN + OP + QR + ST + XB = AB.$

2.° $H'Y' + J'L' + 21M' + 22N' + E1 + F2 + (NO - GN'') = PQ + (XT - RS) + YB + (G'F' - E'Z'') = CD.$

Obsérvese que para hacer la comprobacion ha habido que prolongar MN hasta N'', y ZY hasta Z''.

Si ahora se quisieran fijar otros nuevos puntos del contorno, se haría la referencia por medio de ordenadas á las rectas trazadas, como se vé entre D y 4, 6 y 7, 20 y 21.

896 Las distintas precauciones tomadas en los varios casos expuestos y en los que expondremos en lo sucesivo, no tienen otro fin que poder lograr que cierre el polígono al construirle en el papel, lo que sólo puede conseguirse cuando se tiene ya bastante práctica, así en los trabajos de campo como en los de gabinete; pudiendo establecerse por regla general que dicha construccion tiene por objeto reducir á los menores límites posibles las diferencias que resultan de la imperfeccion de los instrumentos, unidas á las dificultades locales que pueden ofrecerse en las medidas de las líneas y los ángulos que han de servir para la construccion de las

figuras semejantes á las del terreno, combinándolas de modo que puedan resolver de una manera conveniente la cuestion.

897. **Por el método de interseccion** —Para determinar el contorno con la escuadra, no conviene seguir este método á causa del mucho tiempo que exige, pero puede servir para auxiliar en casos dados á los demás métodos. Supongamos, en efecto, que AB (fig. 613; lám. 41) representa uno de los lados del polígono principal inscrito en el terreno, y que al determinar los puntos de la curva ACB, la ordenada de uno de los puntos C no puede medirse directamente por impedirlo un obstáculo. Se buscará en la AB un punto E, desde el cual se vea el C bajo el ángulo de 45°, y entonces la recta DE, igual á la diferencia de las abscisas AE y AD, nos dará el valor de la CD en el triángulo rectángulo isósceles DCE, que nos servirá para la construccion de la ordenada en el plano, evitándose de este modo la del triángulo DCE para hallar por interseccion el punto C en este caso y aun en el de no poderse medir tampoco la CE. Si se quisiese hallar la longitud del obstáculo, se observaría que era igual á DC — (CR + SD).

En virtud de lo dicho puede observarse, que el método *por interseccion* no existe en realidad para la escuadra, sucediendo lo mismo con el de *doble interseccion*; si no se pudiese hacer estacion en el punto D (fig. 614; lám. 42), que debe ser el pié de una ordenada bajada desde el C, despues de hallar el punto E como en el caso anterior y de medir la CE, la construccion del triángulo rectángulo isósceles CDE, nos dará en la escala el valor de CD.

La propiedad del teorema de Pitágoras nos podría dar tambien el valor de la ordenada, en razon á que se tiene la ecuacion

$$CD = \sqrt{\frac{CE^2}{2}}$$

898. **Por radiacion** —En el caso de ser accesible el terreno en su interior, bien sea todo llano ó bien se eleve ó deprima por el centro, se colocará la escuadra en un punto O (fig. 613; lám. 41), trazando las perpendiculares AP y BN, y poniendo jalones en sus puntos de interseccion A, B, P y N con el contorno del terreno, fijando si se quiere otros puntos como el M en sentido de las visuales OM de 45°, y midiendo despues las distancias de O á los puntos determinados, así como las AB, BM, MP, PN y NA que unen dichos puntos. Tomadas estas últimas rectas por directrices, se terminará la operacion como indican las construcciones en la figura. Este método no debe emplearse cuando las líneas que parten del punto O son de mucha longitud, á fin de evitar las largas mediciones.

899. **Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones** —Empleando tan sólo estos medios puede determinarse tambien el contorno de un polígono, si á la circunstancia de ser el terreno de corta extension, reune la de ser llano y despejado; pues de lo contrario, la dificultad de poner en prác-

tica los métodos á que da lugar atendiendo al trabajo que producen las muchas alineaciones y mediciones, y la repeticion de estas para las comprobaciones, reunido á su poca exactitud dependiente de la naturaleza de estos trabajos, hacen que sólo se emplee en operaciones parciales ó en el levantamiento de planos de poca importancia. Pueden seguirse varios métodos.

900. **Por alineaciones oblícuas de una inclinacion cualquiera.**— Supondremos primeramente en los métodos que vamos á exponer, que el contorno del polígono es rectilíneo. Para dar una idea del procedimiento que indicamos, aplicable cuando el terreno es accesible en su interior y en su exterior, sea el polígono que representa la fig. 615 (lám. 41). Se empezará por trazar una diagonal BC que sea lado comun al triángulo BCD formado por la prolongacion de los lados B3 y C5 del polígono, y al ABC formado con el lado 6C prolongado y el AB que se traza desde B aproximándose todo lo posible al contorno. Una vez trazadas las líneas que determinan estos triángulos, que llamaremos principales por hacer sus lados las veces de directrices, y habiendo colocado jalones en sus vértices y en los del polígono dado, señalando unos y otros con piquetes si se cree conveniente para determinarlos mejor, se procede con todo cuidado á la medicion de la manera siguiente. Se medirá primero la diagonal BC, y á partir del punto B las distancias B3 y 3D, anotándolas en el croquis. Desde el punto 3 se medirán las 3....4 y 4E, y desde el D las DE, 5E y 5C, con lo que se tendrán los datos necesarios para construir en el papel el triángulo BCD y toda la parte del polígono que le corresponde. Para determinar ahora el otro triángulo ABC y la parte del polígono correspondiente, se medirán la 6C y 6A, y á partir del punto 6 las 6....7 y 7F; desde G, que se determina por su distancia al vértice C, las 8G y 8....9, y á partir de A las AF, 9F y 9B, con lo que se tendrán los datos necesarios para la construccion en el papel de la parte del polígono que se halla á la izquierda de la diagonal BC, excepto la línea quebrada comprendida entre los puntos 9 y B, la cual se halla cortada por el lado AB del triángulo ABC. Para determinar el vértice 1 de dicha línea, se medirán las 9R, 9....1 y 1....R, y para tener el punto 2 las BR, 2R y 2B, ó bien la R2 solamente, ó las BH y 2H, adoptando entre estos el medio que ofrezca ménos inconvenientes.

Como la medicion es la base de estas operaciones, no hay más medio de verificacion que repetir las medidas, para ver si se ha cometido algun error de importancia; pudiendo medir de nuevo y de una sola vez con este objeto las líneas compuestas de partes, como la DC, á fin de ver si compone tanto como las DE, 5E y 5C; las que como 5....4 y 7....8 no ha sido necesario medir antes, para que ahora sirvan de comprobacion, y por último, establecer y medir otras nuevas líneas como la diagonal AD, que áun cuando no sean necesarias para la construccion del polígono, sirvan para dar á conocer si se ha procedido con acierto en la determinacion de los datos y en la construccion de los triángulos.

901. *Construccion del plano.*—Los triángulos principales ABC, BCD, pueden construirse en el papel:

1.° Valiéndose de los tres lados.

2.° Puesto que se conocen los lados, hallando el valor de los ángulos (30) para valerse de ellos en la construccion.

3.° Determinando la posicion de un vértice C por medio de la perpendicular CM al lado opuesto por la resolucion del triángulo rectángulo CMD en que se conoce la hipotenusa CD y un ángulo agudo CDM, que se puede hallar por el método anterior, para obtener el segmento MD. Como comprobacion, se buscará tambien BM para ver si los dos segmentos dan el valor de BD.

4.° Hallando el valor de los segmentos por el método expuesto (712).

Una vez construido el cuadrilátero que represente al ABDC del terreno, se determinarán con la escala los puntos homólogos de los E y 3 del terreno por sus distancias al vértice D, determinando así la recta homóloga de 3E sobre la cual se halla del mismo modo el vértice 4 por su distancia á uno de los puntos así determinados; el vértice 5 se obtiene por su distancia al punto E, y siguiendo una marcha análoga se comprende fácilmente la manera de hallar los demás vértices.

902. **Por rodeo.**—Sea el polígono ABCDEFGHY (fig. 616; lám. 42). El método á que nos referimos, aplicable cuando solo se puede operar en sentido del contorno por ser el terreno pantanoso en el interior, ó haber otro género de obstáculos, consiste en tomar en los lados de cada ángulo, á partir de cada uno de los vértices, dos distancias, iguales siempre mientras sea posible, AA′, AA″, BB′, BB″, y en medir las líneas A′A″, B′B″ que unen sus extremos y que se llaman *abrazaderas,* así como los lados AB, BC... del polígono. Una vez consignadas todas las medidas en el croquis, la construccion en el papel es muy sencilla, pues se reduce á trazar una recta *ab,* con arreglo á escala, en la cual se tomarán las partes *aa′* y *bb′* de la magnitud constante adoptada que suponemos sea de 30 metros. Sobre *aa′* se construirá el triángulo *aa′a″* con las *aa″* y *a′a″* tomadas en la escala; sobre la *bb′* se construirá del mismo modo el *bb′b″* que represente á BB′B″, con lo cual tendremos las direcciones de los lados *bc* y *ai,* en las que se tomarán las longitudes *bc* y *ai* que representen á las BC y AY, continuando así hasta construir todo el polígono.

Si por cualquier circunstancia no se pudiera establecer en el exterior el abrazadero H′H″ y sí en el interior el H‴H^{IV}, nos valdremos de este ó de uno de los H′H‴ y H″H^{IV}, pues la construccion de cualquiera de los cuatro triángulos formados alrededor del punto H nos determinará la direccion de una segunda línea HY, conocida la de la primera GH. Lo mismo diríamos de otro abrazadero, si no pudiéndose establecer en el interior, como el del punto F, se pudiese en el exterior; cuyo procedimiento es el que habría que seguir para determinar con la cuerda el contorno de un edificio aislado ó de una manzana de casas. En el caso de que uno de los ángulos FGH fuese muy obtuso, convendría dividirle en dos partes próximamente iguales por medio de una recta GG‴, á fin de tener los triángulos GG′G‴ y GG″G‴ de ángulos más convenientes que por su construccion den el ángulo FGH del polígono, suma de lo G′GG″ y G″GG‴. Las operaciones serán tanto más exactas cuanto más se aproximen á ser iguales los ángulos de todos estos triángulos y cuanto mayor sea la longitud de sus lados. Tambien pueden determinarse los ángulos C, D y E tirando una recta MN que corte á sus lados, y midiendo todos los lados de los triángulos que así resultan.

Si no se pudiese establecer ninguno de los cuatro triángulos, como manifiesta la figura 617 (lám. 42), habria que recurrir á un medio parecido al uso que se hace de la plancheta; para esto se coloca en el terreno sobre un tablero el papel del croquis, de modo que el extremo *b* (fig. 618; lám. 42) de la línea *ab* que representa á la AB se halle en la vertical correspondiente al B del terreno, y que la *ab* esté en el plano vertical de AB, lo que se consigue haciendo girar al papel alrededor de B hasta que uno de los puntos *a* de la *ab* esté en contacto con el extremo de una plomada *a′*, colocada en el plano vertical de la AB que determinan el jalon A y la plomada *b′* que corresponde al punto B. Procurando despues que el papel no se mueva, se llevará la plomada *a′* á colocarla en *c′* en el plano vertical de la BC y se señalará en el papel el punto *c* que indique su extremo, para que tirando la *bc* se tenga construido el ángulo *abc* = ABC. Se podria hacer uso del nivel del aire de mano para disponer horizontalmente el tablero.

903. Hemos dicho hablando de la escuadra, que cuando se circunscribe un polígono á otra figura, ó en general, cuando se quieren fijar dos rectas ó ejes que se cortan, se formen ángulos de 90°, 45° y 135°; pero se podrán formar en los casos expuestos entonces de la magnitud que sea más conveniente, valiéndose como auxiliar del método de las *abrazaderas* que acabamos de explicar.

904. **Por interseccion.**—Se reduce á elegir un lado del polígono dado como base de las operaciones, ó bien una línea MN (fig. 619; lámina 42) establecida fuera como indica la figura si el polígono es inaccesible en su interior y en su contorno, la cual se medirá con toda precision. Se establecerán alineaciones en sentido de las visuales MA, ME, MB... y en el de las NB, NA, NE... Desde dos puntos M′ y N′ tomados generalmente de modo que se tenga MM′ = NN′ se trazarán nuevas líneas en direccion arbitraria que encontrarán á las primeras en los puntos A′, E′, B′, D′ y C′ y á las segundas en los B″, A″, E″, C″ y D″, poniendo piquetes en estos puntos de interseccion, á fin de que medidos los lados de los triángulos MA′M′, ME′M′... y ND″N′, NC″N′... que fijan las direcciones de las visuales á los vértices del polígono desde los extremos M y N, se tengan todos los datos necesarios para la construccion del polígono semejante en el papel, la que nos excusamos de explicar, porque la sola inspeccion de la figura sirve para comprenderla.

Si alguno de los vértices del polígono no fuese visible desde el eje MN, sería necesario establecer otro nuevo eje á imitacion de lo que se indicó para la escuadra (891), fijando su direccion con el abrazadero por el ángulo que forme con MN.

En la figura 620 (lám. 42) se ha podido tomar por base uno de los lados AB, y para comprobacion se ha hecho estacion en un punto intermedio O de la misma, dirigiendo visuales á los demás vértices, para ver despues en la construccion en el papel, si cada tres líneas dirigidas á un punto del terreno se cortan en un solo punto, determinando así mejor su proyeccion.

905. El método por interseccion sirve tambien como auxiliar para comprobar el método de rodeo. En la figura 621 (lám. 42) se ha elegido un punto interior O para establecer alineaciones desde él á los vértices del polígono, las que se fijarán del mismo modo por triángulos, á fin de ver en la construccion si todas las rectas trazadas para representarlas se cortan tambien en un solo punto, proyeccion del O.

906. **Por doble interseccion.**—Ya hemos dicho que este método sirve para auxiliar al de rodeo. Sea el polígono ABCDE (fig. 622; lám. 42) en el que suponemos al levantar su plano por el método de rodeo, que no se quiere medir directamente más que la recta AB, ya por obtener así el plano con más exactitud, ó por haber causas que impidan la medida de los demás lados BC, CD.... Para esto, se medirán los tres lados del triángulo BFG, para obtener por su medio el ángulo ABC del polígono dado, y desde el punto C se establecerán jalones en la alineacion CA para medir los lados de un segundo triángulo CYH; cuyos datos han de servir despues para la determinacion de la proyeccion del punto C: se medirán además los tres lados del triángulo HCL que han de servir igualmente para tener el ángulo BCD. Se pasará despues al punto D, desde el cual se determinará la alineacion AD, tomando los datos de un triángulo DMN, que han de servir para obtener en el papel el punto D, y por lo tanto la longitud de DC, y de otro triángulo DPN por medio del cual se determine el ángulo CDE del polígono. Por último, pasando al punto E y midiendo los lados del triángulo RSE se podrá hallar despues por su medio el punto E y el ángulo DEA.

Para hacer la construccion en el papel se trazará una recta *ab* que represente en la escala elegida á la AB, y se construirá el triángulo *fbg* semejante al FBG; la *bg* prolongada pasará por la proyeccion de C; mas como no se conoce la longitud de BC, se tomará en la prolongacion de la *bg* un punto cualquiera *c'* y se construirá el triángulo *ic'h'* semejante al YCH; la *c'i* no pasará por *a*, y como la proyeccion del punto C debe hallarse en la paralela á *c'c''* tirada por el punto *a*, se trazará esta paralela y su interseccion *c* con la *bc'* será la proyeccion en el papel del punto C del terreno; resultando así medidas indirectamente y representadas en la escala por *bc* y *ac* las BC y AC, de las cuales en el terreno solo se midieron las partes BG, CH y CY, necesarias para la construccion de los triángulos. Ahora se formará sobre la *bc* el triángulo *hcl* semejante al HCL para tener el ángulo *bcd* igual al BCD: en la *cl* prolongada se hallará la proyeccion del punto D; mas como no se conoce el valor de DC para tomarlo en la escala, se elegirá un punto cualquiera *d'*, se formará el triángulo *md'n'* semejante al MDN, y debiendo hallarse la proyeccion del punto D en la interseccion de la paralela tirada por *a* á la *d'd''* con la *cd'*, el trazado de dicha paralela nos dará el punto *d* proyeccion de D, y las DC y AD resultarán medidas indirectamente y representadas por *dc* y *ad*. Por las mismas razones se tomará un punto *e'* de la recta indefinida *de'*, obtenida por el triángulo *dnp*, se formará el triángule *r'e's'* semejante al RSE, se tirará por *a* la *ae* paralela á *e'e''*, y su interseccion con *de'* nos dará el punto *e* proyeccion de E, y además el ángulo *aed* = AED, y medidos indirectamente y representados en el papel por *ae* y *ed* los lados AE y ED del polígono del terreno; con lo cual se tendrá construido el *abcde* semejante al ABCDE.

907. Para verificar ó comprobar esta construccion se procurará fijar cuando se opera en el terreno cada punto, tal como D, con relacion á otros distintos; así, estando dicho punto relacionado ya con los E, A y C, se le relacionará con el B trazando parte de la alineacion DB y tomando los lados del triángulo DIN, cuyas líneas señalamos de puntos para distinguirlas de las demás, y de este modo se podrá hacer la misma construccion en el papel, para observar si pasa por el punto *b* la línea que ha de corresponder á DB. Igualmente se podría relacionar el punto E con los B y C.

908. **Por radiacion.**—Se reduce á descomponer el polígono rectilíneo en triángulos, ya partiendo de uno de los vértices ó bien de un punto interior cualquiera y midiendo los tres lados de cada uno de los triángulos para su construccion en el papel

Tambien pudieran medirse por abrazaderas los ángulos que se forman en el punto elegido y las distancias del mismo á los vértices del polígono, lo que será preciso hacer cuando no se puedan medir los lados de éste.

Cuando siguiendo cualquiera de los métodos expuestos hasta aquí con la escuadra y con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones, se ha obtenido en el papel la construccion de un polígono rectilíneo y se ha adquirido el convencimiento de que la operacion se ha practicado con toda la exactitud posible, se podrán obtener, valiéndose de las escalas y de los trasportadores, las magnitudes de todas las rectas que le componen y los valores en grados de los distintos ángulos que formen aquellas entre sí.

909. **Contornos curvilíneos.**—Si el contorno del polígono dado es curvilíneo, como el de la fig. 623 (lám. 42), se inscribe en él por cualquiera de los métodos anteriores, por ejemplo el de radiacion, un polígono rectilíneo, y se puede combinar este método con el de *interseccion* para determinar puntos como los 1 y 2 que pertenecen á la curva correspondiente á cada lado, tal como CD; ó bien construir nuevos triángulos sobre cada lado EF, para determinar puntos como los 3 y 4 de la curva. Tambien se puede combinar el método dicho de radiacion con la escua-

dra, haciendo uso de ésta para hallar puntos como los 5 y 6 pertenecientes á la curva de cada lado FG, por medio de ordenadas.

910. **Observaciones acerca de las comprobaciones del contorno**.—Además de las comprobaciones expuestas en los planos de que nos hemos ocupado y las demás que pueden ocurrirse al geómetra, es conveniente hacer uso del *problema de la carta* (846) determinando la posicion de un punto cualquiera O (fig. 621; lám. 42) con relacion á los A, B y C, y repitiendo la misma operacion para otros tres C, D, E, ó D, E, F, tantas veces como se crea conveniente: al fijar en el plano el punto O con relacion á los vértices, todas sus proyecciones deben concurrir en un mismo punto, verdadera proyeccion del O, si las operaciones todas están bien ejecutadas.

911. **Levantamiento del plano de los objetos interiores de un polígono**.—Operaciones análogas á las expuestas se practican con los diversos objetos que se hallan en el polígono, y que pueden formar parte de su contorno, sean interiores ó exteriores. Daremos ligeramente una idea del modo de levantar el plano de los objetos que se presentan con más frecuencia.

912. **Lagunas.—Pantanos.**—Cuando en el interior de un polígono se encuentran pequeñas lagunas, ó porciones de terrenos cercados ó pantanosos, se procederá como en los casos á que se refieren las figuras 604, 605 (lám. 40) y 608 (lám. 41).

913. **Rios.—Caminos.**—Se empezará por establecer una alineacion ADEH (fig. 624; lám. 42) en sentido de la longitud del rio ó camino: sobre las partes AD y EH, que pueden considerarse como los ejes principales de polígonos terminados por las curvas del rio, se bajarán las perpendiculares de los puntos B, C, F y G, uniendo estos entre sí y con los D y E donde el eje AH corta al rio, por medio de las rectas AB, BC...., á fin de tener los lados de los polígonos principales inscritos en las curvas ABCD y EFGH. En los puntos A y B se levantan las perpendiculares AY y BL y en un punto Y de la AY la perpendicular YL á esta recta, poniendo despues jalones en los puntos Y y L equidistantes de A y B, con lo que tendremos construido un rectángulo ABLY que encerrará una parte del rio, cuyo contorno quedará determinado bajando ordenadas, como se ven indicadas algunas en la figura sobre los dos lados AB y LY de dicho rectángulo. Para determinar el valor de BL=AY se buscará un punto L′ en la AB, desde el cual se vea bajo el ángulo de 45° el jalon L, y se tendrá BL′=BL. La anchura aproximada del rio sería igual á BL—(Ld+Be) y la verdadera, que es la tomada en el sentido de la normal á la curva del rio, puede determinarse por medio del triángulo rectángulo formado por la normal ac, la ab y la perpendicular bc, en el cual se conocen el ángulo recto y las ab y bc, que se pueden hallar; buscando, pues, el valor de ac, se tendrá para la anchura del rio ac'=ac—cc': ó bien despues de establecida con jalones la normal ac', se podrá medir por cualquiera de los métodos expuestos (735).

Repitiendo el estudio hecho en el primer rectángulo en todos los demás, y uniendo los puntos L y M y los N y O.... para referir por ordenadas á las LM, NO.... las partes de curva comprendidas entre las BL y BM, y las CN y CO.... tendremos el polígono YLMNOPQ y el RSTXJZV circunscritos á las porciones correspondientes del rio.

Si la línea AH prolongada no volviese á cortarle, se cambiará tambien de direccion, siguiendo su curso, y trazando una segunda línea principal HH′ que forme con la primera AH uno de los ángulos que permite la escuadra, ó bien valiéndose del *abrazadero* para fijarla.

Antes de abandonar el terreno se ensayarán las comprobaciones siguientes: 1.ª Si los ángulos de los rectángulos que no se han tomado primeramente con la escuadra, como el L, son rectos. 2.ª Si cada dos lados opuestos de los mismos son iguales. 3.ª Si resultan tambien PQ=RS, PR=QS, y rectos aquellos de los ángulos P, Q, R y S que no se han tomado entre los datos necesarios para la construccion del plano.

914. La construccion en el papel por medio del croquis ó registro no presenta dificultad, y habiendo procedido en el terreno del modo expuesto, los errores serán parciales, pues no traspasarán los límites del rectángulo á que corresponden, y para la comprobacion se verá si los valores que da la escala para las rectas correspondientes á las LM, NO.... representan las medidas halladas para éstas en el terreno.

915. Si se tratase de un camino irregular, despues de establecida la AHH′, bastaría trazar solamente las líneas quebradas ABCD y EFGH que hacen veces de polígonos inscritos, y levantar sobre sus lados AB, BC.... ordenadas como la B*d*, que terminan en la orilla opuesta, marcando en el croquis las distancias B*d* y B*e* del punto B á los jalones colocados en los *e* y *d*.

Si es una carretera como representa la fig. 625 (lám. 43), bastará establecer en sentido de su eje la línea quebrada ABC, haciendo los ángulos B de 45° ó 135°, ó fijándolos cuando no tengan estas graduaciones por medio de abrazaderos; se tomará además el valor de la perpendicular *ab* á la AB, que representa la anchura de la carretera. Un punto cualquiera C del eje se determina tomando la mitad de la distancia *mn* entre dos puntos cualesquiera de las *aristas* ó *bordes* de la carretera.

916. **Arroyos.—Veredas.**—Si los arroyos son estrechos y se pueden salvar sin dificultad, se seguirá en estos y las veredas el método expuesto (915). Pero muchas veces es tal su figura y presenta curvaturas é inflexiones de tal naturaleza, que es más conveniente en muchos trozos establecer como se ve en la fig. 626 (lám. 43) una línea quebrada ABCDE en sentido de una sola de sus orillas, siguiendo su curso lo más aproximadamente posible, y valiéndose de los ángulos que permite la escuadra, ó de los abrazaderos en caso necesario. Para determinar la curvatura de la parte F, se ha tomado como eje la ordenada *de*; para la de la G los lados del rectángulo *r*, y para la de la H los del triángulo rectángulo isósceles *t*

construido sobre el eje auxiliar *fg*. En el trozo anterior se han tomado como más convenientes por ejes los lados del triángulo *abc*.

917. **Edificios**.—El contorno poligonal, cualquiera que sea su forma, de un edificio aislado ó de una manzana de casas, se determina por cualquiera de los métodos expuestos (884), y tambien por el de rodeo, determinando los valores de los ángulos por medio del recipiángulo (515).

Puede tratarse además de conocer la distribucion interior del edificio, la construccion de que se ha hecho uso y la decoracion ó aspecto exterior, así como tambien las formas, dimensiones y proporciones de las diferentes partes que le componen, para representarlo todo en el papel.

Desde luego se comprende que no bastaría un solo plano para el conocimiento de todas las circunstancias dichas, por lo que se usan varios, horizontales y verticales, dispuestos de la manera más conveniente para obtener las proyecciones de una y otra clase.

918. *Plantas ó secciones horizontales*.—Se conciben planos horizontales que cortan á los diferentes pisos del edificio y sobre los cuales se obtienen sus proyecciones horizontales ó *plantas*. Las figuras semejantes á estas proyecciones, trazadas en el papel con arreglo á una escala dada, se llaman los planos de las *plantas*.

En cada una de estas secciones se ha adoptado el convenio de representar todos los objetos situados en el mismo piso inferiores al plano de proyeccion, figurando además en las piezas abovedadas las aristas entrantes y salientes de las bóvedas, y en las escaleras los escalones ó peldaños situados encima del plano hasta el suelo del piso superior inmediato. Debe advertirse que todas las líneas situadas en el plano de la seccion ó debajo del mismo y que han de representar la distribucion interior, se trazan con *líneas llenas*, adoptando el que sean de *trazos* cuando indican las líneas situadas encima de dicho plano, y haciendo de *puntos* las que han de representar líneas ocultas.

El plano horizontal se traza en los sótanos ó cuevas donde empieza el arranque de las bóvedas; en los pisos bajos, principales y sotabancos á la altura de un decímetro sobre el dintel inferior ó batiente de los balcones ó ventanas, y en los desvanes ó boardillas trasteras, sobre el mismo suelo.

Para formarse una idea completa al concebir un edificio cortado por un plano horizontal, debe suponerse que se puede separar la parte superior para que quede al descubierto todo lo que debe representarse de la inferior.

La primera operacion es determinar el contorno exterior por el método más á propósito de los que llevamos expuestos, á fin de que los lados del polígono obtenido representen todas las líneas de fachada si el edificio está aislado, ó las que solo presente al exterior en el caso contrario; pues las demás que se llaman *laterales* ó *de costado* hay que deducirlas despues de las operaciones en el interior. Se empieza la medicion por el exterior, anotando, á partir del extremo de cada línea, la distancia hasta el primer hueco de puerta ó ventana, llamado *entrepaño;* despues la anchura del hueco, y así sucesivamente hasta el otro extremo de cada línea de fachada. Las dimensiones obtenidas en la planta baja para el contorno, ligeramente modificadas, sirven para el exterior de los demás pisos.

Para hacer estas operaciones se usan los rodetes de cinta de hilo, las reglas y reglones, el nivel de albañil y el de aire.

En la distribucion interior se dá principio por la planta baja y los sótanos ó cuevas; despues se determina la planta principal, y así sucesivamente hasta la más elevada. La primera operacion es recorrer toda la planta baja, examinando todas las piezas que la componen, su disposicion y dimensiones respectivas, á fin de distribuir y figurar convenientemente dentro del contorno ya trazado en el croquis los muros ó paredes de fachada, las paredes maestras y los tabiques, de modo que la figura terminada por el contorno quede dividida en tantas partes como piezas tiene la habitacion. Examinando despues pieza por pieza, se marcarán en el croquis los huecos de las puertas y ventanas, la figura de sus alféizares, las escaleras, etc., y se empezará la medicion tomando primero los datos para determinar las figuras de las piezas, y despues, en sentido de su contorno, los necesarios para poder construir la figura con todas las circunstancias señaladas en el croquis, anotando en éste cuidadosamente y con claridad los resultados de las medidas obtenidas, y procurando no olvidar ninguna, á fin de no pasar á otra pieza sin haber concluido por completo la anterior.

Cuando las piezas son rectangulares como la número 1 (fig. 627; lámina 43) bastará medir su largo y ancho; bien que para la comprobacion convendría medir tambien las dos diagonales. Si las piezas fuesen trapecios ó cuadriláteros cualesquiera irregulares, como la número 2, se medirán sus cuatro lados y una de las diagonales, y se tendrán los datos necesarios para la construccion en el papel; aun cuando se medirá tambien la otra diagonal para que sirva de comprobacion.

Si son poligonales como la número 3, se medirán las diagonales *ac* y *ad* y todos sus lados, á fin de construirlas en el papel por medio de triángulos. Puede medirse además otra diagonal *be* para la comprobacion. Tambien pueden medirse tan solamente los lados y fijar los ángulos por medio del *abrazadero,* como en *b,* ó del recipiángulo.

Si la pieza tiene una parte curva GF como la número 4, se medirá la diagonal *mr* y se trazará, valiéndose de un reglon y de un yeso ó un lápiz blanco, la cuerda *mn* que se medirá para construir los dos triángulos que se ven en la figura, y para obtener la parte curva, se trazarán ordenadas con el yeso, valiéndose de una escuadra grande de madera y de una regla, ó haciendo que sirva de escuadra el nivel de perpendículo, midiendo las abscisas y ordenadas con el metro de bolsillo. Tambien se puede hacer el trazado de las líneas, cuando tienen bastante longitud, valiéndose de una cuerda impregnada de blanco ó de almazarron.

Por último, cuando la disposicion del interior de alguna pieza sea tal que no se pueda medir alguna de sus diagonales, se hará uso de triángulos auxiliares para fijar los ángulos, como se ha dicho ya: pudiendo tambien usar el recipiángulo para seguir el método de rodeo.

Los gruesos de los muros de fachada como el AB y los de las paredes maestras, como las que separan las piezas 1 y 2 de las 3 y 4, así como los tabiques de estas últimas que presentan huecos de puertas ó ventanas, se pueden medir directamente. Respecto á los que no presentan huecos, habrá que deducir sus gruesos, combinando las otras medidas que se conozcan. El grueso del muro AG será igual á $3,^{m}20-(2,^{m}50+0,^{m}10)=0,^{m}60$, como el de fachada; el del tabique P será $3,^{m}20-(0,^{m}10+2,^{m}50+0,^{m}35)=0,^{m}25$.

Las medidas deben hacerse en general con independencia unas de otras, es decir, sin hacer combinaciones para deducir unas de otras, excepto en aquellos casos en que no se puede pasar por otro punto, y de que acabamos de poner ejemplos; pues de este modo se podrán hacer comprobaciones, viendo si las longitudes totales de los lados de cada pieza resultan iguales á las sumas de las medidas parciales de puertas, ventanas y entrepaños.

Levantado el plano de la planta baja, se procede á levantar el de los sótanos, procurando establecer con precision la correspondencia de sus muros con los del plano de aquella, lo que se consigue por medio de señales hechas en las fachadas ó en otras partes del edificio y relacionadas con los huecos de la planta baja y de las cuevas. Se representará tambien la disposicion de las escaleras como en los demás pisos, y los sitios ó parte ocupada por las obras subterráneas, como son alcantarillas y tajeas, que se construyen para las conducciones de las aguas. Pasando despues á los pisos superiores, los sotabancos y las boardillas, cuyos planos se levantan por los mismos procedimientos, se obtiene el de las armaduras, proyectando sobre los suelos ó pisos de las últimas las diferentes piezas de madera que las componen, empleando en esta operacion la plomada, las reglas, el yeso y las cuerdas impregnadas; debiendo advertirse que la uniformidad en tamaño y disposicion de las partes que constituyen este género de construcciones, facilita la operacion.

Por último, para obtener la planta de los edificios ó posesiones de grande extension, en los que se hallan patios de varias figuras y tamaños para distintos usos, terrenos cercados para servir de huertas y jardines y otras dependencias, se hará uso de los métodos explicados en este capítulo para levantar el plano de los terrenos de corta extension.

919. *Alzados ó elevaciones*.—Para los alzados se conciben planos verticales que dejen todo el edificio á un mismo lado, sobre los cuales se proyectan las caras principales ó fachadas, teniendo no solo por objeto su representacion, sino la determinacion de todas las alturas de las distintas partes del edificio y la elevacion total del mismo. El plano en que se proyecta cada fachada se supone paralelo á ella.

Los croquis de las elevaciones ó alzados se hacen con facilidad, pues todo lo que se ha de dibujar se halla á la vista, y la mayor parte de las dimensiones horizontales se deducen de las plantas de todos los pisos, teniendo que determinar solamente las que puedan faltar, así como todas las verticales. Es preciso tomar con precision los detalles de arquitectura; teniendo que colocar andamios cuando el edificio es de consideracion.

Para obtener las dimensiones verticales, se hace uso de un reglon que se coloca verticalmente, y por medio de una plantilla ó escuadra se van tomando las diversas alturas directamente y con independencia unas de otras para que haya lugar á verificaciones, y dividiendo la operacion por pisos; comprobando despues con la altura total del edificio, que en general hay que obtenerla de una manera indirecta, como más adelante veremos; ó bien no comprobando más que hasta el vuelo de las cornisas ó alero de los tejados, suspendiendo una plomada y midiendo despues la longitud del hilo.

Observaremos con este motivo, que la apreciacion de la longitud del hilo ha de hacerse procurando que tenga la tension que experimentaba al tomar la medida, lo que se consigue con facilidad disponiendo horizontalmente la unidad de medida en una ventana ó balcon de los pisos altos, á fin de tomar su longitud en el hilo, empezando por la parte superior de este último, en tanto que queda suspendida la restante al exterior del edificio y en estado de tension por el peso del perpendículo. De lo contrario, la contraccion del hilo alteraría la medida de la altura.

Como las escalas adoptadas al tratarse de los planos generales son muy pequeñas para presentar con claridad todos los detalles, se adoptan escalas quíntuplas ó décuplas de las primeras para dibujar en mayor tamaño los objetos que merecen mencionarse especialmente. El plano que contiene estas figuras se llama *plano de detalles*.

920. *Cortes ó secciones verticales.*—Para formarse una idea de estas secciones se concibe cortado el edificio por varios planos verticales, unos perpendiculares y otros paralelos á la línea de fachada y en sentido de las mayores dimensiones. En cada uno de estos planos se proyectarán solamente los objetos comprendidos entre él y las paredes más próximas al mismo. Para formarse una idea exacta, es fácil concebir, que seccionado el edificio por un plano vertical se quita ó separa la parte anterior para dejar al descubierto la que debe ser representada.

Por medio de estas secciones se conoce tambien el espesor de los muros ó paredes y el de los suelos, y se representan los materiales de que se hallan formados y sus diversas disposiciones, así como tambien la direccion que tienen en cada piso los cañones de las chimenas y otros que puedan existir en el interior de los muros.

En la formacion del croquis de las secciones verticales se debe proceder con el mayor acierto, pues la importancia de ellas es fácil de concebir; logrando por su medio conocer la naturaleza de la construccion del edificio. Esta parte exige, para ser desempeñada cual corresponde, mucha práctica y otros conocimientos agenos de este lugar. Respecto á las dimensiones, se deducen fácilmente en cada piso de las respectivas plantas y alzados. Los gruesos de los entramados horizontales que constituyen los techos de las habitaciones inferiores, y los suelos de las superiores inmediatas, se determinan indirectamente, como hemos dicho, para las paredes que no contenian huecos.

Con el objeto de que los edificios tengan mayor estabilidad, no se construyen los muros ó paredes de fachada de modo que los planos que los limitan sean ambos verticales, sino que se da al paramento exterior una ligera inclinacion hácia el interior del edificio, á fin de que vaya disminuyendo gradualmente el grueso desde la base donde es mayor hasta que en el último piso quede con el que le deba corresponder. Al mismo tiempo se va disminuyendo el grueso en cada piso, retirando un poco en cada uno hácia la parte exterior los paramentos interiores, que siempre son verticales. Las paredes divisorias disminuyen de grueso, aproximándose ambas caras una misma cantidad. La disposicion de esta clase de muros se representa en la fig. 628 (lám. 43), que es la seccion vertical de una pared de fachada; y con el objeto de obtener su figura verdadera en el plano de la seccion vertical del edificio, hay que medir la inclinacion del paramento exterior, valiéndose de una plomada, dispuesta de modo que, suspendida de la parte superior del muro, vaya á tocar con su extremo inferior el pié del mismo: tomando entonces la distancia ac, su relacion con la longitud ab del hilo dará la inclinacion que se deseaba. Esta relacion, que es la tangente del ángulo abc que forma con la vertical el paramento del muro, se llama el *talud* de este último. Si suponemos que se tiene $ac = 0,^{m}1$, y $ab = 5,^{m}$ el talud será de $0,^{m}02$ por metro. Respecto á la disminucion rs de los gruesos en el interior, se obtiene fácilmente por las medidas tomadas en las plantas de los pisos respectivos.

Una disposicion análoga á la de los muros de fachada de los edificios se da á los *muros de sostenimiento* ó *de contension de las tierras*, siendo mayores los taludes ó escarpes, y tambien los retallos que forman el escalonado interior, á los que se da el nombre de *zarpas* ó *bermas*.

Las dimensiones interiores de las cañerías ó tubos de las chimeneas se deducen de las que tienen en el exterior, en especial á su salida en las boardillas, y de los demás indicios á que da lugar la naturaleza y dimensiones de la construccion.

Para tener una idea de las dimensiones de los cimientos, no hay otro medio que practicar *sondeos* en los sótanos y por la parte exterior del edificio.

Para completar la operacion se hace uso de los *perfiles*, llamándose así las secciones de los detalles de Arquitectura, como cornisas, molduras, etc., causadas por planos, en los cuales solo se consideran las líneas situadas en ellos.

921. *Ejemplo de los planos de un edificio.*—La fig. 629 (lám. 43) representa el sencillísimo ejemplo de la *planta* ó *seccion horizontal* de una casilla para dos peones camineros, en virtud de la seccion dada segun AB en la fig. 630 (lám. 43), que representa el *alzado* ó *elevacion*. La figura 631 (lám. 44) manifiesta el *corte* ó seccion vertical por un plano cuya traza horizontal es la recta CD en la fig. 629 (lám. 43).

Por medio del croquis se procede sin dificultad á la construccion del plano en el papel con arreglo á la escala elegida.

922. *Replanteos.*—Recíprocamente, formado el proyecto de un edificio en el papel y bien estudiado en su conjunto y detalles, para trasladar su planta al terreno en sus dimensiones naturales, lo que se llama *trazado del proyecto*, se procede de la manera siguiente: una vez elegido el sitio donde ha de construirse el edificio, se empieza por desembarazar el terreno de todos los obstáculos dejándole lo más horizontal que sea posible ó *banqueado*, segun las circunstancias, con el objeto de que pueda hacerse el trazado con exactitud, con lo cual se tendrá hecha la *explanacion*.

Despues se traza como base de las operaciones una recta que sea la más principal del proyecto, ó las que determinen naturalmente las circunstancias locales. En efecto, en un edificio aislado, cuya posicion no ha de estar sujeta á ninguna condicion, se puede tomar por base una de las líneas de fachada, ó bien si es simétrico el eje de simetría; pero si el edificio ha de llenar ciertas condiciones, como en el caso de formar parte de una calle sujeta á rigurosa alineacion, se tendrá que tomar como base la línea de fachada; resultando que la figura del edificio y las circunstancias locales son las que determinan aquella línea que está llamada á ser la principal en el trazado, y á la cual deben referirse todas las demás del proyecto.

Trazada la direccion de la base con toda la exactitud posible, se procede á medir la longitud total que debe tener, fijando bien sus límites y repitiendo la operacion varias veces; por lo que no se hará uso en estas ocasiones de la cadena, sino de reglones bien construidos, colocados al tope y dispuestos horizontalmente (682). Se marcan despues sobre la base los puntos por donde pasan los ejes secundarios del edificio, trazándolos y midiéndolos con las mismas precauciones; y se va continuando el trazado y medicion de las demás líneas, procediendo de las mayores á las menores, determinándolas en su totalidad y tomando despues en cada una las partes de que consten para que las diferencias parciales que puedan resultar se distribuyan entre todas y se hagan inapreciables: lo que no sucedería si se procediese de las partes al todo, pues entonces se irían acumulando los errores parciales.

Cuando ya se han señalado las distancias á que deben hallarse los muros y demás partes del edificio y sus direcciones respectivas, se marcan los espesores por medio de piquetes clavados de trecho en trecho, y formando líneas paralelas á los ejes correspondientes, los cuales se unen por cuerdas de cáñamo llamadas de *atirantar*. En Madrid se usan cuerdas delgadas de esparto llamadas *tomizas*.

Con el fin de que no desaparezcan estas líneas del trazado, como sucede al abrir las zanjas ó practicar los desmontes, se hace uso para señalar los anchos y las distancias, de unos listones de madera MN, RS (figura 627; lám. 43) llamados *camillas*, que se colocan horizontalmente á mayor altura que el terreno y se sujetan á estacas verticales clavadas en este, de modo que se hallen unas de otras á mayores distancias que los anchos de las zanjas. Al principio se trazan con lápiz las dimensiones en las camillas por si hubiese necesidad de alguna rectificacion, y cuando ya se tiene seguridad en el trazado del proyecto, se fijan con cortes de sierra las verdaderas magnitudes. Para referir al terreno las dimensiones señaladas en las camillas se emplean las plomadas, y se pueden señalar líneas horizontales en las estacas que sostienen las camillas, ó bien valerse del terreno mismo si está bien horizontal ó nivelado, para la referencia de las profundidades respectivas de las zanjas.

923. **Puentes.—Pontones.—Alcantarillas.—Tajeas.**—Se procede de un modo análogo al que hemos explicado para los edificios. La figura 632 (lám. 44), representa la planta, proyeccion horizontal, alzado y corte ó seccion de una alcantarilla, con las dimensiones principales que deben anotarse.

Para generalizar diremos, que el método es el mismo, cualesquiera que sean las dimensiones del objeto que se trate de representar, desde el más complicado hasta el más sencillo. Siendo el objeto de la Topografía la representacion del terreno, nos valemos igualmente para obtenerla de secciones horizontales ó plantas y de secciones verticales ó cortes. Véanse en nuestro tratado de Acotaciones sobre este punto, la representacion de las superficies por curvas de nivel y la aplicacion de esta teoría á la *representacion del terreno*.

924. **Situacion de los objetos interiores ó detalles en el plano.**—Sea el terreno que representa la figura 633 (lám. 44), cuyo contorno se ha levantado con la escuadra, valiéndose de un eje AD y de varias ordenadas al mismo. Para colocar en su interior los varios objetos que contiene, y que se llaman tambien *detalles*, en sus verdaderas relaciones de posicion, se referirán á los lados, al eje y á las ordenadas del polígono principal ABCDEF.

Cuando el objeto es sencillo, como por ejemplo un árbol L, bastará medir con exactitud una perpendicular bajada desde él á la recta que más se le aproxime de las tres AF, FG ó AG, lado del polígono principal la primera, ordenada la segunda, y parte del eje AD la tercera, midiendo tambien la abscisa correspondiente.

Si fuese una casa como R, bastaria bajar dos perpendiculares desde los extremos de la línea de fachada que estuviese más próxima á una de las rectas fijas del canevás, como se ha explicado antes, y que es la FE.

Para fijar la laguna N se han referido á la ordenada BH los extremos de una de las rectas del polígono circunscrito á la misma para levantar su plano.

El rio y puente P se refieren á la línea quebrada FGMC, compuesta de la parte MG del eje y de las ordenadas FG y CM.

Valiéndose del croquis, que debe hallarse anotado con claridad y exactitud, es fácil la reproduccion de la figura en el papel. Si se tratase de formar registro para la situacion de los objetos interiores ó detalles, se empezará por los de más importancia hasta concluir con los más sencillos, poniendo en la primera columna las líneas del polígono principal, lados, ordenadas ó directrices á que se hallen referidos; en la segunda las abscisas; en la tercera las ordenadas con su signo; en la cuarta el nombre de los objetos y en la quinta y última las observaciones: separando con líneas horizontales las partes del registro correspondientes á cada uno de los objetos.

Entre las líneas elegidas para la situacion de los detalles, la quebrada FGMC que parte de un vértice F y va á parar á otro C del polígono principal atravesándole, recibe particularmente el nombre de *trasversal*.

Si el plano del terreno se hubiese levantado con la escuadra por otro método, como el de rodeo, ó con la cuerda, entonces sería preciso para fijar los objetos interiores, como por ejemplo los de la figura 634 (lámina 44), trazar la trasversal GHYLS que en este caso parte de un punto G del lado FE y va á parar al S del AB. Las rectas GH, HY... que componen la línea quebrada GHYLS, se pueden enlazar entre sí por ángulos de 90° ó de 135°, y en caso de necesidad por abrazaderos, que es el único camino que puede seguirse cuando se emplea solo la cuerda. Estableciendo otras nuevas trasversales que puedan ser necesarias, se conseguirá fijar en el plano la posicion de todos los objetos que deba comprender.

La casa R se ha situado valiéndose de una nueva línea establecida MN. Los grupos de casas ó pequeña poblacion P se ha situado relacionando uno de los lados del polígono principal circunscrito á la misma, que en el caso actual es un trapecio, con el CD del polígono principal correspondiente al terreno, por medio de dos ordenadas.

Otros varios medios pueden emplearse para la situacion de los objetos, que podrán ser útiles segun las circunstancias de las localidades. En la figura 635 (lám. 44) para fijar el objeto M se han prolongado las ad y bc hasta la AB que representa parte de una trasversal ó de un lado de un polígono, y medido las aa' y bb', con lo cual en la construccion, despues de obtenida la $a'b'$ se hará centro en los extremos de esta con los radios aa' y bb' y trazando dos arcos, la parte ab de la tangente á los mismos, comprendida entre los puntos de contacto, representará la longitud y posicion de la fachada del objeto M.

Para determinar el N se ha prolongado la ad midiendo la aa'; se ha bajado la perpendicular cc' y prolongado la ab hasta b', con lo cual, midiendo las bb' y $b'c'$, despues de obtener en la construccion la $a'c'$, se trazará desde el punto a' un arco con el radio aa', se levantará en c' una perpendicular, en la cual se tomará la parte $b'c'$, y tirando por b' una tangente $b'a$ á dicho arco, no habrá más que tomar en ella la bb' y se tendrá en magnitud y posicion la ab que representa la fachada del objeto N.

Por último, un objeto P puede ser inaccesible, pero visibles sus cuatro fachadas desde cuatro directrices distantes que formen parte del canevas. Para determinar su posicion se han establecido alineaciones en sentido de sus líneas de fachada, que terminen en las directrices. Tomando en esta las medidas necesarias para obtener los puntos a', b', c', d' y a'', b'', c'', d'', y trazando rectas por estos puntos, sus intersecciones a, b, c, d determinarán en magnitud y posicion el objeto P

925. Para la formacion del registro de las trasversales, como la GHYLS de la fig. 634 (lám. 44), tanto para su determinacion y situacion, como para las de los detalles que á ellas se refieren, se consignará á la cabeza del mismo la distancia á que el punto de partida G se halla de uno de los vértices F ó E del lado FE del polígono principal, así como tambien la posicion del punto de arribo S. Despues en las columnas del registro se consignarán: en la primera las longitudes de las GH, HY, YL, LS; en la segunda los ángulos que estas líneas forman entre sí; en la tercera las abscisas de cada una de ellas; en la cuarta las ordenadas correspondientes con su signo; en la quinta los nombres de los objetos, y en la sexta y última las observaciones, pudiendo expresar en esta ó en una nueva columna establecida al intento, la circunstancia cuando ocurra, de tener que valerse de los abrazaderos para la disposicion entre sí de las rectas que componen la quebrada elegida por trasversal.

926. **Levantamiento del plano de varios terrenos contiguos ó adyacentes.—Parcelacion.**—Ocurre muchas veces tener que situar en los planos las líneas sinuosas que separan unos de otros los terrenos contiguos, ya por pertenecer á distintos propietarios, ya por ser de diferentes calidades ó destinarse á cultivos de distinta clase

927. **Con la escuadra.**—Supongamos que se trata por ejemplo de levantar el plano de la porcion de zona, cuyos límites naturales son el rio y el camino representados en la fig. 636 (lám. 45), comprendida entre las líneas AB y CD, elegidas convenientemente Esta parte de zona ABCD se halla compuesta de cinco porciones, y se quiere obtener en el plano el contorno de cada una de ellas.

En vez de ir determinando uno por uno estos cinco polígonos, como ya se sabe, conviene, para abreviar, considerar al conjunto de ellos, ó sea á la parte ABCD, como un sólo polígono en el cual se trata de fijar las líneas que le dividen formando en su interior varias ramificaciones, como si se tratase de situar las márgenes de rios y caminos que le atravesasen. Empezaremos por lo tanto trazando un eje principal MN, al cual se referirán por ordenadas los puntos B, E, F y C en sentido de la direccion del rio, y los A, G, H, J y D del camino. Se relacionarán despues las líneas poligonales interiores que dividen al polígono ABCD en otros cinco; bajando ordenadas desde sus vértices, ya al eje MN, como se ha hecho desde los puntos R, Z y T, ya á alguna de las ordenadas, como se ve en los puntos L y Q con respecto á la del punto H, y en P con relacion á la de J; ya, por último, á los ejes secundarios del polígono principal, como en los S y X que están referidos á los BE y FC, así como tambien á estos y al EF los demás puntos de la orilla del rio; con lo cual se habrán tomado todos los datos necesarios para hacer la construccion total en el papel, pudiendo copiar con separacion, si es necesario, porque sean tierras de distintos propietarios, los planos de las cinco porciones. En el *Catastro* reciben estas porciones el nombre de *paralelas;* y cuando se levanta el plano de una cierta extension de terreno, con el objeto de detallar en el mismo todas las paralelas que comprende, se le denomina *plano parcelario.*

928. La fig. 637 (lám. 45) manifiesta un nuevo ejemplo, en el cual se han dispuesto las operaciones de modo que pueda haber lugar á mayor número de comprobaciones que las que permite la figura anterior, en la cual hubiera podido seguirse el mismo procedimiento. En efecto, trazada una recta AB por el vértice saliente Q, se ha levantado en el punto B una perpendicular BC que pasa por el vértice entrante N y otra AD en el punto A, y suponemos que las condiciones de localidad han obligado á trazar la oblícua DC que pasa por el punto saliente Z, con lo que se tendrá un trapecio ABCD, en el cual se podrá comprobar la DC (894); en el punto G de la AB se ha levantado la perpendicular GH, cuya posicion podría comprobarse en el caso de que el punto G dividiese á la AB en dos partes iguales, lo que hubiera podido prepararse así, viendo si resultaba la GH igual á la mitad de AD + BC. Se elegirá despues en la GH un punto O, tal que colocando en él la escuadra y levantando la perpendicular EF á la GH, esta corte en el mayor número posible de puntos á la línea quebrada que separa las parcelas 1 y 2 de las 3 y 4; se referirán los vértices de esta línea tales como los P y R á la EF, y los de la otra línea quebrada que separa las parcelas 1 y 3 de las 2 y 4 á la GH, como se ve en los S y T.

Los demás vértices de las parcelas se hallan referidos á los lados del trapecio ABCD. Pueden tambien comprobarse como se hace con este, los lados DH y HC de los dos trapecios AGHD y GBCH en que aquel queda dividido; así como tambien los lados opuestos de los rectángulos AEOG y GOFB y los ángulos rectos en E y F que no se han tomado directamente.

929. **Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.**—Por iguales consideraciones á las expuestas para la escuadra, no se determinarán separadamente las siete parcelas que componen el polígono que representa la fig. 638 (lám 45). En efecto, considerando la operacion como si se tratase de un solo polígono en el cual se hubieran de detallar despues las líneas situadas en su interior, se trazará una diagonal BD, y prolongando la BJ se acabará de trazar el triángulo BDC, que se podrá construir, así como el ABD, midiendo sus lados y comprobarle como se hizo (900). Se referi-

rá despues á los lados de estos triángulos las líneas que dividen las parcelas, de la manera siguiente: se medirán la RD y DS y los puntos R y S fijarán la RS; y midiendo ST se tendrá el punto T que con el X extremo de la AX, que se medirá tambien, nos darán la direccion de la XT, la cual prolongada deberá pasar por el punto P, lo que servirá de comprobacion al construir el plano. Se tendrá así el cuadrilátero ARTX, compuesto de las parcelas 1 y 2; midiendo las AZ y RV, y trazando la ZV se obtendrán aquellas separadamente; y de una manera análoga se procedería para fijar las parcelas 5, 6 y 7. Para determinar la 3, como ya se conoce la longitud de RD, se medirán las TP, DN, MN y DM para construir en el papel el triángulo DMN, y la línea MN prolongada deberá pasar por la proyeccion del punto P en el plano; pudiéndose medir para mayor comprobacion la MP. Por último, la parcela 4 se obtendrá midiendo la recta QP y las CG y CY para trazar la GY y medir las partes GH y LY que nos darán los puntos H y L, que unidos á los J y P terminarán la construccion.

Convendrá comprobar en el terreno si las medidas parciales tomadas en cada línea, tal como en la AB, componen la total de esta; y en el papel se procederá en la construccion del todo á las partes para que las diferencias queden distribuidas entre estas, á fin de evitar la acumulacion de los errores.

930. **Levantamiento del plano de una poblacion pequeña.** — Cuando se circunscribe un polígono á una pequeña poblacion para obtener su plano, se comprende fácilmente que deben considerarse los grupos de casas ó *manzanas* que la componen, como los objetos interiores que hay necesidad de situar en él, relacionándolas de manera que además de quedar bien determinados los contornos de todas ellas, constituyan entre sí la verdadera figura de las calles y plazas. Este caso no será, por lo tanto, más que un nuevo ejemplo, en el cual hay que considerar un número suficiente de trasversales, el menor posible, y que el geómetra no debe establecer á capricho, sino de manera que á la par que reunan las condiciones más ventajosas á que dé lugar la naturaleza del caso, puedan ofrecer medios sencillos de comprobacion, que proporcionen la seguridad de no haber cometido sino errores parciales, y esta tendencia á que no se acumulen afectando la totalidad de la construccion, encerrándolos dentro de límites que no puedan traspasar, que es á cuanto debe aspirarse, no debe separarse nunca de la imaginacion del geómetra, siendo necesarias mucha práctica é instruccion para desempeñar con acierto esta parte esencial, que es donde más puede hacer brillar estas dotes.

Advertimos, que en las figuras que representen poblaciones y en las demás que sea necesario, no se cotejen sus dimensiones con arreglo á una escala dada, pues siendo nuestro objeto enseñar los procedimientos del levantamiento de los planos, tienen que disponerse aquellas de modo que se hallen con claridad para satisfacer á las explicaciones, y si las hubiéramos sujetado á escala, hubieran resultado acaso confusas muchas de sus partes, que han de ser objeto de nuestra atencion.

931. **Con la escuadra.**—Haremos aplicacion de las ideas expuestas en el levantamiento del plano de la pequeña poblacion que representa la fig. 639 (lám. 45), haciendo uso de la escuadra, acompañada como siempre de la cadena ó cuerda, piquetes y jalones. Lo primero que se ha hecho ha sido trazar el trapecio ABCD que permite la disposicion del camino y del rio que rodean la poblacion, y que circunscribe á ésta. Colocada la escuadra en el punto E, se levantará una perpendicular EM que termine en el lado BC atravesando toda la calle principal, con lo cual el trapecio ABCD quedará dividido en otros dos ABME y MCDE. En los puntos convenientes F y H, se trazarán bajo ángulos de 135° si lo permite la disposicion de las manzanas de casas, las rectas FG y HL que atraviesan dos calles afluentes á la principal, y que reunen la circunstancia de dividir, la FG al primer trapecio ABME en otros dos AGFE y GFMB, y la HL al segundo MCDE en los dos EHLD y HLCM. Los cuatro trapecios ABME, MCDE, AGFE y EHLD, se podrán comprobar hallando, como se ha dicho (894), el valor de las rectas BM, MC, GF y HL. Para comprobar el trapecio MHLC en que los lados MC y HL son oblícuos á las bases MH y CL, se trazará si es posible, como en el caso actual, la línea TS que une los puntos medios de dichos lados, y se verá si su medida es igual á la mitad de la suma de las bases MH y LC. Respecto al trapecio BGFM análogo al anterior, y en que no se puede establecer la línea que une los puntos medios de los lados FG y BM, se trazará la recta MM' perpendicular á AB, y se comprobará la GF en el trapecio GFMM', como ya se ha dicho para los casos en que uno de los lados no paralelos es perpendicular á las bases.

En el trapecio MHLC, la TS se puede tomar como auxiliar para la separacion de las dos manzanas que encierra, ó se puede establecer la ordenada YJ sobre la HL.

Réstanos dividir el trapecio HLDE que encierra las cuatro manzanas, números 2, 3, 5 y 6. En el punto P de la AD se levantará la perpendicular OP, que atravesando la calle que se vé en la figura vá á terminar hácia el centro de la plaza O, y fijando los puntos convenientes Q y O, se dirigirá desde el primero la alineacion QR hasta que encuentre á la EM, y desde el segundo la OX formando ángulos de 135° con la OP, y con esta misma inclinacion la XZ, hasta terminar en la DC. Por último, se prolongará la OX hasta N, como se vé en la figura, tanto para fijar la calle que atraviesa la alineacion gh, como para comprobar en el trapecio OPDN la $ON = Om + gh + nN$. En el trapecio EPQR se comprobará finalmente la RQ.

Resulta de la disposicion explicada:

1.° Que cada manzana queda inscrita en un polígono, que en este procedimiento suele ser en general un trapecio, reduciendo así la cuestion á uno de los casos más elementales, pues no habrá más que referir á los lados del polígono, por medio de ordenadas, los vértices de dicha manzana.

2.º Que bien construidos estos polígonos, cuyo conjunto constituye lo que entre los prácticos se llama *poligonacion*, y no es otra cosa que el *canevas*, cuyos lados están sujetos á las comprobaciones expuestas, los errores que se cometen serán parciales; pues el que se cometiese en la medida de una de las ordenadas que fijan la manzana inscrita en cualquiera de los trapecios, por ejemplo, la 2, que lo está en el EPQR, cambiaría algun tanto la posicion de dicha manzana; pero este error, no traspasando los límites del trapecio, no influiría en la colocacion de las demás manzanas que contiene el plano.

Acabando de examinar la figura, se observa que si las líneas RQ y OX no se pudiesen fijar por el ángulo de 135°, habría que valerse del *abrazadero* para tener triángulos *a* y *b*, y que para fijar el ángulo total *e* ha habido que construir los dos triángulos *c* y *d*. Por último, el camino y el rio se han referido á los lados CD y BC del trapecio ABCD, por medio del suficiente número de ordenadas.

932. **Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.**—Teniendo presente la manera de operar con estos medios, y siguiendo una marcha análoga á la explicada con la escuadra, se puede levantar tambien el plano de varios grupos de casas ó de un pequeño pueblo.

La sola inspeccion de la fig 640 (lám. 45) da á conocer las operaciones practicadas. Las líneas de trazos manifiestan el polígono circunscrito, cuyos lados son otros tantos ejes, así como las rectas que atraviesan las varias calles, circunscribiendo y aislando las diferentes manzanas. Refiérense á los expresados ejes las líneas de fachada, como GH, que prolongada termina en el lado AB y en la recta ZL, debiéndose medir las MG, GH y HL, juntamente con las demás que son necesarias para completar la operacion. La RS prolongada termina en los lados DE y DC; las líneas que parten del punto V se han fijado por dos triángulos, y para más comprobacion se pueden fijar por tres como en Z. Todo lo demás se comprende fácilmente.

933. **Construccion del plano.**—Las construcciones en el papel, en los casos expuestos en las figuras 639 y 640 (lám. 45), valiéndose del croquis ó registro no presentan dificultad, siguiendo una marcha análoga á la del terreno y en virtud de los conocimientos que ya se poseen.

Aunque los planos de las poblaciones pudieran estar comprendidos en la seccion en que nos ocupamos del levantamiento de los planos de los objetos interiores, sin embargo, por su importancia y la extension que requiere la explicacion de los procedimientos, nos ha parecido conveniente tratar de ellos por separado.

934. **Observaciones generales.**—En las teorías expuestas en este capítulo para el levantamiento de los planos de los terrenos de corta extension, no deben mirarse las resoluciones dadas como cuestiones particulares, sino como conjunto de ideas para indicar los inmensos recur-

sos de que puede disponer el geómetra, y que se le ocurrirán á cada momento segun las diversas circunstancias en que se halle, los que no debe desdeñarse poner en ejecucion por la consideracion del mayor ó menor tiempo empleado en las operaciones, y combinando así sus conocimientos con los recursos de la teoría y de la experiencia, no habrá dificultad que no pueda vencer para lograr la exactitud apetecida; siendo nuestro ánimo generalizar siempre las ideas, y poner al lector en disposicion de resolver sin dificultad las cuestiones que á cada paso puedan presentársele.

CAPITULO XVII.

Levantamiento de los planos de terrenos de mediana extension.

Consideraciones generales.—Determinacion del contorno.—Polígonos rectilíneos compuestos de un corto número de lados.—Por interseccion.—Con los goniómetros.—Con la brújula.—Con la plancheta.—Con la plancheta fotográfica.—Por rodeo.—Con los goniómetros.—Con la brújula.—Con la plancheta.—Por doble interseccion.—Por radiacion.—Observaciones acerca de los métodos que anteceden. —Métodos expeditos.—Construccion de los planos levantados por los procedimientos expeditos.—Deduccion de los ángulos de direccion por el conocimiento de los rumbos, y de estos últimos conocidos los primeros.—Problema 1.°—Problema 2.°—Aplicaciones.—Levantamiento de planos de los polígonos compuestos de un gran número de rectas.—Contornos curvilíneos y mistilíneos.—Terrenos inaccesibles en su interior, rectilíneos ó curvilíneos.—Terrenos en parte accesibles y en parte inaccesibles.—Levantamiento del plano de los objetos interiores de un polígono.—Extensas lagunas ó pantanos.—Rios, caminos, costas, islas, arroyos, veredas.—Camino en un bosque.—Galerías subterráneas.—Edificios y demás construcciones. —Situacion de los objetos interiores ó detalles en el plano.—Terrenos contiguos ó adyacentes.—Planos de las poblaciones.—Aplicaciones á la Topografía militar. —Definiciones.—Trazado y levantamiento de planos.—Ligera idea de los reconocimientos militares.

935. **Consideraciones generales.**—Si se echa una ojeada sobre cuanto hemos dicho acerca del levantamiento de los planos de los terrenos de corta extension, se comprenderá fácilmente que habremos de seguir una marcha análoga al ocuparnos de los de mediana extension, en los cuales se facilitarán los procedimientos por hacer uso de instrumentos más adecuados, como son todos los goniómetros, las brújulas y la plancheta, que nos proporcionarán las ventajas siguientes:

1.ª La mayor facilidad y expedicion en el establecimiento de los polígonos principales inscritos ó circunscritos, por el recurso de poder elegir ángulos y rumbos de todas magnitudes.

2.ª La mayor precision en la direccion de las visuales, y el mayor alcance que permiten los anteojos de que van acompañados la mayor parte de los referidos instrumentos, reduciendo así al menor número posible el de los lados de los polígonos principales; circunstancia apreciable en el caso actual de ser ya de alguna consideracion la extension de los terrenos cuyo plano ha de levantarse.

3.ª Las más prontas y sencillas comprobaciones de que puede hacerse uso, fundadas en el conocimiento de los valores de todos los ángulos de los polígonos.

Debemos hacer tambien las siguientes advertencias:

1.ª Que solo se hace uso de los instrumentos dichos para el establecimiento de los contornos de los polígonos principales y de las líneas quebradas que sirven de auxiliares en la determinacion de los detalles ú objetos interiores, debiendo entrar casi siempre en combinacion la escuadra con el instrumento de que se haga uso, para referir á los lados de los polígonos principales y de sus trasversales por medio de ordenadas, todos los vértices del polígono dado y los que haya necesidad de fijar entre los que presentan los objetos interiores.

2.ª Que cuanto vamos á exponer puede igualmente aplicarse á los terrenos de corta extension, en el caso de poderse disponer de los expresados instrumentos, facilitando y asegurando así el resultado de las operaciones.

Prévias las ventajas y advertencias expuestas, pasaremos á la resolucion de las cuestiones, haciendo uso de los métodos de interseccion, rodeo, doble interseccion y radiacion, que son los propios y más exclusivos de los goniómetros, brújula y plancheta, aplicándolos segun las circunstancias de localidad.

936. **Determinacion del contorno.—Polígonos rectilíneos compuestos de un corto número de lados.—Por intersección.—Con los goniómetros.**—Sea el polígono ABCDEF (fig. 641; lám. 45): se medirá con todo cuidado el lado AB que se elige como base; se hará estacion en el extremo A tomando todos los ángulos que forman con la base las visuales dirigidas á los vértices F, E, D y C, así como el rumbo de la AB con la brújula que acompaña al goniómetro, trazando en el croquis las direcciones de las visuales y los arcos correspondientes de los ángulos, y escribiendo en los extremos de estos últimos que terminan en aquellas y en sentido de las mismas, los valores de los ángulos, como se ve en la figura. Se pasará despues á hacer estacion al otro extremo B, para tomar los ángulos que forman con la base las visuales dirigidas á los mismos puntos F, E, D y C, anotando igualmente los valores en el croquis, con lo cual se tendrán los datos necesarios para la construccion del plano. Para comprobacion convendrá tomar en la base AB un punto intermedio O, y midiendo y tomando por base la AO, hacer estacion en O para medir los ángulos que con la AO forman las visuales dirigidas á los citados puntos F, E, D y C, anotándolos en el croquis. En el extremo A se ha es-

crito el rumbo 295° de la base AB; en el punto O la longitud 170m de la AO, y en el otro extremo B de la base la longitud total 315,m5 de la misma.

Si para consignar los datos se quisiese hacer uso de un registro, se formará este como se ve á continuacion:

Registro del polígono ABCDEF levantado con los goniómetros por el método de interseccion.

LONGITUD DE LA BASE AB = 315,m50

RUMBO DE LA MISMA = 295°.

Angulos en la estacion A 1	Angulos en la estacion B 2	Vértices 3	Angulos en la estacion O distante 170 metros de A 4	Observaciones 5
120°	30°	F	40°	
80°	66° 30′	E	81°	
44°	105°	D	122°	
20°	135°	C	153°	

En la primera columna se escriben los ángulos medidos en la primera estacion A y en la tercera los vértices á que corresponden; en la segunda los ángulos de la estacion B con relacion á los mismos vértices, y en la cuarta los ángulos en la estacion intermedia O, disponiendo la quinta columna para escribir las observaciones que puedan ocurrir.

937. *Construccion del plano.*—Para construir el polígono en el papel, se tomará con arreglo á la escala elegida la *ab* que represente á la AB, y se irán formando en sus extremos con los trasportadores, los ángulos que se hallen consignados en el croquis ó en el registro escribiendo en los extremos de las líneas que se tracen las letras minúsculas correspondientes. Observando despues el punto en que se cortan cada dos rectas de una misma letra, *e* por ejemplo, y marcándole con el lápiz, se volverá á escribir á su lado dicha letra, y se unirán entre sí con rectas los diferentes puntos de interseccion y los extremos de la base, resultando de este modo construido el polígono *abcdef* semejante al ABCDEF.

Para comprobacion, se tomará la *ao* que represente á la AO, y formando en *o* los ángulos que señale el croquis ó el registro, cada línea perteneciente á un punto *e* deberá pasar por la interseccion de las dos rectas tiradas por los extremos de la base; donde vemos que el método de interseccion se comprueba por él mismo, y esta razon, unida á la de que sirve tambien para comprobar todos los demás, ha sido la causa de darle la preferencia en el órden de exposicion de los distintos métodos.

La marcha que hemos adoptado para llevar el registro permite determinar con claridad en el papel la proyeccion de un punto E y la comprobacion del mismo, por la circunstoncia de encontrarse en un solo renglon todos sus datos.

Por medio de la escala y el trasportador de Troughton se pueden hallar los valores de los lados y ángulos del polígono en cuestion, y por el rumbo de la AB se le situará en el papel al ponerle en limpio en la posicion que deba hallarse.

938. *Replanteo.*—Recíprocamente, dado el polígono en el papel, para construirle en el terreno en la suposicion de ser conocidos los extremos de la base, se formarán con esta los ángulos correspondientes, estableciendo alineaciones con los jalones en sentido de las visuales, y hallando como se ha dicho (662) el punto de interseccion de las dos correspondientes á cada punto E, clavando despues un piquete en dicho punto que ha de representar un vértice del polígono. Para comprobacion, se podrá formar el ángulo en O correspondiente al punto E, antes de clavar el piquete, para ver si la visual OE corta al jalon que señalaba la interseccion de las visuales AE y BE.

939. Supuesto que en el papel se tiene ya trazado el contorno del polígono *abcdef* y se pueden tomar sus ángulos con el trasportador, se podrá proceder tambien en el replanteo de la manera siguiente: se hará estacion en B, dirigiendo la alidada fija al jalon del punto A, y tomando en el instrumento el ángulo *abc* se plantará un jalon en sentido de la visual de la alidada movible, y establecida la alineacion se tomará la BC de la longitud que marque la *bc* en la escala; se pasará despues al punto C y se continuará de la misma manera hasta haber trasladado todo el polígono al terreno.

940. Cuando sólo se puede disponer de trasportadores sencillos, es fácil cometer un error de 8 ó 10 minutos en la medida de un arco correspondiente á un ángulo dado en el papel, por lo cual se tomará un arco duplo, cuádruplo, óctuplo ... del que se va á medir, y al cometer en este caso el mismo error en el arco total, dividiendo el número de grados hallado por 2, 4, 8... se tendrá el valor del arco dado con un error mitad, cuarta, octava parte.... del que hubiera resultado si se hubiera medido directamente.

941. *Diferentes disposiciones que presentan los polígonos.*—Se procedería igualmente en la aplicacion del método por interseccion, si el polígono fuese cóncavo como el de la fig. 620 (lám. 42), y con respecto á las circunstancias de localidad, visibilidad y posicion de los puntos pudiera elegirse una base fuera del polígono, como en la fig. 619 (lám. 42).

Puede emplearse en muchos casos, cuando el polígono del terreno tiene bastante extension, aunque compuesto de un corto número de rectas, una base interior que parta de uno de los vértices A á otro D (fig. 642; lámina 45), ó que partiendo ó no de un vértice corte á los lados del polígono.

En todos estos casos se tomarán en la estacion A (fig. 642; lám. 45) todos los ángulos á izquierda y derecha de la base AD, y suponiendo que el sentido de la marcha es de A á D se considerarán como positivos los ángulos tomados á la derecha de la AD en el expresado sentido, y como negativos los tomados á la izquierda, consignando entonces en el registro que se lleva de la misma manera el signo correspondiente á cada ángulo. Se procederá del mismo modo pasando á hacer estacion al otro extremo D de la base y al punto intermedio O de comprobacion.

La eleccion de la base depende, pues, de la condicion de visibilidad de los demás vértices desde sus extremos, y cuando aquella es interior, se supone que el terreno es accesible tambien en este sentido ó á lo ménos en la parte en que se establece la base, teniendo que elegir ésta fuera cuando el polígono es inaccesible.

Por último, la naturaleza del terreno no permite en muchas ocasiones que se descubran desde los extremos de la base AB todos los vértices del polígono principal, como sucede en la fig 643 (lám. 46), en la cual sólo han podido determinarse los C, D, E, F y G; en cuyo caso, se tomarán las distancias EF y FG, entre puntos ya fijos como *bases auxiliares* para la determinacion de los restantes Y, H y L y así se continuaría si quedasen más puntos que determinar; siendo fácil concebir que por este método se podrian ir fijando los varios objetos comprendidos en una cierta extension de terreno

En el registro se consignarán las bases auxiliares en la columna donde se halle la base principal AB y á continuacion de la misma, inscribiendo en las de los ángulos los que la correspondan con sus signos respectivos segun el sentido de la marcha, que se puede indicar en la columna de observaciones

942. *Observacion general* —En todos los casos expuestos del método de interseccion se puede hacer uso tambien del problema de la carta para conocer en la construccion del plano si las proyecciones de los puntos se hallan bien determinadas. En efecto, haciendo estacion en uno de los vértices F (fig. 642; lám. 45) se tomarán los ángulos AFB y BFC con relacion á los tres puntos A, B y C, y construyéndolos en el papel trasparente, se verá si despues de construido el polígono en el papel, y colocado sobre él el trasparente de modo que los lados de los ángulos trazados en éste pasen por los puntos correspondientes á las proyecciones de los A, B y C, el vértice comun de aquellos coincide con la proyeccion de F Se podría repetir la comprobacion relativamente á los puntos B, C y E, y deberá siempre hacerse doble con el objeto de ver si las dos proyecciones se confunden, cuando se ha hecho estacion en el terreno en un punto cualquiera situado en el interior ó en el exterior del polígono.

943. **Con la brújula.**—Se procede exactamente de la misma manera, y todo cuanto hemos dicho respecto de los procedimientos y comprobaciones con los goniómetros es aplicable á la brújula, sin más que hacer las dos observaciones siguientes:

1.ª Que en el modelo del registro correspondiente al croquis de la fig. 641 (lám. 45), se sustituya en los encabezamientos la palabra *ángulos* con la de *rumbos*.

2.ª Que en el caso de la fig. 642 (lám. 45) no hay necesidad de la consideracion de rumbos positivos y negativos; pues siendo ahora la verdadera base la posicion de la aguja en cada una de las estaciones, el rumbo correspondiente en cada caso da la direccion de las visuales á los vértices; no sirviendo la base AD elegida en el terreno más que para fijar con la medida de su longitud la distancia de las dos estaciones A y D. Con los goniómetros, además de esta circunstancia, reune la de servir de base ó línea de referencia para la medida de los ángulos.

La sola inspeccion de las figuras 644 y 645 (lám. 46) sirve para aclarar cuanto acabamos de decir.

Se concibe fácilmente la manera de hacer la construccion en el papel y el replanteo en el terreno, empleando para esto último los rumbos en la determinacion de las direcciones correspondientes á los lados del polígono en el procedimiento explicado (939) y que habrán de tomarse en el papel con el trasportador.

944. **Con la plancheta.**—Sea un polígono cualquiera ABCDE (figura 646; lám. 46). Se hará estacion en el extremo A de uno de los lados AB, despues de haber medido este con toda precision y haber trazado en la plancheta una recta *ab* que le represente con arreglo á la escala elegida. Habiendo horizontado el tablero de la plancheta, colocado el punto *a* en la vertical del A del terreno y declinado *ab* sobre AB, se dirigirán con la alidada visuales desde el punto *a* á los jalones colocados en los E, D y C del terreno, señalando con las letras *e' d'* y *c'* las líneas trazadas con el lápiz en la plancheta. Antes de mover esta para trasladarla á la estacion B, será conveniente repetir la operacion para cerciorarse de que no ha habido errores, así como igualmente no deberá olvidarse tomar con la declinatoria en el punto *a* el rumbo magnético de la recta AB con el objeto de valerse de él para la orientacion del instrumento en las estaciones sucesivas (451). Tambien deberá orientarse la línea *ab* (460) para la colocacion del polígono en el papel cuando se dibuje en limpio.

Hechas todas estas operaciones, se trasladará la plancheta al punto B, orientándola (451) y colocando el punto *b* en la vertical del B; se dirigirán las visuales á los puntos E, D y C, y en las intersecciones de las nuevas líneas trazadas de lápiz con las correspondientes anteriores se escribirán las letras *e*, *d* y *c*, que serán las proyecciones de los puntos E, D y C del terreno. Deberá igualmente comprobarse la exactitud de las direcciones de las visuales antes de mover la plancheta.

Uniendo despues entre sí por medio de rectas las proyecciones obtenidas en el papel del tablero, se tendrá la proyeccion *abcde* del polígono ABCDE, y por medio de la escala adoptada para la base *ab* y de los trasportadores se podrán obtener los valores de todos sus ángulos y lados.

Cuando se hace uso de la plancheta puede tambien elegirse la base en cada caso particular, de la manera más conveniente, segun las circunstancias.

945. *Comprobaciones.*—Conviene asimismo, antes de dejar el terreno, ejecutar las operaciones siguientes para que sirvan de comprobacion:

1.ª Se elegirá un punto intermedio O de la línea AB, se medirá AO, y como si esta fuera una nueva base, se dirigirán visuales desde su extremo O á los puntos E, D y C, y si las líneas trazadas de lápiz por el canto de la alidada pasan exactamente por los puntos de interseccion que marcan las proyecciones *e*, *d* y *c* de aquellos, la operacion estará bien ejecutada.

2.ª Se colocará la plancheta en uno de los vértices D del terreno, despues de haber pegado en cualquiera parte de ella los extremos de un papel trasparente, y se dirigirán visuales desde la proyeccion de dicho punto á otros tres E, A y B, trazando las líneas correspondientes para tener los ángulos EDA y ADB; despegando despues el papel y colocando los lados de los ángulos de modo que pasen á la vez por los puntos *e*, *a* y *b*, si su vértice comun coincide con el punto *d* que ya se tenia en la plancheta, será una prueba de haber operado anteriormente con exactitud.

946. *Replanteo.*—Se podrá emplear cualquiera de los métodos expuestos (938 y 939). Supongamos que queremos emplear el segundo, que es siguiendo el contorno: despues de colocar *b* en la vertical de B, se dispondrá el canto de la alidada de manera que coincida exactamente con la línea *ab* trazada en la plancheta, y se declinará *ba* sobre BA si el punto A está determinado en el terreno; procurando despues que la plancheta no se mueva, se colocará el canto de la alidada en contacto de *bc*, se establecerá la alineacion BC con jalones, se medirá una parte de ella que sea la que marque en la escala la *bc*, y se clavará un piquete en el punto C, continuando del mismo modo. Si el punto A no está determinado, se trazará la alineacion BA con el rumbo que deba tener, y se determinará el punto A como se ha explicado para el C. Es conveniente clavar dos agujas bien verticales en los extremos de cada línea *bc* al poner en contacto con ella el borde de la alidada, para examinar durante la operacion si esta enrasa siempre con aquellas y no ha tenido por lo tanto movimiento alguno.

El replanteo por intersecciones se comprende fácilmente.

947. **Con la plancheta fotográfica.**—Medida y orientada una base AB (fig. 647; lám. 46) se estaciona el aparato fotográfico en el extremo A, y se determinan como hemos indicado (623) las direcciones relativas de las visuales tiradas desde A á los demás puntos E, D, C y B, cuidando de fijar siempre el otro extremo de la base. Ejecutando en B las mismas operaciones, se puede proceder á la construccion del plano, determinan-

do la línea *ab* que ha de representar á AB, y colocando la primera placa de modo que su centro coincida con el punto *a*, y que el rádio *ar* que pasa por la imágen del objeto que señalaba en el terreno el extremo B de la base, coincida exactamente con la *ab*, marcando los extremos de los rádios que corresponden á los demás objetos. Colocando la segunda placa en *b* de una manera enteramente análoga, la interseccion *d* de las prolongaciones de dos rádios correspondientes á las imágenes de un mismo objeto D, será su proyeccion en el plano. De la misma manera que el árbol D, se determinan las posiciones de la cruz E y el castillo C. Cuando son muchos los objetos que han de observarse, conviene llevar en cada estacion una anotacion que indique el órden en que se toman las imágenes, á fin de evitar el inconveniente de que estas puedan confundirse unas con otras.

Eligiendo un punto intermedio de la base, para hacer estacion en él, puede hacerse la comprobacion de una manera análoga á la que hemos indicado con los demás instrumentos.

Creemos conveniente mencionar aquí, que en el concurso abierto en Madrid el año 1864, por la Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales, ha obtenido Mr. Laussedat el *accesit*, por la memoria que ha presentado sobre el tema siguiente:

Determinar los errores probables que deben resultar en los planos topográficos deducidos de dos perspectivas fotográficas, teniendo en cuenta todas las causas que puedan influir en su produccion.

948. **Por rodeo.—Con los goniómetros.**—Sea un polígono cualquiera ABCDE (figura 648; lám. 46): se buscará un punto interior O desde el cual se descubran todos los vértices del polígono, bien sea un árbol, una torre, etc., ó bien un punto elevado del terreno, en cuyo caso se establecerá en él un jalon ó banderola, así como en todos los vértices del polígono. Estos vértices deben satisfacer á la condicion de que sean visibles desde cada uno de ellos el anterior y posterior y el punto O, que cuando es interior como en el caso actual, se le suele llamar *punto central*. Se hará la primera estacion en el vértice A elegido para punto de partida, y se tomará el ángulo de direccion EAB anotando en el croquis su valor 102° 30′ por la parte interior de la circunferencia trazada con un rádio arbitrario, como se vé en la figura. La operacion de tomar el ángulo interior de direccion del polígono, medido por el arco *abc*, puede llamarse *observacion directa;* se tomará igualmente el ángulo exterior de direccion que mide el arco *cda*, y cuyo valor 257° 30′ se anota tambien por la parte interior del círculo, á cuya operacion llamaremos *observacion inversa*, examinando si los dos ángulos *abc* y *cda* componen 360°, y repitiendo cuando es necesario las operaciones hasta lograr este resultado, como sucede en el caso que nos ocupa, pues se tiene $102°\ 30' + 257°\ 30' = 360°$; se tomarán igualmente los dos ángulos EAO y OAB para examinar si sus

valores, que anotamos por la parte exterior al círculo, componen el valor del EAB; es decir, si sucede como en el caso actual, que es $58^\circ+44^\circ 30'=102^\circ 30'$. Por último, se tomarán los valores de los dos ángulos que forman las rectas tiradas desde A á otros tres vértices E, D y C por ejemplo, que son los EAD de 38° y DAC de 35° 30′, cuyos valores no se indican en la figura por evitar complicacion. Todos estos datos son necesarios para proceder despues con acierto en la construccion del polígono en el papel, logrando así que cierre completamente y sea una figura semejante á la del terreno, además de tener medios de hacer comprobaciones que corroboren el resultado; por lo que no se deberá abandonar la estacion A, hasta obtener con la debida precision todos los datos que hemos indicado.

Se procederá despues á medir con exactitud el primer lado AB que se toma como *base*, y que de antemano se debe elegir en la parte de terreno más igual, anotando en el croquis su valor 785 ᵐ30 por la parte exterior del polígono en sentido de la línea AB y el rumbo 270° por la parte interior; se harán las mismas observaciones de ángulos en la segunda estacion B, se medirá el lado BC, y así se continuará hasta que se haya medido el último lado EA. La figura, que hace al mismo tiempo veces de croquis, manifiesta las anotaciones hechas en el mismo.

Debemos advertir que para las ulteriores operaciones de construccion del plano es preciso contar además de la exactitud de los ángulos, con la de uno de los lados á lo ménos; por cuya razon se medirá el primer lado AB, que nos ha de servir, como veremos despues, de base de la construccion, con los reglones; ó bien con la cadena, pero repitiendo varias veces la medida para tomar un término medio. Los demás lados se podrán medir siempre con la cadena una sola vez, pero con todo el esmero que sea posible. En la primera estacion A se tomará tambien el rumbo de la AB.

No debe abandonarse el terreno sin haber hecho las comprobaciones siguientes:

1.ª Se sumarán todos los ángulos de direccion interiores, para ver si su suma vale tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono ménos dos. En el caso actual siendo un pentágono, deberán valer

$$180^\circ \times 3 = 540^\circ;$$

y en efecto se tiene

$$102^\circ 30' + 109^\circ + 101^\circ 30' + 114^\circ 30' + 112^\circ 30' = 540^\circ.$$

2.ª Si el punto O fuese tal que se pudiese estacionar en él, se podrían tomar tambien los ángulos formados á su alrededor, los cuales deben valer juntos 360°.

Cuando no se puede elegir un punto interior O, al cual se puedan dirigir visuales desde todos los vértices del polígono por ser el terreno un bosque cerrado, un lago, etc., se buscará un punto exterior O′ en algun paraje elevado, ó una veleta aunque algo lejana, que se descubra desde todos los vértices del polígono, para poder dirigirla las visuales desde todos ellos.

949. *Construccion del plano.*—Para construir la proyeccion del polígono en el papel valiéndose del croquis, despues de elegida la escala de boj ó de marfil sencilla ó de trasversales y el trasportador, que será preferible uno de círculo entero de cuya exactitud estemos convencidos, se trazará una recta *ab* que represente á la AB; en el punto *a* se tomarán de la misma manera que se hizo en el terreno los ángulos que se observaron en el punto A, á fin de trazar con exactitud las direcciones de las rectas *ae″* y *ao′* que representan las de las AE y AO; en el punto *b* se formarán igualmente los mismos ángulos que se tomaron en B en el terreno, y la interseccion *o* de las rectas *ao′* y *bo″* será la proyeccion del punto O. En el lado *bc″* se tomará una parte *bc* que represente en la escala á BC, y si esta se hallase bien medida y trasportada, al trazar en *c* el ángulo *bco*, la línea *co* pasará por el punto *o*, pero si dicha línea no se hallase bien medida ó trasportada, resultando su proyeccion *bc″* ó *bc′* mayor ó menor que la verdadera *bc*, como al formar el ángulo *bco* en los puntos *c′* y *c″* las rectas *c′ o‴* ó *c″ o*^{IV} no pasarían por el punto *o*, pero serían paralelas á la verdadera *oc*, no habrá más que tirar por el punto *o* la *oc* paralela á *c′ o‴* ó *c″o*^{IV}, y su interseccion *c* con la *bc* será la verdadera proyeccion del punto C, siendo *bc* igualmente la del lado BC. Se procederá del mismo modo en la construccion del resto del polígono, debiendo coincidir el lado *ea″* del ángulo *dea* con el *ae″* del *eab* si no ha habido errores en dicha construccion, fuera de los permitidos en los límites asignados para los valores de los ángulos y medicion de las rectas segun los instrumentos de que se haya hecho uso; logrando siempre, si se ha procedido con esmero en todas las operaciones de campo y de gabinete, que el polígono cierre por completo, ó á lo más con una pequeña diferencia.

Para comprobarlo y poder hallar el vértice donde se ha cometido el error en el caso de no cerrar el polígono, haremos uso del problema de la carta, con cuyo objeto se tomaron en el terreno en cada vértice como en el B los ángulos ABE y EBD, que trazados en un papel trasparente, se verá si colocado éste sobre la proyeccion *abcde* pasando sus tres lados *ba′*, *be′* y *bd′* por los puntos *a*, *e* y *d*, se halla el vértice comun de los *a′be′* y *e′bd′* confundido con el *b* del polígono *abcde*. Por consiguiente, en los casos de mucha precision será mejor construir sobre los *ae* y *ed* los arcos capaces de los ángulos ABE y EBD para estar más seguros en la comprobacion. Esta se puede limitar tambien á la construccion en cada uno de los vértices *b* de ángulos *a′be′* y *e′bd′* iguales á los ABE y EBD á partir de una línea fija *ab* para observar si los otros dos lados pasan por los puntos *e* y *d*, proyecciones de los E y D.

Debe tenerse presente que hay casos, aunque raros, en que no satisface esta comprobacion; como sería aquel en que estando mal medido ó construido el ángulo *dea*, resultase representado por el *dem*, siendo además el error del lado *em* tal que su extremo *m* estuviese en la prolongacion de la *ab*; lo mismo pasaría en los casos de estar representado el ángulo *aed* por los *aen* ó *nem*. El error podría quedar oculto si solo se comprobase un vértice *b*; mas se descubriría si se comprobasen todos los vértices ó varios de ellos, que es lo que debe hacerse, pues sería muy difícil que se compensasen los errores.

950. *Registro*.—Cuando se lleva registro se le puede dar la forma que se ve á continuacion

Registro del polígono ABCDE levantado con los goniómetros por el método de rodeo.

RUMBO DE LA BASE AB = 270°.

Estaciones o vértices. 1.	OBSERVACIONES DIRECTAS. Al punto O. 2.	OBSERVACIONES DIRECTAS. Angulos del polígono. 3.	Observaciones inversas. 4.	Angulos de comprobacion. 5	Lados del polígono. 6.	Observaciones generales. 7.
A »	EAO = 58° 0′ OAB = 44° 30′	EAB=102° 30′ »	257° 30′ »	EAD=38° 0′ DAC=35° 30′	AB=785,m3 »	
B »	ABO = 49° 30′ OBC = 59° 30′	ABC=109° 0′ »	251° 0′ »	ABE=30° 0′ EBD=38° 0′	BC=592,m0 »	
C »	BCO = 57° 0′ OCD = 44° 30′	BCD=101° 30′ »	258° 30′ »	BCA=41° 30′ ACE=27° 30′	CD=655,m2 »	
D »	CDO = 58° 0′ ODE = 56° 30′	CDE=114° 30′ »	245° 30′ »	CDB=37° 0′ BDA=48° 0′	DE=650,m0 »	
E »	DEO = 45° 30′ OEA = 67° 0′	DEA=112° 30′ »	247° 30′ »	DEC=33° 0′ CEB=32° 0′	EA=531,m2 »	
		540°				

En la primera columna se colocan las letras que señalan las estaciones; en la segunda las observaciones directas de los dos ángulos en que queda dividido cada uno de los del polígono por la recta tirada desde su vértice al punto auxiliar de comprobacion; en la tercera las observaciones directas de los ángulos del polígono, cuyos valores deben ser la suma de los dos en que se hallan divididos, y que están consignados en la columna anterior; en la cuarta, las observaciones inversas hechas en cada vértice, cada una de las cuales debe componer 360° con la directa del ángulo del polígono, consignada en la columna anterior; en la quinta, los dos ángulos de comprobacion que se toman en cada uno de los vértices para resolver despues en la construccion el problema de la carta; en la sexta, los valores de los lados de los polígonos; y en la sétima, bajo el nombre de observaciones generales, aquellas noticias ó advertencias que puedan contribuir á la mayor claridad en las operaciones posteriores.

Se comprende lo sencillo que será valerse del registro en la construccion del polígono, pues dá lugar á una marcha análoga á la que se ha seguido en el terreno.

951. *Replanteo.*—Se sigue el método expuesto (939).

952. *Observaciones generales.*—En la construccion de los ángulos en el papel podemos adoptar no sólo los trasportadores, para lo cual suponemos que se tiene presente cuanto se ha dicho sobre este punto, sino tambien cualquiera de los procedimientos expuestos en el capítulo XII.

Igualmente puede servir en general de comprobacion en las construcciones, repetir estas con diversas escalas como las de

$$\frac{1}{500},\quad \frac{1}{1000},\quad \frac{1}{5000}$$

Obsérvese tambien que el procedimiento que acabamos de exponer, constituye una verdadera *triangulacion gráfica,* y de esta clase de triangulaciones será de la que hagamos uso en este capítulo, dejando para el siguiente, en el cual nos ocuparemos del levantamiento de los planos de los terrenos de grande extension, la *triangulacion analítica.*

Por último, puede considerarse el polígono ABCDE como la base de una gran pirámide poligonal, cuya cúspide es el extremo de la veleta tomada en general para las observaciones, y las aristas las visuales dirigidas al mismo desde los vértices de la base, y proyectadas en el plano horizontal de ésta segun las rectas OA, OB, OC..., cuya observacion es de la mayor utilidad para comprender fácilmente en lo sucesivo la aplicacion de este procedimiento al levantamiento de toda clase de planos, proporcionando la claridad con que deben presentarse esta clase de operaciones.

953. **Con la brújula.**—Para determinar por rodeo con este instru-

mento el contorno de un polígono principal, se puede seguir una marcha parecida á la que hemos adoptado para los goniómetros. Sea el polígono ABCDE (fig. 649; lám. 47): se hará estacion en el punto de partida A y se tomarán los rumbos de las rectas AB y AO, que suponemos ser de 270° y 314° 30′ y que señalamos como se vé en la figura, que representa tambien el croquis, escribiendo los números en sentido de la direccion de dichas rectas, seguidos de una pequeña flecha, para indicar que son los rumbos de las mismas y no puedan confundirse con los que indiquen sus longitudes. Antes de levantar el instrumento de la estacion A, se toman tambien para las comprobaciones que se hacen despues de la construccion, los rumbos de las AE, AD y AC, que son 192° 30′, 154° 30′ y 119° 30′, advirtiendo que han de referirse al extremo blanco de la aguja. Se medirá despues el lado AB, y su valor 785,m3 se colocará en sentido de la direccion de la recta y por la parte exterior del polígono. Se pasará á la segunda estacion B, se tomará en primer lugar el rumbo de la BA, que es como sabemos (369) la observacion inversa, cuyo valor 90° referido á la punta azul como el 270° del punto A, difiere de éste en 180°; habiendo resultado ambos rumbos iguales á 270° si la observacion inversa se hubiera referido á la punta blanca; pero para evitar confusion supondremos que en el contorno del polígono se hacen siempre las observaciones inversas con la punta azul tambien. Se tomarán igualmente en el mismo punto B los rumbos de las BO y BC, se medirá BC, se pasará á hacer estacion en C, y así se continuará de la misma manera hasta llegar al punto de partida A, donde se volverá á estacionar para hacer la observacion inversa de la AE, que resultará ser de 12° 30′, á menos que no se hubiera tomado tambien este rumbo cuando se estacionó la primera vez en A; lo cual conviene hacer así, reservando este valor para comprobar con él al fin de la operacion el rumbo 192° 30′ de la observacion directa de la EA, y ver si su diferencia es de 180°, como aquí resulta.

Cuando es posible estacionar la brújula en el punto O, se pueden tomar con la punta blanca los rumbos de las AO, BO, CO..... cuya operacion da el mismo resultado que si se tomaran con la punta azul en los vértices A, B, C.....

954. *Construccion del plano.*—Para hacer la construccion en el papel valiéndose del croquis, se trazará para representar la direccion de la aguja magnética, una recta *n* que generalmente se dispone en forma de flecha, en el punto *a* que suponemos se elige como proyeccion del de partida A, y desde este con los rumbos de las AB, AO y AE, se trazarán otras rectas indefinidas *ab′*, *ao′* y *ae′*; en la *ab′* que representa la direccion del lado AB se tomará la parte *ab* que represente en la escala su longitud. En *b* se trazará una recta *n′* paralela á la *n* para referir á ella los rumbos de las BA, BO y BC, trazando con ellos las rectas *ba′*, *bo″* y *bc″*, debiendo verificarse que *ba′* coincida exactamente con la *ab′*, pues de no ser así no existiría el paralelismo entre las *n* y *n′* y habría que modificar

su trazado; la intersección de las rectas *ao* y *bo''* nos dará el punto *o*, que como debe ser la verdadera proyeccion de O, para poder servirnos de él en el resto de la construccion es preciso determinarle, á imitacion de lo que se hizo en los goniómetros, midiendo por lo menos la primera recta AB con toda la precision que sea posible, y trasportándola con el mayor cuidado, así como tambien es necesario determinar con toda exactitud los rumbos de las AO y BO, trasladándose, si es posible, al punto O para comprobarlos por medio de las observaciones inversas. Se tomará despues en la *bc''* la parte *bc* que represente á BC, y en *c* se trazará la *n''* paralela á su anterior *n'* y mejor á la primitiva *n*, y se continuará de la misma manera hasta llegar al punto *e*, en el cual, al trazar la *ea''* con el rumbo de la observacion directa en *e*, se ha de verificar que coincida exactamente con la recta *ae'* trazada con el rumbo de la observacion inversa en *a*. Si alguno de los rumbos dirigidos al punto *o* no pasase por él, habría error en el lado correspondiente, y se rectificaría como se hizo en la construccion de la fig. 648 (lám. 46).

Para hacer la comprobacion de la construccion hecha, se tomarán en los puntos *e*, *d* y *c* los rumbos que se tomaron con el extremo blanco de la aguja en el punto A; pero como pudiera suceder que hubiera un caso en que las proyecciones de los puntos *e* y *c* fuesen *m* y *r* estando mal construido el polígono, y no pudiéndose descubrir esta circunstancia por la comprobacion, convendrá hallar en grados los valores de los ángulos EAD y DAC por las diferencias de los rumbos (287) y trazar los arcos capaces de dichos ángulos sobre las rectas *ed* y *dc*, cuando sea necesario el convencimiento de la exactitud en la construccion.

955. *Registro.*—Cuando se lleva registro se le puede dar la forma que se ve en la página siguiente.

En la primera columna se escriben las letras que indican las estaciones ó vértices, siendo la primera A la que se toma por punto de partida, y á la cual nos referiremos para la explicacion del registro; en la segunda el lado AB del polígono, designando su longitud 785,m,3; en la tercera la observacion directa 270° ó sea el rumbo del lado AB que está en la columna anterior tomado en el punto de estacion A que se halla en el mismo renglon; la cuarta columna se deja por ahora en claro; en la quinta se coloca el rumbo 314° 30′ de la visual AO tirada desde el punto de estacion al punto O de comprobacion, consignando en la sexta los rumbos de las AE, AD y AC, tiradas desde dicho punto de estacion á otros tres E, D y C, como observaciones inversas, para la comprobacion por el problema de la carta del respectivo vértice A en la construccion del plano.

Al pasar á la segunda estacion se empezará por hallar la observacion inversa, es decir, se tomará el rumbo 90° de la AB consignándole en la columna cuarta, que se dejó en blanco; se llevará la misma marcha en la escritura de los datos tomados en la segunda estacion B, dejando en claro la cuarta columna para escribir la observacion inversa de la BC al colocarse en la tercera estacion C; continuando del mismo modo hasta consignar todos los datos en el registro, así como en la última columna las observaciones generales á que dé lugar la operacion.

Se concibe que la construccion del polígono en el papel valiéndose del registro será sumamente sencilla, pues da lugar á la misma marcha que se ha explicado anteriormente haciendo uso del croquis, y se tienen del mismo modo los datos necesarios para hacer todas las comprobaciones.

Registro del polígono ABCDE levantado con la brújula por el método de rodeo.

Estaciones ó vértices. 1.	Lados del polígono. 2.	Observaciones directas. 3.	Observaciones inversas. 4.	OBSERVACIONES DE COMPROBACION. Al punto O. 5.	A los vértices. 6.	Observaciones generales. 7.
A	AB=785,m3	270°	90°	AO; 314° 30′	AE; 192° 30′ AD; 154° 30′ AC; 119° 30′	
B	BC=592,m0	341°	161°	BO; 40° 30′	BA; BE; BD;	
C	CD=655,m2	59° 30′	239° 30′	CO; 104°	CB; CA; CE;	
D	DE=650,m0	125°	305°	DO; 181° 30′	DC; DB; DA;	
E	EA=531,m2	192° 30′	12° 30′	EO; 259° 30′	ED; EC; EB;	

956. *Replanteo.*—Se sigue el procedimiento que hemos dado á conocer (939) determinando por medio de los rumbos las direcciones de las rectas que han de trazarse en el terreno.

957. **Con la plancheta.**—Se colocará este instrumento en estacion en el punto de partida A (fig. 650; lám. 47) despues de haber trazado una línea indefinida *ab'* en el papel del tablero y situado uno de sus puntos *a* en la vertical del A del terreno; se declinará *ab'* sobre AB, y dirigiendo visuales con la alidada al vértice E y al punto O elegido anteriormente, se trazarán en la plancheta las líneas indefinidas *ae'* y *ao'*; hecho esto, se mide con toda precision el lado AB para que sirva de base de las operaciones y se toma en la *ab'* la parte *ab* que representa su longitud en la escala elegida, tomando tambien el rumbo de la AB. Se trasladará la plancheta al punto B, colocando *b* en la vertical de B, y se declinará *ba* sobre BA por medio de la alidada ó del declinatorio, y dirigiendo visuales á los puntos O y C se trazarán en la plancheta las rectas *bo''* y *bc'*, de las cuales la primera nos dará en su interseccion con la *ao'* la proyeccion *o* de O, y la segunda la direccion del lado BC del polígono, por lo que tomando en ella la parte *bc* que represente la longitud que se obtenga midiendo la BC en el terreno, se tendrá la proyeccion *c* del punto C.

En estas dos estaciones de la base debe ponerse todo el cuidado posible en las observaciones, así como en la medida de AB, pues todo depende de la exacta construccion del triángulo *aob* que debe ser la verdadera proyeccion del AOB.

En efecto, trasladando la plancheta al punto C, y despues de declinar *cb* sobre CB, al dirigir la visual al punto O, la línea *co* trazada en la plancheta pasará por *o* si *cb* es la verdadera proyeccion de CB; pero si en la medida ó trasportacion de esta hubiese habido error y estuviera representada por *bc''* ó *bc'''*, las rectas dirigidas al punto O y trazadas por los puntos *c''* ó *c'''* colocados en la vertical de C no pasarian por el punto *o* de la plancheta; pero no habrá más que tirar una paralela *oc* por el punto *o* á dichas rectas, y se tendrá la verdadera proyeccion *bc* de BC; habrá, pues, que mover la plancheta para colocar como está en la figura el punto *c* en la proyeccion de C, y declinando *co* sobre CO se observará si *cb* queda tambien declinada sobre CB. Se continuará del mismo modo, disponiendo la plancheta en los vértices restantes del polígono, y haciendo las mismas observaciones hasta llegar á la última estacion E, en la cual debe verificarse que al dirigir la visual al punto de partida A, la línea *ea'* trazada en la plancheta se confunda exactamente con la *ae'* trazada primitivamente al dirigir la visual desde dicho punto A al de la última estacion E. Debe verse tambien si tomada en la escala la *ae* indica la medida que se obtiene para AE en el terreno.

Como los ángulos se determinan gráficamente con la plancheta, no existen las observaciones inversas cuando se hace uso de ella.

Fijando un papel trasparente en la plancheta se podrian trazar independientemente para cada vértice las direcciones de las visuales dirigidas á otros tres vértices consecutivos, á fin de comprobar cualquiera de los del polígono ó varios con el auxilio del problema de la carta.

Obtenida en la última estacion la proyeccion *abcde* del polígono ABCDE, valorados sus lados por medio de la escala, y gráficamente construidos sus ángulos, pueden tambien valorarse estos por medio de los trasportadores y ver si la suma de todos equivale á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono ménos dos.

958. Con la plancheta fotográfica se seguiria una marcha análoga á las explicadas para los demás instrumentos, midiendo los lados del polígono, y hallando los valores de los ángulos haciendo estacion en cada uno de los vértices por el procedimiento que hemos dado á conocer (623).

959. **Por doble interseccion** —Se procede en las operaciones de campo y de gabinete de la misma manera que se ha explicado (906), sin más diferencia que la medida de los ángulos, valiéndose de los goniómetros ó de la plancheta, ó de la determinacion de los rumbos con la brújula. Pero en el caso que citamos, todas las observaciones de los vértices se referian á uno de ellos A (fig. 622; lám. 42), lo que podia generalmente verificarse en atencion á que los terrenos se suponian de corta extension y despejados; pero cuando son de alguna más consideracion y accidentados, como debemos entender de los que hablamos en este capítulo, es necesario generalmente elegir un punto interior ó exterior, al cual se refieran las observaciones.

960. *Con los goniómetros*.—Sea el polígono ABCDE (fig. 648; lám. 46). Se medirá con toda precision un lado AB que sirva de base y todos los ángulos de los vértices, como se ha explicado (948), anotando en el cróquis las medidas, ó en un registro que no difiera del expuesto (950) sino en que ahora no se necesita la columna de los lados, puesto que ninguno se mide, excepto el primero, cuya longitud y rumbo se consignan á la cabeza del registro

En la construccion en el papel, lo mismo valiéndose del croquis que del registro, ó de ambós á la vez, se sigue la misma marcha explicada (949) para el caso citado; sólo que despues de haber tomado *ab* que represente á AB y formado en sus extremos los ángulos *oab* y *oba* iguales á los OAB y OBA para tener el punto *o*, como no se conoce el valor del lado siguiente BC, no se puede tomar en la escala la parte que le corresponde para colocarla de *b* á *c*; por lo cual en un punto cualquiera de la línea indefinida bc'' se formará el ángulo $o'''c'b$ ó el $o^{\text{IV}}c''b$ igual al OCB, tirando despues por el punto *o* una paralela *oc* á la $o^{\text{IV}}c''$ ó á la $o'''c'$, determinando así la magnitud del lado *bc* homólogo del BC, y de la misma manera los vértices restantes. Pudieran tomarse tambien en el terreno los ángulos EAD y DAC para comprobar la posicion del vértice *a* por el problema de la carta, como se ha indicado (949).

961 *Con la brújula y plancheta*.—Se procede enteramente de una manera análoga á la que acabamos de indicar con los goniómetros, teniendo

en cuenta las diferencias á que da lugar la naturaleza del instrumento empleado en la determinacion de los ángulos

962. *Observaciones.*—El método de doble interseccion ofrece las ventajas siguientes:

1.ª Que es un auxiliar del de rodeo, cuando el polígono tiene lados cuya medida presenta dificultades.

2.ª Que no habiendo necesidad de medir más que la base y los valores de los ángulos, que se obtienen con una precision suficiente, se abrevia mucho la operacion y se tienen las condiciones de exactitud que pueden desearse.

3.ª Que el procedimiento empleado en la construccion no viene á ser otra cosa que el que se sigue en el levantamiento del plano por rodeo, cuando se trata de evitar la influencia de los errores en la medida de los lados (949).

De las observaciones precedentes puede deducirse la preferencia que debe darse en muchos casos al método que acabamos de exponer.

963. **Por radiacion.**—Difícilmente será posible aplicar este método á los terrenos de mediana extension, aparte de que las comprobaciones necesarias para asegurarse de la exactitud en la medida de las rectas que parten del centro á los vértices exigiria situarse en estos para la determinacion de los valores angulares que fuesen necesarios, haciendo inútiles las medidas de dichas rectas y complicando la operacion. Para el caso de aplicar los goniómetros, brújula y plancheta á levantar por este medio los planos de terrenos de corta extension, se comprenderá fácilmente el modo de conseguirlo, recordando la marcha que se establece en los párrafos 898 y 908.

964. **Observaciones acerca de los métodos que anteceden.**—Como son tan distintas las circunstancias en que el geómetra puede encontrarse, ya por la naturaleza del terreno ó por los instrumentos de que dispone, no puede decirse de una manera absoluta qué método es preferible entre los explicados para el levantamiento de un plano. Los conocimientos y la práctica del operador le guian en la eleccion de la marcha que debe seguir, en la manera de emplear más convenientemente los instrumentos de que puede hacer uso, y en la buena eleccion ó combinacion de los diferentes problemas cuya resolucion puede conducir á un pronto y exacto resultado.

Antes de continuar, advertiremos que en las operaciones de que nos ocupemos en lo sucesivo, cuando no se haga mencion de los instrumentos con que se opera, se entenderá que hacemos uso de los goniómetros; pudiendo el lector generalizarlas á los demás, una vez que su uso está ya bien conocido y que se ha visto la uniformidad que puede guardarse en los trabajos de campo y de gabinete.

965. **Métodos expeditos.**—*Con los goniómetros.*—Cuando se hace uso de estos instrumentos siguiendo el método de rodeo, se acostumbra en muchas ocasiones á determinar un polígono por la medicion de sus lados.

y de los ángulos de direccion de las observaciones directas ABC, BCD.... (fig. 648; lám. 46), resultando despues en la construccion separaciones entre los lados, debidas á la falta de exactitud en la medida de los ángulos ó en su trasportacion, que unidas á los errores cometidos tambien en la medicion de los lados y su trasportacion impiden que el polígono cierre en el papel, siendo inútiles y absurdos cuantos medios se empleen para conseguirlo, por carecer de comprobaciones que puedan servir al mismo tiempo de guia para descubrir los errores é indicar las correcciones que deben efectuarse en la construccion del plano; por otra parte, puede suceder que los errores se compensen de modo que el polígono cierre sin ser la verdadera proyeccion del polígono del terreno.

966. *Con la brújula.*—Está reducido á tomar solamente en los vértices A, B, C.... (fig. 649; lám. 47) los rumbos de las observaciones directas correspondientes á las rectas AB, BC, CD.... y las longitudes que á las mismas rectas corresponden. Este método puede abreviarse *haciendo estaciones alternadas*, ó en un vértice sí y otro no; no habiendo tampoco medios de comprobar en el papel la exactitud de la construccion.

Sea el polígono ABCDEF (fig. 651; lám. 47) y A el punto de partida. Se empieza por hacer estacion en B despues de haber medido el lado AB, y se toma el rumbo de la BC con la punta azul de la aguja, el que señalamos con un arco de línea llena, y el de la AB con la punta blanca, el que indicamos con arco de puntos y el cual es el que hubiera resultado observando en A con la punta azul. Se pasará á estacionar en D, tomando con la punta azul el rumbo de la DE y con la blanca el de la DC. Haciendo la última estacion en F, tomando con la punta azul el rumbo de la FA y con la blanca el de la FE, resultará haber hecho estacion solamente en tres vértices de los seis de que consta el polígono, obteniendo los seis rumbos que hubiera dado en ellos la punta azul de la aguja siguiendo el método general abreviado.

En cuanto á los registros, difieren de los expuestos (950 y 955) en la supresion de las columnas no necesarias, haciéndose igualmente la construccion del plano partiendo del punto A.

967. *Con la plancheta.*—Se sigue una marcha análoga á la que se ha indicado para los goniómetros (965), midiendo los ángulos ABC, BCD.... (fig. 650, lám. 47) y los lados, y presentándose tambien los inconvenientes citados en el mismo párrafo.

968. **Construccion de los planos levantados por los procedimientos expeditos.**—Hemos indicado (965) los inconvenientes que resultan del empleo de los métodos expeditos en el levantamiento de los planos, cuando se trata de la construccion: estos inconvenientes son de distinta naturaleza é influyen de diferente modo por lo tanto en la exactitud de la operacion, segun se han empleado los goniómetros ó la brújula en las operaciones del campo. Sea ABCD (fig. 652; lám. 47) una línea quebrada que puede ser parte del perímetro de un polígono, y á la que llamaremos *línea poligonal abierta ó seguimiento*, cuya verdadera proyeccion

será la *abcd*, y supongamos que se ha cometido una equivocacion al medir el ángulo ABC, por la cual resultará la proyeccion *bc'*, por ejemplo, para la línea BC, diferente de la verdadera *bc*, y la del punto C que debiera hallarse en *c* estará ahora en *c'*, que es uno de los puntos del arco de círculo trazado desde *b* con el radio $bc = bc'$: todo el resto de la línea poligonal á partir de *b*, suponiéndole exactamente determinado, se hallará en las mismas condiciones que si hubiese girado alrededor de *b* en el plano en que se encuentra, en una cantidad igual al ángulo de error *cbc'*, separándose cada vez más las proyecciones *c'*, *d'*, de las verdaderas posiciones *c*, *d*, que deben ocupar, y haciéndose los lados *cd*, *c'd'* divergentes ó convergentes, segun los valores de los ángulos. En efecto, las líneas *bc* y *bc'* son evidentemente divergentes á partir de *b*, y tambien lo son las *cd* y *cd'*: en efecto, tirando por el punto *c'* la paralela *ef* á la *cd* resultará $bc'f > bef$ (Geometría Teor 14. Cor. 1.º) ó que su igual *bcd* (Geom. recíp. del Teor. 8), ó bien por ser $bcd = bc'd'$, $bc'f > bc'd'$; resulta de aquí que *c'd'* es divergente con *c'f*, y por lo tanto tambien con su paralela *cd*. En la fig. 653 (lám. 47) las líneas poligonales serian tan pronto divergentes como convergentes: en efecto, haciendo pasar una circunferencia por los puntos *b*, *c* y *c'*, como por hipótesis se tiene $bcd = bc'd'$, y estos ángulos tienen sus vértices en la misma circunferencia y los lados *bc* y *bc'* pasan por un punto *b* de ella, los otros lados *cd*, *c'd'* tendrán tambien un punto comun *e*, puesto que ha de resultar para ambos la misma medida, mitad del arco *be*. Las líneas poligonales *abcd*, *abc'd'* son divergentes á partir del punto *b* hácia los *c* y *c'*, y convergentes despues hácia *e*, desde el cual son divergentes de nuevo.

Si se hubiese empleado la brújula en el levantamiento del plano de la línea poligonal ABCD (fig. 654; lám. 47), y suponemos equivocado el rumbo del lado BC, estando bien determinados los de los demás lados, así como todas sus longitudes, al verificar la construccion, la segunda línea no tomará la posicion *bc* que la corresponde, sino la *bc'* por ejemplo, y el punto *c'* se hallará en el arco de círculo descrito desde *b* con el rádio $bc = bc'$, por haber supuesto que los lados eran iguales. Ahora bien, no hallándose equivocado el rumbo de la siguiente recta CD, al construir esta en el papel, su proyeccion *c'd'* tomará una direccion paralela á la verdadera *cd* (Geom. Teor. 8), y como es $cd = d'c'$ por hipótesis, la figura *cdd'c'* será un paralelógramo (Geom. Teor. 30), y resultarán las cuerdas *cc'* y *dd'* iguales. Las proyecciones *c'*, *d'* distan por tanto de sus verdaderas posiciones una cantidad igual á la separacion de los puntos *c* y *c'*.

Comparando los resultados de una y otra construccion, daremos la preferencia á la trasportacion por medio de los rumbos; pues empleando los ángulos de direccion, los vértices se separan más de las posiciones que deben ocupar, y para rectificarlas en el caso de conocerse el error cometido, seria necesario construir de nuevo todos los lados y los ángulos á partir del punto *b* (figuras 652 y 653; lám. 47), al paso que con los rumbos bastaria rectificar la posicion del punto *c* (fig. 654; lám. 47) y trasportar paralelamente el resto del seguimiento.

969. *Líneas poligonales cerradas.*—Cuando se trata de un polígono se comprende que bastará cometer una equivocacion en el valor de un ángulo ó de un lado, ya en los datos tomados en el campo ó ya en la trasportacion, para que no se pueda conseguir que cierre; y aun cuando así se verifique, puede suceder que no sea la figura semejante á la proyeccion del terreno, como tiene lugar para el polígono ABCDEF (fig. 655; lámina 47), en el que estando bien medidos los ángulos, no sucede así respecto de los lados, y por equivocacion en igual cantidad en la medida de los FE y DE se han obtenido en la escala las longitudes *fh* y *gc*; entonces la *hg* que seria paralela á la verdadera línea *ed*, si se diferenciase poco de esta se tomaria equivocadamente por la proyeccion de la DE y resultaria un polígono *abcghf* que tendria los mismos ángulos que el del terreno, pero cuyos lados no serian proporcionales á los de este, y por lo tanto seria diferente de la verdadera proyeccion *abcdef*.

Del mismo modo puede cerrar el polígono, no habiéndose padecido equivocacion en la trasportacion de los lados, aunque sí en la de los ángulos.

Sea ABCDEF (fig. 656; lám. 47) el polígono del terreno, y *abcdef* su verdadera proyeccion en el papel: si por efecto de haber construido mal los ángulos, la proyeccion tuviese la forma *abc'd'e'f*, que se obtendria aproximando los puntos *c* y *e*, este nuevo polígono de lados proporcionales á los del terreno, pero de ángulos desiguales, no seria semejante á él.

En virtud de lo expuesto, muchos geómetras, cuando hacen uso de los goniómetros, toman además los ángulos ABO, BCO... (fig. 657; lámina 47) que forma cada lado del polígono con la visual dirigida desde el vértice al punto interior O, con el objeto de ver si despues se cortan en la construccion todas las visuales; pero ni aun esto es suficiente, pues no midiendo los ángulos OAB, OBC, OCD ... como nosotros hacemos en el método general, pudiera suceder que el ángulo ABC estuviese representado por ABC′, y si el error del lado BC era tal que el punto C′ se hallase situado en la circunferencia que pasa por los tres puntos B, O y C, al construir en el punto C′ el ángulo BCO, la C′O′ pasaria por el punto O, donde ya se cortaban otras dos visuales, y se creeria que la construccion estaba bien ejecutada, viniendo á presentarse despues el error y á no cerrar el polígono. Con la adopcion de la marcha expuesta por nosotros (948) se salvan todas las dificultades.

970. Del mismo modo, cuando se hace uso de la brújula en el método expedito, no es suficiente tomar además los rumbos de las observaciones directas de las visuales AO, BO.... dirigidas á un punto interior O, por presentarse en algunas ocasiones los mismos inconvenientes; pues si en efecto estuviese equivocado el rumbo de la BC por no haberle comprobado con la observacion inversa, y quedase representado en la construccion por la BC″, siendo el error del lado BC al mismo tiempo tal,

que su extremo resultase situado en la misma recta que los puntos O y C como en C″ interior ó exteriormente, al construir en este punto el rumbo de la OC no se percibiría el error y se creería que la construccion seguia bien; pero pronto aparecerian las dificultades, que harian ver la imposibilidad de que el polígono pudiera cerrar, no pudiéndose conocer en qué partes del polígono existian los errores.

El método de rodeo con la brújula expuesto por nosotros (953) salva todas las dificultades y no permite tampoco el error de desviacion de las verdaderas posiciones paralelas, que representan la direccion de la aguja en la construccion del plano; pero como este error puede existir cuando se sigue el método expedito, se recurre con frecuencia en la práctica al procedimiento siguiente, recordando para la trasportacion de los rumbos cuanto se ha dicho en los párrafos 384 á 395. Sea ABDFG (fig. 658; lámina 48) una línea poligonal del terreno, cuyo plano se ha levantado con la brújula. Para construirla en el papel, se trazará una recta NS en la direccion que se crea más conveniente, la cual representa la meridiana; se marcará en ella un punto C para hacer coincidir con él el centro del trasportador, y se construirán despues, alrededor de este punto, los rumbos r, r', r'' y r''' de las cuatro líneas AB, BD, DF y FG. Hecho esto, y fijo en el papel el punto de partida a que ha de representar al A de la línea poligonal, se tirará por este punto una paralela ab á la Cr, y por el punto b donde deba terminar esta paralela con arreglo á escala, se trazará otra bd paralela á la Cr'; por el extremo d de esta recta se tirará la df paralela á la Cr'', y por último, por el punto f extremo de la df la fg paralela á Cr''', con lo que se tendrá la proyeccion $abdfg$ de la línea ABDFG. Si la línea fuese cerrada, se continuaría del mismo modo hasta cerrar el polígono. Este método tiene la ventaja de referir los rumbos todos á una misma meridiana, evitando, como hemos dicho, los errores que resultarian del trazado sucesivo de las meridianas, y que se irian probablemente acumulando.

971. Al tomar los ángulos ABO, BCO... (fig. 650; lám. 47)), cuando se hace uso de la plancheta para evitar los errores del método expedito, resulta el procedimiento (957); por lo que éste es el que se debe seguir en todos los casos. Entonces vemos cómo se van haciendo las correcciones en la construccion del plano sobre el tablero de la plancheta, al mismo tiempo que se opera en el terreno.

972. Vemos en virtud de todo lo expuesto anteriormente:

1.° Que los métodos expeditos de rodeo no deben emplearse sino en casos de poca importancia y como operaciones de tanteo ó reconocimiento.

2.° Que será necesario modificar la marcha establecida en dichos métodos, adoptando los procedimientos generales que hemos expuesto para la determinacion de los ángulos, si se ha de lograr que los polígonos cierren siempre, ó á lo menos en el mayor número de casos.

En efecto, observaremos que en un polígono no sólo hay que atender á la longitud de cada lado, sino tambien á su posicion dependiente de la mayor ó menor abertura del ángulo á que pertenece. Se comprende fácilmente que despues de la medida de la base, lo que más debe llamar la atencion es la direccion de los lados, pues los errores cometidos en su longitud se corrigen fácilmente aplicando los procedimientos indicados (949 y 959)

Á pesar de esto, algunos autores proponen, que si al examinar el valor de la suma de los ángulos interiores del polígono, no resulta igual á tantas veces dos rectos como lados tiene ménos dos, se reparta la diferencia proporcionalmente entre todos los ángulos, aumentando ó disminuyendo la parte correspondiente si aquella fué por defecto ó por exceso; ó bien se divida dicha diferencia por el número de ellos, para añadir ó quitar á cada uno segun los casos la cantidad que represente el cociente obtenido. Bien que algunas veces no haya inconveniente en adoptar estas reglas por no ser las operaciones de trascendencia ó no necesitarlas más que aproximadas, no deben darse por reglas generales unos procedimientos que á más de los cálculos que exigen, conducen á rectificaciones caprichosas; pues se ignora en qué ángulos y en qué cantidad se han cometido los errores, conduciéndonos como en la fig. 656 (lám. 47) á un polígono $abc'd'e'f$, que no puede ser semejante al ABCDEF en virtud de la modificacion arbitraria de sus ángulos; si bien la suma de todos ellos valga tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono ménos dos.

Para obviar estos inconvenientes, y corregir un polígono que no cierra, ó que cerrando no se tiene seguridad en los datos adquiridos, es conveniente conocer exactamente la longitud de uno de sus lados y los valores de los ángulos OAE, OAB, OBA, OBC.... (fig. 659; lám. 48), que además de darnos las comprobaciones de los valores angulares EAB, ABC.... primitivamente hallados, nos sirven para la rectificacion completa del polígono. Supongamos que sea $ab'c'd'e'$ el polígono que ha resultado de proyectar el ABCDE, AE el lado conocido exactamente, y su proyeccion la parte ae de la ae': despues de formar los ángulos oea y oae iguales á los OEA y OAE y tener la proyeccion o de O, se formará sobre la ao el ángulo oab''=OAB, y haciendo centro en a con el radio ab' se trazará el arco $b'b''$; en el punto b'' se formará el ángulo $ab''o$=ABO y tirando por o la ob paralela á $o'b''$ se tendrá el punto b y la ab será la proyeccion de AB; sobre la ob se formará el ángulo obc''=OBC, y tomando bc''=$b'c'$, no habrá más que hacer el ángulo $bc''o''$=BCO y tirar por o la oc paralela á $o''c''$, con lo que se tendrá el punto c, y así se continuará rectificando los ángulos y los lados; debiendo suceder que al formar sobre od el ángulo ode=ODE, la recta de pase por e para resultar comprobada la operacion; pudiéndose además trazar por e'' una recta $e''o'''$ que forme con de'' el ángulo $de''o'''$=DEO, para ver si resulta paralela á la eo.

Observando la marcha que hemos seguido, no habrá dificultad en hacer la correccion cuando solámente haya errores en los lados ó en los ángulos, atendiendo á que en el caso de que nos ocupamos, suponemos que unos y otros están equivocados.

Cuando el polígono no cierra, como el $a'bc'd'e'f'a''$ (fig. 660; lám. 48), se sigue una marcha enteramente análoga á la que acabamos de explicar, siendo ab la verdadera proyeccion de la base, y $abcdef$ el polígono semejante al del terreno.

973. Cuando se cuenta con la exactitud de los valores de los ángulos, y la de la recta que une dos puntos dados de posicion, puede asimismo rectificarse la que corresponde á los vértices, y por consiguiente los valores de los lados, por un procedimiento que exponen algunos autores, y que puede seguirse cuando el error no es de mucha consideracion. Supongamos que fijos de posicion en el plano los puntos a y d (fig. 661; lámina 48), y conocida por lo tanto exactamente la ad, que representa á su homóloga en el terreno, al verificar la construccion de la parte del polígono situada en una de las regiones del plano, resulta la línea poligonal $ab'c'd'$, cayendo el punto d' fuera del punto d. Pueden suceder dos casos: que d' caiga en la recta que une los puntos a y d, como sucede en la figura, ó que caiga fuera de dicha recta. En el primer caso, puede estar fuera del polígono como en d', ó dentro como en d''. Supongamos que cae en d': conservando los mismos ángulos se trata de corregir los lados de modo que estén en la relacion de $ad' : ad$.

Para esto, se bajarán sobre ad las perpendiculares $c'e'$ y $b'n'$ desde los vértices c' y b', y se tendrán las proporciones

$$ad' : ad :: ae' : x;$$
$$ad' : ad :: an' : x';$$

tomando á partir del punto a el valor de x determinado gráficamente (Geom. Probl. 26) ó por el cálculo, y que supondremos está representado por ae, y lo mismo el de x' que lo está por an, tendremos los puntos e y n, piés de las perpendiculares indefinidas que se levantarán en los mismos. Tirando ahora por el punto d la dc paralela á $d'c'$ se obtendrá el punto c, por el cual se tirará otra paralela á $b'c'$ y se obtendrá el punto b, el cual debe hallarse situado en el lado ab' por ser invariable el ángulo $b'ad'$, y los ángulos de la línea poligonal $abcd$ serán los mismos que los de la $ab'c'd'$; no habiendo cambiado más que las magnitudes de los lados, los cuales estarán en la relacion de $ad' : ad$, y cuyos valores se podrán hallar gráficamente por medio de la escala con que se trazó la ad.

Para determinarlos por el cálculo, la fórmula

$$ad' : ad :: ae' : ae$$

nos da

$$ad' : ad :: ad' - ae' : ad - ae,$$

ó lo que es lo mismo

$$ad' : ad :: d'e' : de \quad [1].$$

Los triángulos semejantes $e'd'c'$ y edc dan tambien

$$d'e' : de :: d'c' : dc \quad [2].$$

De las proporciones [1] y [2] resulta la

$$ad' : ad :: d'c' : dc,$$

que da el modo de conocer el valor numérico de dc, y de un modo análogo se determinarán los valores de los demás lados.

Las operaciones serian las mismas si en vez del punto d' hubiéramos tenido el d''.

Supongamos ahora que el extremo de la línea poligonal caiga fuera de la ad, en cuyo caso podrá hallarse situado á uno ú otro lado de dicha línea y la construccion que vamos á dar es la misma en ambos casos. Supongamos, por lo tanto, que caiga en d'' (fig. 662; lám. 48). Se empezará por bajar sobre la ad'' las perpendiculares $c''e''$ y $b''n''$ desde los puntos c'' y b''; haciendo despues centro en a, se referirán sobre la ad, prolongada si es necesario, los puntos d'', e'' y n'' por medio de arcos de círculo, y se tendrán los puntos d' e' y n'; se levantarán en los e' y n' las perpendiculares $e'c'$ y $n'b'$ iguales á las $e''c''$ y $n''b''$, y trazando las ab', $b'c'$ y $c'd'$ la línea poligonal $ab''c''d''$ habrá tomado la posicion $ab'c'd'$, la cual hallándose en las condiciones de la fig. 661 (lám. 48), se concluirá la construccion como en esta y resultará la $abcd$.

Para valerse del mismo procedimiento con el objeto de cerrar un polígono como el de la fig. 663 (lám. 48), en el cual resulta una distancia $d'd''$ entre los puntos d' y d'' que debieran estar confundidos, se empezará por trazar el ángulo fad que ha de ser igual al del terreno, y que es uno de los datos que se cuenta, y en la línea indefinida am se tomará una parte ad, que es el otro dato, pues suponemos que a y d son los dos puntos dados de posicion. Queda entonces la cuestion reducida á ejecutar á uno y otro lado de am las construcciones indicadas en la fig. 662 (lámina 48).

En el caso de que se contase con la exactitud de una de las partes $afed''$, se podria tomar como invariable el punto extremo d'' y las correcciones tendrian lugar solamente en la otra parte $abcd'$. Se hubiera podido tambien adoptar por eje un lado del polígono con cuya exactitud se contase; pero es mejor valerse, como lo hemos hecho, de una diagonal determinada con todo cuidado.

974. **Deduccion de los ángulos de direccion por el conocimiento de los rumbos, y de estos últimos conocidos los primeros —**

Tanto en el método de rodeo como en el de doble interseccion, puede suceder que habiendo levantado el plano de un polígono con la brújula, con lo que se tendrán conocidos los rumbos de sus lados, se quieran saber los valores de los ángulos como si la operacion se hubiera practicado con los goniómetros; y recíprocamente, conocidos los ángulos y el rumbo de una recta, que como hemos visto, se toma siempre cuando se hace uso de los goniómetros ó de la plancheta, puesto que en esta se determinan tambien los grados de los ángulos por medio de los traportadores, pueden pedirse los rumbos de las demás rectas, cual si se hubiera operado con la brújula. Es, pues, de la mayor importancia la resolucion de los dos problemas siguientes:

Problema 1.° *Dados los rumbos de todos los elementos de una línea poligonal, determinar los valores de los ángulos de direccion que dichas líneas forman entre sí, ó lo que es lo mismo, convertir la trasportacion de rumbos en trasportacion de ángulos sucesivos.*

Sea la línea poligonal ABCDEF (fig. 664; lám. 48), que puede considerarse como parte del contorno de un polígono, en la cual representamos el rumbo de la primera línea AB por r, el de la segunda BC por r'.... y que lo están en la figura por los arcos que aparecen trazados con líneas llenas; marcaremos con arcos de puntos los ángulos de direccion que dichas rectas forman entre sí y que se hallan divididos en dos partes por las flechas que indican las meridianas, á los cuales nombraremos con las letras del vértice, B, C, D....

Aplicando la teoría de las paralelas, tendremos:

$$\begin{aligned}
B&=m'+m''=(r-180^\circ)+(360^\circ-r')=r+180^\circ-r';\\
C&=m'''+m^{IV}=(r'-180^\circ)+(360^\circ-r'')=r'+180^\circ-r'';\\
D&=m^{V}+m^{VI}=(r''-180^\circ)+(360^\circ-r''')=r''+180^\circ-r''';\\
E&=m^{VII}+m^{VIII}=(r'''-180^\circ)+(360^\circ-r^{IV})=r'''+180^\circ-r^{IV};
\end{aligned}$$

donde se observa, que para conocer el valor del ángulo de direccion B, se sumará con el rumbo r de la línea AB de la izquierda del observador colocado en el vértice del ángulo la cantidad 180°, y de esta suma se restará el valor del rumbo r' de la línea BC de la derecha. Para obtener el valor del ángulo de direccion C se sumará el rumbo r' de la línea BC de la izquierda del observador colocado en el vértice del ángulo con la cantidad 180°, y de la suma se restará el valor del rumbo r'' de la línea CD de la derecha, y así igualmente para los demás ángulos, cuyo procedimiento constante nos da siempre los valores de los ángulos de direccion por el conocimiento de los rumbos, ya se refieran á las AN, BN..... ó á las AS, BS..... y cualquiera que sea tambien el sentido en que se camine por la línea poligonal, bien de A á F ó de F á A; teniendo siempre presente que el observador ha de suponerse colocado en el vértice del ángulo para sumar con el valor del rumbo de la línea izquierda la cantidad 180° y restar de esta suma el valor del rumbo de la línea de la derecha, y advirtiendo que los ángulos de direccion se han de tomar en el sentido que tenemos explicado de izquierda á derecha, que es como generalmente se acostumbra.

Si llamamos en general A á un ángulo cualquiera de direccion, Ry al rumbo de la línea de la izquierda del mismo ángulo con relacion al observador colocado en el vértice, y Rd al rumbo de la línea de la derecha, la expresion general

$$A = Ry + 180^\circ - Rd \qquad [1]$$

nos servirá para hallar el valor de un ángulo cualquiera, y por consiguiente todos los que comprende una línea poligonal cualquiera abierta ó cerrada.

Cuando los rumbos están contados de derecha á izquierda y se trata de obtener los ángulos de direccion de izquierda á derecha caminando de A á F, se tendrá para el ángulo B, por ejemplo, observando que la figura da $t = Ry$, $m'' = Rd$,

$$B = m' + m'' = 180^\circ - t + m'' = Rd + 180^\circ - Ry;$$

y representando por A un ángulo cualquiera,

$$A = Rd + 180^\circ - Ry \qquad [a].$$

975. **Problema 2.°** *Dados los ángulos que forman entre sí las líneas que componen una poligonal, y el rumbo de una de ellas, que siempre se toma en el terreno y que suele ser generalmente el de la primera, determinar el valor de los rumbos de cada una de dichas líneas, ó lo que es lo mismo, convertir la trasportacion de ángulos en trasportacion de rumbos.*

Si en la fórmula [1] despejamos Rd resultará

$$Rd = Ry + 180^\circ - A \qquad [2];$$

cuya fórmula nos servirá en general para hallar el valor de cualquier rumbo, conocido que sea el de la línea anterior y el valor del ángulo de direccion que las dos forman entre sí; y por consiguiente, los de todos los rumbos de las líneas que compongan una poligonal abierta ó cerrada, dado que sea el rumbo de la primera línea y los ángulos de direccion que forman entre sí.

Despejando Rd en la fórmula [a], se tendrá

$$Rd = Ry + A - 180^\circ \qquad [b]$$

para obtener el rumbo de una recta, cuando se conoce el de la anterior con una brújula graduada de derecha á izquierda y el ángulo que las dos líneas forman contado de izquierda á derecha.

976. *Casos particulares.*—1.° Sea 342° 10′ el rumbo de la recta AB (fig. 665; lám. 48) y 57° 24′ el de la BC, suponiendo que las operaciones se han ejecutado en el sentido ABC.

Aplicando la fórmula general [1], tendremos:

$$A = 342^\circ\ 10' + 180^\circ - 57^\circ\ 24' = 284^\circ\ 46' + 180^\circ = 464^\circ\ 46'.$$

Como el arco hallado es mayor que una circunferencia, restando de él 360° tendremos 104° 46′ para el arco de direccion; la fórmula hallada es pues aplicable á este caso.

2.° Supongamos que el rumbo de AB es 15° 13′ (fig. 666; lám. 48) y el de BC es 324° 45′. Sea *ab* la recta que representa en el plano á la AB del terreno, y tratemos de hallar la direccion de la *bc* por medio del ángulo de direccion contado de izquierda á derecha, suponiendo que los lados del terreno están tomados en la direccion ABC.

Aplicando la fórmula general [1], resultará:

$$A = 15^\circ\ 13' + 180^\circ - 324^\circ\ 45' = -129^\circ\ 32'.$$

Como el arco A resulta negativo, tomándole de derecha á izquierda obtendremos el punto *m* que da la direccion *bc*, la cual es la que efectivamente la corresponde. Pero como nosotros tratamos de hallar el arco positivo, observaremos que la suma del valor absoluto del arco hallado y el del arco positivo que buscamos componen la circunferencia entera, y por tanto que hallaremos el arco positivo restando de 360° el valor absoluto del arco que da la fórmula.

Por lo que hemos dicho, resulta que la fórmula es aplicable tambien á este caso, y no debe olvidarse que siempre que aplicándola *se obtenga un resultado negativo, se restará su valor absoluto de* 360°, *ó lo que es lo mismo, se añadirán* 360° *al valor negativo hallado y se obtendrá el arco positivo que se busca.*

977. *Ejemplos numéricos.*—1.° Dados los rumbos $r = 171^\circ\ 15'$ correspondiente á la línea AB (fig. 667; lám. 48), $r' = 138^\circ\ 30'$ de la BC..... determinar el valor de los ángulos de direccion $A = 55^\circ\ 45'$; $B = 212^\circ\ 45'$..... del polígono ABCDEFGHY.

Sustituyendo en la fórmula [1] por R*y* y R*d* los valores correspondientes, tendremos:

$A = 47^\circ + 180^\circ - 171^\circ\ 15' = 227^\circ - 171^\circ\ 15' = 55^\circ\ 45';$
$B = 171^\circ\ 15' + 180^\circ - 138^\circ\ 30' = 351^\circ\ 15' - 138^\circ\ 30' = 212^\circ\ 45';$
$C = 138^\circ\ 30' + 180^\circ - 196^\circ = 318^\circ\ 30' - 196^\circ = 122^\circ\ 30';$
$D = 196^\circ + 180^\circ - 250^\circ\ 30' = 376^\circ - 250^\circ\ 30' = 125^\circ\ 30';$
$E = 250^\circ\ 30' + 180^\circ - 317^\circ\ 45' = 430^\circ\ 30' - 317^\circ\ 45' = 112^\circ\ 45';$
$F = 317^\circ\ 45' + 180^\circ - 340^\circ = 497^\circ\ 45' - 340^\circ = 157^\circ\ 45';$
$G = 340^\circ + 180^\circ - 11^\circ\ 30' = 520^\circ - 11^\circ\ 30' = 508^\circ\ 30';$
$G = 508^\circ\ 30' - 360^\circ = 148^\circ\ 30';$
$H = 11^\circ\ 30' + 180^\circ - 79^\circ = 191^\circ\ 30' - 79^\circ = 112^\circ\ 30';$
$Y = 79^\circ + 180^\circ - 47^\circ = 259^\circ - 47^\circ = 212^\circ.$

2.º Dados el rumbo $r=171^{\circ}\ 15'$ de la primera línea AB, por ejemplo, de un polígono ABCDEFGHY y los ángulos de direccion que sus lados forman entre sí, $A=55^{\circ}\ 45'$; $B=212^{\circ}\ 45'$... determinar los valores de los rumbos de las demás líneas $r'=138^{\circ}\ 30'$; $r''=196^{\circ}$.....

Sustituyendo en la fórmula [2] por Ry y A los valores correspondientes, tendremos:

$$r'=171^{\circ}\ 15'+180^{\circ}-212^{\circ}\ 45'=351^{\circ}\ 15'-212^{\circ}\ 45'=138^{\circ}\ 30';$$
$$r''=138^{\circ}\ 30'+180^{\circ}-122^{\circ}\ 30'=318^{\circ}\ 30'-122^{\circ}\ 30'=196^{\circ};$$
$$r'''=196^{\circ}+180^{\circ}-125^{\circ}\ 30'=376^{\circ}-125^{\circ}\ 30'=250^{\circ}\ 30';$$
$$r^{\mathrm{IV}}=250^{\circ}\ 30'+180^{\circ}-112^{\circ}\ 45'=430^{\circ}\ 30'-112^{\circ}\ 45'=317^{\circ}\ 45';$$
$$r^{\mathrm{V}}=317^{\circ}\ 45'+180^{\circ}-157^{\circ}\ 45'=497^{\circ}\ 45'-157^{\circ}\ 45'=340^{\circ};$$
$$r^{\mathrm{VI}}=340^{\circ}+180^{\circ}-148^{\circ}\ 30'=520^{\circ}-148^{\circ}\ 30'=371^{\circ}\ 30';$$
$$r^{\mathrm{VI}}=371^{\circ}\ 30'-360^{\circ}=11^{\circ}\ 30';$$
$$r^{\mathrm{VII}}=11^{\circ}\ 30'+180^{\circ}-112^{\circ}\ 30'=191^{\circ}\ 30'-112^{\circ}\ 30'=79^{\circ};$$
$$r^{\mathrm{VIII}}=79^{\circ}+180^{\circ}-212^{\circ}=259^{\circ}-212^{\circ}=47^{\circ}$$

Para ejercicios, puede hacerse la trasformacion de los ángulos de la fig 648 (lám. 46) en los rumbos de la 649 (lám. 47), valiéndose de la fórmula [2], y la de los rumbos de la fig. 649 (lám. 47) en los ángulos de la 648 (lám. 46) empleando la fórmula [1], pues ambas figuras se suponen iguales ó semejantes.

978. **Aplicaciones** —Estableciendo una nueva columna en el registro (950) que se refiere á la fig. 648 (lám 46), se podrán consignar en ella los rumbos de los lados del polígono calculados por la fórmula [2], partiendo del rumbo hallado para AB con el objeto de orientar el plano. Del mismo modo se pueden disponer en una nueva columna en el registro (955) correspondiente á la fig. 649 (lám. 47), los ángulos que forman entre sí los lados del polígono, calculándolos por la fórmula [1].

Cuando se levanta el plano de un polígono por rodeo con el teodolito, pueden observarse además de los ángulos, los rumbos de todos sus lados, y viendo despues si los rumbos calculados por la fórmula [2] ó por la [b], segun que la brújula esté graduada de izquierda á derecha como la graduacion del limbo azimutal ó en sentido contrario, difieren poco de los rumbos hallados directamente, ó si las diferencias notables se compensan. En caso contrario estará mal medido el ángulo á que corresponda el rumbo calculado que difiere del obtenido directamente, ó este estará mal determinado, y será conveniente repetir las observaciones en el terreno si otros medios de comprobacion no dan á conocer la verdadera direccion del lado de que se trata.

979. **Levantamiento de planos de los polígonos rectilíneos compuestos de un gran número de rectas.**—Para determinar su contorno se procede como en las figs. 598, 599 (lám. 40) y 613 (lám. 41), estableciendo polígonos de un corto número de rectas por los métodos acabados de exponer, que serán los polígonos principales, y refiriendo á sus lados

los vértices de los polígonos dados por medio de ordenadas; todo exactamente análogo á cuanto se ha dicho en el capítulo anterior, sin más diferencia que la supresion de las grandes ordenadas referidas al eje principal, resultando mayor comodidad en el establecimiento de los polígonos principales, valiéndose de los goniómetros, brújula y plancheta, por la facilidad de tomar toda clase de ángulos y la eleccion de los más convenientes. Cuando el terreno es de considerable extension en los límites prescritos para este capítulo, pueden necesitarse para la comprobacion del polígono principal dos ó más puntos interiores: entonces es preciso para pasar de uno á otro tirar á lo menos desde un vértice visuales á ambos puntos de comprobacion, á fin de no interrumpir el enlace de las operaciones.

980. **Contornos curvilíneos y mistilíneos.**—Se pasa igualmente con la misma facilidad de los polígonos de las figs. 598 y 599 (lám. 40) á los de las figs. 600 y 601 (lám. 40), como se ha explicado en el capítulo anterior.

981. **Terrenos inaccesibles en su interior, rectilíneos ó curvilíneos.**—Se procede segun las circunstancias como en las figs. 607, 608 (lám. 41) 619 y 620 (lám. 42), levantando con los goniómetros, brújula ó plancheta el plano del polígono principal; y el método de rodeo sirve igualmente cuando sólo se puede operar en sentido del contorno, pues el interior puede ser inaccesible y hallarse en esta parte el punto á que se dirigen las visuales, que han de servir para la construccion y comprobacion del plano.

982. **Terrenos en parte accesibles y en parte inaccesibles.**—Se procede de un modo análogo al que se ha explicado para la fig. 611 (lámina 41).

Cuando en este caso y en los acabados de exponer se hace uso de registros, se formarán: el del polígono principal, como hemos indicado (950 ó 955), y el del contorno como en (881).

983. **Levantamiento del plano de los objetos interiores de un polígono.—Extensas lagunas ó pantanos.**—Se circunscriben las figuras poligonales más convenientes, en virtud de la facilidad de tomar toda clase de ángulos, y se determinan sus contornos por ordenadas sobre los lados.

984. **Rios, caminos, costas, islas, arroyos, veredas.**—Sea primero la línea poligonal ABCDEF (fig. 668; lám. 49) que puede considerarse como el eje de una carretera construida ó que se trata de construir, y cuyo plano se quiere levantar. Para obtener el seguimiento de esta línea, al mismo tiempo que se miden los lados AB, BC, CD...., y los ángulos de direccion ABC, BCD, CDE.... se dirigirán visuales desde los vértices á un punto O que puede ser una torre, un árbol...... visible desde el mayor número de aquellos, tomando los ángulos en las bases AB, BC.... todo como ya se sabe, con el objeto de hacer despues bien la construccion. Cuando se llega á un punto en el cual la direccion de la

CDEF ó los accidentes del terreno hacen sospechar que el punto O empezará á perderse de vista, se dirige desde el C otra visual á un nuevo punto P, que si no se encontrase á propósito se señalaría con un jalon, á fin de que dirigiendo desde D otra visual, se tenga fijo el punto P, y la CD se halle referida á él al mismo tiempo que al O. Se continuará del mismo modo dirigiendo desde todos los demás vértices que sea posible, visuales al punto P hasta que haya necesidad de elegir otro, y así sucesivamente. Ninguna dificultad presenta la manera de llevar el croquis ó el registro y la construccion en el papel.

Este procedimiento es aplicable al levantamiento del contorno de una *costa,* y por consiguiente al de una *isla,* en cuya operacion se pueden seguir tambien cuantos métodos hemos explicado para los terrenos accesibles en su interior.

Pero si se tratase de un camino irregular ó de un rio de consideracion, será preciso además de lo expuesto, ir plantando jalones en la orilla opuesta, bien fuera de las visuales dirigidas á los puntos de observacion O y P como los A′ y E′, bien en sentido de las visuales como los B′, C′, D′ y F′, á los cuales se dirigen tambien visuales desde los vértices A, B, C... como se vé en la figura, con el objeto de obtener en el papel las proyecciones de los puntos A′, B′ C′.... que unidos por rectas determinarán otra línea poligonal formada en la orilla opuesta. Refiriendo ahora en el terreno por ordenadas sobre las AB, BC.... A′B′, B′C′.... los diversos puntos que constituyen las dos líneas sinuosas que limitan el camino ó rio, se tendrán los datos necesarios para su representacion en el papel.

Cuando los planos han de construirse en escala muy pequeña, no se determinan más que las dos líneas quebradas ABCD... A′B′C′D′... que comprenden los rios ó caminos en su interior, pues la pequeñez de las ordenadas permite considerar confundidas sensiblemente dichas líneas con las sinuosas de los contornos de aquellos; cuando únicamente se trata de determinar la direccion del rio ó camino se determina tan sólo la línea poligonal ABCD....

En el caso de ser un arroyo ó vereda, se empleará un procedimiento análogo al de la fig. 626 (lám. 43).

985. Para mayor celeridad y exactitud se pudiera tambien hacer uso del método de doble interseccion, para lo cual basta medir una sola recta tal como la AB. En la construccion, despues de obtenido el punto *o*, se formará en un punto *c′* de la recta indefinida *bc′* el ángulo *o′c′b* = OCB, y tirando por *o* la *oc* paralela á *o′c′*, se tendrá la *bc* proyeccion de BC, y cuyo valor se conocerá por la escala. La figura manifiesta el resto de la construccion.

986. **Camino en un bosque**.—Cuando se trata de abrir un camino á través de un bosque y se dan determinados el punto de partida y el de arribo, con el objeto de no cortar más árboles que los precisos en sentido de la direccion del mismo, se procederá en primer lugar á levantar

el plano exacto del contorno del bosque, proyectando en él la direccion del camino y pasando despues á establecerle en el terreno.

Sea en efecto *abcefghij* (fig. 669; lám. 49) el polígono construido en el papel, que representa el contorno ABCEFGHYJ del bosque, en el cual se trata de abrir un camino que parta de la poblacion M y vaya á parar al caserío N. Si el punto de partida está determinado como el C y el camino ha de estar en línea recta, se trazará la recta *cr*, se tomará con el trasportador el ángulo *bcr* y se formará con un goniómetro el BCR sobre la BC; se establecerán jalones en la direccion de la CR determinada por la alidada, plantando piquetes para dejar fija en el terreno la direccion del eje del camino y poder proceder despues á su construccion.

Si se hace uso de la brújula, como siempre se toma el rumbo de una recta AB ó BC del polígono, se obtendrá por la fórmula [2] (975) el rumbo de la *cr* y se podrá determinar la CR.

Con la plancheta se opera con mucha facilidad en estos casos, pues se colocará el punto *c* en la vertical de C, se declinará *cb* sobre CB, y colocando el canto de la alidada en contacto con la *cr*, no habrá más que plantar jalones en sentido de la visual.

Si el punto de partida *d* no está determinado en el plano, se tomará en la escala el valor de *cd*, se medirá la parte CD que representa, y se trazará la DR como anteriormente. Si por evitar dificultades hubiera que trazar el camino formando una línea quebrada *dopqr*, se procederá de una manera análoga para obtener la DOPQR; pues despues de fijar la direccion de la DO y tomar en ella el valor que marque *do*, se determinará la direccion de OP, y así sucesivamente hasta llegar á R.

987. **Galerías subterráneas.**—Cuando las galerías tienen su entrada á flor de tierra, como sucede entre otras en los túneles, sólo puede adoptarse para obtener el seguimiento de la línea poligonal que constituyen los ejes, el método expedito de medir con exactitud los lados y ángulos de direccion; para lo cual deberán hacerse en los vértices, bien se empleen los goniómetros ó la brújula, las dos observaciones directa é inversa. Tambien puede hacerse uso de la plancheta. Salvo á establecer luces en los puntos á que deban dirigirse las visuales, todas las operaciones no difieren de las que ya se han explicado para una línea poligonal cualquiera establecida al descubierto.

Debe tenerse presente que para la situacion de la galería en el plano es preciso valerse del problema de la carta; para lo cual se fijará cada uno de los puntos de entrada y salida de la misma galería con relacion á tres ó cuatro puntos notables del terreno, cuyas proyecciones deben ya tenerse en el plano en que ha de estar comprendido el de aquella, ó es preciso fijar en caso contrario.

Otras veces las galerías subterráneas corren á bastante profundidad y hay que descender á ellas por pozos, en cuyo caso los centros de los que se hallan en los extremos de la línea son los que deben fijarse como acabamos de exponer.

En el interior de las minas pueden emplearse los procedimientos que ya se saben para determinar las varias clases de galerías, siempre valiéndose de ejes principales y secundarios y de ordenadas á los mismos para la referencia de todos los puntos de los contornos de las plantas.

La poca altura de algunas galerías ó su disposicion particular no permite muchas veces el uso de los trípodes, y se emplean brújulas de suspension, como entre otras, la de la Comision de Argel (434), colgándolas de una cuerda fija á las paredes de la galería.

Debe tenerse presente que no se podrá hacer uso de la brújula en obras subterráneas cuando se presenta la circunstancia de hallarse en parajes donde existan los óxidos de hierro

Es fácil la referencia de los puntos de entrada y salida á la superficie del terreno valiéndose de plomadas, y entonces se podrá establecer sobre este la línea poligonal partiendo de uno de los puntos, para trazarla en virtud de los valores de los lados y de los ángulos obtenidos en el interior, y sirviendo de comprobacion el que vaya á terminar en el otro.

Recíprocamente, cuando se traza una línea en el terreno que ha de representar el seguimiento del eje de una obra subterránea, este debe componerse de las intersecciones de los planos que pasan por las verticales de los vértices de dicha línea y que suponemos cortan al terreno, con los horizontales ó inclinados que se hallen determinados á las profundidades convenientes, formando los suelos de las galerías. El medio de obtener los citados planos verticales, consiste en la apertura de pozos en los vértices de la línea del terreno, los cuales se refieren por medio de plomadas á los puntos interiores, donde colocando el instrumento, se establece la visual que señale el rumbo ó el ángulo de direccion en cuyo sentido se ha de verificar el rompimiento de la galería, dando á esta á uno y otro lado del eje la mitad de la anchura total que la misma deba tener. Los pozos sirven además para la ventilacion y para facilitar las construcciones, cuyos detalles no son de este lugar.

Concibiendo otros planos verticales que corten á los que pasan por el eje, y determinando las anchuras y alturas de las obras subterráneas cuando estas dimensiones son variables, se podrán obtener los datos necesarios para su representacion completa en el dibujo.

988. **Edificios y demás construcciones**.—Siempre se sigue el método expuesto en el capítulo anterior, párrafos 917 á 924. En las grandes posesiones ó heredades y en las huertas y jardines, ya se hallen ó no cercados, puede hacerse uso de los varios métodos é intrumentos que hemos dado á conocer para el levantamiento de los planos.

En el replanteo se puede seguir el método expuesto (922), ó bien hacer uso de los goniómetros, brújula ó plancheta; y siendo esta última preferible en la operacion de que se trata, nos limitaremos á ella, tomando por ejemplo el trasladar al terreno el proyecto de un jardin, cuya figura trazada en el papel de la plancheta, señalada con letras minúsculas y semejante á la 670 (lám. 49), que representa el jardin despues de trazado en el terreno, se sobreentenderá para evitar la repeticion del dibujo.

Despues de trazado el eje MN perpendicular á la línea CD paralela á la fachada AB de un edificio que ha de dar frente al jardin, se marcará el punto O proyeccion de *o*, y colocando la plancheta de modo que *o* se halle en la vertical de O, se declinará *mn* sobre MN y se pondrá la alidada sobre *ef* para trazar en el terreno la perpendicular EF: tomando las partes iguales OE y OF del valor que indiquen las del plano, y uniendo los puntos E y F con los C y D se tendrán las CE y DF. Se trasladará la plancheta al punto E, se colocará *e* en la vertical de E, se declinará *ec* sobre EC, y colocando la alidada sobre *eg* se trazará EG marcando el punto G, y lo mismo se hará para obtener el punto H desde F. Como el punto N se puede señalar tambien en el terreno plantando un jalon como en los vértices que hemos determinado del contorno, servirá de comprobacion el que los tres puntos G, N y H resulten en línea recta; lo que se averiguará colocando la plancheta en el punto G, declinando *ge* sobre GE, y colocando la alidada sobre *gh* para ver si la visual pasa por los puntos N y H; pudiendo tambien comprobar además para más exactitud el ángulo GHF.

Obtenida ya la cerca del jardin y trazado el grueso que deba tener, se fijará la distribucion que ha de hacerse en su interior para los plantíos de árboles y flores, marcando los puntos O′ y O″ para colocar en ellos la plancheta y determinar las líneas PR y P′R′, en las cuales se fijarán con piquetes los puntos P, Y, L, T, S, Q, X y R, así como los P′, Y′, L′, T′, S′, Q′, X′ y R′, y quedarán trazadas las PP′, YY′, LL′... Del mismo modo se procederá en la parte comprendida entre las rectas EF y GH. Por último, haciendo centro en O y con radios tomados en la cadena ó cuerda, de las longitudes que indique el proyecto, se trazarán la circunferencia y los arcos que se ven en la figura, y que representan una fuente y cuatro trapecios circulares.

989. **Situacion de los objetos interiores ó detalles en el plano.**— Estableciendo el número conveniente de trasversales, y disponiendo estas líneas poligonales de modo que comprendan entre sí todos los detalles para referirlos á ellas por ordenadas ó por intersecciones de visuales, se tendrán los elementos necesarios para la situacion de todos los objetos que deba comprender el plano del terreno.

La fig. 671 (lám. 49) representa un terreno cuyo plano se trata de levantar, y manifiesta la posicion de las trasversales que ha habido que establecer: las HYJL y HYJM tienen la parte comun HYJ, que debe repetirse para ambas y las cuales parten del punto H del lado FE y van á terminar en los puntos L y M de los lados AG y AB; á no ser que se advierta que HYJL es una trasversal, y otra la JM que parte de un punto J de aquella y termina en el M del contorno. La HYJL con la parte HFGL del contorno sirven para circunscribir y determinar la posesion cercada que se ve en la figura, y la HYJM con la QPON que parte del punto Q del lado

EF y va á parar al N del AB, circunscriben y determinan el rio. La QPON con la DRSTB que desde el vértice D va á terminar en el B, circunscriben el terreno quebrado comprendido entre ellas, sirviendo la última para determinar y situar el arroyo. Las partes JL y JM de las trasversales HYJL y HYJM con la LAM del contorno, circunscriben la laguna que se ve en la figura y sirven para determinarla.

Con el objeto de evitar confusion, sólo se indican algunas de las ordenadas *ab*, *cd*, *tx*, que sería necesario establecer. El árbol Z se halla determinado por la interseccion de las visuales dirigidas desde los extremos de la CD.

Del mismo modo se podrá fijar el frente *ce* del cercado, determinando por intersecciones sus extremos como se ve en la figura.

Para fijar cada punto como el árbol Z, hubiera bastado medir la distancia CZ cuando esto es posible y el ángulo ZCD, pudiendo determinar tambien así los dos extremos del frente *mn*.

Cuando se hace uso de registros, la coleccion debe contener:

1.° El del polígono principal ABCDEFG (950 ó 955)

2.° El auxiliar del contorno (881).

3.° Los auxiliares correspondientes á las trasversales, tanto para la determinacion y situacion de estas como de los detalles interiores; los cuales no difieren en su formacion de los explicados (924 y 925), valiéndonos de los goniómetros ó de la brújula para el establecimiento de las trasversales.

Algunas veces ocurre al levantar el plano de un polígono, quedar comprendido dentro de él otro cuyo plano se tenía ya de antemano, y en este caso la cuestion se reduce á tomar en el terreno los datos necesarios para situar el plano de este último dentro del plano del primero cuando éste se construye, en las mismas relaciones de posicion; para lo cual se procede del modo siguiente:

Sea ABCDEFGHY (fig. 672; lám. 49) el polígono cuyo plano se quiere levantar, y P el polígono cuyo plano se tiene de antemano. Despues de obtenido el polígono principal ABCDEFGHY, si los vértices de éste son accesibles como se supone en el caso actual, se fijarán los extremos de una diagonal ó eje principal LM del polígono P, determinándolos por interseccion desde tres vértices E, F y G, como se ve para el punto M, ó desde cuatro B, A, Y y H, como se ha hecho para el L.

Pero si los vértices fuesen inaccesibles, por estar tambien levantado con anterioridad el plano del polígono mayor y hallarse cercado el terreno, ó por cualquiera otra circunstancia, habrá que valerse del problema de la carta en la construccion, para situar el plano del polígono P dentro del correspondiente al ABCDEFGHY. En efecto, tomando para el punto M los ángulos GMF y FME, y para el L los ALB y ALY, despues de construido el primer polígono se resolverá el problema de la carta trazando sobre EF y FG los arcos capaces de los ángulos EMF y FMG, cuya interseccion nos dará la posicion del punto M, y del mismo modo se obtendrá la de L, refiriendo cada punto si se quiere más comprobacion á cuatro vértices como indicamos para este último.

La determinacion de un solo punto L es suficiente, si se conoce ó se puede tomar el ángulo que forma la LM ú otra línea del polígono P que parta de L con la visual dirigida á uno de los vértices inaccesibles, tales como A ó B

Una vez fija dentro del plano la LM en cualquiera de los dos casos anteriores, no habrá más que copiar el plano P igual al dado, si está en la misma escala que el anterior, ó reducirle primero á esta en el caso contrario

990 **Terrenos contiguos ó adyacentes.**—Se pueden emplear procedimientos análogos á los de las figs. 636, 637 y 638 (lám. 45). Muchas veces conviene, sin embargo, establecer una red de grandes polígonos como se ve en la fig. 673 (lám 49), los cuales comprenden toda la extension del terreno cuyo plano se quiere levantar, y á cuyos lados se refieren los de los terrenos contiguos en vez de levantar aisladamente los planos de cada uno de estos terrenos. Los polígonos se numeran para mayor claridad y se han trazado con líneas llenas. Deben satisfacer á la condicion de que sus lados sigan próximamente las direcciones de los caminos y senderos y los cursos de los rios y arroyos, á fin de que sirvan al mismo tiempo para determinarlos. Si despues se trazan en el interior de cada uno de los polígonos el suficiente número de trasversales, que en la figura señalamos con líneas de trazos, se podrán de esta manera circunscribir hasta las menores masas de detalles Para evitar confusion, señalamos en cada polígono las trasversales poniendo el número de órden en los dos extremos, para fijar así los puntos donde empiezan y donde concluyen, como se ve en los polígonos números 1 y 3. Esta red de polígonos constituye lo que se llama *poligonacion* ó *canevás poligonal*, como hemos dicho (931—2.º).

En la determinacion de cada uno de los polígonos, se pueden seguir los varios métodos explicados para los que se componen de un corto número de rectas, inscribiendo en el croquis todos los datos que se tomen. Se operaría con mucha expedicion determinando con exactitud un solo lado AB del primer polígono y empleando el método de doble interseccion; pues como al construirle en el papel, se tendría la proyeccion del lado BC, sobre esta se construiria el polígono núm 5, y así sucesivamente; de modo que con solo la medida del lado AB y la determinacion de los rumbos de todas las demás rectas ó de los ángulos que forman entre sí, se podría construir el canevás en el papel Conviene, sin embargo, para más exactitud y como medio de comprobacion, medir algunas rectas más, como por ejemplo, las DE y FG, á fin de examinar si sus proyecciones concuerdan con la magnitud que deben tener en la escala. Se podrá tambien averiguar si en cada polígono la suma de los ángulos es igual á 2R (n—2).

En la construccion del plano, una vez convencidos de la exactitud de la red de los polígonos, serán parciales los errores que pudiese haber en las trasversales ó en las ordenadas que refieren á estas y á los lados de aquellos, los contornos de los varios terrenos adyacentes y los objetos interiores Para evitarlos, se podrian igualmente comprobar los ángulos hasta de los más pequeños polígonos de que se compone el canevás.

Cuando se llevan registros, se formarán para cada uno de los grandes polígonos, el principal y los auxiliares necesarios; y la reunion de los de todos ellos dispuestos por su órden y con los datos suficientes para relacionarlos entre sí, sin que pueda haber lugar á dudas en la construccion, constituirán la coleccion completa de todos los estados que contienen los datos tomados en el terreno. Se concibe, sin embargo, la conveniencia de que acompañe siempre el croquis para mayor claridad en la ejecucion del plano.

991. El procedimiento que acabamos de exponer tiene aplicacion en el Catastro, pues cada polígono puede comprender cierto número de parcelas, las cuales serán determinadas á su vez por el suficiente número de trasversales establecidas en aquel. Así el polígeno núm 1 comprendería cuatro parcelas, y cinco el número 3.

Excusamos advertir que en el caso que nos ocupa, como en todos, se cuenta de antemano con la posicion fija de ciertos puntos, como A, G y H por ejemplo, con los cuales se halla relacionada la poligonacion establecida; bien pertenezcan á esta, como en el caso actual, ó bien sean otros cualesquiera, á los cuales se refieran por intersecciones ó por el problema de la carta algunos puntos del canevás poligonal.

992. **Planos de las poblaciones.**—Cuando estas son pequeñas, aunque de alguna más consideracion que las de que nos hemos ocupado en el capítulo anterior, se procederá con los goniómetros de la manera siguiente:

La primera operacion es determinar el contorno que ha de circunscribir la poblacion por medio de una triangulacion gráfica, eligiendo para punto interior, vértice comun de todos los triángulos, la veleta de una torre, que se halle situada lo más céntrica posible, y los demás vértices á las entradas de las calles principales, teniendo presente cuanto se ha dicho (930), y procurando con preferencia á las demás condiciones, que los triángulos se aproximen á ser equiláteros. Los vértices de los ángulos y los demás puntos de referencia, se fijan en las calles por medio de piquetes de madera ó de hierro, introducidos en el terreno, ó de señales practicadas en las aceras. Hecho esto, se procede al establecimiento de las trasversales, que dividen al polígono en otros varios; y como pueden ser líneas muy quebradas y en bastante número, conviene adoptar la siguiente clasificacion, que sirva de guia, tanto en los trabajos sobre el terreno como en los de gabinete, y que al mismo tiempo facilite la inteligencia de los muchos y minuciosos datos que esta operacion exige.

Supongamos, en primer lugar, que el contorno del polígono tiene la forma de un cuadrado, tal como el ABCD (fig. 674; lám. 50), y que las trasversales son líneas rectas, pues es fácil hacer extensiva la clasificacion que vamos á exponer á las demás especies de polígonos, y cuyas trasversales sean líneas quebradas.

En la figura indicaremos las trasversales con el número de órden puesto en sus extremos

Llamaremos *trasversales de primer órden* á las que se apoyan en el contorno del polígono principal, como las 1..... 1.

De *segundo órden* á las que se apoyan en las de *primero*, ó en estas y en el contorno del polígono principal, como 2..... 2.

De *tercer órden* á las que se apoyan en las de *segundo*, ó en las de *segundo* y de *primero*, ó en las de *segundo* y el contorno del polígono principal, como las 3..... 3.

De *cuarto órden* á las que se apoyan en las de *tercero*; en las de *tercero* y *segundo*; en las de *tercero* y *primero*, ó en las de *tercero* y el contorno, como las de 4..... 4, y así sucesivamente.

De donde resulta, que de primer órden hay una clase de trasversales, de segundo dos, de tercero tres, de cuarto cuatro y así de las demás; siendo cada trasversal del órden inmediatamente inferior al que corresponde al de grado menos elevado de aquellas en que se apoya.

Ahora es fácil concebir la manera de levantar el plano de una poblacion. La fig. 675 (lám. 50) manifiesta el contorno del polígono ABCDEF, que suponemos circunscribe á una poblacion. Las líneas quebradas *amb*, *cld* y *ehf* representan las trasversales de primer órden; *pqr* es de segundo y *qs* de tercero.

Tambien se pudiera elegir un punto O′, de una plaza (fig. 676; lámina 50) y trazar desde él las trasversales de primer órden, dirigiendo unas hácia las puertas y entradas principales de la poblacion, y otras de modo que recorran las demás calles principales, y que vayan á parar como las primeras á los vértices y lados del polígono circunscrito.

Las trasversales de segundo órden se establecerán de manera que formen polígonos concéntricos, como las *ab*, *bc*, *cd*.... *hm*, *mn*..... y se señalarán con números de órden. Tambien es de segundo órden la *ks*C que parte de una de primero y termina en el polígono ABCDEF.

Son trasversales de tercer órden las *rr′n′* y *ee′* que se apoyan en dos de segundo; la *tt′* que se apoya en una de segundo y otra de primero, y la *xx′* que se apoya en una de segundo y en el contorno del polígono principal.

No debe olvidarse que en las figs. 675 y 676 (lám. 50) los rádios OA, OB, OC..... son las proyecciones de las visuales dirigidas al extremo de una veleta, cuya proyeccion es O.

Una vez trazados todos los órdenes de trasversales necesarios, y de cada órden el suficiente número de ellas, hasta llegar al caso de que cada manzana quede circunscrita en un polígono, se referirán á los lados de este los vértices de aquella por medio de ordenadas ó de cualquiera otro medio de los que hemos dado á conocer, formando el croquis á medida que se van midiendo los lados y los ángulos; y anotados en él los datos se podrá proceder despues á la construccion en el papel, en la cual se seguirá el órden lógico de mayor á menor, segun se ha operado en el terreno.

Obsérvese que las disposiciones que presentan las trasversales de las poblaciones antiguas, como las de las figs. 675 y 676 (lám. 50), hoy no se siguen y se procura en la construccion de las modernas que guarden la más sencilla de la fig. 674 (lám 50), de lo cual es un buen ejemplo el proyecto de ensanche de Madrid

Con el objeto de no medir perpendiculares de mucha longitud en las calles anchas de las poblaciones, cuando son muy irregulares, se puede adoptar el método que hemos explicado (881), y que se comprende con facilidad por la sola inspeccion de la fig. 677 (lám. 50).

Habiendo explicado el modo de levantar los planos de los edificios (947) se podrán obtener igualmente los de los que componen cada manzana, así como los de las iglesias, establecimientos públicos y otros que convenga representar en el plano.

Cuando para que no resulte confuso el croquis con muchas anotaciones se llevan además registros, la coleccion debe contener:

1.° El correspondiente al polígono principal.

2.° El del contorno del terreno que circunda la poblacion, referido al del polígono principal.

3.° Los de trasversales por su órden y segun su respectiva numeracion, expresando los puntos de que parten y aquellos en que terminan.

4.° Los de todos los edificios públicos ó particulares ó de aquellos solamente que deban ser detallados en escala mayor llamada por esta razon *escala de detalles*.

993 Puede tambien levantarse el plano de una poblacion sin necesidad de disponer una red de triángulos, cuando aquella se halla comprendida en la extension de un terreno cuyo plano ha de levantarse; pues no habrá más que disponer las líneas que componen el canevás, de manera que la poblacion quede encerrada dentro de un polígono cuyos lados formen parte del sistema establecido. Se sigue despues un método análogo al que hemos explicado en el capítulo anterior, y que ahora se convertirá en el expuesto para los polígonos contiguos, debiendo entenderse de la misma manera, á excepcion de que las manzanas en este caso quedan circunscritas por polígonos de todas clases, en vez de serlo en su mayor parte por trapecios.

994. Los métodos acabados de exponer, que no son otros que el de rodeo, tanto para el contorno como para las trasversales, pueden auxiliarse con el de doble interseccion, siempre que se esté en condiciones de poderle usar para evitar la medida de las líneas.

995. *Poblaciones cercadas.*—Cuando se trata de una plaza cercada por murallas ó por cualquier otro género de fortificacion, puede operarse en

sentido de un polígono principal establecido en el interior, si bien cuando la disposicion es tal que impide descubrir un mismo punto interior desde todos los vértices, hay que elegir dos ó más, ó establecer en el exterior el polígono principal como en los casos generales.

Si la operacion ha de limitarse al recinto interior ó no es posible operar en el exterior por cualquier circunstancia, se podrá hacer uso del método por radiacion, como manifiesta la fig. 678 (lám. 50). Para esto se colocará el instrumento en estacion en un punto céntrico *o* de la plaza que representa la figura, y se dirigirán visuales á los jalones *s*, *r*, *t*..... colocados en los puntos medios de las entradas de las calles que desembocan en ella, anotando los valores de los ángulos y de las distancias. Se pasará á hacer estacion en cada uno de estos puntos *r*, *s*, *t*..... para determinar las alineaciones *rx*, *sx'* y *tz'*, y estacionando, por último, en los puntos *x*, *x'* y *z'* se determinarán las *xl*, *x'm* y *z'n*, que terminan en lados del polígono principal *abcde*..... como las dos primeras, ó en vértices del mismo como la última.

Del mismo modo se determinarán todas las demás rectas que partiendo del punto *o* sea necesario trazar hasta el contorno del polígono principal, y que en este caso serán las trasversales de primer órden.

Se procederá despues á la determinacion de las trasversales del segundo, cuyos extremos se apoyan en las de primero y son las *xx'*, *zz'*, y así sucesivamente las de los demás órdenes hasta lograr circunscribir cada manzana dentro de un polígono, como se ve en la parte *orxlmnz't*, á cuyos lados puede referirse el contorno de la misma, bien por ordenadas como las bajadas sobre el lado *rx*, bien por radiacion dirigiendo visuales á las esquinas entrantes y salientes como se ha hecho en la figura desde los puntos *b*, *c* y *x'*.

El polígono principal *abcde*..... circunscrito á la poblacion é interior á la muralla se halla naturalmente determinado por los jalones colocados en los extremos de las trasversales de primer órden, ó bien por los que desde luego puedan plantarse á las inmediaciones de los vértices de dicha muralla.

Con el fin de tener medios de comprobacion en la construccion del plano, se procurará dirigir visuales al extremo de una veleta cuya proyeccion horizontal es el punto *v*, desde todos aquellos vértices del polígono principal desde los cuales se descubra, como se observa respecto de los *n*, *p*, *a* y *b*, para ver si todas las proyecciones de los rádios se cortan en un mismo punto, proyeccion de la veleta. En estos casos puede abreviarse la operacion, despues que se han dirigido las dos visuales *nv* y *pv*, empleando el método de doble interseccion para evitarse la medida de las rectas *pa* y *ab*. Desde los puntos *i*, *h* y *g*, desde los cuales suponemos que no puede descubrirse la veleta *v*, se han dirigido visuales á la *v'*, y así se puede hacer con todos los demás vértices, procurando referir cada tres ó cuatro de ellas, cuando no se puede á las veletas, á otros puntos notables como cañones de chimeneas, esquinas de los aleros de los edificios más elevados ú otros objetos situados en el interior ó en el exterior de la poblacion y que pueden servir de puntos de referencia.

Tambien se podrán observar durante las operaciones para tomar todos estos datos, las fachadas que son unas prolongaciones de otras, como por ejemplo, las $a'b'$ y $c'd'$, para ver despues en la construccion si las proyecciones de los puntos a', b', c', d' resultan igualmente en línea recta.

996. *Empleo de la plancheta y de la brújula en el levantamiento de planos de las poblaciones.*—La plancheta se usa mucho por los ingenieros militares, por resultar desde luego construido el plano en la escala que se desea, al mismo tiempo que se ejecutan las operaciones del levantamiento.

La brújula no suele dar muy buenos resultados por la proximidad de la aguja á los hierros de las rejas, balcones y puertas. Por la misma razon, conviene emplear para la plancheta la orientacion que proporciona la alidada, con preferencia á la que se obtiene por medio de la declinatoria.

997. *Replanteo.*—Esta operacion no presenta dificultad con los goniómetros, reproduciendo en el terreno los ángulos y lados del proyecto, empezando por la determinacion de las trasversales de primer órden, refiriendo á ellas las de segundo, y siguiendo una marcha análoga á la que se emplea para el levantamiento del plano, hasta fijar en el terreno las posiciones correspondientes á los puntos que determinan los últimos detalles.

998. **Aplicaciones á la Topografía militar.—Definiciones.**—La *fortificacion* enseña á establecer las *obras de defensa* que han de poner á las tropas á cubierto de los ataques del enemigo.—Se divide en *fortificacion pasajera ó de campaña*, cuando las obras han de subsistir por tiempo limitado; y *permanente*, que se ocupa del estudio y construccion de las *plazas fuertes*. Las obras de fortificacion pasajera se llaman tambien *atrincheramientos*.

Las partes principales de un atrincheramiento son el *parapeto* P (figura 679; lám. 50) y el *foso* F, unidos á veces por la *berma fg*.

El parapeto, aun cuando puede construirse de otros materiales, es ordinariamente un macizo de tierra que proviene de la escavacion del foso; su *altura ó denominacion dn*, que es la distancia de la *cresta d* al plano del terreno, varía entre 2 y 3^m, segun las armas á que pertenezan las tropas que está destinado á cubrir, y á veces segun el tiempo de que se dispone. El *espesor np* del parapeto depende de la penetracion de los proyectiles á que ha de estar expuesto, siendo ordinariamente de $0,^m5$ á 1^m para la fusilería y de 2 á 4^m para la artillería de campaña. Exteriormente termina el parapeto en un plano inclinado *ef*, que se llama *declivio exterior del parapeto*, y tiene la inclinacion natural de las tierras empleadas. El declivio interior *dc* tiene mayor inclinacion que la que corresponde á las tierras de que está formado, con objeto de resguardar mejor á las tropas situadas en la banqueta *bc*, dispuesta horizontalmente ó con una ligera inclinacion al interior para dar salida á las aguas llovedizas, y á una altura conveniente para que los tiradores puedan hacer fuego por encima de la cresta *d*. La distancia *dr* de este punto al plano de la banqueta se llama *altura de apoyo*, y es ordinariamente de 1,^{m}25. El declivio *cd* se sostiene en su inclinacion por medio de *revestimientos*, hechos de céspedes ó de otro material. El plano inclinado *ab* que sirve para facilitar la subida de los tiradores á la banqueta, se llama *declivio de subida á la banqueta*, y á veces se sustituye por una gradería. El plano *de* en que termina por su parte superior el parapeto, tiene la inclinacion necesaria para que su prolongacion no pase á mayor altura *mj* que un metro sobre la entrada del foso, con objeto de que ésta se halle así defendida, y el enemigo pueda ser descubierto en todo el terreno situado delante del atrincheramiento. La interseccion *e* de los declivios *de* y *ef* se llama la *cresta exterior del parapeto*; y la *cresta interior d* toma el nombre de *magistral*, porque á ella se refiere el trazado de las demás partes de la obra.

La *berma fg* debe ser lo más estrecha que permitan los desprendimientos y el empuje del parapeto; pues su anchura puede favorecer los ataques del enemigo. Los planos *gh*, *hi*, *ij*, que forman el foso, se llaman respectivamente *escarpa*, *fondo del foso* y *contraescarpa*; siendo esta última más escarpada ó de mayor pendiente para dificultar la bajada al foso, cuya profundidad *xi* es de 2 á 4^{m} por lo general.

A veces se dificulta la entrada al foso por la construccion de un macizo *jsl*, llamado *glasis* ó *explanada*, que se forma tomando tierras del foso ó de un antefoso *ltz*, construidos ambos con la condicion de dejar el terreno descubierto á los fuegos del parapeto, haciendo que *lt* pase por encima de la prolongacion *eq* del plano de fuegos *de*. Cuando el glasis no parte de la arista del foso, la porcion de terreno natural que entre ellos media toma el nombre de *camino cubierto*.

Se conocen con los nombres de *espaldones* ó *traveses* unos macizos terminados lateralmente por declivios iguales y en su parte superior por otros dos formando caballete, y que sólo tienen por objeto cubrir de los fuegos del enemigo á un espacio determinado.

Cuando los medios ó el tiempo de que se dispone no permiten otra cosa, se forma un atrincheramiento por un pequeño parapeto, cuyas tierras se extraen de una *zanja* ó *trinchera*, en la que se colocan los tiradores.

La fig. 679 (lám. 50) representa el perfil ó seccion recta del atrincheramiento; para deducir de él la proyeccion horizontal, no hay más que proyectar sobre una línea de tierra AZ los diferentes puntos *a*, *b*, *c*... y tirar por las proyecciones *a'*, *b'*, *c'*.... perpendiculares á la AZ. La zona comprendida entre las paralelas tiradas por *a'* y *b'* será la proyeccion horizontal del declivio de subida á la banqueta, y así sucesivamente. La *magistral* se señala en la proyeccion con una línea más gruesa que las demás.

999 Cuando la magistral es una sola recta, los atrincheramientos tienen, entre otros, el inconveniente de proporcionar con el foso, una vez salvado por el enemigo, un *espacio muerto* ó á cubierto de los fuegos del parapeto; para evitarlo se construyen *ángulos entrantes* como el *abc* (figura 680; lám. 51) comprendidos entre 90 y 120° á fin de poder llevar los fuegos al foso, y *ángulos salientes*, como el *bcd*, que tienen el inconveniente de presentar el espacio ó sector *mcn* de fuegos muertos, y cuyos límites son de 60 á 180°.

La bisectriz *rt* de todo ángulo saliente se llama *capital*.

1000. La artillería puede disponerse para hacer fuego por encima del declivio superior del parapeto, colocando las piezas sobre unos macizos llamados *barbetas;* ó bien á través del parapeto, construyendo en él unas aberturas que se denominan *troneras* ó *cañoneras*. La porcion de parapeto comprendida entre dos cañoneras se llama *merlon*.

Llámanse *repuestos* unos espacios prismáticos huecos, destinados á encerrar las municiones y ponerlas á cubierto de las explosiones que pudieran ocasionar los tiros del enemigo.

1001. *Líneas de fortificacion*.—Los atrincheramientos en línea recta se construyen cuando sus extremos están naturalmente defendidos por obstáculos que el enemigo pueda salvar difícilmente: cuando no, pueden defenderse por medio de *traveses*, así como las aberturas destinadas á la comunicacion del interior y el exterior del atrincheramiento.

Un atrincheramiento *abc* formando ángulo entrante, recibe el nombre de *tenaza*, y unido á otros varios iguales á él constituye una *línea de tenazas*. Si los lados contiguos son desiguales como en la fig 681 (lám, 51), se tiene una *línea de llares*, llamándose caras los lados mayores *bc, de*... y flancos los menores *ab, cd*...

Rediente es una obra de fortificacion compuesta de dos caras *ab, bc* (fig 682; lám. 51) que forman un ángulo saliente. La línea *ac* que une los extremos de estas caras se llama *gola*. Cuando la longitud de las caras es menor de 30m, recibe el rediente el nombre de *flecha*.

Varios redientes unidos por caras rectas *ca', c'a''*... (fig. 683; lám. 51) llamadas *cortinas*, constituyen una línea de *redientes*.

Luneta es una obra compuesta del ángulo saliente *bcd* (fig. 684; lámina 51) y dos caras más pequeñas *ab, de,* llamadas *flancos*.

Varias lunetas unidas por medio de cortinas *cd, c'd'*.... (fig. 685; lámina 51) reciben el nombre de *baluartes* ó *bastiones*, ó de *frente abaluartado* ó *bastionado*.

Se distinguen tambien con los nombres de *caponeras*, *bonetes*, *hornabeques*, y *hornabeques dobles* ó *coronas*, las obras de fortificacion representadas en las figuras 686, 687, 688 y 689 (lám. 51). En las tres útimas se llaman *alas* las caras *ab, de*; y *golas* las rectas *ae* que unen sus extremos.

1002. *Líneas con intervalos*.—Las líneas de fortificacion explicadas, haciendo abstraccion de las cortinas, constituyen las *líneas con intervalos;* generalmente se construyen varias de estas líneas dándoles disposiciones convenientes para cubrir de fuegos los espacios comprendidos entre las obras.

1003. *Obras cerradas.*—Cuando las fortificaciones indicadas circunscriben un espacio, conocido en la Fortificacion con el nombre de *terraplen*, reciben el nombre genérico de *obras cerradas*. Cuando la magistral es un polígono convexo rectilíneo, curvilíneo ó mixto, se llama *reducto*. Si la obra presenta un ángulo entrante ó tenaza en cada uno de sus frentes como en la fig. 690 (lám. 51), recibe el nombre de *estrella* ó de *fortin* ó *fuerte atenazado*.

Fuertes abaluartados.—Son las obras cerradas que presentan un baluarte en cada una de sus caras, como las representadas en las figuras 691 y 692 (lám. 51).

Algunas veces se construyen *reductos interiores* en los fuertes abaluartados.

1004. **Trazado y levantamiento de planos.**—*Trazado de las líneas de fortificacion.*—Las *líneas de tenazas* se trazan determinando los puntos salientes a, c, e.... (fig. 680; lám. 51), levantando en los puntos medios de los frentes parciales ac, ce.... las perpendiculares pb, qd.... que están con ellas en una relacion que varía entre $1 : 2$ y $2 : 7$, y uniendo despues los puntos a, b, c...

Una *línea de redientes* se traza determinando los puntos salientes b, b'.... (fig. 683; lám. 51), y haciendo que las caras ba, bc.... formen con el frente bb' ángulos de 60° y sean de igual longitud. Las cortinas ca'.... resultan paralelas al frente.

Una *línea de baluartes*, determinando los puntos salientes a, a', a''.... (fig. 685; lám. 51) y levantando perpendiculares en los m, m'.... medios de las partes aa', $a'a''$.... en que queda dividido el frente: se da á estas perpendiculares una longitud $mt = m't'$.... que esté con la de aa' en una relacion que varía entre $1 : 6$ y $1 : 8$. Se traza despues cada baluarte tirando por t las rectas ad, $a'c$, que se llaman *líneas de defensa*, tomando en ellas las magnitudes ab, $a'e$ de las caras del baluarte, cuya magnitud está con la del frente en la relacion de $1 : 3$ ó de $2 : 7$. Desde los puntos b y e se tiran por último perpendiculares á las líneas de defensa, determinando así los flancos bc y ed y la cortina cd.

Obras cerradas.—Trazado el polígono circunscrito, se aplica á cada uno de sus frentes el trazado de la obra aislada que corresponda, y que acabamos de dar á conocer. Para los fuertes bastionados de las figuras 691 y 692 (lám. 51) se emplean ordinariamente las relaciones respectivas $1 : 8$ y $1 : 7$ entre la perpendicular y el frente para el trazado de cada uno de sus baluartes.

1005. *Levantamiento del plano de una fortificacion.*—Para levantar el plano de un fuerte, puede establecerse una base ab (fig. 693; lám. 51) orientada y medida con exactitud, poniendo la plancheta en estacion en a y dirigiendo visuales á los vértices inmediatos de la cortina, cuyas distancias al punto de estacion se miden y marcan en la plancheta para trazar las caras y flancos del recinto; diríjase despues una visual *al* para continuar el trazado de un polígono, que vendrá á cerrar en *b*, y al que se referirán asimismo todas las demás partes de la magistral del recinto. Paralelas á esta línea, tiradas á la distancia correspondiente completarán las proyecciones del muro, berma y escarpa del foso.

Al hacer estacion en *a* y *b* pueden determinarse por intersecciones los puntos *c*, *d*, *e*, *f*, á fin de relacionar con el plano del recinto el del camino cubierto, valiéndose de los puntos *c* y *d*, y el de la luneta por los *e*, *f*. Estos planos se levantan aisladamente siguiendo el mismo método de rodeo, refiriendo á los vértices *g*, *c*, *h*, *e*.... los puntos que caracterizan las formas de la magistral en las distintas partes de la fortificacion.

Si las circunstancias locales impiden la referencia de los puntos *c*, *d*, *e*, *f* á la base *ab*, pueden determinarse por el problema de la carta (849) con relacion á tres puntos fijos del recinto, las posiciones de dos puntos *c*, *d* del camino cubierto, y los *e*, *f* de la luneta.

El levantamiento del plano puede hacerse tambien con el teodolito ó la brújula; pero el empleo de este último instrumento exige mucho cuidado por las variaciones que causaria en la aguja la proximidad á las baterías y depósitos de armas y municiones. Por esta misma razon no debe emplearse con entera confianza la declinatoria para la orientacion de la plancheta.

1006. *Levantamiento del plano de una trinchera*.—La *trinchera* es una obra de fortificacion que tiene por objeto poner á cubierto de los fuegos de una plaza sitiada á las tropas que han de atacarla, permitiéndolas acercarse del mismo modo hasta el pié de las obras del enemigo.

Medida y orientada una base AB (fig. 693; lám. 51) en el terreno más á propósito, y cubierta si es posible de los fuegos enemigos, se fijan por intersecciones los ángulos flanqueados C, D, E del fuerte contra el que se dirige el ataque, á fin de determinar las relaciones de posicion que con ellos tienen las distintas partes de la trinchera. El plano de ésta se obtiene partiendo de uno de los extremos B con un seguimiento por rodeo con la plancheta, segun la línea BG*m*; desde el punto *m* se determinan los que fijan la forma y posicion de la batería M, así como el extremo *n* del trozo *mn* que termina la primera paralela, y el camino *mom'* de comunicacion entre ésta y la segunda; se continúa el levantamiento del plano de la primera segun la línea poligonal *mpqr*, continuando desde *r* por la línea *rs*FA cerrando en A un polígono, y siguiendo desde *r* en el trazado *rtxz*, con lo que se tendrá levantado el plano de la primera paralela. Desde *t* y *z* se levantan los de las baterías N y P. Volviendo á *t* se sigue el camino de comunicacion con la segunda paralela, continuando así hasta la última, y encontrando comprobaciones en el cierre de los polígonos que forman las paralelas con la base y los caminos de comunicacion.

Puede hacerse con prontitud este trabajo empezando simultáneamente dos operadores desde A y B, y yendo á encontrarse en puntos tales como el q, fijos de antemano hácia la mitad de las paralelas.

1007. *Levantamiento del plano de un campo militar.*—Determinada la base, se refieren á ella por intersecciones todos los puntos notables que presente el terreno ocupado por las tropas, así como los extremos del que corresponde á cada uno de los distintos cuerpos. Tambien pueden referirse estos á los vértices de una poligonacion determinada por el método de rodeo, cuyos lados son próximamente paralelos á los frentes de banderas de los diferentes cuerpos de tropas.

1008. **Ligera idea de los reconocimientos militares**.—Los procedimientos explicados para el levantamiento de los planos, exigen un tiempo que excede generalmente del que puede emplearse en las operaciones de campaña; por lo cual es preciso en general el empleo de medios prontos, que suministren sin embargo el conocimiento del terreno en que ha de operarse, con la aproximacion que es necesaria para las operaciones militares. Los trabajos que con este objeto se ejecutan, reciben el nombre de *reconocimientos* ó de *itinerarios*, segun su naturaleza y el objeto que se proponen, y se componen del *plano* y la *memoria descriptiva*. Prescindiendo de esta última, que ha de contener una noticia detallada de la naturaleza del terreno, sus producciones, número de habitantes de las poblaciones, recursos de todo género que ofrezca el país, y otros datos de estadística en general, y en particular de aquellos que puedan influir en el resultado de las operaciones de la guerra, nos ocuparemos de los planos ó croquis militares. Cuando el terreno que ha de representarse se puede recorrer en toda su extension, se elige lo más céntrica que sea posible una base AB (fig. 643; lám. 46), procurando que se halle en un terreno despejado y alto, á fin de extender el horizonte visible y aumentar el número de puntos que se han de fijar desde ella. La orientacion de la base se obtiene por la brújula ó la declinatoria cuando las circunstancias no permiten aplicar los procedimientos indicados (126), y su longitud puede conocerse por medio de la velocidad de propagacion del sonido (678), ó á pasos que se cuentan directamente ó por medio del odómetro (675 y 676), ó bien se hace uso de los telémetros (Capít. XIV). Desde los extremos de la base AB se determinan por intersecciones, como se ha dicho (941), todos los demás puntos principales del terreno, en la extension que se considera. Para la eleccion de estos puntos, conviene tener en cuenta los que presentan bastante elevacion y se determinan fácilmente por un árbol, una roca ú otra señal cualquiera, á fin de evitar la confusion que puede introducir en el trabajo la adopcion de aquellas cimas que no presenten señales marcadas y que pueden variar de aspecto con los distintos puntos de vista.

Para determinar la direccion de las visuales pueden emplearse las brújulas de Burnier ó de Kater, los instrumentos de reflexion, y tambien la *plancheta de reconocimientos* (fig. 694; lám. 51), que se compone de un tablero formado de listones unidos por una tela fuerte ó por un hule, los que se disponen en un plano por medio de dos reglas que giran por uno de sus extremos alrededor de charnelas, y se fijan por el otro á los listones con unas aldabillas. Cuando no ha de usarse, puede el tablero plegarse y trasportarse muy cómodamente. La alidada (fig. 695; lám. 51), es un prisma triangular de madera: una de sus aristas inferiores es la línea de fé, que tambien puede llevar grabada la escala, y la superior sirve para dirigir las visuales, que se determinan mejor clavando en ella dos agujas. La plancheta puede orientarse por la declinatoria, y tambien á falta de esta puede serlo aproximadamente, trazando en el tablero las direcciones de la sombra de un estilo á las distintas horas del dia, para disponerla en los siguientes del mismo modo, observando la hora cada vez que se ponga en estacion, y haciendo girar al tablero hasta que la sombra del estilo tenga la direccion ya determinada.

Para referir los detalles á los puntos principales fijos de posicion como acabamos de indicar, pueden emplearse los distintos medios que hemos dado á conocer en el capítulo XV, determinando los datos con los goniómetros que acabamos de indicar, con los telémetros las distancias que han de observarse, midiendo á pasos las que han de recorrerse y dibujando á ojo los detalles menos importantes, que pueden, sin embargo, contribuir á la perfeccion del trabajo.

1009. Si parte del terreno está ocupado por las tropas enemigas, puede establecerse una base poligonal de operaciones, partiendo de una línea AB (fig. 668; lám. 49), medida con el grado de aproximacion que las circunstancias permitan. Los puntos inaccesibles se determinan por interseccion ó por doble interseccion, como se ha explicado (984), y los detalles como hemos indicado en el párrafo anterior. Conviene en todo caso para comprobaciones, que pueden ser muy convenientes, medir con el odómetro los elementos de la base poligonal que ha de recorrerse; el empleo del odómetro y de las brújulas citadas, instrumentos con los que puede operarse á caballo en poco más tiempo que el necesario para recorrer la base poligonal, y durante el cual pueden dibujarse los detalles, que se toman á ojo, y hacerse las anotaciones conducentes al mejor desempeño de la operacion, proporciona un medio pronto y suficientemente exacto en atencion á las condiciones que se exigen.

1010. *Levantamiento de planos á ojo y por datos aproximados adquiridos en la localidad.*—Las dificultades y accidentes del terreno, la falta de tiempo ó de los medios necesarios obligan muchas veces á apreciar á ojo los ángulos y las distancias. Para estos casos es muy conveniente haber adquirido esta apreciacion al golpe de vista, comparando los resultados de distintas mediciones con las longitudes respectivas que la imaginacion del observador les habia atribuido con anterioridad, ó fijarse bien en la que corresponde á una distancia dada, de 100 metros por ejemplo, para juzgar á la simple vista de las veces que estaria contenida en la distancia que media entre dos puntos. Es cierto que las distintas posiciones que el observador ocupe relativamente á ellos puede engañarle en sus apreciaciones; pero tambien lo es, que la mucha práctica le puede conducir á resultados que sean suficientemente aproximados, y á los que es preciso atenerse en circunstancias dadas.

En el caso de ser muy largos los lados de los triángulos, conviene determinar los valores de los ángulos por los abrazaderos (902) midiendo á pasos los lados del triángulo, ó bien por la *falsa escuadra*, instrumento sencillo compuesto de dos reglas que giran alrededor de una charnela, por medio del cual se traza gráficamente el valor de un ángulo en el papel, trasportando á él la abertura que corresponde al ángulo del terreno. Las distancias de otros puntos al de estacion cuando el terreno es próximamente horizontal, el ancho de un rio.... se determinan en la práctica, á falta de otros medios, dirigiendo una visual á uno de los extremos de la línea que se quiere medir, de manera que el ala del sombrero del observador, el cual se coloca en el otro extremo, coincida con la visual, girando despues el observador de modo que no varíe la inclinacion de la misma hasta que vaya á terminar en un punto del terreno accesible, en cuyo punto hará colocar un jalon. La distancia de este al punto que ocupa el observador será la longitud aproximada que se trata de conocer.

1011. Cuando sólo se tiene el auxilio de las noticias que pueden suministrar los naturales del país, se forma una escala de leguas, de kilómetros ó de horas de camino, se elige como base la distancia entre dos pueblos notables del interior, tomándola en el plano con arreglo á la escala segun las noticias adquiridas, de las cuales se deduce tambien la orientacion aproximada que corresponde al camino que conduce de una á otra poblacion. Los demás pueblos, caseríos y puntos notables más inmediatos á los que determinan la base se fijan por sus distancias aproximadas á estos puntos (820), y para hacer desaparecer la indeterminacion que por este método resulta al situar el punto de que se trata, sirve la orientacion que para las mismas distancias se conoce por las noticias adquiridas. Fijos así cierto número de puntos notables, sirven para referir á ellos del mismo modo las posiciones de otros más distantes, continuando así hasta llegar á los límites que el plano debe tener. Hecha esta triangulacion gráfica, se procede á trazar los caminos que conducen de un punto á otro, situando en ellos por su distancia á uno de los puntos extremos ó á otros ya determinados en el mismo camino, los caseríos, ventas, puentes, vados, cerros, desfiladeros y cualesquiera otros objetos notables, completando despues la red de caminos, que puedan enlazar estos objetos con las poblaciones ya situadas ó con otros objetos determinados del mismo modo en los caminos principales: se obtiene de esta manera con los caminos una série de trasversales á las cuales se pueden referir todos los detalles de cuya situacion se puede tener noticia. Sería muy conveniente expresar con un signo convencional ó por observaciones escritas, los puntos cuya situacion merece confianza, por ser el resultado de varias noticias acordes ó que procedan de personas en las que se tenga confianza, y la de aquellos de que se puede desconfiar por haber observado contradicciones en los datos adquiridos, ó por cualquiera otra causa. El croquis que siguiendo este método se obtiene, puede á veces rectificarse en lo sucesivo, por las operaciones que se ejecuten ó por la adquisicion de nuevas noticias. En la formacion del primer croquis, que á ser posible debe ejecutarse en presencia de las personas que suministran los datos, conviene hacer las comprobaciones de las distancias de un punto cualquiera al mayor número posible de puntos ya fijos, á fin de rectificar su posicion.

1012. *Itinerarios.*—En los itinerarios sirve de base de las operaciones el plano del camino, que puede levantarse como hemos indicado (1009), refiriendo á la misma base todos los objetos situados á sus inmediaciones como caseríos, bosques, cerros... en una zona más ó ménos extensa, segun la naturaleza del terreno y las instrucciones recibidas, detallando cuidadosamente los que forman parte del camino mismo, como puentes, vados, desfiladeros, los parajes expuestos á inundaciones, caudal de los ríos y arroyos que se atraviesan, su velocidad media, puntos á que llegan en las avenidas, así como todo aquello que pueda contribuir á facilitar ó entorpecer la marcha de las tropas. Tambien debe detallarse el estado de conservacion del camino y de sus obras, los materiales de que puede disponerse para su reparacion, con expresion de las distancias á que se encuentran, y los medios de conduccion con que puede contarse.

Cuando el camino que se sigue está acompañado de una línea telegráfica ó de árboles plantados á distancias iguales, bastará conocer la equidistancia de los palos telegráficos ó de los árboles, y contar su número para obtener aproximadamente las distancias recorridas. En las carreteras pueden fijarse las posiciones de los distintos puntos notables por su distancia al último poste kilométrico, desde cada uno de los cuales debe empezarse la medicion parcial aproximada, logrando así rectificar esta y evitar la acumulacion de los errores.

El plano del camino puede levantarse con los goniómetros indicados (1008) y medir las distancias como acabamos de indicar, empleando los medios expuestos en el mismo párrafo, ó calculándolas por el tiempo empleado en recorrerlas (677).

Los detalles que deben referirse al camino se extienden por lo general á una zona de 500 metros, que puede ser menor si el terreno es despejado y llano, ó extenderse más cuando es quebrado ó está cubierto de bosques, á fin de prevenir las emboscadas y sorpresas, por el conocimiento del terreno que ha de indicar los puntos del camino que pueden presentar algun peligro.

1013. *Observaciones generales.*—Los planos de los reconocimientos militares suelen hacerse en la escala de $\frac{1}{20000}$, y en la de $\frac{1}{10000}$ cuando lo permite su extension y los datos se han tomado con los instrumentos, aunque sólo de una manera aproximada. Cuando el terreno no se presta á la adopcion de una base en línea recta para el método de las intersecciones, se refieren estas á los extremos de una base poligonal que puede seguir el contorno de un rio ó de un camino, y que se determina por el método de rodeo (1009).

Cuando se dibujan á ojo los detalles de la línea emprendida entre dos puntos en los cuales ha de hacerse estacion, no se observan desde cada uno sino los que comprenden la mitad más próxima de la línea, á fin de no repetir las operaciones

En el levantamiento del plano de un camino ó de una trasversal cualquiera, conviene referir alguno de sus puntos á tres fijos ya en el plano (1008), á fin de rectificar por trozos el seguimiento y las posiciones de los detalles.

En los reconocimientos é itinerarios nunca se reducen los ángulos al horizonte ni al centro de la estacion.

No terminaremos esta ligera reseña de los reconocimientos militares sin hacer ver la importancia del estudio de la Topografía: en efecto, cuanto más extensos sean los conocimientos de este ramo que posea el encargado de ejecutar un trabajo de esta naturaleza, tantos más recursos encontrará para conseguirlo debidamente, resolviendo con la aproximacion suficiente los difíciles problemas que se le presentan á cada paso en un tiempo casi siempre limitado, falto generalmente de recursos, y rodeado de obstáculos que impiden la aplicacion absoluta de los procedimientos generales

Tambien creemos deber llamar la atencion de las personas inteligentes en el arte de la guerra hácia la conveniencia de reunir en un cuerpo de doctrina los preceptos generales de la Topografía que son directamente aplicables á las operaciones militares, y los problemas que más comunmente ocurren atendiendo á los obstáculos que suelen presentarse; constituyendo así un tratado especial, al que podría llamarse *Topografía de campaña*, con más propiedad que *Topografía irregular*, denominacion adoptada por algunos autores

---

CAPITULO XVIII.

Levantamiento de los planos de terrenos de grande extension.— Triangulacion.

Triangulacion en general.—Clasificacion de las triangulaciones en diferentes órdenes.—Condiciones á que debe satisfacer una triangulacion.—Eleccion de la base y de los puntos principales.—Forma de los triángulos.—Reconocimiento del terreno.—Croquis del reconocimiento.—Triangulacion definitiva.—Medida de la base.—Límites de los errores que pueden tolerarse en los datos de una triangulacion.—Orientacion de la base.—Determinacion de una base por el cálculo.—Observaciones de los ángulos.—Angulos deducidos.—Comprobaciones de los ángulos.—Cálculo de los triángulos.—Correccion de los ángulos cuando no concuerda la medida de una base de comprobacion con su valor obtenido por el cálculo.—Construccion del plano.—Determinacion de las distancias de los vértices del canevás á la meridiana y su perpendicular.—Determinacion de los elementos geométricos por medio de las coordenadas.—Traslacion de los ejes de coordenadas.—Aplicacion del sistema de coordenadas á los planos de terrenos de mediana extension.—Replanteo del canevás trigonométrico.—Aplicaciones á la relacion de dos triangulaciones aisladas.—Levantamiento del plano de las líneas de gran extension, y su referencia al canevás trigonométrico.—Trasversales.—Restablecimiento de las trasversales.—Planos parcelarios y detalles referidos á la triangulacion.—Planos de las grandes poblaciones.—Verificacion de los planos.

1014. **Triangulacion en general.**—Los métodos explicados en el capítulo precedente son inaplicables á los terrenos de grande extension: los unos por la dificultad de observar objetos muy lejanos, en razon al poco alcance de los instrumentos empleados en las operaciones ordinarias á que dicho capítulo se refiere; los otros por la acumulacion de errores, que aumentando con el mayor número de elementos considerados, separan cada vez más de la posicion que deben ocupar en el plano, á los distintos puntos que se trata de determinar. De aquí la necesidad de recurrir á otros medios, que nos conduzcan á la determinacion exacta de las posiciones absolutas y relativas de ciertos puntos principales, destinados á suministrar bases á las que deben referirse algunos puntos secundarios, y de las que deben partir las operaciones necesarias para determinar otros puntos de este mismo órden, y proceder de la misma manera para puntos de otros órdenes inferiores, hasta haber considerado todos aquellos cuyo conjunto ha de constituir la proyeccion horizontal del terreno. Entre las condiciones que este sistema de determinacion exige, figura en primer término la medicion directa del menor número posible de rectas, operacion difícil de llevar á cabo con la exactitud necesaria como ya hemos dicho varias veces. A esta circunstancia, así como á las indicadas anteriormente, satisface de una manera completa la *triangulacion*, que es el sistema que se sigue, y consiste en considerar unidos por medio de rectas cierto número de puntos convenientemente elegidos, constituyendo estas rectas una red de triángulos, cuyos ángulos se miden con toda la precision á que es posible llegar, así como uno de los lados que es la *base de la triangulacion*. Por medio de los datos así adquiridos se resuelve el triángulo ó triángulos de que forma parte la base, obteniendo con esto el valor de los otros lados que sirven para el cálculo de nuevos triángulos, procediendo del mismo modo hasta haber determinado todos los elementos de los demás. Nos ocuparemos sucesivamente de las distintas operaciones que deben practicarse para la determinacion de los puntos principales, y de la manera de referir á ellos las operaciones secundarias que han de completar la proyeccion del terreno en la extension que se considere

1015. **Clasificacion de las triangulaciones en diferentes órdenes.**—Una sola triangulacion no es en general suficiente para la determinacion de un terreno de extension muy considerable: en efecto, si es corto el número de los triángulos, lo que disminuye la acumulacion de los errores en las observaciones y en los cálculos, los lados tienen mucha longitud, y no se prestan fácilmente á la determinacion de los detalles que á ellos deben referirse; sucediendo lo contrario si es grande el número de los triángulos. A fin de obviar los inconvenientes que presentaría la adopcion absoluta de uno cualquiera de estos dos sistemas, se forma una primera red de triángulos cuyos lados tienen una longitud algo considerable y que determinan con bastante precision las posiciones de los puntos más principales, constituyendo la *triangulacion de primer órden*. Otra segunda red, de lados más pequeños, y muchos de cuyos vértices coinciden con los de la primera ó se relacionan con ellos, forma la *triangulacion de segundo órden*; continuando si es necesario en el establecimiento de nuevos órdenes, cada uno de los cuales se apoya en el anterior y encuentra en él muchas comprobaciones, hasta llegar á aquel en que la magnitud de sus lados se presta con facilidad á la determinacion de los detalles. La longitud de las rectas que constituyen cada órden depende del grado de exactitud que se trata de obtener y de los instrumentos empleados en la medida de los ángulos. Podemos establecer, sin embargo, las de 10 á 30 kilómetros para los lados de los triángulos de primer órden, y de 5 á 10 para los de segundo; disminuyendo para los órdenes inferiores, cuyo número conviene no prodigar inútilmente. Por lo general solo se consideran dos órdenes, sirviendo el segundo para la referencia de los detalles: razon por la cual se establecen algunos de los vértices del segundo en puntos que correspondan á las líneas extensas que cruzan el terreno, como las divisorias, los caminos, los linderos de los bosques y de las grandes propiedades, los rios y los arroyos de importancia; líneas á que se refiere inmediatamente la situacion de los detalles.

1016 **Condiciones á que debe satisfacer una triangulacion.**— Estas condiciones se refieren á la eleccion de la línea que debe medirse como base de las operaciones, asi como á la de los puntos que han de ser vértices de los triángulos, y á la forma preferible de estos últimos para la más exacta construccion del *canevás trigonométrico*, llamado así para distinguirle del *canevás topográfico* (862).

1017. **Eleccion de la base y de los puntos principales.**—La base debe satisfacer en lo posible á las condiciones siguientes:

1.ª Que se establezca en la parte más céntrica del terreno que se trata de triangular. Esta condicion tiende á evitar la acumulacion de los errores en la parte más distante de aquella en que se hubiese establecido la base, en el caso de no poder satisfacer á la indicada condicion.

2.ª Que se elija para su establecimiento un terreno descubierto y poco accidentado, á fin de facilitar las operaciones de la medicion y procurar la exactitud tan necesaria para asegurar el éxito de los cálculos que en ella se fundan.

3.ª Que sus extremos permitan descubrir el mayor número de puntos notables.

1018. *Eleccion de los vértices.*—Los puntos que han de ser vértices de los triángulos deben satisfacer á la doble condicion de estar perfectamente determinados y de poder ser vistos á gran distancia, al mismo tiempo que deben servir para colocar en ellos los instrumentos en estacion. Las agujas de los campanarios y de las cúpulas cumplen generalmente con la primera de estas condiciones á expensas de la segunda; y las señales artificialmente dispuestas evitan la reduccion de los ángulos al centro de la estacion, pero no son en general tan claramente perceptibles. Deben situarse estas señales en puntos elevados, y si es posible de manera que se destaquen en el horizonte, á fin de que se descubran más fácilmente, y determinar su posicion con relacion á puntos fijos (817 y 846) para reponerlas en caso de que desaparezcan.

Varias son las formas adoptadas para la construccion de estas señales, y pueden hacerse con largas perchas empotradas verticalmente en una pequeña obra de mampostería ó de ladrillo, y terminarlas en su extremo superior por una pirámide ó un cono algo prolongados. La altura de estas perchas se ha determinado por los ingenieros geógrafos de Francia empleando la fórmula

$$H = 0{,}00015D,$$

y siendo D la distancia máxima á que deben ser observadas.

1019. **Forma de los triángulos.**—En la eleccion de los vértices debe procurarse que los triángulos resulten próximamente equiláteros. Para demostrar la conveniencia de esta forma, supongamos que en el triángulo ABC (fig. 696; lám. 52) se tiene un ángulo B muy agudo: un error muy pequeño cometido en la apreciacion del ángulo en A producirá un error muy notable Bm en el lado opuesto BC; error que aumenta á medida que el ángulo B adquiere valores B′, B″.... cada vez más pequeños, y que estará reducido por consiguiente á su menor expresion cuando B sea un *máximo*: y como lo mismo se verifica respecto á los ángulos A y C, resulta que no hay razon para que ninguno sea menor que los otros, y el triángulo debe por lo tanto ser equilátero. Observarémos tambien, que aun cuando la interseccion mejor determinada corresponda al caso en que las líneas que la producen se cortan á ángulo recto, no se emplea el triángulo rectángulo; porque dicha interseccion no puede tener lugar sin perjudicar á las del tercer lado con los que forman el ángulo recto.

Otra de las ventajas del triángulo equilátero consiste en que los errores cometidos inevitablemente en la medida de los ángulos pueden llegar á hacerse nulos. En efecto, se tiene (24)

$$b \operatorname{sen.} A = a \operatorname{sen.} B:$$

sean e, e' los errores que provienen de la observacion de los ángulos A y B, y propongámonos determinar el error x que dichos errores angulares producirán en la determinacion del lado a, y supongamos que todos ellos resultan por defecto. Sustituyendo en vez de a, A y B los verdaderos valores que les corresponden en virtud de la hipótesis que acabamos de hacer, se tendrá

$$b \operatorname{sen.} (A + e) = (a + x) \operatorname{sen.} (B + e').$$

Desarrollando esta fórmula (Trig. 15), será

$$b (\operatorname{sen.} A \cos. e + \cos. A \operatorname{sen.} e) = (x + a) (\operatorname{sen.} B \cos. e' + \cos. B \operatorname{sen.} e');$$

efectuando las operaciones indicadas, y teniendo en cuenta que por ser e y e' muy pequeños, se pueden sustituir los senos por los arcos y considerar los cosenos como iguales á la unidad, resultará:

$$b \operatorname{sen.} A + b\, e \cos. A = x \operatorname{sen.} B + x\, e' \cos. B + a \operatorname{sen.} B + a\, e' \cos. B;$$

observando que el término $xe' \cos. B$ es muy pequeño por el poco valor de sus factores x y e', y suprimiendo las cantidades iguales b sen. A y a sen. B, se obtiene la fórmula

$$b\,e \cos. \mathrm{A} = x \operatorname{sen.} \mathrm{B} + a\,e' \cos. \mathrm{B};$$

sustituyendo en ella el valor de $b = \dfrac{a \operatorname{sen.} \mathrm{B}}{\operatorname{sen.} \mathrm{A}}$, quitando denominadores, y despejando x, resulta:

$$x = a\left(e\,\frac{\cos. \mathrm{A}}{\operatorname{sen.} \mathrm{A}}\right) - a\left(e'\,\frac{\cos. \mathrm{B}}{\operatorname{sen.} \mathrm{B}}\right);$$

poniendo en vez de los quebrados encerrados en los paréntesis sus iguales cot. A y cot. B (Trig. 11), y sacando a como factor comun,

$$x = a\,(e \cot. \mathrm{A} - e' \cot. \mathrm{B}).$$

El valor de x depende del factor binomio del segundo miembro, el cual disminuye cuando A y B tienden á ser iguales al mismo tiempo que e y e', y será nulo en el caso de que estas igualdades se verifiquen.

La forma que atribuimos á los triángulos no puede casi nunca obtenerse por completo: se procurará que se acerquen á ella todo lo posible, no admitiendo nunca ángulos menores de 30° en las triangulaciones de segundo y tercer órden; límite á que no se debe llegar en las del primero.

1020. **Reconocimiento del terreno.**—A las demás operaciones de la triangulacion debe preceder un reconocimiento detallado del terreno en toda la extension que ha de comprender el plano, midiendo al mismo tiempo una base con la cadena, y situándose en sus extremos y en los puntos más principales como las torres de los pueblos, casas de campo, cimas bien determinadas de los cerros y cadenas de montañas, así como tambien á las inmediaciones de los árboles aislados ó de cualquier otro objeto que pueda ser observado fácilmente desde puntos distantes, tomando desde cada uno de ellos los rumbos de todas las visuales tiradas á los demás que puedan observarse desde él, ó los ángulos que estas visuales formen entre sí; teniendo cuidado de comprender entre los puntos observados uno de los que estén ya determinados con relacion á la base ó á puntos fijos anteriormente. Cuando el punto de estacion no está determinado, es preciso comprender por lo menos dos de los indicados puntos.

Para este trabajo preliminar puede emplearse la brújula de Kater ó un instrumento de reflexion, atendiendo á que no exigen apoyo y permiten la celeridad en las operaciones.

Pudieran irse determinando al mismo tiempo los puntos que deben servir de vértices en la triangulacion definitiva, eligiendo aquellos que den lugar á la formacion de ángulos cuyo valor se aproxime á 60°, ó que equidisten poco más ó ménos entre sí, empleando en este último caso los telémetros para hallar aproximadamente las distancias entre los puntos observados y el de estacion; pero es preferible seguir la marcha primeramente indicada, procurando hacer estacion en el mayor número posible de puntos bien determinados, teniendo cuidado de anotar claramente para cada uno de ellos las observaciones relativas á su mayor ó menor accesibilidad y disposicion para estacionar los instrumentos, y demás circunstancias particulares que en ellos puedan concurrir; así como los nombres de los pueblos, caseríos .. para lo que es necesario acompañarse de buenos prácticos del país, los cuales pueden al mismo tiempo suministrar noticias relativas á los accidentes de localidad, que pueden servir de guia para una marcha acertada en las operaciones.

1021 **Croquis del reconocimiento.—Triangulacion definitiva.—** Verificado el reconocimiento, se trasportan los datos adquiridos en una escala tan grande como permita la extension del papel en que ha de dibujarse el plano, fijando la base con arreglo á la misma escala, orientándola y construyendo los triángulos por el método de intersecciones; ya valiéndose de los ángulos (937) ó de los rumbos observados (943), determinando cada vértice con relacion á la base de las operaciones ó al lado correspondiente de uno de los triángulos anteriormente construidos. Entonces es más fácil elegir sobre el croquis los puntos observados que han de servir de vértices para la triangulacion definitiva, haciendo que los triángulos cumplan con las condiciones á que deben satisfacer (1019), y determinar las posiciones que deben ocupar los vértices auxiliares que sean necesarios para completar la red de triángulos, cuyos vértices deben determinarse en seguida en el terreno, estableciendo las señales que hemos indicado, y marcando los extremos de la base elegida con sólidos postes formados de una sola piedra ó construidos de fábrica, en los que se fijan botones metálicos, sobre cada uno de los cuales se trazan dos rectas cuya interseccion determina un extremo de la base.

Al mismo tiempo se forma el plan de la marcha que ha de seguirse en las operaciones, comprendiendo en él la indicacion del número de observaciones que son necesarias para el cálculo de los triángulos, las que pueden servir de comprobacion, y los puntos que no siendo vértices de la triangulacion es preciso que queden fijos con relacion á ellos para la referencia de las operaciones de detalle, ó solamente porque deban figurar en el plano.

Sean por ejemplo A, B, C... (fig. 697; lám. 52) los puntos notables que presenta el terreno: tomando como base la recta AB, que se mide directamente con bastante cuidado, ó indirectamente por varias observaciones repetidas, se hará estacion en A con la brújula observando los rumbos AQ, AF, AH, AC, AB, AK, AM, AD de las visuales tiradas á los puntos visibles desde A; trasladándose al otro extremo B de la base se observan los BD, BC, BH, BL, BK, BM; en C se observan los CF, CZ, CG, CH, CL, CM, CD; en M los MD, ML, MK, MR; en R los RD, RK; en F los FZ, FG, FD, FQ, FT; y en T los TZ, TQ. Observaremos que los rumbos tomados desde los puntos R y T han debido serlo con el extremo blanco de la aguja como observaciones inversas (369), en atencion á que la trasportacion ha de partir de la base hácia los puntos más distantes.

1022. *Formacion del croquis.*—Orientada la base AB y determinada la longitud correspondiente, se trasportan los rumbos que parten de sus extremos, lo que determina la posicion de los puntos D, C, H, K, M; si bien el H lo está por dos rectas que forman un ángulo bastante agudo, y más aún el K, que resulta por esta razon mal determinado. Trasportando los rumbos observados en C, se determinan los puntos F, L, y se comprueba la posicion de los H, M y D. Haciendo la misma operacion en M se fija la posicion del punto L, y la del K que resultó mal determinada. Establecida ya la posicion de los puntos D y K, se trasportan desde estos puntos los rumbos observados desde R en el terreno, los cuales se cortarán en un punto que debe pertenecer á la recta MR trazada ya; determinando así la interseccion de estas tres rectas la posicion de R. La trasportacion de los rumbos observados desde F en el terreno, punto que ya se ha fijado de posicion en el croquis, determina la de los Z, G y Q; fijando por último el punto T con relacion á los Z, Q, F, del mismo modo que R con respecto á los D, K, M.

1023. *Triangulacion definitiva.*—Formado el croquis, se hace sobre él la eleccion de los puntos que han de ser vértices de las triangulaciones de los diferentes órdenes. Uniendo los puntos del croquis por medio de rectas como se ve en la fig. 698 (lám. 52), resulta la triangulacion de órden inferior, comprendida en el polígono GFQPRKIH y representada por líneas llenas, despues de haber establecido en el plano un punto auxiliar P, el cual entra tambien á formar parte de la triangulacion de órden superior constituida por el polígono ZTPKH, cuyos lados corresponden á triángulos que tienen un vértice comun en el punto A.

1024. **Medida de la base.**—La principal y más difícil operacion de todas las que deben constituir la triangulacion es como ya sabemos la medida de la base, que se ejecuta de la misma manera y con las precauciones que hemos dado á conocer (679). Cuando la base no puede medirse directamente, se medirá otra línea por medio de la cual se obtendrá directamente el valor de la primera (741).

1025. *Influencia del error cometido en la medida de la base.*—La dependencia que tienen de la base el cálculo y las construcciones, hace ver desde luego la necesidad imprescindible de obtener su medida con todo el grado de precision á que pueda aspirarse: agregándose á esta razon la circunstancia de que los errores se van acumulando en los triángulos sucesivos, no compensándose nunca y pudiendo llegar en cada lado al doble del que afecta á la base del triángulo correspondiente.

En efecto, supongamos que en la base c (fig. 696; lám. 52) del triángulo ABC se ha cometido un error e: al calcular el lado a por medio de dicha base, resultará un error que representaremos por x y se tendrá la proporcion

$$(a+x) \text{ sen. } C=(c+e) \text{ sen. } A;$$

que dará

$$a \text{ sen. } C+x \text{ sen } C=c \text{ sen. } A+e \text{ sen. } A,$$

de la que resulta

$$x=\frac{c \text{ sen. } A+e \text{ sen. } A-a \text{ sen. } C}{\text{sen. } C}$$

y observando que se tiene c sen. $A=a$ sen. C, se halla por último

$$x=e\,\frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } C}.$$

Si se tiene $C=30^{\circ}$, y $A=B=75^{\circ}$, resulta sen $A=1$ con corta diferencia, y sen. $C=1/2$, lo que da $x=2e$ conforme habiamos indicado.

1026. *Límite del error admisible en la medida de la base.*—La longitud de la base y de los lados de los triángulos depende de la extension que ha de comprender el plano, de la escala en que debe construirse y de la mayor ó menor apreciacion del instrumento que ha de emplearse en la medida de los ángulos. Sea ABC (fig. 699; lám. 52) un triángulo equilátero, AB su base, y n el error cometido en la apreciacion del ángulo A, el cual producirá en el lado opuesto una desviacion CD. La medida del ángulo B hecha con el mismo instrumento dará con corta diferencia el mismo error, y el vértice resultará situado en C′, desviado del verdadero C en una cantidad CC′ que llamaremos e. El triángulo CAC′ dará entonces

$$CC' : AC :: \text{sen. } n : \text{sen. } AC'C;$$

pero CC′ es el error e, $AC=b=c$, y sen. $AC'C=\text{sen.}\left[180^{\circ}-\left(\frac{C}{2}+n\right)\right]$ $=\text{sen.}\left(\frac{C}{2}+n\right)$; lo que convertirá la proporcion anterior en

$$e : c :: \text{sen. } n : \text{sen}\left(\frac{C}{2}+n\right):$$

en ella observaremos, que siendo muy pequeño el valor de n, se tiene sensiblemente sen. $\left(\frac{C}{2}+n\right)=$ sen. $\frac{C}{2}=$ sen $30^\circ = {}^1/_2$; por lo que la proporcion dará en último resultado

$$e = 2\,c \text{ sen. } n \quad [1];$$

de la que se deduce cualquiera de las tres cantidades e, c, n, dadas las otras dos, dando lugar á las siguientes aplicaciones:

1.ª Dado el límite, 1′ por ejemplo, de apreciacion del instrumento angular que ha de emplearse, y atribuyendo á e el límite $0,^m0002$ de las distancias apreciables á la vista, se tendrá

$$c = \frac{e}{2 \text{ sen } n} = \frac{0,0001}{\text{sen. } 0^\circ 1'} = \frac{0,0001}{0,0002909} = 0,3438 \quad [2].$$

No habrá entonces más que ver la longitud que esta magnitud representa en la escala adoptada (188), y ese será el límite máximo de la longitud que debe darse en el terreno á la base y á los lados de los triángulos. Si la escala es por ejemplo de $\frac{1}{10000}$, resultarán estas líneas de 3400 metros próximamente

Si suponemos $n = 10''$, resultará

$$c = \frac{0,0001\text{R}}{\text{sen. } 10''},$$

despues de haber establecido el rádio de las tablas con objeto de aplicar el cálculo logarítmico; con lo que se tendrá sucesivamente:

$$\log\ c = \log.\ 0,0001 + \text{C.}^{\text{to}} \log.\ \text{sen. } 10'' = +\,4,3144251 - 4$$
$$= 0,3144251;\ c = 2,062,$$

que en la escala de $\frac{1}{10000}$ equivale á más de veinte kilómetros, límite máximo de la base en el terreno.

2.ª Si medida la base, y fijo el límite $0,^m0002$ del error e, se quiere hallar la apreciacion del instrumento que ha de emplearse en la medida de los ángulos, se tendrá

$$\text{sen. } n = \frac{e}{2c} = \frac{0,0001}{c} \quad [3].$$

Siendo los lados de los triángulos próximamente de 3000 metros de longitud, se tendría $c = 0{,}3$ en la escala de $\frac{1}{10000}$, y por consiguiente

$$\text{sen.}\ n = \frac{0{,}0001}{0{,}3} = 0{,}0003,$$

que corresponde próximamente al arco de 1', que señala el límite de apreciacion angular.

3.ª Medida la base, y siendo preciso emplear un goniómetro de graduacion dada, puede hallarse la desviacion e que debe tener el vértice del triángulo segun la escala adoptada: no habrá más que aplicar la fórmula [1]. Si se tiene como antes $c = 0{,}3$ y $n = 1'$, resultará $e = 0{,}0002$ próximamente. En el caso de que hubiese resultado un error mayor que el límite apreciable á la vista, sería necesario variar la escala del plano, lo que se conseguiría determinando la longitud que en él debe tener c para que con la misma apreciacion angular se reduzca el error á 0,0002, aplicando con este objeto la fórmula [2], y viendo la escala en que la base estaria representada por una longitud igual ó menor que c. Esto último está reducido á despejar M en la ecuacion [3] del párrafo 188, poniendo en ella en vez de L el valor de la base en el terreno, y en vez de l el c que se ha obtenido por el cálculo.

1027. **Límite de los errores que pueden tolerarse en los datos de una triangulacion.**—La práctica ha dado á conocer que en la observacion de un ángulo puede tolerarse un error de 15″ para las triangulaciones de primer órden, de 30 á 40″ para las de segundo, y para las de tercero puede llegar la tolerancia á 1′ 30″. En cuanto á los lados se tolera respectivamente un error de 0,0001, de 0,0002 y de 0,001 de la longitud media que corresponde á los lados en cada órden.

1028. **Orientacion de la base.**—Una vez determinada la base, se procede á orientarla á fin de tener así la posicion absoluta de los distintos puntos del plano, empleando los medios que hemos dado á conocer; pudiendo hacerse uso del teodolito, para lo cual no habrá más que fijar el limbo cuando hallándose los ceros en coincidencia la visual va á parar de uno á otro de los extremos de la base, y dirigir la alidada á la estrella polar, siguiendo su movimiento aparente y fijándola al paso de la estrella por el meridiano (131). El ángulo azimutal recorrido será la orientacion de la base y del plano.

1029. **Determinacion de una base por el cálculo.**—Cuando hay varios órdenes de triangulacion, se obtiene como hemos indicado (679) la medida de la base de uno de ellos, deduciendo las demás por el cálculo de cierto número de triángulos relacionados con ellas. Daremos un ejemplo en las triangulaciones á que en los párrafos anteriores nos hemos referido. Medida directamente la recta AB (fig. 700; lám. 53), base de la triangulacion de segundo órden, puede deducirse la AK del primero resolviendo el triángulo ABM, lo que dará el lado AM, que sirve á su vez para resolver el triángulo AMP y determinar el valor del lado AP de la triangulacion de primer órden. La resolucion del triángulo ABH da tambien el lado AH de la misma triangulacion. Por el conocimiento de los lados AP y AH se pueden resolver entonces los triángulos AKP, AKH, obteniendo el valor del lado comun AK por dos operaciones independientes entre sí, á partir de una misma base AB. Si la diferencia es insignificante, se toma el término medio para valor de la base de triangulacion de primer órden; en el caso contrario, será preciso repetir los cálculos ó las operaciones en el terreno si los primeros resultan bien ejecutados.

1030. **Observaciones de los ángulos.**—Una vez trazado el plan de las operaciones, y medida la base, se procede á las observaciones de los ángulos, procurando medir el mayor número de ellos que sea posible, y obtener por lo ménos dos de los que corresponden á cada uno de los triángulos que se han de resolver, evitando en lo posible las reducciones al centro de la estacion (169) y no omitiendo la observacion de todos los ángulos en los vértices accesibles, aun cuando no sean absolutamente necesarios para la resolucion de los triángulos, toda vez que pueden suministrar comprobaciones importantes al efectuar los cálculos, evitando así la repeticion de las medidas.

El principio de la repeticion de los ángulos se aplica siempre en estos casos, principalmente en la triangulacion de primer órden, en la cual debe tomarse el séxtuplo de un ángulo cuando el teodolito aprecia minutos, bastando tomar el duplo cuando la apreciacion es de 20″, á fin de obtener en ambos casos una aproximacion de 10″. En los triángulos de los órdenes inferiores basta repetir una sola vez para comprobacion en el primer caso, y en el segundo observar los ángulos cuidadosamente y comprobar tan sólo por la lectura de ambos nonius.

Algunas veces se hace estacion únicamente en los vértices de primer órden, observando desde ellos los del segundo, que resultan así determinados por intersecciones de visuales.

En la repeticion de los ángulos pueden seguirse dos métodos, que exponemos á continuacion.

1031. *Primer método de repeticion.*—Es el de que nos hemos ocupado (294) segun la disposicion del goniómetro de que se haga uso, teniendo en cuenta todo lo que entonces hemos indicado, y obteniendo el valor de cada ángulo parcial que se observe por el término medio de las lecturas hechas en los dos (497) ó en los cuatro nonius (585) si el instrumento lo permite.

No debemos dejar pasar desapercibida una observacion de Mr. Busset, geómetra del Catastro en Francia, relativa á la lectura de los ángulos, la cual debe tener lugar al empezar cada una de las repeticiones, con objeto de hacerla en el mismo sitio y en las mismas circunstancias en que se hizo la coincidencia de los ceros. Asegura que la práctica le ha dado á conocer que puede cometerse un error que llega á 20″, debido sin duda á la reverberacion de la luz que hiere de distinto modo á la graduacion del nonius cuando éste varía de posicion.

1032. *Segundo método de repeticion.* —El método anterior se refiere á la repeticion aislada de cada ángulo; pero es más cómodo en la práctica fijar el limbo cuando se ha dirigido la visual á uno de los objetos, y determinar los ángulos sucesivos que con ella forman las dirigidas á los demás que deben observarse desde el punto de estacion en una revolucion completa de la alidada, que suele llamarse *vuelta de horizonte* ó *radiacion*, durante la cual el anteojo de prueba, si le hay, debe haber permanecido constantemente dirigido á un punto bien determinado (493)

Siguiendo este método, consiste la repeticion en dirigir la visual de partida á otro punto y verificar una nueva radiacion, pudiendo repetir esto mismo para mayor número de puntos de partida. Los valores de cada uno de los ángulos en cada observacion se deducen por la diferencia del que forma con la primera posicion de la alidada la que constituye el ángulo cuyo valor se busca; el término medio entre los que resultan de las distintas observaciones se toma definitivamente como verdadero valor del ángulo.

Propongámonos, por ejemplo, hallar los valores de los ángulos que pertenecen á la triangulacion de primer órden, y de los que corresponden á los triángulos que se han de resolver para calcular la base AK de la misma triangulacion. Haciendo estacion en el punto A, dirigiríamos la alidada con los ceros en coincidencia al estremo B de la base medida, y fijando el rumbo, observaríamos con la alidada móvil los puntos H, Z, T.... anotando los ángulos sucesivos en un registro, cuyo modelo presentamos en la página siguiente. Dirigiendo despues la alidada al punto T, prévia la coincidencia de los ceros, se hará pasar á la móvil por las direcciones á los puntos P, M, K .... anotando del mismo modo los valores angulares; pudiendo hacer una tercera observacion á partir del punto M, y aumentar el número de observaciones cuando se cree conveniente.

Pasando al punto B y á los demás vértices designados, se completará el registro de observaciones angulares, procediendo despues á calcular los valores de los ángulos.

El que corresponde á un ángulo cualquiera se halla por las diferencias de los que forman sus lados con el orígen de cada observacion, tomando el término medio entre todas las observaciones. Propongámonos, por ejemplo, hallar el valor del ángulo MAB: dispondremos el cálculo como sigue:

1.ª observacion............	360° 0′ 0″—320° 51′ 20″=	39° 8′ 40″
2.ª	152° 19′ 40″—113° 10′ 40″=	39° 9′ 0″
3.ª		39° 8′ 50″
	Suma..............	117° 26′ 30″;
	Valor del ángulo......	39° 8′ 50″.

El valor así deducido se anota en la casilla número 6 del registro, y en la misma línea en que se designa el ángulo á que corresponde en la casilla número 5.

Puede ocurrir como caso particular que el orígen se encuentre comprendido entre los lados del ángulo que se trata de conocer, como sucede para el KAP en la tercera observacion; se halla entonces la diferencia 289° 45′ 50″, siguiendo la marcha general establecida, y se resta de 360°.

Para deducir de la primera observacion el valor del ángulo KAH, se halla primero el del BAK por el método general, y se suma con el del BAH obtenido del mismo modo.

Registro de observaciones de los ángulos para la triangulacion de primer órden.

Designacion de las señales. 1.	ANGULOS OBSERVADOS. 1.ª Observacion. 2.	2.ª Observacion. 3.	3.ª Observacion. 4.	Designacion de los ángulos. 5.	Valores deducidos. 6.
	OBSERVACIONES EN EL PUNTO A.				
B	0° 0′ 0″	152° 19′ 40″	39° 8′ 50″	MAB	39° 8′ 50″
H	70 10 20	222 29 40	109 49 0	PAM	37 0 30
Z	137 55 30	290 15 30	177 4 30	PAK	70 14 40
T	207 40 20	0 0 0	246 49 10	HAB	70 40 10
P	283 50 50	76 10 10	322 59 30	KAH	76 5 20
M	320 51 20	113 10 40	0 0 0	TAP	76 10 20
K	354 4 50	146 24 30	33 13 40	HAZ	67 45 30
B	360 0 0	152 19 40	39 8 50	TAZ	69 44 40
	OBSERVACIONES EN EL PUNTO B.				
A	0° 0′ 0″	»	»	ABM	

1033 **Angulos deducidos**.—Cuando las circunstancias de localidad impiden la observacion de uno de los tres ángulos de un triángulo, se halla su valor restando de 180° la suma de los otros dos. En todo caso debe obtenérsele tambien por la reduccion al centro de la estacion (169).

1034. **Comprobaciones de los ángulos**.—Cuando se han determinado por la medida directa los ángulos que comprenden los triángulos de un polígono ZHKPT (fig. 700; lám. 53), deberá procederse á comprobar los valores hallados, viendo si la suma de los que se forman en los vértices equivale á tantas veces dos rectos como lados menos dos tiene el polígono, ó bien empleando el cálculo que se desprende de las proporciones siguientes:

$$\begin{array}{l} AZ : AH :: \text{sen. } AHZ : \text{sen. } AZH; \\ AH : AK :: \text{sen. } AKH : \text{sen. } AHK; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ AT : AZ :: \text{sen. } AZT : \text{sen. } ATZ; \end{array}$$

de las que se deduce

$$\frac{AZ \times AH \times \dots\ AT}{AH \times AK \times \dots\ AZ} = \frac{\text{sen. } AHZ \times \text{sen. } AKH \times \dots \text{sen. } AZT}{\text{sen. } AZH \times \text{sen. } AHK \times \dots \text{sen. } ATZ};$$

y observando que resultan iguales, por componerse de los mismos factores, los productos que constituyen la fraccion del primer miembro, se deducirá la ecuacion

$$\frac{\text{sen. } AHZ \times \text{sen. } AKH \times \dots \text{sen. } AZT}{\text{sen. } AZH \times \text{sen. } AHK \times \dots \text{sen. } ATZ} = 1;$$

la cual expresa que numerando los ángulos que se forman en los vértices del polígono, el cociente que resulta de dividir el producto de los senos de los ángulos pares por el de los ángulos impares es igual á la unidad. Aplicando el cálculo logarítmico, se tendrá:

$$\log.\ \text{sen. } AHZ + \log.\ \text{sen. } AKH + \dots\dots + C.^{to} \log.\ \text{sen. } AZH + C.^{to} \log.\ \text{sen. } AHK + \dots\dots - 10n = 0 \quad [4],$$

siendo n el número de los triángulos que constituyen el polígono.

Cuando se han hecho las comprobaciones del polígono, hallándose pequeñas diferencias, se comprueban los valores de los ángulos que corresponden á cada uno de los triángulos, distribuyendo proporcionalmente entre los tres ángulos (972) la diferencia que resulte de su suma á 180°.

1035. **Cálculo de los triángulos**.—Una vez hallado por la medicion directa el valor 6571,^{m}32 de la base AB (fig. 700; lám. 53), término medio entre tres ó cuatro mediciones verificadas, y determinados los valores definitivos de los ángulos, se calcula el triángulo ABM, hallando los valores de los lados AM y BM por las proporciones

$$\begin{aligned} AM : AB &:: \text{sen. } B : \text{sen. } M; \\ BM : AB &:: \text{sen. } A : \text{sen. } M. \end{aligned}$$

Aplicando los logaritmos se dispone el cálculo como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 6571{,}32 & = & 3{,}8176527 \\ +\log.\ \text{sen. } 92^{\circ}\ 6'\ 30'' & = & 9{,}9997059 \\ \hline & & 13{,}8173586 \\ -\log.\ \text{sen. } 48^{\circ}\ 44'\ 40'' & = & 9{,}8760884 \\ \hline \log.\ AM & = & 3{,}9412702; \\ AM & = & 8735{,}15: \end{array}$$

del mismo modo se hallaría el valor de BM aplicando el cálculo logarítmico á la segunda proporcion, con lo que se tendría resuelto el triángulo. El lado AM sirve de base para la resolucion del triángulo AMP, que se ejecuta lo mismo que la del AMB, continuando en el órden que hemos indicado (1029), y obteniendo los valores inscritos en el estado que exponemos á continuacion, del cual resulta para la base AK de la triangulacion de primer órden el valor 12.924,m91, término medio entre los 12.924,52 y 12.925,30 dados por las dos séries de triángulos resueltos, los cuales se diferencian en 0,m78, cantidad menor que $\frac{1}{10000}$ de la base, fraccion que viene á ser 1,m29 próximamente.

Triángulos resueltos para el cálculo de la base.

PRIMERA SÉRIE.		SEGUNDA SÉRIE.		
Ángulos.	Lados.	Ángulos.	Lados.	Observaciones.
TRIÁNGULO ABM.		TRIÁNGULO ABH.		
AMB = 48° 44′ 40″	AB = 6.571,32m.	AHB = 35° 10′ 0″	AB = 6,571,32m.	
ABM = 92 6 30	AM = 8.735,15	ABH = 74 39 50	AH = 11.003,12	
MAB = 39 8 30	BM = 5.518,37	HAB = 70 10 10	BH = 10.732,82	
180°		180°		
TRIÁNGULO AMP.		TRIÁNGULO AHK.		
MPA = 51° 56′ 0″	AM = 8.735,15	HKA = 46° 5′ 40″	HA = 11.003,12	
PMA = 91 3 30	AP = 11.093,27	KHA = 57 49 0	KA = 12.925,30	
MAP = 37 0 30	MP = 6.678,52	HAK = 76 5 20	HK = 14.823,92	
180°		180°		
TRIÁNGULO PAK.				
AKP = 48° 41′ 40″	AP = 11.093,27	Valor de la base AK en la primera série..........		12.924,52m.
KPA = 61 4 10	KA = 12.924,52	Valor en la segunda..........................		12.925,30
KAP = 70 14 10	KP = 13.897,51	Término medio adoptado......................		12.924,91
180°				

1036 *Cálculo de los triángulos de primer órden.*—Hallado el valor de la base AK, se resuelve el triángulo AKP hallando los valores de los lados AP, KP; sirviendo el primero de estos lados de base para la resolucion del triángulo APT, y el lado AT de este último para la del ATZ, que dará el valor del lado AZ Este mismo lado puede determinarse por la resolucion de otra série de triángulos, compuesta de los KAH, HAZ, á partir de la misma base AK, sirviendo de comprobacion el hallar para AZ valores poco diferentes en ambas séries. A continuacion puede verse el estado de los valores hallados para los elementos de los triángulos; habiendo resultado AZ de 12.775,^{m}50, término medio entre los 12.775,80 y 12.775,20 suministrados por dichas séries. Como la diferencia 0,^{m}60 no llega á $\frac{1}{10000}$ de la longitud total, no habrá que hacer modificacion alguna, como sucedería si estuviese comprendida entre $\frac{1}{5000}$ y $\frac{1}{10000}$ de la longitud total del lado AZ; en cuyo caso se calcularían de nuevo los lados ZT y TH de los triángulos ATZ y HAZ, tomando como base para ambos el valor medio hallado para AZ, á fin de rectificar los valores de dichos lados, que generalmente han de servir de bases para los triángulos del resto del canevás de primer órden que pudieran insistir sobre ellos.

Registro de la triangulacion de primer órden.

PRIMERA SERIE.		SEGUNDA SÉRIE.		
Ángulos.	Lados.	Ángulos.	Lados.	Observaciones.
TRIÁNGULO KAP.		TRIÁNGULO KAH.		
KPA = 61° 4′ 10″	KA = 12.924,91m.	AHK = 57° 49′ 0″	KA = 12.924,91m.	
AKP = 48 44 40	AP = 11.093,60	HKA = 46 5 40	HA = 11.002,79	
KAP = 70 14 10	KP = 13.897,92	KAH = 76 5 20	KH = 14.823,46	
180°		180°		
TRIÁNGULO APT.		TRIÁNGULO HAZ.		
ATP = 51° 38′ 10″	AP = 11.093,60	AZH = 49° 47′ 10″	AH = 11.002,79	
APT = 52 11 30	AT = 11.178,22	AHZ = 62 27 20	AZ = 12.775,20	
TAP = 76 10 20	TP = 13.738,43	ZAH = 67 45 30	HZ = 13.336,31	
180°		180°		
TRIÁNGULO ATZ.				
AZT = 49° 39′ 40″	AT = 11.178,22	Valor de AZ en la primera série..................		12.775,80m.
ATZ = 60 35 40	AZ = 12.775,80	Valor en la segunda..............................		12.775,20
TAZ = 69 44 40	TZ = 13.758,24	Término medio adoptado..........................		12.775,50
180°				

1037. *Cálculo de los triángulos de segundo órden.*—Partiendo de la base AB se resuelven del mismo modo que los de primero, los triángulos de segundo órden, cuya red presenta aisladamente la fig. 701 (lám. 53), procurando obtener comprobaciones en las distintas séries en que el cálculo se debe fraccionar. Pero como no siempre se habrán podido determinar todos los ángulos, ya por ser los vértices inaccesibles, ó porque no se tenga confianza en alguno de los valores angulares obtenido por deduccion ó por la medida directa, puede haber necesidad de introducir algunas modificaciones en la marcha general que acabamos de establecer para las operaciones del cálculo de los triángulos, presentándose distintos casos de resolucion. Daremos un ejemplo suponiendo que no deben entrar en el cálculo los ángulos que concurren en los puntos H, K, D y Q. Empezaremos por calcular el triángulo ABD número 1, valiéndonos de la base AB y los ángulos a, b (29), pudiendo servir de comprobacion el ángulo d, calculado por la reduccion al centro de la estacion en el punto inaccesible D. El triángulo número 2 se calcula por medio de la base AB y los ángulos a', b^{v}, sirviendo de comprobacion el ángulo c obtenido directamente. El número 3 por medio de AC, a'', c^{v}, comprobándole con f'. El 4 por CB, c', b^{iv}, comprobando por e'. El 5 por CL, c'', e. El 6 por CF, c^{iv}, g ó f''. El 7 por CH, c''', g'. Los triángulos 5 y 7 pueden comprobarse por los ángulos calculados en H por la reduccion al centro de la estacion. El lado GC, calculado separadamente por los triángulos 6 y 7, debe resultar en ambos con una diferencia muy pequeña, comprobando así los cálculos anteriores; en caso contrario es preciso rectificar los cálculos ó repetir las operaciones si es necesario.

Se procede entonces al cálculo de otra série de triángulos, determinando el BLK por medio del lado BL y los ángulos e'', b'''. El 9 por BK, b'', m, y el 10 por BD, b', m'. Se tiene una nueva comprobacion por el lado BM comun á los triángulos 9 y 10.

El triángulo número 11 se calcula con el auxilio del lado MK y los ángulos m^{iv}, n. El 12 por MR, m''', n', pudiendo comprobarse por p. El 13 valiéndose de MD, MP, m'' (28) y comprobándole por p'. El 14 por AF, a''', f, y el 15 por AQ, AD, a^{iv}. Finalmente, se calcula el 16 por DQ, DP, p'' (31). La medida directa de PQ comprueba toda la triangulacion. Si no se quiere medir directamente este lado, se calculará el triángulo DPQ por medio de QD, el ángulo p'' y otro determinado por la reduccion al centro de la estacion: el valor del lado DP debe resultar próximamente igual al obtenido por la resolucion del triágulo PDM.

1038. *Casos particulares.*—Algunas veces no pueden obtenerse, siguiendo la marcha que acabamos de establecer, todos los datos necesarios para la resolucion de alguno ó algunos de los triángulos que constituyen el canevás: entonces es preciso adquirir estos datos, midiendo directa ó indirectamente alguno de los lados, ó recurriendo á los problemas que hemos dado á conocer en el capítulo XV para deducir los valores de los elementos geométricos que sean necesarios.

1039. **Correccion de los ángulos cuando no concuerda la medida de una base de comprobacion con su valor obtenido por el cálculo.** —Supongamos que sea a (fig. 702; lám. 52) la base de una triangulacion, A el ángulo opuesto á ella en el primer triángulo, B el que se opone en él al lado a' que ha de servir de base para el cálculo del triángulo número 2, designando del mismo modo por A′, A″, A‴ los ángulos opuestos á los lados a', a'', a''' considerados como bases de los triángulos 2, 3 y 4, y por B′, B″, B‴ los opuestos respectivamente á los lados a'', a''', a^{IV} en los mismos triángulos. Si representamos por m la medida directa de a^{IV}, y hay una diferencia algo notable entre ella y el valor obtenido por el cálculo, debe suponerse que proviene de ligeras incorrecciones en los valores angulares, que será conveniente modificar. Para ello se emplea la fórmula

$$x = \frac{e \text{ tang. } 60^\circ}{2nb \text{ sen. } 1''} \qquad [5],$$

en la cual x representa el aumento ó disminucion que en cada caso deben experimentar los ángulos B, y que corresponde á la disminucion ó el aumento que deben tener los ángulos A; n es el número de triángulos; b el valor deducido por el cálculo para la base de comprobacion, y e la diferencia entre este valor y el obtenido por la medida directa. Esta fórmula es debida á Puissant, y se aplica cuando los triángulos de la red satisfacen á la condicion de ser próximamente equiláteros.

Para hacer una aplicacion de la fórmula, supongamos como en el caso de la fig. 702 (lám. 52), que se tiene $n = 4$; $e = 2^m27$; $b = a^{IV} = 7520$: se tendrá

$$x = \frac{2{,}27 \times \text{tg. } 60^\circ}{2 \times 4 \times 7520 \times \text{sen. } 1''} = \frac{2{,}27 \times \text{tg. } 60^\circ}{60160 \times \text{sen. } 1''}.$$

Aplicando los logaritmos se dispone el cálculo como sigue:

$$\begin{array}{rcl}
\text{log. } 2{,}27 & = & 0{,}3560259 \\
+ \text{ log. tg. } 60^\circ & = & 10{,}2385606 \\
+ \text{ comp. log. } 60160 & = & 5{,}2206922 \\
+ \text{ comp. log. sen. } 1'' & = & 5{,}3144251 \\
\hline
\text{Suma.} & = & 21{,}1297038; \\
\text{log. } x & = & 1{,}1297038; \\
x & = & 13'',48
\end{array}$$

Hallado el valor de x, se observará si se tiene $a^{IV} > m$, en cuyo caso debe disminuir a^{IV}, y por consiguiente los ángulos B en 13,″5; los ángulos A aumentarán en la misma cantidad. Cuando es $a^{IV} < m$, hay que aumentar los valores de los ángulos B y disminuir los de los ángulos A.

1040. **Construccion del plano**.—Tomada en una recta convenientemente orientada la magnitud que en la escala elegida ha de representar la base, se construyen sobre ella los triángulos de que forma parte, empleando las magnitudes halladas para los lados correspondientes á cada uno, y sobre ellos se construyen del mismo modo los triángulos á que sirven de bases, continuando así hasta haber fijado la posicion de todos los vértices del canevás trigonométrico. Fácilmente se deja ver que los errores inevitables en la construccion gráfica de los triángulos irán acumulándose, y separando á los vértices de las posiciones que realmente deben ocupar, tanto más cuanto más se alejan de la base. Para obviar este inconveniente, aislando los errores gráficos y haciendo desaparecer por lo tanto su influencia, se hallan por medio del cálculo las coordenadas de los vértices, las que se refieren á dos ejes, deduciendo sus valores de los elementos geométricos de los triángulos. Los ejes de referencia son la meridiana y la perpendicular á ella en uno de sus puntos.

1041. **Determinacion de las distancias de los vértices del canevás á la meridiana y su perpendicular.**—Supongamos que NS (figura 700; lám. 53) es la meridiana que pasa por el vértice Z más occidental del canevás, y EO la perpendicular á ella en el mismo punto. Determinando gráficamente ó por el cálculo (975) el rumbo $r=330^\circ$ de la recta TZ, se hallará el valor del ángulo $s=360^\circ-330^\circ=30^\circ$ y el de su complemento $m=60^\circ$. Trazando las rectas de puntos que se ven en la figura, perpendiculares las unas y paralelas las otras á la meridiana, se tiene un sistema de triángulos rectángulos, cuya resolucion conduce fácilmente á la determinacion de las coordenadas de los vértices del canevás con relacion á los ejes NS y OE. Por medio de los ángulos de los triángulos que componen el canevás, relacionados con los s y m, se calcularán los n, p, z.... que son necesarios para la resolucion de los triángulos rectángulos del sistema que hemos establecido, ejecutando las sencillas operaciones que siguen, por las que se tiene:

$n=\text{ATZ}-s=60^\circ\ 35'\ 40''-30^\circ=30^\circ\ 35'\ 40''$;
$p=\text{TAP}-n=76^\circ\ 10'\ 20''-30^\circ\ 35'\ 40''=45^\circ\ 34'\ 40''$;
$z=\text{KPA}-p=61^\circ\ 4'\ 10''-45^\circ\ 34'\ 40''=15^\circ\ 29'\ 30''$;
$t=\text{TZA}+\text{AZH}-m=49^\circ\ 39'\ 40''+49^\circ\ 47'\ 10''-60^\circ=39^\circ\ 26'\ 50''$;
$t'=90^\circ-t=90^\circ-39^\circ\ 26'\ 50''=50^\circ\ 33'\ 10''$;
$q=\text{ZHA}+\text{AHK}-t'=62^\circ\ 27'\ 20''+57^\circ\ 49'-50^\circ\ 33'\ 10''=60^\circ\ 43'\ 10''$.

Una vez hallados los valores de los ángulos, se calculan las coordenadas de cada vértice, efectuando los cálculos que se indican á continuacion.

Z $x=0;\ y=0$.

T $\begin{cases} x'=\text{Z}a=\text{ZT}\cos m; \\ y'=\text{T}a=\text{ZT}\operatorname{sen} m. \end{cases}$

$$A\begin{cases} x''=Zb=x'+Ac=x'+A\Gamma \text{ sen. } n;\\ y''=Ab=y'-\Gamma c=y'-A\Gamma \cos.\ n.\end{cases}$$

$$P\begin{cases} x'''=Zb+bd=x''+Ae=x''+AP \text{ sen. } p;\\ y'''=Pd=Pe+y''=y''+AP \cos\ p.\end{cases}$$

Así se obtienen las coordenadas de los vértices que se hallan al norte de la EO, y se parte de nuevo del punto Z para la série de los que se hallan en la region sur, con lo que se tendrá:

$$H\begin{cases} x^{\text{IV}}=Zf=ZH \cos.\ t;\\ y^{\text{IV}}=Hf=ZH \text{ sen. } t.\end{cases}$$

$$K\begin{cases} x^{\text{V}}=Zg=x^{\text{IV}}+Kh=x^{\text{IV}}+HK \text{ sen. } q;\\ y^{\text{V}}=Kg=y^{\text{IV}}-Hh=y^{\text{IV}}-HK \cos.\ q.\end{cases}$$

Las ordenadas y^{IV}, y^{V} son negativas; como tambien lo serían las abscisas que se contasen de Z á O.

Los cálculos indicados se efectúan fácilmente empleando los logaritmos. Para x' por ejemplo, se tendría:

$$x' = 13.758{,}24 \times \cos.\ 60°;$$

y restableciendo el rádio y tomando logaritmos,

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 13\,758{,}24 & = & 4{,}1385628 \\ +\log.\ \cos.\ 60° & = & 9{,}6989700 \\ \hline \text{Suma.} & = & 13{,}8375328\ ; \\ \log.\ x' & = & 3{,}8375328\ ; \\ x' & = & 6.879{,}^{\text{m}}12. \end{array}$$

Hallados los valores de las coordenadas, se puede formar la siguiente tabla que se emplea para la construccion del plano.

Tabla de distancias de los vértices de la triangulacion de primer órden á la meridiana y su perpendicular.

Abscisas.	Ordenadas.	Vértices del polígono.	Region en que se hallan.	Observaciones.
0	0	Z	»	
6 879,12	+ 11.914,98	T	N. E.	
10.298,43	— 8.473,45	H	S. E.	
12 568,36	+ 2 292,87	A	N. E.	
20.491,42	+ 10.057,73	P	N. E.	
24 202,95	— 3.335,37	K	S. E.	

Para cuando existan puntos en las cuatro regiones en que dividen al plano la meridiana y su perpendicular, indicaremos los signos que corresponden á las coordenadas de cada uno de ellos segun la region en que se hallan situados.

Regiones en que se hallan los puntos	SIGNOS.	
	De las abscisas.	De las ordenadas.
N. E.	+	+
S. E.	+	—
N. O	—	+
S. O	—	—

1042. *Comprobaciones.*—Para comprobar los valores hallados de las coordenadas, puede resolverse el triángulo PlK, del que se deduce Kl = 3.712,^{m}11 y lP = 13.392,^{m}99; observando por otra parte que se tiene Kl = $dg = x^{v} - x'''$ = 3 711,^{m}53 y lP = $y''' + y^{v}$ = 13.393,^{m}10, cantidades que difieren respectivamente en 0,^{m}58 y 0,^{m}11 de las primeras, se deduce que los cálculos están bien ejecutados.

Pueden comprobarse tambien las coordenadas de un punto tal como P, halladas por medio de los lados ZI, TA y AP, estableciendo una nueva disposicion de triángulos rectángulos, y viendo si las coordenadas no difieren mucho de las primeramente obtenidas. Siguiendo de nuevo la marcha ZHAP se tendría una nueva comprobacion. Tambien se corrige el valor de cada una de las coordenadas, hallando un término medio entre todos los resultados obtenidos, el cual se acepta definitivamente para la formacion del registro (1041) y la construccion del plano.

1043. **Determinacion de los elementos geométricos por medio de las coordenadas.**—Conocidas las coordenadas de varios puntos, puede deducirse de ellas la situacion y magnitud de las rectas que unen estos puntos, y la de las figuras á que su combinacion puede dar lugar. Nos ocuparemos de la resolucion de los problemas más importantes.

1044. *Dadas las coordenadas de los puntos* A *y* P (fig. 700; lám. 53), *hallar la declinacion de la recta que los une.*—Esta declinacion es el ángulo p que la recta AP forma con las paralelas á la meridiana, y fácil es ver que en el triángulo APe se tiene (20)

$$\operatorname{tg.} p = \frac{Ae}{eP} = \frac{x'''-x''}{y'''-y''} = \frac{20.491{,}42-12.568{,}36}{10.057{,}73-2\,292{,}87} = \frac{7.923{,}06}{7.764{,}86},$$

en la cual tomando logaritmos, resulta

$$\log \operatorname{tg} p = \log 7.923{,}06 + C.^{to} \log 7\,764{,}86 = 10.0087615,$$

que corresponde á $p = 45^\circ\ 34'\ 40''$.

Cuando los puntos están á distinto lado de la perpendicular á la meridiana, en vez de la diferencia de ordenadas se emplea la suma: así para la recta KP se tendría

$$\operatorname{tg} z = \frac{x^{\text{v}} - x'''}{y''' + y^{\text{v}}} = \frac{24.202{,}95 - 20.491{,}42}{10.057{,}73 + 3\,335{,}37};$$

de donde $z = 15^\circ\ 29'\ 20''$.

Para AK, será

$$\operatorname{tg} k = \frac{x^{\text{v}} - x''}{y'' + y^{\text{v}}} = \frac{24.202{,}95 - 12.568{,}36}{2\,292{,}87 + 3.335{,}37};$$

de donde $k = 64^\circ\ 11'$.

Si estuviesen á distinto lado de la meridiana se emplearía la suma de las abscisas.

1045. *Hallar la magnitud de la recta que une los puntos* A *y* P, *cuyas coordenadas se conocen*.—En el triángulo AeP se tiene (18)

$$\text{AP} = \frac{\text{A}e}{\operatorname{sen} p} = \frac{x''' - x''}{\operatorname{sen} p} = 11.093{,}^{\text{m}}60.$$

Para KP se tiene

$$\text{KP} = \frac{x^{\text{v}} - x'''}{\operatorname{sen} z} = 13.898{,}^{\text{m}}18;$$

y para AK,

$$\text{AK} = \frac{x^{\text{v}} - x''}{\operatorname{sen} k} = 12\,924{,}^{\text{m}}56.$$

Se emplearia la suma en vez de la diferencia de abscisas, si los puntos estuviesen á distinto lado de la meridiana.

Cuando no se conocen los valores de los ángulos, se puede hallar AP por la fórmula

$$\text{AP} = \sqrt{(x''' - x'') + (y''' - y'')},$$

y los KP y AK por las

$$\text{KP} = \sqrt{x^{\text{v}} - x''') + (y^{\text{v}} + y''')};$$

$$\text{AK} = \sqrt{(x^{\text{v}} - x'') + (y^{\text{v}} + y'')}.$$

1046. *Dadas las coordenadas de tres puntos* A, K, P, *hallar los elementos del triángulo que determinan.*—Hallados los valores de los ángulos p, z, k (1044), se hallan los de los lados del triángulo (1045); falta solo conocer los valores de sus ángulos: designando estos valores por las letras de los vértices, se tendrá:

$$\mathrm{P} = p + z = 61^\circ\ 4'.$$
$$\mathrm{A} = \mathrm{PA}e + e\mathrm{AK} = 90^\circ - p + 90^\circ - k = 180^\circ - p - k = 70^\circ\ 14'\ 20''.$$
$$\mathrm{K} = 90^\circ - k\mathrm{KA} - \mathrm{PK}g = 90^\circ - (90 - k) - z = k - z = 48^\circ\ 44'\ 40''$$

Se observará que los resultados obtenidos difieren de los consignados en el registro del párrafo 1036; lo que proviene de las alteraciones que inevitablemente han debido experimentar los valores angulares, ya por los límites de apreciacion de los instrumentos, ya por las correcciones que se han hecho en ellos para la comprobacion de la suma de los de cada triángulo (1034), y que han ido acumulándose.

Se comprende tambien que estas diferencias serían menos sensibles habiendo llevado la aproximacion en los valores de los ángulos más allá del límite 10″, que hemos asignado, por haber sido nuestro objeto tan solo dar una idea del modo de llevar á cabo las operaciones de la triangulacion, y porque los logaritmos de las líneas trigonométricas se obtienen así directamente en las tablas de Callet ó por sencillas proporciones en las de Lalande (Trig. 28 y 29).

1047. *Conocida la distancia* AX (fig. 700; lám. 53) *á que se encuentra de* A *un punto* X *situado en una recta* AP *dada por las coordenadas de sus puntos extremos, la longitud* Ax *de la proyeccion de* AX *sobre* Ae, *ó la de* Xx, *hallar las coordenadas del punto* X.—En primer lugar, si se conoce AX, hallando el valor de p (1044), se podrá calcular la distancia Ax, que añadida á la abscisa x'' dará la que corresponde á X; y calculando Xx y añadiéndola á y'' se tendrá la ordenada del mismo punto.

Dada Ax ó Xx además de AX, se calcularán más fácilmente las coordenadas de X.

1048. **Traslacion de los ejes de coordenadas.**—Cuando las coordenadas referidas á los ejes que pasan por un punto Z (fig. 700; lám. 53) quieren referirse á otro A del canevás, estará todo reducido á la sencilla operacion de una suma algébrica. En el caso actual habría que sumar con cada una de las abscisas halladas (1041), la del punto A tomada con signo negativo, en razon á hallarse el nuevo orígen de coordenadas al *este* del primero; si se hallase al *oeste* habria que tomarla con signo positivo. Con respecto á las ordenadas, se añadiría á las de todos los demás la del punto A con signo negativo, por hallarse más al *norte* que Z; y se tomaría con signo positivo en el caso de hallarse más al *sur*. Añadiendo por lo tanto — 12.568,m 36 á las abscisas, y — 2.292,m 87 á las ordenadas anteriormente obtenidas, se tendrá el siguiente estado de coordenadas para los mismos puntos del canevás.

Coordenadas referidas al punto A.

Abscisas	Ordenadas.	Vértices del polígono.	Region en que se hallan.	Observaciones.
—12 568,36m	— 2 292,87m.	Z	S. O.	
— 5.689,24	+ 9 622,11	T	N. O.	
— 2 269,93	—10.766,32	H	S. O.	
0	0	A	»	
+ 7.923,06	+ 7.764,86	P	N. E.	
+11 634,59	— 5.628,24	K	S. E.	

1049. **Aplicacion del sistema de coordenadas á los planos de terrenos de mediana extension** —La construccion de los planos puede hacerse siempre por abscisas y ordenadas cuando se han levantado con los goniómetros, resolviendo primeramente los triángulos del mismo modo que en el caso explicado (1035), partiendo de la base y empleando los valores de los ángulos para hallar la magnitud de los lados, y aplicando despues los procedimientos que hemos dado á conocer (1044), siempre que en el levantamiento del plano se hubiese seguido el método de interseccion ó el de doble interseccion. Cuando se ha seguido el método de rodeo, se conoce la magnitud de los lados, así como la de los ángulos, por medio de los cuales y del rumbo de la base se calcularán los ángulos de los triángulos rectángulos en que se divide el polígono (1041) para la determinacion de las coordenadas. Si se hubiese seguido el método de radiacion, se determinarían los valores de los lados resolviendo (28) los triángulos en que queda dividido el polígono por las rectas tiradas desde el punto interior á los vértices.

Cuando se ha empleado la brújula, puede reducirse el problema á uno de los casos que acabamos de tener en cuenta, deduciendo los valores angulares del conocimiento de los rumbos (287).

1050 **Replanteo del canevás trigonométrico** — Ocurre muchas veces, para la referencia de las operaciones de detalles, tener que restablecer en el terreno los puntos del canevás trigonométrico, por haber desaparecido algunas señales. Para ello es preciso valerse de dos ó tres puntos del mismo canevás, que no hayan podido desaparecer fácilmente, como sucede con las torres, picos de los cerros y otros objetos invariables. Supongamos que se conserven dos de estos puntos A, B (fig. 703; lám. 52), y tratemos de restablecer el punto C, cuya señal ha desaparecido. Se elegirá una base MN, por medio de la cual, y de los ángulos que forman en sus extremos las visuales tiradas á los puntos fijos, se resolverá el triángulo AMB (741), que dará el valor de AM; y como además se conoce por el plano la distancia AC y el ángulo CAB, del que se deduce el MAC=MAB—CAB, se tendrán los datos necesarios (28) para la resolucion del triángulo MAC. Formando despues en el terreno el ángulo AMC, y tomando en la recta indefinida MH así determinada el valor del lado MC, se tendrá la posicion del punto C.

Cuando se trata de restablecer la situacion de un punto D (fig 704; lámina 52) con relacion á otros tres A, B, C, se elige un punto arbitrario M, que se relaciona á los puntos dados (852), obteniendo así los valores de MA y MB, que con el AB determinan el triángulo AMB; resolviéndole (30), se conocerá el ángulo BAM, y restando de él el DAB, cuyo valor se conoce, se tendrá el del MAD: como además se conoce AD en el plano, se tendrán los datos necesarios (28) para resolver el triángulo MAD, que nos servirá para determinar como en el caso anterior la posicion del punto D.

Tambien pudiera determinarse, relacionando M como acabamos de indicar, y hallando el valor del ángulo CAM (854); como se conoce el lado AC y se puede medir el ángulo AMC, se tendrán (29) los datos necesarios para resolver el triángulo ACM, y hallar el valor del lado AM, y como además es conocido el valor de AD en el plano, y se puede calcular el ángulo MAD=MAC—CAD, que tambien se conoce, podrá resolverse como antes el triángulo MAD, y hallar la posicion del punto D.

1051. **Aplicaciones á la relacion de dos triangulaciones aisladas.**—Cuando se trata del levantamiento de un plano extenso, y cuyo contorno no puede recorrerse libremente, como sucede en el bosque *abcdef* (fig. 705; lám. 52) á causa de impedirlo los bosques colindantes, se establecen dos redes de triángulos P y Q, las cuales se relacionan fijando con respecto á ellas dos puntos interiores *m* y *n*, que pueden ser dos árboles notables por su elevacion ó señalados con banderolas de colores, que se destaquen de la masa general de los árboles. Fijos así los vértices de las triangulaciones en sus posiciones relativas por la recta *mn* comun á ambas, sirven de puntos de partida para el establecimiento de las líneas de operacion, que han de señalar el contorno del bosque y todos los detalles que convenga dar á conocer.

Cuando se han hallado las coordenadas de todos los puntos de ambas triangulaciones, bastaría haber fijado con relacion á ambas un solo punto interior *m*, hallando (1045) los valores de las rectas *am* y *mb*, así como los ángulos que forman con la meridiaua (1044); de los cuales se deduce (1046) el valor del ángulo *amb*. Se determina de esta manera (28) el triángulo *abm* comun á ambas triangulaciones, que quedan por lo tanto relacionadas.

1052. **Levantamiento del plano de las líneas de gran extension, y su referencia al canevás trigonométrico.—Trasversales.**—Las líneas extensas, ya naturales ó artificiales, constituidas por los rios, arroyos, divisorias, canales, caminos, cercas de grandes propiedades..... que cruzan el terreno cuyo plano se trata de obtener, se determinan, como ya hemos visto (984), refiriendo á los vértices de la triangulacion el punto de partida y el de término de la línea, así como otros varios puntos intermedios; lo que permite comprobar la posicion de la línea por trozos comprendidos entre los puntos así determinados. Se tiene de este modo la verdadera forma de la línea que se trata de representar, la comprobacion de las magnitudes de las distintas partes que la componen, y de la posicion que cada uno de sus vértices guarda con los demás y con los puntos fijos por la triangulacion ó triangulaciones anteriores. A estos puntos fijos nos hemos referido al tratar de los planos parcelarios y la determinacion de los detalles (991).

Las líneas de gran extension de que ahora nos ocupamos no son otra cosa que las *trasversales* á que hán de referirse los detalles.

1053. *Referencia de las trasversales al canevás.*—Al referir á la triangulacion el plano de una trasversal, puede suceder y sucede generalmente, que el último punto de la trasversal no coincide con el que representa su posicion en el canevás trigonométrico. Esto depende muchas veces del límite de apreciacion del instrumento empleado en la medida de los ángulos, que da orígen á pequeños errores que se acumulan. Ya hemos dicho (973) el modo de corregir la situacion de los vértices de una línea poligonal cuando se suponen exactos los valores de los ángulos; pero si se trata de corregir la posicion de los de una línea en que los errores provengan de la apreciacion del instrumento angular, como la AB'C'D'M' (fig. 706; lám. 52), en la que el extremo que debia venir á parar á M ha caido en M', siendo próximamente AM'=AM, se hace centro en A y se trazan desde los puntos B', C'.... M' arcos que vayan á terminar en la recta AM: se divide el arco MM' en tantas partes iguales como lados tiene la línea poligonal, trazando rectas desde A á los puntos de division. Tomando entonces B'B=*mn*, que representa el valor angular de una division del arco MM', C'C=*m'n'* de dos divisiones.... se unirán por medio de rectas los puntos A, B.... M y se tendrá con mucha aproximacion, si no de una manera exacta, la línea poligonal ABCDM, que termina en la verdadera posicion del punto M.

Si se hubiese operado con la brújula, el ángulo MAM' representaría el error constante de declinacion; corrigiendo por medio de él los rumbos de todos los elementos de la línea poligonal AB'C'D'M', y trasportando de nuevo, resultará la ABCDM.

1054. *Errores que pueden tolerarse en la medida de las líneas.*—Cuando el error proviene de las distancias, puede tolerarse para las que no pasen de 100 metros, una diferencia en más ó en ménos de $\frac{1}{50}$ de la longitud total: es decir, que no exceda de un metro por cada cincuenta de los que ha de tener la longitud de la recta que une los extremos de la línea recta ó poligonal de que se trata, para igualar á la que se ha obtenido en la triangulacion. Para las distancias comprendidas entre 100 y

300 metros se tolera un error de $\frac{1}{100}$; de $\frac{1}{300}$ para las que lo estén entre 300 y 500 metros, y de aquí en adelante la tolerancia es de $\frac{1}{500}$.

1055. **Restablecimiento de las trasversales.**—Cuando se trata del replanteo de una trasversal, restablecidos los puntos trigonométricos á que ha de referirse (1050), es conveniente proceder á la medida de uno de los lados del canevás, á fin de hallar la relacion que pueda haber entre las medidas que han de tomarse en el terreno y el resultado de las operaciones trigonométricas obtenido para las líneas del canevás.

Supongamos, por ejemplo, que la trasversal ha de partir de un punto M (fig. 707; lám. 52) situado en el lado AB del canevás trigonométrico á una distancia $AM=d$ del punto A, determinada en el plano; se medirá AB, y representando por D' el valor así obtenido y por D el deducido anteriormente por el cálculo, se hallará la distancia x que ha de medirse en el terreno á partir de A para obtener la posicion de M, independientemente de los errores que puedan provenir de la cadena que se emplea, por la proporcion

$$D : d :: D' : x = \frac{dD'}{D} \quad [6].$$

Análogamente se procedería si el punto de partida hubiese de ocupar la posicion M' en la prolongacion de AB.

1056. **Planos parcelarios y detalles referidos á la triangulacion.**—Los planos parcelarios ó de detalles se relacionan con el canevás trigonométrico por dos sistemas diferentes. En el primero de ellos se utiliza la representacion de los contornos naturales que hemos dado á conocer (1052), los cuales establecen la division en zonas, que se subdividen en las distintas parcelas que comprenden, y cuyos linderos se determinan á su vez por los procedimientos indicados (926 y 990). Las ventajas de este sistema de parcelacion, llamado *por zonas comprendidas entre límites naturales*, se presentan claramente á la vista: los errores cometidos en los planos parcelarios no salen de la zona en que estos se hallan comprendidos, se prestan fácilmente á las rectificaciones necesarias, y no se trasmiten al resto de la parcelacion. Se tienen además nuevas comprobaciones determinando los puntos en que encuentran á las líneas que constituyen el canevás trigonométrico.

El otro sistema de parcelacion consiste en referir inmediatamente á los triángulos de órden inferior del canevás, las trasversales formadas por los rios, caminos.... los linderos de las distintas propiedades, y las posiciones ocupadas por los edificios y demás objetos que constituyen los detalles del plano. Para conseguirlo, puede dividirse el triángulo que se considera en otros varios, cuyos lados se aproximen todo lo posible á los contornos naturales y á los linderos, con el objeto de referir á los primeros los puntos que se crea conveniente determinar en estos últimos.

La triangulacion que así resulta es puramente gráfica, pudiendo emplear en su determinacion la cuerda ó cadena (929), la escuadra, la brújula ú otro goniómetro cualquiera, ó combinando varios de estos medios, segun la extension de las parcelas y demás circunstancias. La fig. 708 (lám. 53) presenta un triángulo ABC de segundo órden, formado por los puntos B y C de este mismo órden y el A que pertenece además al primero. Despues de restablecidos los lados del triángulo ABC (1050) trazando las alineaciones AB, BC, CA, pueden determinarse los puntos *a* y *b* por sus distancias al B en los lados de dicho triángulo, trazando y midiendo la recta *ab*; lo que determinará el triángulo parcial B*ab*, y de un modo análogo al C*cd* con solo el auxilio de la cadena y los jalones. La distancia de *e* al extremo *a* de la *ab* determina la directriz *ce*; así como tambien las distancias *bh*, *eh* fijan la posicion del punto *h* y la direccion de *hd*. Análogamente se determinarán todas las directrices representadas por líneas de trazos en la figura, á las que se referirán las ordenadas que determinan los distintos puntos que se consideran en los linderos de las parcelas comprendidas en el triángulo. Se comprende el modo de emplear los goniómetros en el trazado y levantamiento del plano de las directrices.

1057. **Planos de las grandes poblaciones.**—Para el levantamiento del plano de una gran poblacion se sigue una marcha enteramente análoga á la que hemos establecido (992), partiendo de una triangulacion determinada por el cálculo, en vez de la triangulacion gráfica de que en el caso citado hacíamos depender la situacion de las trasversales y la determinacion de los detalles. La base de la triangulacion debe obtenerse con toda la exactitud posible, y conviene que algunos de los vértices del contorno poligonal que circunscribe á la poblacion formando parte de la red de triángulos, sea un vértice del canevás trigonométrico general, á que haya de referirse el plano de la poblacion. Se comprende que esta referencia no se obtendría por medio de un solo vértice comun, pues el plano de la poblacion puede ocupar infinitas posiciones alrededor de este punto, y que será preciso conocer además con toda precision el rumbo de una de sus líneas, suponiendo bien orientado tambien el plano general. Si se tuviesen dos ó más vértices comunes, cesaría desde luego toda indeterminacion.

1058. **Verificacion de los planos.**—Para referir al canevás trigonométrico todos los diferentes trabajos ejecutados para la determinacion de los detalles que han de completar la proyeccion horizontal del terreno, y las formas y dimensiones verdaderas de las distintas partes de que consta, debe empezarse por un reconocimiento minucioso y detallado de los croquis y de los registros, el cual tiene por objeto asegurarse de la marcha seguida por cada operador, de la conformidad entre las direcciones y magnitudes de las rectas que constituyen el canevás topográfico del croquis y las correspondientes anotaciones del registro, y todo aquello que pueda dar indicios de alteraciones ejecutadas por el operador para conseguir el cierre de polígonos, las intersecciones de visuales á puntos determinados cuando son en gran número, ó cualquier otro medio de que haya podido valerse con objeto de corregir en el plano, por los medios que han estado á su alcance y en la parte que esto es posible, los errores de que él mismo ha podido hacerse cargo en el curso de las operaciones que ha ejecutado. Es necesario además hacer la trasportacion sucesiva de estos planos parciales en el que contiene el canevás trigonométrico, para ver la relacion que tienen los puntos que deben ser comunes á ambos, y la que guardan los planos parciales entre sí. Cuando resulta de este exámen que los planos de las trasversales, de las parcelas y de los demás detalles no presentan errores que exceden de las tolerancias admitidas (1054); las separaciones angulares que sus diferentes elementos han podido experimentar son proporcionales; no presentan cambios notables de direccion con relacion á los mismos elementos en el caso de haberse obtenido por la triangulacion; y los puntos no se alejan mucho de las posiciones que ocupan en el canevás trigonométrico, hay motivo para creer que las operaciones de detalle están bien ejecutadas, y que pueden someterse á las correcciones indicadas (973 y 1053). Pero en caso contrario hay justificadas presunciones de descuido en la ejecucion de las operaciones de campo ó en la claridad de las anotaciones, y no debe admitirse como bueno el trabajo sin ejecutar préviamente las comprobaciones necesarias. Uno de los medios que para conseguirlo pueden emplearse en los paises llanos, consiste en el trazado y medicion de una diagonal determinada por dos puntos comunes al plano que se comprueba y al canevás trigonométrico, determinando los puntos en que corta á los linderos de las parcelas y á los rios, caminos y demás líneas tambien comunes á una y otra operacion. Puede asimismo determinarse y medirse con las mismas condiciones y en el centro del terreno una base, desde cuyos extremos se fijan por interseccion varios puntos comunes, eligiendo los más notables, y en mayor número hácia aquella parte en que se sospecha con más fundamento la existencia de los errores.

En los terrenos cubiertos de bosque ó muy accidentados se reproduce el contorno, alguna de las trasversales determinadas por los caminos, los arroyos ó las divisorias, se determinan algunos puntos por triangulacion ó por intersecciones desde los extremos de una ó más bases relacionadas entre sí, ó se emplean otros medios que permitan las circunstancias particulares de localidad y sugiera la práctica al encargado de ejecutar la verificacion.

Al mismo tiempo, pueden aprovecharse las operaciones de verificacion para enlazar como hemos dicho (1051) los planos ejecutados por diferentes geómetras á distintos lados de un bosque, y que no les ha sido fácil relacionar.

Con respecto á los planos levantados con la brújula, pueden los errores provenir de la diferente orientacion del instrumento empleado, con respecto á la del canevás trigonométrico. Entonces se construye el plano aparte, pasándole á un papel de calco, el cual se coloca sobre el del canevás buscando la coincidencia de dos puntos comunes, y observando la que entonces tiene lugar entre los demás, ó la separacion que presentan. Cuando ha precedido la orientacion de las brújulas empleadas, pueden hacerse préviamente las correcciones indicadas (380), evitándose así la construccion aparte que acabamos de indicar y su traslacion al papel trasparente.

Cuando se han referido los puntos del canevás trigonométrico á la meridiana y su perpendicular, el límite de la tolerancia admitida para la verificacion no pasa de $\frac{1}{500}$ en la longitud de cada una de las coordenadas correspondientes al punto que se considere.

Tratándose de planos aislados, es necesario atenerse á las verificaciones y correcciones particulares, que hemos indicado en los diferentes procedimientos expuestos para el levantamiento de los planos.

CAPÍTULO XIX.

Cálculo de las superficies.

Preliminares.—Triángulos rectilíneos en general.—Triángulos rectángulos.—Triángulos oblicuángulos.—Aplicaciones de las fórmulas que anteceden.—Cuadriláteros.—Polígonos regulares.—Círculo.—Elipse.—Polígonos irregulares.—Terrenos de corta extension.—Por alineaciones perpendiculares y oblicuas de 45° y de 135°.—Contornos rectilíneos.—Polígonos compuestos de un corto número de rectas.—Polígonos de un gran número de lados.—Figuras secundarias.—Contornos curvilíneos.—Por interseccion.—Por rodeo.—Por radiacion.—Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.—Planos parcelarios.—Poblaciones.—Errores que resultan en las superficies cuando se emplean en el terreno cadenas inexactas.—Terrenos de mediana extension.—Polígonos principales.—Por interseccion.—Por rodeo.—Por doble interseccion.—Por radiacion.—Por los métodos expeditos de rodeo.—Figuras secundarias.—Terrenos de grande extension.—Métodos gráficos expeditos aplicables á toda clase de terrenos.—Reduccion de las áreas al horizonte.—Verificacion de los cálculos, y tolerancia de los errores que pueden admitirse en el cálculo de las superficies.—Cálculo de las áreas de los perfiles trasversales en desmonte y terraplen.

1059. **Preliminares.**—Se llama área de una superficie limitada el número de veces que esta superficie contiene á la unidad, ó en general la razon de la superficie á la unidad.

La unidad superficial tiene siempre la forma de un cuadrado, cuyo lado es la unidad lineal adoptada para medir las longitudes.

Para obtener la medida de una superficie se la compara con la que se ha elegido por unidad, dividiendo el valor numérico de la primera por el de la segunda.

En la resolucion de las cuestiones, emplearemos dos procedimientos: el uno que llamaremos de *soluciones numéricas*, y el otro de *soluciones gráficas*. Entenderemos por soluciones numéricas, aquellas en que se haga uso del cálculo, bien se opere sobre el terreno ó sobre el papel, valiéndose de los instrumentos de campo ó de gabinete para la determinacion de las líneas y ángulos que han de servir de datos, y el trazado tambien de las líneas y ángulos que han de representar los resultados; y llamaremos *soluciones gráficas*, aquellas en que solo se haga uso de construcciones geométricas, tanto en el campo como en el gabinete, con los instrumentos adecuados á cada caso para la resolucion de los problemas, sin entrar el cálculo para nada en la resolucion.

Para las soluciones tanto numéricas como gráficas, cuando se opera en el terreno mismo, basta la formacion del cróquis si no se tiene plano y no hay necesidad de levantarle; pero será preciso construir el plano con precision y en escala conveniente cuando las soluciones, tanto numéricas como gráficas, deban efectuarse en el gabinete. Es de todo punto indispensable determinar bien el contorno del terreno, como base de todas las operaciones que se han de practicar despues

Cuando se opera en el terreno; las soluciones numéricas son más exactas que las gráficas, y podrá servir de comprobacion el observar si al trasladar al papel las líneas establecidas en el terreno, y que representan los resultados, guardan en el plano las mismas relaciones de posicion.

Cuando se opera en el papel, las soluciones gráficas son al contrario más exactas que las numéricas, y se obtienen aquellas con más aproximacion, construyendo de nuevo el plano, si estaba en escala pequeña, en otra más conveniente En este caso las líneas obtenidas por ambos métodos en el plano se trasladan despues al terreno, lo que constituye el *replanteo*.

En adelante, al resolver una cuestion numérica ó gráficamente, el procedimiento que expongamos deberá entenderse que debe seguirse tanto en el terreno como en el papel.

Las soluciones numéricas se fundan en los diversos problemas de Geometría que establecen ciertas relaciones entre los datos y las incógnitas; y las *gráficas* en las diversas proposiciones de la Geometría referentes á los polígonos equivalentes, y en la trasformacion de las figuras de que hablaremos en el capítulo siguiente, y la cual entra como auxiliar en la mayor parte de las soluciones.

Suponemos bien impuesto al lector en el sistema métrico con la extension con que se halla explicado en el capítulo 4.º del complemento de la aritmética de D. Juan Cortázar; por lo que no nos detendremos en la exposicion de las medidas cuadradas, y pasaremos á ocuparnos de las varias expresiones que se suelen usar para la determinacion de las áreas de las figuras geométricas.

1060. **Triángulos rectilíneos en general**.—*El área de un triángulo cualquiera es igual á la mitad del producto de su base por su altura*.

Sea S el área, b la base y a la altura: tenemos (Geometría. Teorema 94)

$$S = \frac{b \times a}{2} \qquad [1].$$

Ejemplo. Sea $b = 50^m$, $a = 40^m$ y S la superficie del triángulo ABC (fig. 759; lám. 58), resultará

$$S = \frac{50 \times 40}{2} = \frac{2000}{2} = 1000^{m^2} = 10 \text{ áreas.}$$

1061. **Triángulos rectángulos.**—*El área de un triángulo rectángulo es igual á la mitad del producto de sus catetos.*

Como los catetos b y c (fig. 4; lám. 1) son en este caso la base y la altura, tendremos

$$S = \frac{bc}{2} \qquad [2],$$

que nos da la superficie cuando se conocen los dos catetos.

1062. *El área de un triángulo rectángulo es igual á la mitad de un cateto multiplicada por la raíz cuadrada del producto de la suma por la diferencia de la hipotenusa y dicho cateto.*

Si en la fórmula [2] ponemos por un cateto c su valor

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)\,(a-b)},$$

resultará

$$S = \frac{b}{2} \times \sqrt{(a+b)\,(a-b)} \qquad [3],$$

que nos da la superficie del triángulo, cuando se conocen la hipotenusa y un cateto.

1063. *El área de un triángulo rectángulo es igual á la mitad del producto del cuadrado de un cateto por la tangente del ángulo agudo adyacente, ó por la cotangente del ángulo opuesto á dicho cateto.*

En efecto, como se tiene $c = b$ tang C (20), y tambien (3) $c = b$ cot B, sustituyendo por c sus valores en la fórmula [2] resultará sucesivamente:

$$S = \frac{b^2 \text{ tang. C}}{2} \qquad [4];$$

$$S = \frac{b^2 \text{ cot. B}}{2} \qquad [5]:$$

cuyas fórmulas sirven para hallar la superficie cuando se conoce un cateto ó un ángulo agudo.

1064. *El área de un triángulo rectángulo es igual á la mitad del producto del cuadrado de la hipotenusa por el seno y coseno de uno de los ángulos agudos.*

Si en la fórmula [2] ponemos por b y c sus valores $b = a$ sen. B (18) y $c = a$ cos. B (19), resultará

$$S = \frac{a^2 \text{ sen. B cos. B}}{2} \qquad [6];$$

y como sen. 2 B = 2 sen. B cos. B (Trig 17), de donde resulta sen. B cos B $= \frac{\text{sen. 2B}}{2}$, sustituyendo este valor en la fórmula anterior, tendremos esta otra:

$$S = \frac{a^2}{4} \text{ sen. 2B} \qquad [7]:$$

cuyas fórmulas sirven para hallar la superficie cuando se conoce la hipotenusa y un ángulo agudo.

1065. **Triángulos oblicuángulos**.—*El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su perímetro por el rádio del círculo inscrito.*

Sea el triángulo ABC (fig. 709; lám. 53): trácense las bisectrices de los ángulos, y su punto de encuentro O será el centro del círculo inscrito, desde el cual se bajarán las perpendiculares OD, OE y OF á los tres lados AC, AB y BC del triángulo; tendremos, segun esto, recordando la fórmula [1],

$$\text{ABC} = \text{AOB} + \text{BOC} + \text{AOC} = \frac{\text{AB} \times \text{OE}}{2} + \frac{\text{BC} \times \text{OF}}{2} + \frac{\text{AC} \times \text{OD}}{2} = \frac{(\text{AB} + \text{BC} + \text{AC}) \times \text{OE}}{2};$$

ó lo que es lo mismo

$$S = \frac{a + b + c}{2} \times r \qquad [8],$$

llamando S á la superficie, r al rádio del círculo inscrito, y a, b, c á los tres lados del triángulo, opuestos á los ángulos A, B y C

Despejando r en la fórmula [8], tendremos

$$r = \frac{2S}{a + b + c} \qquad [9];$$

lo que nos dice que *el rádio del círculo inscrito en un triángulo es igual al duplo de su área dividido por su perímetro.*

1066. *El área de un triángulo es igual al producto de sus tres lados, dividido por el cuádruplo del rádio del círculo circunscrito.*

Sea el triángulo ABC (fig. 710; lám. 53) y el O centro del círculo circunscrito: trácense la altura CD, el diámetro CE y la cuerda AE. Los triángulos rectángulos ACE y CDB, que tienen iguales los ángulos en E y en B, son semejantes y dan la proporcion

$$CE : CB :: AC : CD,$$

de donde

$$CD = \frac{CB \times AC}{CE};$$

pero como se tiene (1060)

$$ABC = \frac{AB \times CD}{2};$$

poniendo en vez de CD su valor, resultará

$$ABC = \frac{AB \times CB \times AC}{2CE};$$

ó lo que es lo mismo, llamando r' al rádio del círculo circunscrito,

$$S = \frac{a \times b \times c}{4r'} \qquad [10]$$

Despejando r' en esta fórmula tendremos

$$r' = \frac{a \times b \times c}{4S} \qquad [11];$$

lo que nos dice que el *rádio del círculo circunscrito á un triángulo es igual al producto de sus tres lados, dividido por el cuádruplo de su área.*

1067. *El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido.*

Sea el triángulo ABC (fig. 711; lám. 53), a y c los lados conocidos y B el ángulo comprendido. Llamando h á la altura, tendremos [1]

$$S = \frac{ah}{2}$$

El triángulo rectángulo ABD da (18)

$$h = c \text{ sen. B};$$

y sustituyendo por h su valor, resulta

$$S = \frac{ac \text{ sen. B}}{2} \qquad [12];$$

lo que nos dá el área de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido (28).

Restableciendo el rádio $R = 10^{10}$ de las tablas de logaritmos de las líneas trigonométricas, se tendrá

$$S = \frac{ac \text{ sen. B}}{2\ 10^{10}} \qquad [13].$$

Cuando el triángulo es rectángulo (fig. 4; lám. 1) y se conocen los catetos b y c, como sen A es igual á la unidad, la fórmula

$$S = \frac{bc \text{ sen. A}}{2}$$

se reduce á $S = \dfrac{bc}{2}$, que es la [2]

1068 *El área de un triángulo es igual á la mitad del cuadrado de un lado, multiplicada por los senos de los ángulos adyacentes á dicho lado, y dividida por el seno de la suma de dichos ángulos.*

Sea en el triángulo ABC (fig. 711; lám.) a el lado conocido, y B y C los dos ángulos adyacentes, de donde $A = 180^\circ - (B + C)$: tendremos primero (1067)

$$S = \frac{ac \text{ sen. B}}{2}.$$

El mismo triángulo nos da (21)

$$c : a :: \text{sen. C} : \text{sen A} = \text{sen } (B + C),$$

de donde

$$c = \frac{a \text{ sen. C}}{\text{sen. } (B + C)};$$

y sustituyendo por c su valor en la expresion anterior, resulta

$$S = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{\text{sen. B sen. C}}{\text{sen. } (B + C)}; \qquad [14];$$

lo que nos dá el área de un triángulo dados un lado y los dos ángulos adyacentes (29).

Tambien se puede poner en el denominador sen. A por sen. (B + C), y se tendrá

$$S = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{\text{sen. B sen. C}}{\text{sen. A}} \qquad [15].$$

1069. *El área de un triángulo es igual á la mitad del cuadrado de un lado, multiplicada por el seno de uno de los ángulos adyacentes, y el de la suma de este ángulo y el opuesto á dicho lado, y dividido por el seno del ángulo opuesto.*

Sean en el mismo triángulo ABC conocidos un lado a, un ángulo adyacente B y el ángulo opuesto A. Como se tiene $C = 180^\circ - (A + B)$, sustituyendo por sen. C su igual sen. (A + B) en la fórmula anterior, resultará

$$S = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{\text{sen. B sen. (A + B)}}{\text{sen A}} \qquad [16];$$

lo que nos dá el área de un triángulo dados un lado, un ángulo adyacente y el ángulo opuesto. Tambien se podría hallar el suplemento de los dos ángulos dados y quedaría reducido este caso al anterior.

1070. Para hallar el área de un triángulo cuando se dan dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, se resolverá el triángulo para determinar los otros dos ángulos, y quedará reducido este caso á uno de los anteriores. Cuando este problema da lugar á dos soluciones (31) se pueden hallar las áreas de los dos triángulos, las cuales serán diferentes; pero si se sabe el triángulo que satisface á la cuestion, bastará hallar la que le corresponde.

1071. *El área de un triángulo es igual á la raiz cuadrada del producto que resulta de multiplicar la mitad del perímetro por los tres factores que se obtienen restando sucesivamente de dicha mitad cada uno de los lados del triángulo.*

Sea ABC (figs. 5 y 6; lám. 1) un triángulo en el que llamaremos a, b y c á los lados respectivamente opuestos á los ángulos A, B y C, y h á la altura CD. La cuestion está reducida á determinar uno de los segmentos AD de la base ó de su prolongacion en funcion de los lados del triángulo, para hallar despues por el teorema de Pitágoras (Geom. Teorema 71) la altura CD, que resultará tambien en funcion de los lados. Multiplicando despues la altura por la base, y tomando la mitad del producto se tendrá el área del triángulo.

En efecto, tenemos (Geom. Teor. 72)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD,$$

y despejando AD resulta

$$AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c},$$

pero como se tiene

$$DC^2 = AC^2 - AD^2,$$

sustituyendo valores en esta última expresion, se tendrá

$$h^2 = b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2};$$

reduciendo el segundo miembro á una sola fraccion, y descomponiendo en el numerador la diferencia de cuadrados que resulta en un producto de dos factores (Alg. 29), se tendrá

$$h^2 = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\ (2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2}$$

ó

$$h^2 = \frac{(a + b + c)\ (b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c)}{4c^2}.$$

Llamando $2p$ al perímetro, resultará la expresion

$$2p = a + b + c,$$

y restando sucesivamente de ambos miembros $2a$, $2b$ y $2c$, sustituyendo en el valor de h^2 y simplificando, resultará

$$h^2 = \frac{4p\ (p - a)\ (p - b)\ (p - c)}{c^2},$$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros

$$h = \frac{2\sqrt{p\ (p - a)\ (p - b)\ (p - c)}}{c}.$$

Sustituyendo este valor de h en la expresioon del área del triángulo, que es como sabemos

$$S = \frac{c \times h}{2},$$

y simplificando despues, se tiene por último

$$S = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)} \qquad [17],$$

cuya fórmula nos da el área de un triángulo cuando se conocen los valores de sus tres lados (30).

Esta fórmula tiene aplicacion en el caso de que el triángulo que se tenga que medir fuese un bosque, una viña ó cualquier otro terreno en el cual no se pudiese levantar una perpendicular para tener su altura, sin perjudicar á la propiedad.

Ejemplo.—Sean los tres lados del triángulo ABC (fig. 760; lám. 58), $a=40^m$; $b=50^m$; $c=60^m$; se hallará su suma $40^m+50^m+60^m=150^m$, de la cual se tomará la mitad, que son 75^m. Restando de 75 cada uno de los números 40, 50 y 60, se obtienen los restos 35, 25, y 15, que multiplicados entre sí y por el número 75, resulta el producto 984.375, del cual estrayendo la raíz cuadrada, que es 992,15, esta será la superficie del triángulo expresada en metros cuadrados, ó sean 992^{m^2} y 15^{dm^2}, ó bien $9^a,92^{m^2}$ y 15^{dm^2}.

1072. El segmento $AD = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$, se hubiera podido obtener observando que los triángulos rectángulos ACD y BCD dan

$$h^2 + AD^2 = b^2;\ h^2 + (c - AD)^2 = a^2;$$

y restando ordenadamente

$$AD^2 - (c - AD)^2 = b^2 - a^2;$$

de donde

$$AD = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}.$$

Pero hemos visto (712) la manera de calcular más fácilmente el valor del segmento AD, que llamaremos e, hallando el valor de la diferencia $\dfrac{(a+b)\ (a-b)}{c}$ de los segmentos, por medio de la cual y de la suma c de los mismos se determina e; resultando entonces para la altura $CD = h$,

$$h^2 = b^2 - e^2;$$

de donde

$$h = \sqrt{(b+e)\ (b-e)}\ ;$$

luego sustituyendo en la expresion del área del triángulo, se tendrá por último

$$S = \frac{c}{2}\sqrt{(b+c)\ (b-c)} \qquad [18]$$

Tambien puede hallarse la fórmula [17] de la superficie de un triángulo en funcion de sus lados de la manera siguiente:

Si en la fórmula [12] ponemos por sen B su valor 2 sen $\frac{1}{2}$ B cos $\frac{1}{2}$ B (Trig. 17), resultará

$$S = ac \text{ sen } \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B,$$

y sustituyendo en esta ecuacion por sen $\frac{1}{2}$ B y cos $\frac{1}{2}$ B sus valores (Trig. 43), se tendrá

$$S = ac \times \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-c)}{ac}} \times \sqrt{\frac{p\ (p-b)}{ac}};$$

de donde

$$S = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}.$$

1073. Cuando se ha determinado la superficie de un triángulo por el conocimiento de sus lados, se pueden hallar muy fácilmente los valores de sus ángulos.

En efecto, despejando sen. B en la fórmula [12], resulta

$$\text{sen. } B = \frac{2S}{ac};$$

ó

$$\frac{\text{sen. } B}{b} = \frac{2S}{abc} = K,$$

haciendo para abreviar $\frac{2S}{abc}$ igual á K.

Dejando sen B en la última ecuacion se obtiene

$$\text{sen } B = bK \qquad [z],$$

y del mismo modo

$$\text{sen. } A = aK \qquad [z'],$$
$$\text{sen. } C = cK \qquad [z''].$$

Para evitar la ambigüedad que acompaña á los ángulos que se obtienen por medio de su seno, es conveniente determinar primero los dos ángulos menores del triángulo para conocer la especie del tercero.

Tanto por la resolucion de los triángulos cuando se conocen sus lados, como por las fórmulas [z], [z'] y [z''] cuando se conocen sus superficies, ó bien haciendo uso de los trasportadores, se podrán conocer aproximadamente los valores de los ángulos de los triángulos, y por consiguiente los de los polígonos en los terrenos de corta extension, levantados con la cadena ó cuerda, como si se hubieran empleado los goniómetros, y deducir los rumbos, obteniendo así los resultados que hubiera dado el uso de la brújula.

Si en las fórmulas [9] y [11] ponemos por S que representa la superficie del triángulo su valor acabado de obtener, tendremos, para el rádio del círculo inscrito

$$r=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b+c} \qquad [19];$$

y para el radio del círculo circunscrito

$$r'=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \qquad [20];$$

los cuales se hallan determinados solamente por medio de los tres lados del triángulo, circunscrito ó inscrito al círculo.

1074. *El área de un triángulo es igual al cuadrado de la mitad de su perímetro multiplicado por las tangentes de las mitades de los ángulos del triángulo.*

En efecto, multiplicando ordenadamente las tres ecuaciones [a''] [b''] y [c''] (Trig. 43), resulta

$$\text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A}\times\text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{B}\times\text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{C}=$$
$$\frac{1}{p^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{\text{S}}{p^2};$$

de donde

$$\text{S}=p^2\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A tang.}\ \frac{1}{2}\text{B tang.}\ \frac{1}{2}\text{C} \qquad [21].$$

Aplicaciones de las fórmulas que anteceden.—Sea el triángulo ABC (fig. 712; lám. 53), en el cual suponemos que se tiene:

AB = 11.178,22 m;	C = 52° 11′ 30″;
BC = 11.093,60;	A = 51° 38′ 10″;
AC = 13.738,43;	B = 76° 10′ 20″;

y la superficie $S = 60206407$ metros cuadrados próximamente, que corresponde al logaritmo 7,7796427.

Eligiendo los datos necesarios para hacer aplicacion de las fórmulas [13] [14] [15] [17] y [18], se observará si resulta en todos los casos la misma superficie del triángulo; lo que servirá de comprobacion, pudiendo comprobarla además valiéndose para obtenerla de la fórmula [21]. Tambien se puede hacer aplicacion de las fórmulas [z], [z'] y [z''] para determinar los ángulos del triángulo, y ver si resultan sus valores; lo que será una nueva comprobacion.

1075. **Cuadriláteros.**—*El área de un cuadrilátero cualquiera se determina en general, sumando las áreas de los dos triángulos, en que resulta dividido por una de sus diagonales.*

Ejemplo.—Sea el cuadrilátero ABCD (fig. 761; lám. 58) tendremos

$$\textit{Area}\ \mathrm{ABCD} = 130,^{\mathrm{m}}20 \times \frac{65,^{\mathrm{m}}60 + 2t^{\mathrm{m}}}{2} = \frac{130,^{\mathrm{m}}20 \times 83,^{\mathrm{m}}60}{2}$$
$$= 55,^{\mathrm{a}}73.$$

1076. *El área de un cuadrilátero cualquiera es igual á la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo comprendido.*

El área del cuadrilátero ABCD (fig. 713; lám. 53) se compone de las áreas de los cuatro triángulos en que le dividen sus dos diagonales. Como se dan conocidas estas y el ángulo que comprenden, llamando S á la superficie del cuadrilátero, se tendrá:

$$\mathrm{AOD} = \frac{1}{2}\ \mathrm{AO} \times \mathrm{OD}\ \mathrm{sen}\ \mathrm{AOD};$$
$$\mathrm{DOC} = \frac{1}{2}\ \mathrm{DO} \times \mathrm{OC}\ \mathrm{sen}.\ \mathrm{AOD};$$
$$\mathrm{BOC} = \frac{1}{2}\ \mathrm{CO} \times \mathrm{OB}\ \mathrm{sen}.\ \mathrm{AOD};$$
$$\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}\ \mathrm{OB} \times \mathrm{AO}\ \mathrm{sen}.\ \mathrm{AOD};$$

de donde sumando ordenadamente estas igualdades y separando factores comunes, se obtiene

$$\mathrm{ABCD} = \frac{1}{2}\ \mathrm{AC} \times \mathrm{BD}\ \mathrm{sen}.\ \mathrm{AOD}.$$

Llamando S á la superficie del cuadrilátero, d y d' á las diagonales y α al ángulo comprendido, se tendrá

$$S = \frac{1}{2}\ dd'\ \mathrm{sen}.\ \alpha \qquad [22].$$

Si las diagonales son perpendiculares entre sí, sen. α es igual á la unidad, y el área del cuadrilátero está representada por la mitad del producto de sus diagonales, lo que es fácil demostrar por geometría.

1077. *El área de un cuadrilátero inscriptible es igual á la raiz cuadrada del producto de los cuatro factores que se obtienen restando sucesivamente de la mitad de su perímetro cada uno de sus cuatro lados.*

Llamando S á la superficie, a, b, c y d á los cuatro lados y p á la mitad del perímetro, la fórmula será

$$S=\sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)} \qquad [23].$$

Para obtener esta fórmula, supongamos que se tiene $C=180^\circ-A$, en cuyo caso tendrá aplicacion: llamando m á la diagonal DB opuesta á los vértices A y C, se tendrá (1067) para las áreas de los triángulos ADB y BDC,

$$s=\frac{ab}{2}\text{sen. }A; \qquad s'=\frac{cd}{2}\text{ sen. }A;$$

de donde

$$S=s+s'=\frac{ab+cd}{2}\text{ sen. }A;$$

pero tambien se tiene

$$m^2=a^2+b^2-2ab\cos.A\,; \qquad m^2=c^2+d^2+2cd\cos.A\,;$$

que restadas dan

$$\cos.A=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,(ab+cd)},\text{ y sen }A=\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,(ab+cd)}\right)^2};$$

y por lo tanto, sustituyendo en el valor de S, reduciendo la cantidad subradical á una sola fraccion, sacando del radical el denominador de esta última y suprimiendo el factor comun $ab+cd$, resulta

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4\,(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}\,;$$

que se reduce á

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-(c-d)^2]\,[(c+d)^2-(a-b)^2]}\,;$$

é introduciendo $\frac{1}{4}$ debajo del radical y descomponiendo (Alg. 29) los factores que existen en él, se obtiene

$$S = \sqrt{\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\left(\frac{a+b+d-c}{2}\right)\left(\frac{c+d+a-b}{2}\right)\left(\frac{c+d+b-a}{2}\right)};$$

por último, representando por p el semiperímetro del cuadrilátero, se tendrá la fórmula [23] de una manera análoga á la que hemos indicado para el triángulo (1071).

1078. **Trapecios** —*El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases.*

Llamando b á la base mayor, b' á la menor, h á la altura y S al área, la fórmula será (Geom. Teor. 95.)

$$S = \frac{b+b'}{2} \times h \qquad [24].$$

Ejemplo —Sea el trapecio ABCD (fig. 762; lám. 58), tendremos

$$Area\ ABCD = \frac{120,^{m}40 + 85,^{m}20}{2} \times 62,^{m}40 = 64,^{a}15.$$

1079. *El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

Llamando b'' á esta recta, la fórmula será (Geom. Teor. 95. Nota.)

$$S = b'' \times h \qquad [25].$$

1080. Si el trapecio es como el de la figura 714 (lám. 53), en que los ángulos A y C son rectos, las fórmulas [24] y [25] dan el área en funcion de sus lados. Si es como el de la fig. 715 (lám. 53), en que los lados AD y BC son oblícuos á las bases, tirando por C la paralela CE á la AD, se podrá calcular la altura CF en el triángulo BCE por los medios expuestos (1071), y resultará en funcion de los lados.

1081. **Rectángulo.**—*El área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

La fórmula será (Geom. Teor. 92.)

$$Area\ del\ rectángulo = B \times A \qquad [26].$$

Ejemplo.—Sea el rectángulo ABCD (fig. 763; lám. 58) tendremos

$$Area\ ABCD = 90,^{m}50 \times 36,^{m}80 = 33,^{a}30.$$

1082. **Cuadrado** —*El área del cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.*

Llamando l al lado del cuadrado, la fórmula será (Geom. Teor. 92, Corol.)

$$\textit{Area del cuadrado} = l^2 \qquad [27.]$$

Ejemplo.—Sea el cuadrado ABCD (fig. 764; lám. 58) se tendrá

$$\textit{Area}\ \mathrm{ABCD} = (85,^{\mathrm{m}}60)^2 = 73,^{\mathrm{a}}27.$$

1083. *El área del cuadrado inscrito en un círculo, es igual al duplo del cuadrado del rádio de dicho círculo.*

Se demuestra (Geom. Teor. 81. Nota 1.ª), que el lado del cuadrado inscrito es igual á $\mathrm{R}\sqrt{2}$; luego el área será

$$\mathrm{S} = 2\mathrm{R}^2 \qquad [28].$$

1084. *El área del cuadrado circunscrito á un círculo es igual al cuádruplo del cuadrado del rádio.*

Como el lado de dicho cuadrado es igual al diámetro 2R del círculo, el área será

$$\mathrm{S} = 4\mathrm{R}^2 \qquad [29].$$

1085. **Paralelógramos en general.** —*El área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura.*

La fórmula será (Geom. Teor. 93),

$$\mathrm{S} = \mathrm{B} \times \mathrm{A} \qquad [30].$$

Ejemplo.—Sea el paralelógramo ABCD (fig. 765; lám. 58) se tendrá

$$\textit{Area}\ \mathrm{ABCD} = 88,^{\mathrm{m}}70 \times 55,^{\mathrm{m}}40 = 49,^{\mathrm{a}}14.$$

1086. *El área de un paralelógramo es igual al producto de dos lados adyacentes por el seno del ángulo comprendido.*

Sean en el paralelógramo ABCD (fig. 716; lám. 54) los lados adyacentes $\mathrm{AB} = c$ y $\mathrm{AD} = b$, y A el ángulo comprendido. Como los triángulos ABD y BCD son iguales, se tendrá (1067)

$$\mathrm{ABCD} = 2 \times \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \mathrm{A}$$

de donde

$$\mathrm{S} = bc \operatorname{sen} \mathrm{A} \qquad [31].$$

Si el paralelógramo fuese rectángulo, sen A será igual á la unidad, y la fórmula se convertiría en

$$S = bc \qquad [32],$$

en que b y c son entonces la base y altura á que se refiere la fórmula [26].

1087. **Polígonos regulares.**—*El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por la apotema ó el rádio del círculo inscrito.*

La fórmula será (Geom. Teor. 96):

$$S = \frac{1}{2} nl \times a \qquad [33].$$

Llamando P al perímetro nl, y r á la apotema a, esta fórmula se convertirá en

$$S = \frac{P \times r}{2} \qquad [34].$$

Ejemplo.—Sea el pentágono regular ABCDE (fig. 766; lám. 58); su lado $AB = 40^m$ y por lo tanto su perímetro 200^m, y su apotema $OH = 30^m$, la fórmula [34] nos dará

$$\textit{Área}\ ABCDE = \frac{200 \times 30^m}{2} = 3000^{m^2} = 30^a.$$

Si se conociese el rádio R del polígono ABCDE (fig. 717; lám. 54), se tendría

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2};$$

y sustituyendo en la fórmula anterior,

$$S = \frac{P\sqrt{4R^2 - l^2}}{4} = \frac{nl\sqrt{4R^2 - l^2}}{4};$$

ó descomponiendo en factores la cantidad subradical,

$$S = \frac{nl\sqrt{(2R + l)\,(2R - l)}}{4} \qquad [35],$$

que da el área de un polígono regular cuando se conoce su rádio, el valor del lado y el número de estos.

La fórmula [33], en que entra la apotema, puede trasformarse observando que en el triángulo rectángulo OAF se tiene, recordando que es $a = r$,

$$\mathrm{AF} = r \text{ tang. } \frac{\mathrm{AOB}}{2};$$

pero $\mathrm{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$; luego $\mathrm{AF} = r \text{ tang } \frac{180^\circ}{n}$, y despejando r,

$$r = a = \frac{\mathrm{AF}}{\text{tang. } \frac{180^\circ}{n}} = \mathrm{AF} \cot \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} \times \cot. \frac{180^\circ}{n} = \frac{l \cot. \frac{180^\circ}{n}}{2};$$

y sustituyendo en la fórmula [33],

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} nl \times \frac{l \cot. \frac{180^\circ}{n}}{2} = \frac{nl^2 \cot \frac{180^\circ}{n}}{4} \qquad [36]$$

Restableciendo el rádio de las tablas, se tendrá por último

$$\mathrm{S} = \frac{nl^2 \cot. \frac{180^\circ}{n}}{4 \times 10^{10}} \qquad [37]$$

1088. **Círculo**.—Antes de determinar el área del círculo, recordaremos primero la relacion de la circunferencia al diámetro, es decir, las veces que el diámetro está contenido en la circunferencia y que es siempre constante. De esta relacion existen varias expresiones, á saber: la de Arquímedes que es $\frac{22}{7}$; la de Mecio que halló ser $\frac{315}{113}$, y la de los modernos que en decimales está representada por 3,14159... y que se señala por la letra griega π, que se lee *Pi*.

Pasaremos ahora á *determinar la longitud de la circunferencia, dado el rádio y al contrario*.

Sea C la circunferencia y r el rádio; supuesto que $\frac{\mathrm{C}}{2r} = \pi$, tendrémos (Geom. Prob. 40);

$$\mathrm{C} = 2\pi r \quad [a] \quad \text{y } r = \frac{\mathrm{C}}{2\pi} \qquad [b]$$

Ejemplo 1.° *Hallar el valor de la circunferencia cuyo rádio es 5 metros* (fig. 767; lám. 58).

La fórmula [a] nos dará

$$C = 2\pi r = 2 \times 3{,}14 \times 5^{m} = 31{,}^{m}4.$$

Ejemplo 2.° *Hallar el valor del rádio de la circunferencia que tiene de longitud,* 31,m4.

La fórmula [b] nos dará

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{31{,}^{m}4}{2 \times 3{,}14} = \frac{31{,}^{m}4}{6{,}28} = 5^{m}.$$

El área de un círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el rádio

Tenemos (Geom. Teor. 97)

$$\textit{Area del círculo} = \frac{1}{2}\,Cr \qquad [38].$$

1089. *El área de un círculo es igual á la razon de la circunferencia al diámetro multiplicada por el cuadrado del rádio.*

Poniendo la fórmula [38] por C su expresion $2\pi r$, y llamando A el área del círculo, se tendrá

$$A = \pi r^{2} \qquad [39].$$

Despejando r en la fórmula [39] se tendrá

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \qquad [c]$$

Luego *el rádio es igual á la raiz cuadrada del cociente que se obtiene dividiendo el área del círculo por la razon de la circunferencia al diámetro.*

Ejemplo 1.° Sea $r = 5^{m}$, llamando A al área del círculo, la fórmula [39] nos dará

$$A = \pi r^{2} = 3{,}14 \times 5^{2} = 78{,}50\ m^{2}.$$

Ejemplo 2.° Sea A = 78, m^2 50, por la fórmula [c] se obtendrá:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{78,\ m^{2}\ 50}{3{,}14}} = \sqrt{25} = 5^{m}.$$

Si se tratase de un semicírculo, se hallará la superficie del círculo entero como acabamos de decir, y se tomará su mitad.

En la práctica se suele hacer uso para hallar la superficie del círculo de la siguiente regla.

Se multiplica el cuadrado del diámetro por 11 y el producto se divide por 14.

En efecto, llamando D al diámetro y poniendo en la expresion $A = \pi r^2$ [39] por r su valor $\frac{D}{2}$, y haciendo uso de la relacion de la circunferencia al diámetro, segun Arquímides, que es $\frac{22}{7}$ y que es ahora el valor de π, resulta

$$A = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{22}{7} \times \frac{D^2}{4} = \frac{11 \times D^2}{14}$$

que es el enunciado de la regla.

1090 *El área de un sector de círculo es igual á la mitad del producto de su arco por el rádio.*

Sea S el área del sector, a la longitud del arco rectificado (Geometría. Probl. 40 —3.º), y r el rádio del círculo: la fórmula será (Geom. Teor. 98)

$$S = \frac{ar}{2} \qquad [40].$$

El área de un sector es igual á la de un triángulo cuya base sea el arco rectificado y la altura el rádio del círculo

Este enunciado conduce á la fórmula acabada de obtener.

Ejemplo.—Sea el sector ABOC (fig. 767; lám. 58), cuyo ángulo BAC es de 64 grados y el rádio del círculo 5^m. Se hallará primero la longitud del arco BOC $= a$ que le sirve de base, determinando la longitud de toda la circunferencia (1088) que es $31,^m4$ y estableciendo la proporcion

$$360^\circ : 31,^m4 :: 64^\circ : a = 5,^m58.$$

La fórmula [40] nos dará

$$\textit{Area}\ ABOC = \frac{1}{2}\,ar = \frac{1}{2} \times 5,^m58 \times 5^m = 13,\,m^2\,95$$

1091. *El área del sector es igual á la relacion de la circunferencia al diámetro, multiplicada por el cuadrado del rádio y por el número de grados del arco, partido todo por 360º.*

Sea α el número de grados y R el rádio: la fórmula será (Geom. Teor. 98. Nota.)

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \qquad [41]$$

1092. *El área de un trapecio circular es igual al producto de la semisuma de sus bases por la diferencia de los rádios.*

Sea el trapecio circular MHFD (fig. 718; lám. 54) cuyas bases son los arcos MH y FD, y la altura la diferencia HF de los rádios OF y OH. Tírese la tangente FF′ igual en longitud al arco rectificado DF y únase el centro O con el punto F′; la parte HH′ de la tangente en el punto H será la longitud del arco MH rectificado; pues los triángulos OFF′ y OHH′ dan la proporcion

$$OF : OH :: FF' : HH';$$

y como los rádios son proporcionales á los arcos, tendremos tambien

$$OF : OH :: \text{arco } FD : \text{arco } MH.$$

De estas dos proporciones resulta

$$FF' : HH' :: \text{arco } FD : \text{arco } MH;$$

y como los antecedentes son iguales por construccion, resultará tambien $HH' = \text{arco } MH$.

Como las áreas de los sectores son equivalentes á las de los triángulos, tambien lo serán la del trapecio rectilíneo HH′FF′ y la del circular MHFD; luego este tendrá por expresion, llamando S á la superficie, A y A′ á las bases y R y R′ á los rádios,

$$S = \frac{A + A'}{2}(R - R') \qquad [42].$$

Como se prueba del mismo modo que el arco GM′ que llamaremos A″, concéntrico con los anteriores y que pasa por el punto G medio de HF, es igual á GG′, y por tanto á la semisuma de los arcos A y A′, se tendrá

$$S = A''(R - R') \qquad [43].$$

Como el trapecio circular MHFD es la diferencia de los dos sectores ODF y OMH, se puede obtener la siguiente fórmula, siendo R y R′ los rádios y S la superficie:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{\pi R'^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \alpha}{360}(R^2 - R'^2),$$

de donde

$$S = \frac{\pi \alpha}{360}(R + R')(R - R');$$

y llamando R″ á la medida proporcional (Geom. Probl. 28) entre R+R′ y R—R′, será por último

$$S = \frac{\pi R''^2 \alpha}{360} \qquad [44].$$

1093. *El área de una corona circular es igual á la de un círculo cuyo rádio es medio proporcional entre la suma y la diferencia de los rádios de las dos circunferencias concéntricas á que corresponde.*

Sea S la superficie de la corona, R y r los rádios de los dos círculos: es evidente que se tiene

$$S = \pi R^2 - \pi R'^2 = \pi (R^2 - R'^2) = \pi (R + R') (R - R').$$

Sea R″ una media proporcional entre R+R′ y R—R′: se tendrá

$$S = \pi R''^2 \qquad [45].$$

1094. *El área de una corona circular es igual á la de un círculo que tenga por diámetro una cuerda de la circunferencia mayor, que sea tangente á la menor.*

Siendo la AB (fig. 718; lám. 54) tangente al círculo menor, es perpendicular al diámetro CD que pasa por el punto E; de donde resulta (Geometría. Teor. 69. Corol.) la proporcion

$$CE : BE :: BE : ED;$$

de donde

$$BE^2 = ED \times CE;$$

pero DE es la suma de los rádios, y CE su diferencia; luego $BE^2 = R''^2$, y así se viene á parar á la fórmula anterior.

Como la corona es un caso particular del trapecio circular, se puede decir tambien que el área de la corona circular es igual al producto de la circunferencia media proporcional entre las circunferencias que la terminan, multiplicada por la diferencia de los rádios de estas últimas.

El área de la corona *abcd* (fig. 768; lám. 58) es tambien igual á la diferencia de las áreas de los dos círculos concéntricos.

1095. *El área de un segmento circular es igual á la mitad del producto del rádio por el exceso del arco sobre la mitad de la cuerda del arco duplo.*

En efecto, el segmento ABM (fig. 719; lám. 54) siendo igual al sector OAMB ménos el triángulo OAB, si tomamos el rádio OB, que llamaremos R, por base del triángulo OAB, la altura será la perpendicular AC á la OB, ó lo que es lo mismo, la mitad de la cuerda AD del arco duplo ABD. Llamando a al arco AB y S á la superficie del segmento, tendremos

$$S = \frac{1}{2} R \left(a - \frac{1}{2} \text{ cuerda } 2a\right) \qquad [46].$$

Como $\frac{1}{2}$ cuerda $2a$ es el seno del arco AB, resulta tambien

$$S = \frac{1}{2} R (a - \text{sen.}\, a) \qquad [47]$$

1096. Si de la fórmula [41] se resta la [13] aplicada á este caso, se obtendrá tambien

$$S = R^2 \left(\frac{\pi\alpha}{360} - \frac{\text{sen.}\, \alpha}{2.10^{10}} \right) \qquad [48]$$

Si $\alpha = 180°$, se tendrá sen $\alpha = 0$, de donde

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2.$$

Si $\alpha = 360°$, será sen $\alpha = 0$, lo que nos dá

$$S = \pi R^2$$

En efecto, en el primero de estos casos el segmento es igual al semicírculo, y en el segundo al círculo entero.

El área del segmento BCO (fig. 767; lám. 58) menor que el semicírculo, se hallará restando del área del sector correspondiente ABOC, la del triángulo ABC; y la del segmento BDC mayor que el semicírculo, añadiendo al área del sector BDCA la del triángulo ABC.

1096. **Elipse.**—*El área de la elipse es igual al producto de sus dos ejes multiplicado por la relacion π de la circunferencia al diámetro, dividido todo por 4.*

Sea E el eje mayor, y e el menor, la fórmula será

$$\textit{Area de la elipse} = \frac{E \times e \times \pi}{4} \qquad [49];$$

Ejemplo.—Sea la elipse ABCD (fig. 769; lám. 58); su eje mayor AC= 120m y el eje menor BD=80m, tendremos

$$\textit{Area}\ ABCD = \frac{120^m \times 80^m \times 3,14}{4} = \frac{30144}{4} = 75,^a36.$$

1097. **Polígonos irregulares**.—Para determinar la superficie de esta clase de polígonos, es necesario concebirlos descompuestos en otras figuras más sencillas; y como estas descomposiciones son de varias clases, nosotros recorreremos las más principales en los distintos casos que tenemos que considerar. Las figuras que así resultan, á las cuales llamaremos *componentes*, se determinan unas veces por sí mismas y otras se deducen por diferencia entre otras figuras que es más fácil conocer.

Las descomposiciones expresadas resultan asimismo algunas veces de las líneas establecidas en el terreno para el levantamiento del plano, y otras hay que hacer la descomposicion en este último.

Sumando despues las superficies de las figuras en que se hallan descompuestas ó restando de la suma de un cierto número de ellas la suma de las demás, segun los casos, se obtendrá la superficie total del polígono.

Para la claridad é inteligencia en el modo de hallar la superficie de las figuras componentes, adoptaremos la siguiente clasificacion. Llamaremos *métodos numéricos* á aquellos en que todos los datos que han de entrar en el cálculo han sido tomados en el campo con el auxilio de los instrumentos de medicion de líneas y de ángulos, ó deducidos de otros tomados igualmente en el terreno; y entenderemos por *métodos gráficos* aquellos en que se determinan por medio de las escalas de boj ó de marfil y los trasportadores, los valores de las líneas y de los ángulos trazados en el papel para servir de datos, y los cuales no se conocen de antemano.

Cuando el establecimiento de las líneas del canevás para el levantamiento del plano del polígono presenta á éste descompuesto en figuras adecuadas al cálculo de su superficie con todos los datos necesarios, ó se puede concebir descompuesto sin necesidad de tomar nuevos datos, sino deduciéndolos de los que ya se conocen, deben seguirse siempre los métodos numéricos, y sólo en el caso contrario se hará uso de los métodos gráficos; por cuya razon se debe tener tambien presente esta circunstancia además de las expuestas en otras ocasiones para la formacion del canevás.

Debemos advertir, sin embargo, que con el objeto de abreviar, y cuando la mayor ó menor exactitud que se desée lo permita, pueden combinarse ambos métodos en un mismo polígono, y áun hacerse uso por completo de los gráficos, cualquiera que haya sido el método seguido en el levantamiento del plano.

Una vez determinados los datos numérica ó gráficamente, se hará aplicacion de las fórmulas correspondientes para obtener la superficie de cada una de las figuras parciales, y por consiguiente la total del polígono en cuestion.

La primera operacion debe ser por lo tanto, la exacta construccion del plano del polígono, cuya superficie se trata de determinar; si bien cuando sólo ésta es necesaria y se emplean los métodos numéricos, puede obtenerse el resultado sirviendo únicamente de guia el croquis ó el registro. Cuando se siguen los métodos gráficos, es indispensable que preceda siempre la construccion del plano en el papel, y para lograr toda la exactitud posible, debe hacerse esta construccion en mayor escala que la adoptada para el plano. En todos los casos, los cálculos de las superficies son operaciones puramente de gabinete.

Nosotros supondremos siempre en cuanto vamos á exponer que ha precedido la construccion del polígono en el papel. Del mismo modo, siempre que hablemos de procedimientos gráficos, se ha de entender que no tenemos otro dato que el contorno del polígono construido en el papel, y la escala que ha servido para la construccion. Por otra parte, áun cuando se conozcan los datos que se hayan tomado en el terreno para el levantamiento del plano, se puede prescindir de ellos siempre que se quiera hacer uso de los métodos gráficos, para evitar la mayor complicacion que pueda resultar de los numéricos, si los resultados no se desean con toda la exactitud que puede proporcionar el cálculo. Para fijar las ideas y evitar confusion, puede tenerse tambien presente lo que hemos dicho (1059)

Prévias estas indicaciones, recorreremos para hallar las superficies los diversos métodos empleados en el levantamiento de los planos con los distintos instrumentos de que se haya hecho uso en cada uno de ellos, para hallar asimismo las superficies de todas las clases de polígonos, ya rectilíneos, ya curvilíneos ó mistilíneos, y por consiguiente las que les corresponden en la clasificacion adoptada para los terrenos de corta, mediana y grande extension.

1098. **Terrenos de corta extension.—Con la escuadra.—Por alineaciones perpendiculares y oblícuas de 45° y de 135°.—Contornos rectilíneos.—Polígonos compuestos de un corto número de rectas.** —*Por descomposicion en triángulos y trapecios.—Método numérico.*—Sea el polígono rectilíneo ABCDEFG (fig. 587; lám. 39), que por las operaciones practicadas en el terreno resulta descompuesto en triángulos y trapecios en los cuales se conocen las respectivas bases y alturas, medidas unas directamente en el terreno, y pudiéndose deducir de estas las demás, como por ejemplo la altura HJ del trapecio BHJC, que es igual á AJ—AH=62—19,5=42,5.

1099. *Método gráfico.*—Despues de construido con exactitud el plano del polígono ABCDEFG en la escala mayor que sea cómodamente posible, y en la hipótesis admitida de no conocer más que ésta, como puede suceder cuando se tiene un plano construido de antemano, se procederá á descomponer el polígono en triángulos y trapecios. Despues de trazados el eje AE y las ordenadas BH, GY.... valiéndonos de las reglas y escuadras de madera con todo el esmero posible, colocaremos el canto de la escala de boj ó de marfil que haya servido para la construccion del plano en coincidencia con el eje AE, anotando los valores que se ven en la figura, y se pasará despues á determinar la longitud de cada ordenada, anotándola igualmente: pudiéndose además en estas operaciones hacer uso del compás y de la escala trazada en el papel.

Nos dispensaremos en lo sucesivo de explicar en cada caso en que se siga un procedimiento numérico el análogo gráfico, pues basta el ejemplo anterior para comprender en todos los demás la manera de verificarlo, supuesto que todo se reduce á tomar medidas con la escala.

1100. *Cálculo de las áreas.*—Una vez obtenidos todos los datos necesarios para el cálculo, por cualquiera de los dos métodos que acabamos de exponer, se hallarán las superficies de los triángulos por la fórmula [1], y la de los trapecios por la [24]. Se sumarán despues todas las áreas obtenidas, y resultará la total del polígono.

Para la claridad y buen órden de las operaciones conviene disponer un estado como el **Modelo núm. 1** que insertamos en la página siguiente, y al cual debe acompañar el plano del polígono.

En la primera columna se inscriben los números de órden que se ven en las figuras componentes encerrados dentro de un paréntesis, para hallarlas con facilidad; en la segunda se expresa la clase á que pertenece cada una; en la tercera se consignan los números que entran en el cálculo y la indicacion de las operaciones; en la cuarta las operaciones efectuadas que dan el área de cada una de las figuras componentes, y en la quinta la suma de todas las áreas parciales ó la total del polígono.

Al aplicar este procedimiento á la fig. 595 (lám. 39), se tendrá presente que es $YR = LS$ y $RN = SM$ para obtener el valor de la altura HP del trapecio BHPC. En la fig. 594 (lám. 39) las ordenadas CC′ y EE′, que no se midieron al levantar el plano, se deducirán de este modo:

$$CC' = DP - DN \text{ y } EE' = DP - DM.$$

Observaremos que en el cálculo de las superficies y en la determinacion de los elementos que entran en él, se prescinde de los signos empleados para la construccion del plano, atendiendo tan solo á los valores absolutos.

1101. *Por descomposicion en triángulos.*—Cuando el procedimiento que se ha seguido en el levantamiento del plano presenta al polígono descompuesto en triángulos por diagonales á partir de un mismo vértice A, como en la fig. 596 (lám. 39) en que se ha obtenido el polígono estableciendo varios ejes, se sigue en todo una marcha análoga á la acabada de explicar.

MODELO NÚM. 1.

Estado de la superficie del polígono ABCDEFG.

Número de órden. 1.	Clase de las figuras. 2.	Indicacion de los cálculos. 3.	Resultados parciales. 4.	Resultado total. 5.
1	Triáng. ABH	$\frac{19,5 \times 27,6}{2}$	269,10 m²	
2	Trap. BHJC	$\frac{27,6 + 38}{2} \times 42,5$......	1394,00 »	
3	Trap CJMD	$\frac{38 + 23,4}{2} \times 33,3$......	1022,31 »	
4	Triáng. DME	$\frac{23,4 \times 11,7}{2}$	136,89 »	
5	Triáng. AYG	$\frac{41 \times 31,7}{2}$	649,85 »	
6	Trap. YGFL	$\frac{31,7 + 24}{2} \times 44,4$......	1236,54 »	
7	Triáng. LFE	$\frac{24 \times 21,6}{2}$	259,20 »	4967,89 m²

1102. *Por descomposicion en triángulos, trapecios y cuadriláteros.*—Si la marcha de las operaciones ha dado lugar al establecimiento de un polígono ABCDEF, como el de la fig. 597 (lám. 40), en que los varios ejes que parten desde un vértice A cortan á los lados del polígono, se vé claramente que para hallar su superficie compuesta de triángulos y trapecios y del cuadrilátero TLOD, no habrá más que sumar las áreas de los triángulos AMF, ENT, ATL, AOP, AGB, HCS y los trapecios FMNE, TLRD y BGHC, y restar de la suma las de los triángulos ODR y OSP. En este caso es necesario modificar el estado de la superficie, como se vé á continuacion en el **Modelo núm. 2**, en el cual, en vez de las indicaciones numéricas, pondremos, para mayor generalidad, las letras de las líneas que representan las bases y alturas de las figuras componentes, y señalaremos éstas tambien con las letras de sus vértices.

Este estado difiere solamente del anterior en que en vez de la columna de resultados parciales, se han establecido dos: una de *resultados aditivos* para colocar las superficies de las figuras que han de sumarse, y otra de *resultados sustractivos*, para las que han de restarse; la diferencia se colocará en la columna de *resultado total*.

Para distinguir á qué figuras corresponden los números de órden cuando una es parte de otra, como el triángulo ODR, que lo es del trapecio TLRD, se dejará sin encerrar dentro de paréntesis el número de órden de la figura parcial, como hemos hecho con los triángulos 6 y 8.

La misma descomposicion presentan las figuras 588, 589 y 590 (lámina 39), y se procede en todo de la misma manera; así como en la fig. 593 (lám. 39), que está compuesta solamente del trapecio ABGD y los triángulos DFG y BCF, y cuya superficie es igual á ABGD + DGF + BEC — ECF.

MODELO NÚM. 2.

Estado de la superficie del polígono ABCDEF.

Número de órden. 1.	Clase de las figuras. 2.	Indicacion de las operaciones. 3.	Resultados aditivos. 4.	Resultados sustractivos. 5.	Resultado total. 6.
1	Triáng. AMF	$\frac{1}{2}$ AM $\times$ MF	AMF	»	
2	Trap. FMNE	$\frac{1}{2}$ (FM + EN) $\times$ MN	FMNE	»	
3	Triáng. ENT	$\frac{1}{2}$ EN $\times$ NT	ENT	»	
4	Triáng. ALT	$\frac{1}{2}$ AL $\times$ TL	ALT	»	
5	Trap. TLRD	$\frac{1}{2}$ (TL + DR) $\times$ LR	TLRD	»	
6	Triáng. ODR	$\frac{1}{2}$ OR $\times$ DR	»	ODR	
7	Triáng. AOP	$\frac{1}{2}$ AP $\times$ PO	AOP	»	
8	Triáng. OSP	$\frac{1}{2}$ SP $\times$ OP	»	OSP	
9	Triáng. ABG	$\frac{1}{2}$ AG $\times$ BG	ABG	»	
10	Trap. BGHC	$\frac{1}{2}$ (BG + HC) $\times$ GH	BGHC	»	
11	Triáng. CHS	$\frac{1}{2}$ HS $\times$ HC	CHS	»	

1103. *Por descomposicion en triángulos, cuadriláteros y pentágonos.*— Cuando el procedimiento seguido en el levantamiento del plano da lugar á la construccion de un polígono como el de la fig. 592 (lám. 39), en que se conocen las abscisas y ordenadas referidas á un eje MN establecido fuera del polígono, y en que las ordenadas dividen á éste en partes como el triángulo ABG, el pentágono BCHFG y el cuadrilátero CDEH, que no se pueden determinar directamente, es fácil concebir que habrán de hallarse las áreas de los tres trapecios AMB'B, BB'C'C y CC'ND, y restar de su suma la de las que corresponden á los otros tres trapecios AMF'F, FF'E'E y EE'ND. Respecto á la fig 591 (lám 39), que resulta con la misma descomposicion, se procede de un modo análogo.

1104. **Polígonos de un gran número de lados.**—*Por inscripcion y circunscripcion de rectángulos ó de otros polígonos cualesquiera.*—Cuando la série de líneas que constituyen el canevás presenta un polígono principal inscrito en el polígono dado, como en la fig. 598 (lám. 40), se empezará por determinar la superficie de dicho polígono principal, formando su estado por el modelo núm. 1. Se procederá despues á calcular la de cada uno de los triángulos y trapecios que forman las ordenadas bajadas sobre los lados del referido polígono principal desde los vértices del polígono dado, á las que llamaremos *figuras secundarias* y las cuales son *deficientes* en el caso que consideramos, formando tambien un estado de todas con arreglo al mismo modelo. Los números de órden de las figuras secundarias se encierran tambien dentro de paréntesis como hacemos con los de las figuras del polígono principal, y para no confundir unos con otros, se escriben con tinta de diferente color, siendo distintas además las numeraciones.

Despues de formados ambos estados, se hace un *resúmen* de los valores que de ellos resultan, y cuya suma será la expresion del área total que se trataba de hallar.

Cuando el polígono principal resulta circunscrito, como sucede en la figura 607 (lám. 41), se hallará el área del rectángulo A'B'EF' ó del polígono ABCDEFGHY por los procedimientos anteriormente explicados, y al formar el resúmen, se habrá de restar de la superficie del polígono principal la suma de las figuras secundarias, que en este otro caso son *excedentes*.

En dicha figura se tienen los datos para hallar la superficie del rectángulo A'B'EF', de la cual deberán restarse todos los rectángulos, triángulos y trapecios en que aparece descompuesta la parte en que excede al polígono que representa el del terreno; y es fácil concebir que esto mismo se haría para hallar la superficie del polígono encerrado en el principal ABCDEF de la fig. 608 (lám. 41), concibiendo prolongados los tres lados AB, FE y CD para la formacion del rectángulo. Es tan frecuente este método de calcular las superficies, que se hace tambien extensivo á los polígonos compuestos de un corto número de rectas como el de la expresada figura 608 (lám. 41) y el de la 603 (lám. 40).

Cuando el polígono principal resulta parte inscrito y parte circunscrito al polígono del terreno, como en la fig. 599 (lám. 40), deberá formarse igualmente, además del estado correspondiente al polígono principal, el de las figuras secundarias, que habrá de arreglarse al modelo número 2, para añadir á la superficie de aquel el resultado final de estas, si la suma de la columna 4.ª de resultados aditivos excede á la de resultados sustractivos de la 5.ª columna, ó restarle en el caso contrario.

Despues de cuanto hemos expuesto, ninguna dificultad podrá presentar la determinacion tanto numérica como gráfica de cualquier polígono, como por ejemplo el de la fig. 611 (lám. 41).

1105. **Figuras secundarias.**—No siempre se presenta fácilmente á primera vista el cálculo de las figuras secundarias, cuando se hace uso del método numérico. Las de la fig. 598 (lám. 40), que todas son triángulos y trapecios cuyos datos son conocidos, no ofrece inconveniente alguno.

En la fig. 599 (lám. 40), para hallar la superficie del triángulo 6E7 en que se conocen los lados 6E y 7E, será preciso resolver los dos triángulos rectángulos FF'E y DD'E para obtener los ángulos FEF' y DED' cuya suma nos dará el ángulo FED, y entonces por la fórmula [12] se hallará la superficie del triángulo 6E7.

Para hallar la que corresponde á cada uno de los triángulos $3cr$ y $4br$ cuando no se ha fijado el punto r midiendo la cr ó la br, se podrá hacer uso del procedimiento siguiente. Se concebirá trazada la $3e$ paralela á cb, y prolongada hasta su encuentro con la prolongacion de la $4b$ en el punto e; y los triángulos semejantes $4rb$ y $4e3$ darán la proporcion

$$4e = 4b + 3c : 4b :: 3e = bc : br;$$

de donde se deduce el valor de br y se tiene $cr = bc - br$: con estos datos se podrán hallar las superficies de los dos triángulos $4br$ y $3cr$ por la fórmula [2].

Para hallar la del cuadrilátero $5a$D6, es necesario tener la precaucion de fijar, cuando se levanta el plano, el punto de interseccion d de la ordenada DD' con el lado 5...6, midiendo las Dd y d6, con lo cual se hallará por la fórmula [17] la superficie del triángulo Dd6, en el que se conocen sus tres lados. Tambien se podrá obtener (1073) el ángulo Dd6, el cual, restado de 180°, nos dará el ángulo Dd5; y concibiendo la recta D5, cuyo valor se obtendrá por la resolucion del triángulo a5D, se conocerán en el triángulo Dd5 dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos; por lo que se podrá determinar su superficie de la manera explicada para este caso. Hallando, por último, la superficie del triángulo aD5 por la fórmula [2], y sumando las que corresponden á los tres triángulos en que se halla dividido el cuadrilátero $5a$D6, resultará la superficie de éste.

La del cuadrilátero 20Ya21 (fig. 607; lám. 41) se hallará concibiendo la recta 21Y y resolviendo el triángulo rectángulo 21Ya para obtener la hipotenusa 21Y y el ángulo 21Y*a*, el cual, restado del HYA que vale 135°, nos dará el ángulo 20Y21; y entonces la superficie del triángulo 21Y*a* se hallará por la fórmula [2], y la del 20Y21 por la [12].

La superficie del cuadrilátero B*b*′*bb*″ (fig. 720; lám. 54) se halla sumando las áreas de los dos triángulos rectángulos B*bb*′ y B*bb*″.

En la fig. 608 (lám. 41) todas las figuras secundarias son pentágonos, á excepcion de dos, que son trapecios. Para hallar la superficie de cada pentágono se procederá, como vamos á explicar, respecto del 2*a*C*b*3. Se concebirán las rectas C2 y C3, se calcularán los triángulos rectángulos 2*a*C y 3C*b*, para obtener los valores de las C2 y C3, así como los ángulos *a*C2 y *b*C3, los cuales restados del BCD, que en este caso se supone de 135°, darán el ángulo 2C3; y en los triángulos *a*2C, 2C3 y 3C*b*, en que se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se podrán hallar las superficies por la fórmula [12], las cuales sumadas nos darán la del pentágono 2*a*C*b*3. Del mismo modo se procederá en el pentágono 2*c*B*b*3 de la fig. 607; (lám. 41), en que el ángulo en B es recto; así como en aquellos de que forman parte los ángulos rectos D y E en la fig. 608 (lám. 41).

1106. Si en los diversos casos que pueden ocurrir no se ha tenido la precaucion de fijar los puntos en que cortan los lados de los polígonos principales á los del terreno, los procedimientos serán algunas veces más complicados, y otras será imposible la aplicacion de los procedimientos expuestos á la determinacion de la superficie.

Debemos advertir que el trabajo que exigen estos métodos retrae al geómetra de ponerlos en ejecucion, dando la preferencia á los métodos gráficos, los cuales, cuando se ejecutan con bastante cuidado trazando de antemano las figuras secundarias en escala décupla ó céntupla de la que ha servido para la construccion del plano, presentan los resultados con aquella aproximacion que puede apetecerse. Por ejemplo; si en la construccion del plano se ha hecho uso de la escala de $\frac{1}{2000}$, se trazarán aparte las figuras secundarias en las de $\frac{1}{200}$ ó $\frac{1}{20}$, y se cuidará de que entren en el cálculo los datos que se tengan del terreno, determinando tan solo gráficamente los restantes, pues con esta combinacion se evita el trabajo de deducir unos de otros. Así, en el pentágono 2*a*C*b*3 de la fig. 608 (lám. 41) se podrán calcular los dos triángulos 2*a*C y 3C*b* por los datos del terreno, que dan conocidas sus bases y alturas, y solo habrá que hallar gráficamente la base y altura del triángulo intermedio 2C3.

1107. **Contornos curvilíneos.**—Del mismo modo que en las figuras 598, 603 y 599 (lám. 40), se procedería para hallar las superficies de las 600, 604 y 601 (lám. 40), empleando para los estados correspondientes los mismos modelos que en aquellas, con sólo la diferencia de que los espacios comprendidos entre cada directriz y la curva correspondiente, ya deficientes con relacion al terreno, como el correspondiente al lado

AY de la fig. 600 (lám. 40), ó ya excedentes como el que corresponde á GF en la 601 (lám 40), y que distinguiremos con el nombre de *segmentos mistilíneos*, sólo pueden valuarse aproximadamente de la manera que vamos á exponer, y que se conoce en la práctica con el nombre de *cuadratura aproximada de las curvas*.

Sea EL (fig. 721; lám. 54) una parte de una línea curva cualquiera, AB una recta arbitraria, EM y LT las perpendiculares bajadas desde los extremos E y L de la curva sobre la recta AB, y propongámonos hallar aproximadamente la superficie del espacio EMTL comprendido por estas cuatro lineas, al que llamaremos *trapecio mistilíneo*. Se dividirá la curva EL en partes EF, FG, GH ... que puedan ser consideradas como arcos confundidos sensiblemente con sus cuerdas. Desde los puntos de division F, G, H... se bajarán perpendiculares á la MT, y el espacio EMTL quedará dividido en trapecios EMNF, FNPG ... cuyas bases serán las perpendiculares EM, FN ... y las alturas las partes MN, NP ... de la MT.

Si esta operacion se ha hecho en el terreno determinando y midiendo las bases y las alturas de los trapecios rectilíneos, se obtendrá la superficie aproximada del trapecio mistilíneo por el método numérico, y por el gráfico si la operacion se ha practicado en el papel con arreglo á una escala dada. En ambos casos el área de cada trapecio se hallará por la fórmula [24], y la suma de las áreas de todos los trapecios representará la superficie aproximada del espacio EMTL.

1108. Se puede dar una idea de la aproximacion que se obtiene empleando este método, considerando el caso particular en que el arco CD (fig. 722; lám. 54) se ha dividido de manera que las proyecciones AE, EF.... de los arcos parciales CM, MN.... resultan todas iguales, y supongamos para fijar las ideas que las perpendiculares bajadas desde los puntos de division del arco CD sobre el eje AB van aumentando ó disminuyendo constantemente como se vé en la figura. Se trazarán por los puntos de division C, M, N... las C*b*, *ad*, *cf*... paralelas á la AB que terminen en las perpendiculares, y se tendrá de esta manera una série de rectángulos, unos inscritos como los AE*b*C, EF*d*M.... y otros circunscritos como los AEM*a*, EFN*c*... cuyas alturas serán iguales á una de las partes AE en que se halla dividida la AB, y es evidente que la superficie del trapecio mistilíneo ABDC, así como la suma de los trapecios rectilíneos en que se supone descompuesto cuando se sustituyen las cuerdas por los arcos, será mayor que la suma de los rectángulos interiores y menor que la de los exteriores; y siendo la diferencia de estas sumas de rectángulos igual al último rectángulo exterior LBD*r* menos el primer rectángulo interior CAE*b*, el error cometido cuando se toma por área del trapecio mistilíneo ABDC la suma de los trapecios rectilíneos, será menor que

$$LBDr - CAEb = AE\,(BD - AC);$$

de modo que se podrá hacer este error tan pequeño como se quiera, haciendo la equidistancia AE suficientemente pequeña.

Lo mismo se verifica cuando las perpendiculares bajadas desde los puntos de division de la curva no varían constantemente en el mismo sentido, pues se puede entonces descomponer el espacio dado en otros parciales que satisfagan cada uno de ellos á esta condicion como se vé en la figura 606 (lám. 40).

Tanto para tener una idea del grado de aproximacion de la superficie, como por ser más sencillo el cálculo de esta, como veremos á continuacion, es por lo que hemos dicho (883 y 885) que se levanten las perpendiculares á distancias iguales siempre que sea posible; pues de este modo se podrá además hacer uso del método numérico en la determinacion de la superficie del trapecio mistilíneo.

Cuando no se puede operar de este modo en el terreno y no se tiene inconveniente en prescindir del método numérico, se puede emplear el procedimiento expuesto (1104) despues de construido el polígono en el papel, y entonces la superficie del trapecio mistilíneo se determinará por los procedimientos gráficos.

1109. Pasemos á determinar la superficie del trapecio mistilíneo ABDC (fig. 723; lám. 54): hallándose la AB dividida en partes iguales, bien se hayan adquirido los datos en el terreno ó hecho la division en el papel, se tendrá

$$\text{Trap. AEMC} = \text{AE} \times \frac{\text{AC} + \text{EM}}{2};$$

$$\text{Trap. EFNM} = \text{AE} \times \frac{\text{EM} + \text{FN}}{2};$$

$$\text{Trap. FGON} = \text{AE} \times \frac{\text{FN} + \text{GO}}{2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

De donde sumando resulta

$$\text{Trap. mist. ABDC} = \text{AE}\left(\frac{\text{AC}+\text{BD}}{2} + \text{EM}+\text{FN}+\text{GO}+\text{PH}+\text{JQ}\right) [\text{A}];$$

lo que nos da la siguiente regla práctica:

Para hallar la superficie de un trapecio mistilíneo, ó lo que es lo mismo, de un espacio comprendido entre una curva, una recta y las perpendiculares bajadas sobre esta desde los extremos de la primera, se dividirá dicha recta, que se toma por base de la operacion, en partes iguales y en número tanto mayor cuanta más aproximacion se desee; se levantarán en los diferentes puntos de division perpendiculares á dicha recta, se añadirá á la semisuma de las perpendiculares extremas la suma de las perpendiculares intermedias, y se multiplicará el resultado por la distancia que haya entre dos puntos de division consecutivos, altura comun de los trapecios.

Esta misma regla se seguirá para hallar la superficie, tanto en el caso de no existir una de las perpendiculares extremas, en el que se encuentra el espacio 20L'21 en la figura 612 (lám. 41), al que llamaremos *triángulo mistilíneo*, como en el de no existir ninguna de las perpendiculares extremas como en la porcion AmB de la fig. 600 (lám. 40), que es un segmento mistilíneo; pues se reduce la cuestion á igualar á *cero* en la fórmula [A] la ordenada extrema que falte de las dos ó ambas, siendo estos todos los casos que se pueden presentar al calcular las figuras secundarias que resultan cuando se levanta el plano por los procedimientos empleados en las figuras 600, 601, 604 y 605 (lám. 40).

De estas figuras la 605 (lám. 40) presenta otro ejemplo de descomposicion, en el que entran rectángulos que son los cuatro formados en los vértices del MNPQ.

1110. Tambien puede dividirse el espacio ABCD (fig. 723; lám. 54) en fajas ó zonas de una altura constante AE = EF = ... por ejemplo, de 10,^{m} y concibiendo las perpendiculares aa', bb', cc'... en los puntos medios de AE, EF... se calcularán estas zonas por la fórmula [25]; y su suma será la superficie que se busca; de modo que se tendrá:

$$\begin{aligned} \text{zona núm. } 1 &= 10 \times aa'; \\ \text{zona núm. } 2 &= 10 \times bb'; \\ \text{zona núm. } 3 &= 10 \times cc', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

de donde

$$\text{Trap. mist. ABDC} = 10\,(aa' + bb' + cc' + \ldots) \qquad [B].$$

Esta fórmula, así como la [A], es aplicable á todos los casos.

Las mismas fórmulas [A] y [B] pueden aplicarse la determinacion gráfica de la superficie comprendida por un contorno curvilíneo cualquiera cuando no se tiene más dato que la escala del plano.

Para esto, se trazará una recta AB (fig. 724; lám. 54) que atraviese el polígono, la cual se dividirá en partes iguales y se levantarán perpendiculares CD, EF... por los puntos de division. Se verá en la escala la longitud de una de las partes iguales de la AB y las de las perpendiculares CD, EF... y se hará aplicacion de la fórmula [A].

Si se levantan las perpendiculares ab, cd... en los puntos medios de las partes iguales de la AB, las cuales se aprecian en la escala, se podrá hacer uso de la fórmula [B].

En la fig. 602 (lám. 40), las rectas AB, BC, DE y EF hacen de bases de las cuatro porciones en que se halla dividido el espacio encerrado por la curva; y como la magnitud de las partes iguales en que se divide cada base no será en general igual á la de las demás, habrá que aplicar la fórmula [A] para cada una de las porciones tanto en el método numérico como en el gráfico. Sin embargo, cuando se hace uso de este último podrá abreviarse la operacion aplicando una sola vez la fórmula [A] en el caso particular de tener las líneas AB, BC, DE y EF una medida comun con tal que no sea muy pequeña; pues se podría calcular directamente la superficie en cuestion, colocando esta medida comun sobre dichas cuatro líneas y levantando perpendiculares á ellas por los puntos de division.

1111. En la misma fig. 602 (lám 40) se hubiera podido emplear el método de las 604 y 605 (lám 40) tanto para levantar el plano y hallar la superficie por el método numérico, como para hallar esta solamente por el método gráfico, circunscribiendo el rectángulo con la condicion de que dos lados opuestos por lo ménos fuesen tangentes á la curva; dividiendo los otros dos lados opuestos en partes iguales, y uniendo con rectas los puntos de division correspondientes, resultarán paralelas á los dos lados tangentes. Se medirán las partes de estas paralelas comprendidas entre los puntos de partida de las curvas correspondientes.

1112 Hay tambien otro método para la cuadratura aproximada de las curvas que da mayor aproximacion que el precedente, y que se debe á Ihomas Simpson. Este método que se demuestra en geometría analítica, consiste en dividir la curva CD (fig. 723; lám 54) en un número par de partes cuyas proyecciones AE, EF, FG.... sobre la recta AB sean iguales, y el área aproximada es igual al tercio del producto que resulta multiplicando la distancia constante AE por la suma de las ordenadas extremas CA, DB aumentada en el duplo de la suma de las demás ordenadas de lugar impar NF, PH, y en el cuádruplo de la suma de las ordenadas de lugar par ME, OG y QJ.

1113. Nos falta examinar los casos en que sin prescindir del método por alineaciones perpendiculares y oblícuas de 45° y de 135° que es el exclusivo de la escuadra, hemos llamado por interseccion, por rodeo y por radiacion en atencion á la manera de operar en el terreno.

Por interseccion.—*Método gráfico*.—Los planos de los polígonos de las figuras 609 y 610 (lám. 41) se han levantado por interseccion, pues como tal puede considerarse cuando se hace uso de dos ó de tres bases consecutivas (892 y 893) no existiendo dicho método si se hace uso de una sola base como hemos dicho (897). Como en el caso de la figura 609 (lám 41) sólo se conocen las abscisas tomadas sobre las dos bases MN y NP, ningun dato se tiene para obtener la superficie por el método numérico, por lo que hay necesidad de apelar al método gráfico, empleando uno de los procedimientos expuestos, por ejemplo, el de la fig. 587 (lámina 39) ó el que se ha seguido en la 596 (lám 39). En la fig. 610 (lám. 41) puede utilizarse el conocimiento de las longitudes de las abscisas para hacer una descomposicion en rectángulos y trapecios análoga á la indicada (1103) para la fig. 592 (lám. 39).

1114. **Por rodeo.**—En el caso de haber levantado el plano del terreno por este método, como manifiesta la fig. 612 (lám. 41), se prolongarán las rectas 21M′ y H′Y′ hasta que encuentren al eje AB en los puntos *a* y *d*, con lo que se tendrán trazados los cuatro rectángulos 22N′*a*M′, 21*ab*L′, J'bdY y H'dO'C, y la superficie de la parte del terreno comprendida entre los lados del ángulo recto AO'C será igual á la suma de las de los cuatro rectángulos más la de las superficies de los triángulos mistilíneos 22AN', 22M'21, 21L'20, 20J'19 y 19Y'18, ménos el 18H'C. Tambien se hubieran podido hallar las de las figuras componentes de la parte expresada del polígono, que en virtud de la construccion hecha son tres rectángulos, cinco triángulos mistilíneos y el trapecio mistilíneo 18dO'C, ó bien el triángulo mistilíneo 22AN' y los cuatro trapecios mistilíneos 22N'a21, 21ab20, 20bd18 y 18dO'C. En todos estos casos se hallará la superficie por el método gráfico en los triángulos y trapecios mistilíneos; pero en los rectángulos se puede hacer uso de los numéricos, pues algunas de sus bases y alturas se conocen por los datos tomados en el terreno, y pueden deducirse las demás por medio de estos mismos datos. Por ejemplo, en el rectángulo 21abL', se conoce la base ab=21L', y la altura 21a, la cual es igual á 21M'+22N', que se conocen tambien

Por el mismo método que se siga en el cálculo de la parte que comprende el ángulo recto AO'C, se calcularán las correspondientes á los otros tres ángulos rectos, y la suma de las cuatro partes nos dará la superficie del terreno en cuestion. Cuando se emplea el primer método, se hace uso del modelo núm. 2, para el estado de la superficie; y del núm. 1 en el segundo, consignando en ellos como se sabe los resultados obtenidos por las fórmulas correspondientes.

En vez de las rectas 21M' y H'Y' se hubieran podido prolongar la 22M' hasta la 20b y la J'Y' hasta la CO' y se hubieran obtenido tambien cuatro rectángulos, verificándose análogamente todo lo explicado.

1115. **Por radiacion.**—El polígono principal ABMPN de la fig. 613 (lám. 41), levantado por este método, resulta descompuesto en triángulos á partir de un punto interior O. Para calcular estos triángulos componentes se podrá hacer uso de los métodos numéricos empleando la fórmula [17], puesto que se conocen los tres lados de cada uno; bien que en aquellos en que un ángulo es recto como los AON, AOB y NOP se puede hacer uso de la fórmula [2]. Tambien puede combinarse el método numérico con el gráfico, puesto que se conocen las bases, cualesquiera que sean los lados que se consideren como tales, y sólo hay que trazar y medir las alturas con la escala. Los segmentos mistilíneos se determinan como ya sabemos por los métodos numéricos ó gráficos.

1116. **Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.**—*Método numérico.*—*Por alineaciones oblícuas.*—Para hallar la superficie del polígono que representa la fig. 615 (lám. 41), parte inscrito y parte circunscrito en el cuadrilátero que forman los triángulos principales ABC y BCD, se verá consultando el párrafo 900, que tanto para estos como para los triángulos secundarios, se tienen todos los datos necesarios para hacer uso de la fórmula [17]. Respecto al cuadrilátero F9.....8.....7 se resolverá el triángulo 6AF para hallar el valor del ángulo AF6, y restándole de 180°, resultará el 9F7; con lo que la superficie del triángulo 9F7 se podrá hallar por la fórmula [12]; concibiendo ahora la recta 7.....9 se tendrá su valor por la resolucion del triángulo 7F9, y con estos datos se podrá hallar la superficie del triángulo 7.....8....9 por la fórmula [17].

Se comprende la manera sencilla de proceder para determinar la superficie por los métodos gráficos.

El estado de la superficie del polígono en cuestion es el del modelo número 2.

En las figuras 616 y 621 (lám. 42), en que se ha levantado el plano por rodeo, puede concebirse en ambos la descomposicion en triángulos desde un punto interior como en la segunda, en los cuales se conocen las bases medidas en el terreno, y las alturas se determinarán con la escala; por lo que las superficies se hallan por la combinacion del método numérico con el gráfico. Respecto á las figuras 619, 620 y 622 (lám. 42), obtenidas las dos primeras por interseccion y la última por doble interseccion, no puede seguirse otro método que el gráfico, pues á excepcion de la base AB en las dos últimas, ningun otro dato suministran las operaciones del terreno.

Despues de todo lo expuesto, se comprenderá fácilmente el modo de proceder numérica ó gráficamente, segun la manera de obtener los datos, en la determinacion de las superficies de las demás figuras, desde la 623 á la 635 (láms. 42, 43 y 44) ambas inclusive.

1117. **Planos parcelarios.**—Cuando se hace uso de los procedimientos numéricos para hallar el contorno de un polígono que comprende una cierta extension de terreno compuesta de varias parcelas, puede tambien emplearse el mismo método para hallar la superficie de estas, y se seguirá por lo tanto la misma marcha, advirtiendo que debe empezarse por hallar la superficie de la masa total, pasando despues á determinar la de cada una de las figuras secundarias ó parcelas, cuya suma es evidente que debe ser igual á la total.

Como muchas veces es preciso modificar los datos del terreno para lograr que el polígono cierre en el papel, deberán tomarse como elementos del cálculo los datos modificados.

La série de operaciones á que dá lugar la determinacion de la superficie total, así como la que exige la de los datos necesarios para hallar las de las parcelas, es causa de que los geómetras, por evitar tanta complicacion, apelen solamente al empleo del método numérico para la determinacion de la superficie total, valiéndose de los métodos gráficos para hallar las de las parcelas. Como en este caso es evidente que la suma de las parcelas no resultará exactamente igual á la superficie total, se repartirá entre aquellas la diferencia, en proporcion á la extension de cada una cuando aquella no excede de $\frac{1}{300}$ de la indicada superficie total.

Se puede tambien empezar por dividir el polígono propuesto en otros varios, cuyas superficies sea fácil averiguar en virtud de las medidas del terreno, determinando despues gráficamente las de las parcelas de cada uno de estos, á fin de practicar con más exactitud la reparticion de las diferencias.

1118. Para hallar gráficamente las superficies de las parcelas, se observará si las figuras de éstas se pueden considerar divididas en rectángulos, trapecios ó paralelógramos, para hacer aplicacion de las fórmulas correspondientes, despues de tomar los datos con la escala. Si son cuadriláteros cualesquiera, como el que representa la fig 725 (lám 54), se dividirá en dos triángulos por medio de una diagonal AC, que se valuará por medio de la escala, así como la AB si no se conociese por las medidas del terreno, y las perpendiculares DE y CF, y se tendrán las bases y alturas de los dos triángulos ABC y ADC, que se podrán calcular por la fórmula [1].

Si se conociesen los valores de las AD y BC, se tomarian como bases de los triángulos. y bastaría prolongarlas y valorar por la escala las perpendiculares Cc y Aa bajadas sobre ellas y que son las alturas. En todo caso insistimos en que deben siempre aprovecharse los datos que se puedan tener por las medidas hechas en el terreno para el levantamiento del plano.

1119. Cuando las parcelas constan de más de cuatro lados, formando polígonos de todas clases, se podrán descomponer en otras figuras, lo más generalmente en triángulos ó en triángulos y trapecios. En este caso se hallan las de las figuras 636, 637 y 638 (lám. 45), á las que se puede aplicar cuanto hemos expuesto anteriormente para los polígonos irregulares.

1120. **Poblaciones.**—La sola inspeccion de las figuras 639 y 640 (lámina 45) en que las manzanas quedan inscritas dentro de otros polígonos, basta para comprender el modo de hallar la superficie, tanto del terreno ocupado por aquellas, como del que componen los alrededores, las calles y las plazuelas, pues no se presentan más que nuevos ejemplos de los procedimientos que con tanta detencion tenemos ya explicados,

1121. **Errores que resultan en las superficies cuando se emplean en el terreno cadenas inexactas.**—Ocurre muchas veces tener que hacer uso en la medicion de las líneas de una cadena cuya longitud es más ó ménos de 10^m, por no tener medio de corregirla comparándola con otra que sea exacta ó no permitirlo el tiempo de que pueda disponerse. En estos casos conviene emplearla cual se halla, tomándola como unidad de medida y hacer los cálculos considerándola como exacta, salvo á rectificar despues el resultado cuando se averigüe el error de la cadena; y á veces es más conveniente operar así que hacer la correccion de aquella antes de la operacion, pues es difícil lograrlo por completo, y embarazoso é inexacto llevar en cuenta el error.

Conviene tener presente para la mejor inteligencia, que siendo invariable la distancia entre los puntos elegidos en el terreno, cuando la cadena sea inexacta por exceso estará contenida ménos veces en dicha distancia y más veces en el caso contrario, resultando menor la superficie en el primer caso y mayor en el segundo que la verdadera.

Para hacer la correccion necesaria sea AB (fig. 726; lám. 54) la distancia entre dos puntos A y B del terreno, y supongamos para mayor claridad que la cadena inexacta por exceso, se halle contenida justamente una vez en dicha distancia, siendo AE el valor exacto de 10^m. Haciendo $AE = L$ y $AB = L'$, si al hacer el cálculo para hallar el valor del cuadrado ABDC construido sobre la distancia invariable AB del terreno, se considera la L' como si fuese igual á $L = 10,^m$ no se habrá hallado más que el valor del cuadrado $AEYH = 1$ área; pero averiguando despues la verdadera longitud de L', si no se sabe de antemano, y llamando S la superficie ABDC que se trata de determinar, tendremos esta proporcion (Geometría. Teor. 100):

$$L^2 : L'^2 :: 1 \text{ área} : S;$$

de donde

$$S = \frac{L'^2 \times 1}{L^2};$$

tomando el *área* (Aritm. Compl 34) por unidad de superficie.

Puesto que $L = 10,^m$ si suponemos $L' = 10,^m02$ y ponemos por estas letras sus valores en la expresion anterior, resultará

$$S = \frac{(10,^m02)^2 \times 1}{10^2} = \frac{100,4004}{100} = 1,^a004004.$$

Como en la proporcion anteriormente expuesta los dos términos de la segunda razon son las superficies que equivalen á los cuadrados respectivos indicados en los dos términos de la primera, la diferencia que llamaremos d de los dos últimos será igual á la de los dos primeros, y tendremos:

$$d = L'^2 - L^2 = (L' + L)\ (L' - L),$$

y en el caso actual resultará:

$$1,^a004004 - 1^a = 0,^a004004;$$

$$\text{y } d = (10,^m02)^2 - 10^2 = (10,02 + 10)\ (10,02 - 10) = 20,^m02 \times 0,^m02 = 0,^{m^2}4004 = 0,^a004004.$$

El cálculo de d se puede obtener por logaritmos.

Tambien se pudiera hallar la diferencia que existe entre el área y el cuadrado que tiene por lado la longitud L' de la cadena inexacta, observando (Geom. Teor. 106) que se halla compuesta de los dos rectángulos r iguales y el cuadrado c, y calculando sus valores; en efecto,

$$d = 2r + c = 2 \times 10^{m} \times 0,^{m}02 + (0,^{m}02)^2 = 0^{m^2},4 + 0,^{m^2}0004 = 0,^{m^2}4004$$
$$= 0,^{a}004004.$$

Ahora bien, si las distancias entre cada dos puntos dados del terreno contuviesen varias veces á la longitud L′ de la cadena inexacta, puesto que á cada área obtenida por el cálculo, suponiendo que la cadena con que se mide es exacta, se ha de añadir la cantidad d, si llamamos s la superficie obtenida y n el número de áreas que contiene, habrá que añadir á s el producto de d por el número abstracto n á fin de obtener la verdadera superficie S; de modo que para un polígono cualquiera la fórmula será

$$S = s + nd \qquad [C],$$

que nos dá la regla práctica siguiente:

Cuando la medida de las líneas del terreno se ejecuta con una cadena inexacta por exceso, se la considerará como exacta para el cálculo de la superficie, y al resultado se añadirá el producto del número obstracto que indique el de áreas obtenido por la diferencia entre el área y la superficie del cuadrado, cuyo lado es la longitud real de la cadena inexacta empleada en la medicion.

Ejemplo.—Supongamos un rectángulo del terreno, cuyos lados contiguos contengan respectivamente 8 y 4 veces á la longitud $10,^{m}02$ de la cadena inexacta por exceso: tendremos

$$S = 32^{a} + 32 \times 0,^{a}004004 = 32,^{a}128128.$$

En el caso de ser $L' < L$, se demostrará de una manera análoga que la fórmula que se obtiene es

$$S = s - nd \qquad [D],$$

que se podrá traducir tambien en regla para el caso de ser la cadena empleada inexacta por defecto.

Ejemplo.—Supongamos otro rectángulo del terreno, cuyos lados contiguos contengan 8 veces y 4 veces la longitud $9,^{m}98$ de una cadena inexacta por defecto, se hallará el valor de d que en este caso es $0,^{a}003996$, y se tendrá

$$S = 32^{a} - 32 \times 0,^{a}003996 = 31,^{a}872128.$$

1122. Se obtiene una fórmula más sencilla que se puede calcular por logaritmos, y comprende ambos casos, observando que el empleo de una cadena de longitud inexacta da un número n de cuadrados iguales al construido sobre esta longitud; de manera que hallando el valor real l de la cadena inexacta, l^2 será el de uno de estos cuadrados, y la expresion de la superficie

$$S = nl^2 \quad [E].$$

Luego *para hallar la superficie, no habrá más que multiplicar el resultado obtenido como si la cadena fuese exacta, por el cuadrado de la longitud real de la cadena inexacta.*

Resolviendo por la fórmula [E] los dos ejemplos anteriores, tendremos:

$$S = 32 \times 1,^{a}004004 = 32,^{a}128128;$$
$$S = 32 \times 1,^{a}996004 = 31,^{a}872128$$

1123. Así como para lograr más exactitud en el levantamiento de los planos y en su construccion se procura medir una sola base, y esta con toda la precision que es posible, como hemos visto en los terrenos de mediana y grande extension, existe además la razon de que de este modo se evitan al emplear los métodos numéricos en la determinacion de las superficies los cálculos que acabamos de ver, por los errores que se pueden originar cuando se emplean las cadenas; pues estas en general nunca tienen la verdadera longitud que les corresponde, y habría que estar contínuamente sometiéndolas á comprobaciones.

1124. **Terrenos de mediana extension.**—No nos ocuparemos en esta clase de terrenos de los métodos gráficos, supuesto que una vez construido el plano y hecha la descomposicion en las figuras más convenientes, se sabe ya la manera de proceder en los distintos casos. Respecto á la plancheta, supuesto que se obtiene con ella solamente la proyeccion del polígono del terreno y hay que valerse de la escala y de los trasportadores para conocer los lados y los ángulos, resulta que siendo puramente gráfico el procedimiento para levantar el plano, gráfico debe ser tambien el que se emplee en la determinacion de la superficie. Nos ocuparemos por lo tanto de hallar esta por los métodos numéricos en los polígonos principales levantados con los goniómetros y la brújula, por interseccion, rodeo, doble interseccion y radiacion, para ocuparnos despues de las figuras secundarias.

1125. **Polígonos principales.—Por interseccion.**—*Con los goniómetros.*—Sea el polígono convexo ABCDEF (fig. 641; lám. 45); toda la cuestion está reducida á suponerle descompuesto en triángulos á partir de un mismo vértice A, cuya descomposicion queda hecha por las mismas visuales dirigidas desde el extremo A de la base á los demás vértices, y observando que los ángulos en el punto A de los triángulos componentes AFE, AED, ADC y ABC, pueden deducirse de los tomados en el terreno por las diferencias entre los que forman los lados de dichos ángulos con la base AB, solo habrá que calcular estos lados en los triángulos AFB, AEB, ADB y ABC en que se conoce la base AB y los ángulos adyacentes.

Por ejemplo, en el triángulo AFE se tiene el ángulo FAE = 120° — 80° = 40°, y los lados AF y AE se obtendrán por la resolucion de los triángulos AFB y AEB. Conocidos así en el triángulo AFE dos lados y el ángulo comprendido, se hallará su superficie por la fórmula [12], y lo mismo se ejecutaria para hallar la de los demás triángulos componentes, siendo la suma de todos ellos la del polígono en cuestion.

1126. Puede hallarse una fórmula que nos dé la superficie del polígono no entrando en ella más lado que la base AB medida en el terreno. En efecto, la superficie del primer triángulo ABC, á partir de la base AB en que se conocen un lado y los dos ángulos adyacentes, se hallará en la fórmula [15] y tendremos:

$$\text{Sup. ABC} = \frac{1}{2}\,\text{AB}^2 \times \frac{\text{sen. CAB sen. ABC}}{\text{sen ABC}};$$

para hallar la del triángulo siguiente ADC, se deducirá el ángulo DAC como ya se ha dicho, y los lados AD y AC por las proporciones

$$\text{AD} : \text{sen. ABD} :: \text{AB} : \text{sen. ADB};$$
$$\text{AC} : \text{sen. ABC} :: \text{AB} : \text{sen. ACB};$$

de donde

$$\text{AD} = \frac{\text{AB sen. ABD}}{\text{sen. ADB}} \quad \text{y} \quad \text{AC} = \frac{\text{AB sen. ABC}}{\text{sen. ACB}};$$

y sustituyendo en la fórmula [12], que en este caso es

$$\text{Sup. ADC} = \frac{1}{2}\,\text{AD} \times \text{AC sen DAC},$$

tendremos

$$\text{Sup. ADC} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{AB sen. ABD}}{\text{sen. ADB}} \times \frac{\text{AB sen. ABC}}{\text{sen. ACB}} \times \text{sen. DAC};$$

de donde

$$\text{Sup. ADC} = \frac{1}{2}\,\text{AB}^2 \times \frac{\text{sen. ABD sen. ABC}}{\text{sen. ADB sen ACB}} \times \text{sen. DAC};$$

lo que nos dice, que *la superficie del triángulo* ADC, *que tiene uno solo de sus vértices en un extremo* A *de la base, se obtiene multiplicando la mitad del cuadrado de la base* AB *por una fraccion cuyo numerador es el producto de los senos de los ángulos que forman con la base en el extremo* B, *que no es vértice del triángulo, las rectas* BD *y* BC *que pasan por los otros dos vértices de dicho triángulo, y cuyo denominador es el producto de los senos de los* *ángulos que forman las mismas rectas* BD, BC *con los lados* AD *y* AC *que comprenden el ángulo* DAC *en el vértice* A, *y por el seno de este mismo ángulo*.

Como la misma regla se reduciría para los otros dos triángulos restantes ADE y AEF, resulta que la superficie del polígono ABCDEF estará representada por

$$\frac{1}{2}\,AB^2\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{sen. CAB sen. CBA}}{\text{sen. ACB}}\\[2mm] +\dfrac{\text{sen. DBA sen. CBA}}{\text{sen ADB sen. ACB}}\times\text{sen. DAC}\\[2mm] +\dfrac{\text{sen. EBA sen. DBA}}{\text{sen. AEB sen. ADB}}\times\text{sen EAD}\\[2mm] +\dfrac{\text{sen. FBA sen. EBA}}{\text{sen. AFB sen. AEB}}\times\text{sen. FAE.}\end{array}\right.$$

Puede servir de comprobacion hacer la descomposicion desde el vértice B, y entonces resultarían los triángulos BAF, BFE, BED y BDC, y la superficie que se obtenga para el polígono, que deberá ser igual á la anterior, estará representada por

$$\frac{1}{2}\,AB^2\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{sen. FAB sen. FBA}}{\text{sen. AFB}}\\[2mm] +\dfrac{\text{sen. FAB sen. EAB}}{\text{sen. AFB sen. AEB}}\times\text{sen FBE}\\[2mm] +\dfrac{\text{sen. EAB sen. DAB}}{\text{sen. AEB sen. ADB}}\times\text{sen. EBD}\\[2mm] +\dfrac{\text{sen. DAB sen. CAB}}{\text{sen. ADB sen. ACB}}\times\text{sen. DBC.}\end{array}\right.$$

Del mismo modo se procedería en las figuras 642 (lám. 45) y 643 (lámina 46), para cada una de las dos partes en que la base AB divide el polígono. Cuando este es cóncavo, unas veces el método que puede seguirse es el que acabamos de explicar, como en la figura 646 (lám. 46), y otras difiere como en la figura 727 (lám. 54), en la cual, si despues de haber hecho la descomposicion desde el punto A, en cuyo caso nada hay que advertir, se hubiera vuelto á descomponer desde el punto B para la comprobacion, entonces habría que restar de la suma de las superficies de los triángulos BAF, BFE y BDC la del triángulo BDE.

1127. *Con la brújula.*—Se empezará por deducir los ángulos de los triángulos AFB, AEB, ADB y ACB (fig. 644; lám. 46) adyacentes á la base comun AB, por las diferencias de los rumbos de esta base y de las rectas que desde sus extremos van á parar á los demás vértices, y quedará reducido este caso al anterior. Se comprende el modo de proceder en la figura 645 (lám. 46).

1128. **Por rodeo.**—*Con los goniómetros.*—Los triángulos AOB, BOC.... (fig. 648; lám. 46) en que queda descompuesto en este caso el polígono á partir de un punto interior O, son las figuras componentes y se conocen sus bases AB, BC .... y los ángulos adyacentes OAB, OBA, OBC, OCB.... por lo que haciendo aplicacion de la fórmula [15] en cada triángulo, la superficie del polígono estará representada por

$$\frac{1}{2}\,AB^2 \times \frac{\text{sen. }OAB\ \text{sen. }OBA}{\text{sen }AOB}$$
$$+\frac{1}{2}\,BC^2 \times \frac{\text{sen. }OBC\ \text{sen. }OCB}{\text{sen }BOC}$$
$$+\frac{1}{2}\,CD^2 \times \frac{\text{sen. }OCD\ \text{sen. }ODC}{\text{sen }COD}$$
$$+\frac{1}{2}\,DE^2 \times \frac{\text{sen. }ODE\ \text{sen. }OED}{\text{sen }DOE}$$
$$+\frac{1}{2}\,EA^2 \times \frac{\text{sen. }OEA\ \text{sen. }OAE}{\text{sen }EOA}.$$

Con la brújula.—Deduciendo los ángulos de las bases de los triángulos componentes, por las diferencias de los rumbos de la base y de las rectas al punto O (fig. 649; lám. 47) que los forman, quedará reducido este caso al anterior.

1129. **Por doble interseccion.**—*Con los goniómetros.*—Se empezará por resolver el triángulo AOB (fig. 648; lám. 46), en el cual se conoce la base AB y los ángulos adyacentes, con el objeto de hallar OB; en el segundo triángulo BOC se conocerá el valor de la OB y los ángulos OBC y OCB y por lo tanto el COB, y lo mismo en los demás triángulos, cuyas superficies se hallarán, así como la del OAB, por la fórmula [15].

Con la brújula.—Se procede del mismo modo en el polígono de la fig. 649 (lám. 47), despues de haber deducido de los rumbos los valores de los ángulos.

1130. **Por radiacion.**—En cada uno de los triángulos en que resulta descompuesto un polígono por este método, sè conocen dos lados y el ángulo comprendido: por consiguiente se puede hacer uso de la fórmula [12] para determinar su superficie, lo mismo cuando en el terreno se haya operado con los goniómetros que con la brújula; pues en este segundo caso se empezará por deducir los ángulos de los rumbos.

1131. **Por los métodos expeditos de rodeo.**—*Con los goniómetros.*—Cuando en el levantamiento de los planos por rodeo se ha hecho uso del método expedito (965), para hallar la superficie del polígono principal, pudiéramos deducir tambien una fórmula en funcion de los ángulos y lados del polígono, que en este caso son los datos, como hemos hecho en los métodos generales; pero los geómetras no suelen hacer uso de estas fórmulas y otras muchas que existen, por la complicacion de los cálculos á que dan lugar y las dificultades que algunas veces ofrece el planteo de la ecuacion, si bien por otra parte son de la mayor elegancia. Expondremos por lo tanto á continuacion los métodos numéricos empleados con frecuencia por los geómetras en los polígonos levantados por los métodos expeditos, los cuales pueden aplicarse igualmente á los polígonos obtenidos por los métodos generales, pues en todos casos se puede contar con los valores de los lados y de los ángulos obtenidos directa ó indirectamente.

Cuadriláteros.—Se descompondrán como el ABCD (fig. 728; lám. 54) en dos triángulos ABD y BDC, en los cuales se conocerán dos lados y el ángulo comprendido y cuyas superficies se podrán hallar por la fórmula [12]; ó bien se bajarán sobre el lado AB las perpendiculares DE y CF, descomponiéndole así en dos triángulos rectángulos y un trapecio, cuyas superficies será fácil calcular.

1132. *Polígonos en general.*—Sea el polígono ABCDEF (fig. 729; lám. 54): se descompondrá en triángulos á partir de un vértice B, y resolviendo el primer triángulo ABF, en el que se conocen los lados AB y AF y el ángulo comprendido A, se hallará el valor de BF y del ángulo AFB; se resolverá el segundo triángulo BFE en el que ya se conocen los lados BF y FE y el ángulo comprendido BFE = AFE — AFB, y así se continuará hasta resolverlos todos; se hallarán despues sus superficies por la fórmula [12], supuesto que en todos se conocen dos lados y el ángulo comprendido.

Se hará la operacion con más brevedad, resolviendo primeramente en el caso actual los dos triángulos ABF y BCD; pues estos nos darán los datos para la determinacion de las superficies de los demás. Habrá además un medio de comprobacion que consistirá en resolver los otros dos triángulos BEF y BDE con el objeto de ver si resulta en ambos el mismo valor para la diagonal BE.

1133. La descomposicion puede hacerse tambien en trapecios y cuadriláteros. En la fig. 730 (lám. 54) las perpendiculares ES y DT bajadas desde los vértices E y D sobre la AB dividen al polígono ABCDEF en el trapecio ESTD y los cuadriláteros EFAS y DCBT: y bajando las FM y CN sobre la AB prolongada, la superficie del polígono será igual á la de los tres trapecios MSEF, ESTD y DTNC, menos las de los triángulos AMF y CBN. Para calcular estas cinco figuras, se trazarán por F y D las FR, DO y DQ perpendiculares á las SE y CN prolongadas, y tendremos otros tres triángulos rectángulos FRE, DQE y DOC. Los cinco triángulos rectángulos que rodean al polígono, podrán resolverse en virtud del conocimiento de los valores de los lados y ángulos de este último, y deducir de ellos los datos necesarios para el cálculo de su superficie. Cada una de las perpendiculares DT y ES se puede obtener de dos modos; y si los resultados no salen exactamente iguales, se tomará un medio aritmético entre ellos. En efecto, tenemos

$$\mathrm{DT} = \mathrm{OC} + \mathrm{CN} \text{ y } \mathrm{DT} = \mathrm{EQ} + \mathrm{FM} - \mathrm{ER};$$
$$\mathrm{ES} = \mathrm{FM} - \mathrm{ER} \text{ y } \mathrm{ES} = \mathrm{OC} + \mathrm{CN} - \mathrm{EQ};$$

Por último, se hubiera podido circunscribir desde luego el rectángulo MNOP, y haciendo las mismas construcciones hubiera resultado además el rectángulo PQRF que tiene por base FR y por altura QR=QE—ER. La suma de este rectángulo con los cinco triángulos mencionados deberá restarse de la superficie del rectángulo total, á fin de obtener así la del polígono propuesto.

Para el cálculo del rectángulo circunscrito tenemos tambien dos valores para la base MN y otros dos para la altura ON, debiendo asimismo tomar los medios aritméticos en el caso de no resultar iguales. En efecto, tenemos

$$\mathrm{MN} = \mathrm{MA} + \mathrm{AB} + \mathrm{BN} \text{ y } \mathrm{MN} = \mathrm{FR} + \mathrm{QD} + \mathrm{DO};$$
$$\mathrm{ON} = \mathrm{OC} + \mathrm{CN} \text{ y } \mathrm{ON} = \mathrm{MF} + \mathrm{QE} - \mathrm{ER}.$$

1134. *Con la brújula.*—Los mismos procedimientos son aplicables á los polígonos levantados con la brújula por el método expedito (966), despues de haber deducido de los rumbos de los lados los valores de los ángulos por la fórmula [1] (974).

1135. **Figuras secundarias.**—*Métodos numéricos.*—Habiendo levantado el plano del polígono principal con los goniómetros, para referir á los lados de este los del polígono del terreno, se hace uso como ya sabemos de la escuadra y de la cadena ó cuerda, ó de estas últimas solamente. Además de los datos que suministran estos medios, los cálculos de las superficies de las figuras secundarias se facilitan por el conocimiento que de los ángulos de los polígonos se tiene en los planos levantados con los goniómetros. Recorreremos los casos que ocurren en la práctica con más frecuencia.

Para hallar la superficie de un cuadrilátero como el $\mathrm{A}b'ba$ (fig. 720; lám. 54) formado por las ordenadas bb' y $\mathrm{A}a$ sobre los lados AB y AE del polígono principal, la abscisa $\mathrm{A}b'$ en el lado AB y el ab del polígono del terreno, se trazará la $\mathrm{A}b$ que le divide en dos triángulos; se resolverá el triángulo rectángulo $\mathrm{A}bb'$ para obtener la $\mathrm{A}b$ y el ángulo $b\mathrm{A}b'$, y en el triángulo $a\mathrm{A}b$ en que se conocen los lados $\mathrm{A}a$ y $\mathrm{A}b$ se tendrá para el ángulo comprendido

$$a\mathrm{A}b = \mathrm{EAB} - (b\mathrm{A}b' + g\mathrm{A}a).$$

Con estos datos se hallarán las superficies de los triángulos $\mathrm{A}bb'$ y $a\mathrm{A}b$

por la fórmula [12], y sumándolas se tendrá la del cuadrilátero A*abb'*. De una manera análoga se hallará la del *bb''*C*c*.

Si un vértice *e* del polígono del terreno queda dentro del polígono principal cortándose los lados de ambos polígonos, resultará un cuadrilátero E*oem*, cuya superficie trataremos de determinar. Para esto, supongamos que se ha fijado el vértice *e* con la cadena ó cuerda prolongando la recta *fe* y midiendo las *ee'* y E*e'*, y que tambien se han fijado los puntos de interseccion *m* y *o* midiendo las *e'm* y E*o*, ó por lo menos uno de estos puntos *m*. Para hallar en el primer caso la superficie de los dos triángulos E*oe'* y *ee'm* en que queda dividido el cuadrilátero E*oem*, se resolverá (30) el triángulo E*oe'* para hallar el ángulo E*e'o*, el cual restado de 180° nos dará el *ee'm*; y entonces por medio de la fórmula [12] se podrán hallar las superficies de los expresados triángulos. En el segundo caso, cuando no se ha fijado el punto *o*, se hará para obtenerle la construccion que se ve en la figura, y que es la empleada para los terrenos de corta extension en la fig. 599 (lám. 40) para fijar en esta la posicion del punto *r*, empezando por resolver el triángulo rectángulo E*ne'* en el que se conocen la hipotenusa E*e'* y el ángulo E, para deducir los catetos E*n* y *ne'*. Hallando entonces el valor de *on* por la resolucion del triángulo rectángulo *e'on*, y sumándole con el de E*n* se tendrá E*o* y se calcularán las superficies de los triángulos E*oe'* y *ee'm* como en el caso anterior.

1136. Si el vértice *e* se ha fijado con la escuadra por medio de la ordenada *er*, y se han fijado además los puntos *m* y *o*, se concebirá prolongada la *fe* hasta *e'* para descomponer el cuadrilátero en los dos triángulos E*oe'* y *ee'm*; y conociéndose la altura *er* del segundo, hallando la *or'* del primero y las bases *e'm* y E*e'* de ambos, se podrán hallar sus superficies por la fórmula [1].

Para la determinacion de estas líneas se resolverá el triángulo rectángulo E*or'* en el que se conocen la hipotenusa E*o* y el ángulo E, y se hallará el valor de la altura *or'*, y además el de E*r'* para establecer la proporcion

$$or' : er :: r'e' = Ee' - Er' : re';$$

restando de *rm* el valor de *re'* que de ella resulta, se tendrá la base *e'm*; y entonces es cuando se puede conocer el valor de la otra base E*e'* observando que se tiene $Ee' = Em - e'm$.

Si no se ha fijado más que el punto *m* y se quiere hacer uso del procedimiento anterior, valiéndose como se ha visto de la fórmula que da las superficies de los triángulos en funcion de las bases y alturas, habrá que empezar por hallar el valor de E*o* por la construccion explicada ya (1135).

1137. Sea ahora el cuadrilátero *mdc*D análogo al anterior, quedando el vértice *d* del polígono del terreno fuera del polígono principal, y supongamos que para fijarle se han medido la *s'd* y las prolongaciones

Ds y Ds' de las directrices ED y DC del polígono principal, así como las partes de estas Dm y Dc para tener el punto de interseccion m y el vértice c. Se concebirá la perpendicular $s't'$, y para obtener su valor se resolverá el triángulo rectángulo $s't'$D en el que se conocen la hipotenusa s'D y el ángulo agudo s'Dt' = 180°— EDC. Se hallará despues en el triángulo $mt's'$ el valor de ms' y concibiendo la perpendicular dt, se tendrá la proporcion

$$ms' : s't' :: md = ms' + s'd : dt;$$

conocida la altura dt y la base $ms = m$D + Ds del triángulo mds se podrá hallar su superficie por la fórmula [1]. Para hallar la del triángulo Dsc, como se conocen los dos lados Ds y Dc y el ángulo comprendido sDc= 180°— EDC, se hará aplicacion de la formula [12].

En el cuadrilátero 20Ya21 de la fig 607 (lám. 41), en el cual se conoce siempre en este caso el ángulo 20Ya, se hallará la superficie como hemos expuesto en otra ocasion (1105). Cuando hay que calcular pentágonos como el 2aCb3 de la fig. 608 (lám. 41) se sigue el procedimiento explicado en esta (1105), pues en el caso actual de hacer uso de los goniómetros se conoce siempre el ángulo BCD.

Por último, nada hemos dicho de los tres triángulos fpo, fpg y Aga (fig. 720; lám. 54), pues en el caso de haberse fijado en el terreno los puntos o, p y g se tienen las bases y alturas, y cuando solo se ha fijado el pié p de la ordenada fp se puede hacer uso para los dos últimos triángulos fpg y Aag de la construccion conocida ya para este caso.

Pueden igualmente hallarse las superficies de las figuras secundarias por los métodos gráficos, y este es el medio que con más frecuencia emplean los geómetras, y el que debe seguirse siempre cuando se ha obtenido con la brújula el plano del polígono principal.

1138. Una vez halladas las superficies de los polígonos principales y de las figuras secundarias, cuando se presenten en los terrenos de mediana extension los varios casos explicados en los de corta extension, es decir, polígonos rectilíneos de un gran número de lados y terrenos curvilíneos ó mistilíneos, se seguirá una marcha análoga á la expuesta entonces, tanto en el órden de las operaciones como en la eleccion de los modelos correspondientes entre los dos explicados para el estado de la superficie que se trate de determinar.

1139. **Terrenos de grande extension**.—Puesto que se tienen los datos tomados en el campo para la resolucion de cada uno de los triángulos que constituyen la red establecida, estos mismos datos podrán servir para hallar sus superficies por el método numérico, haciendo aplicacion de las fórmulas correspondientes, y pudiendo igualmente abreviarse las operaciones cuando se ha procedido á la construccion del plano por el método de las coordenadas referidas á la meridiana y su perpendicular (1041). En la fig. 700 (lám. 53) por ejemplo, se hallaria la superficie del pentágono ZTPKH, determinando la abscisa auxiliar X'b del punto X', y haciendo la suma de las áreas siguientes, cada una de las cuales se determina fácilmente por los valores de las abscisas y ordenadas:

Triáng. ZaT + Trap. TabX' + Trap. X'bdP + Triáng. PKl + Rectáng. $dlhf$ + Triáng. KHh + Triáng. fHZ

1140. **Métodos gráficos expeditos aplicables á toda clase de terrenos.**—Estos métodos, cuyos resultados son aproximados, y para los que no se necesita otro dato que la escala, abrevian las operaciones, y pueden emplearse para la determinacion de las superficies de toda clase de terrenos, cuyo contorno haya sido construido en el papel por cualquiera de los procedimientos de que se haya hecho uso para levantar el plano y cualesquiera que hayan sido los instrumentos que se hayan empleado en esta operacion. Nos ocuparemos de los dos métodos más generalmente seguidos.

1141. *Primer método.—Por compensaciones.*—Consiste en trazar un polígono principal parte inscrito y parte circunscrito al contorno del terreno, procurando que se corten de manera que haya *compensaciones* entre las partes excedentes y deficientes; pues de este modo la superficie del polígono rectilíneo trazado podrá reemplazar á la del propuesto. Así en la fig. 731 (lám. 54), en la que el contorno del terreno es curvilíneo, se traza una primera recta AB de manera que la figura deficiente a' equivalga á la excedente a; despues la BC, de modo que b' equivalga á b, y así sucesivamente. La última línea EA está trazada de modo que la parte deficiente e puede reemplazar á las dos excedentes e' y e''. En este sistema conviene hacer uso de una regla bien construida de cristal ó de talco muy delgada, con el objeto de que la trasparencia permita trazar las rectas de manera que se hagan con precision las compensaciones.

Si los contornos de los terrenos son rectilíneos, pueden establecerse las compensaciones con más exactitud; pues si la recta AB (fig. 732; lám. 54) es un lado de un polígono principal, los triángulos a y c pueden reemplazarse por los b y d que aparecen equivalentes.

Se puede dar un medio sencillo para establecer la *recta de compensacion* que ha de sustituir á una línea ondulada, resolviendo el siguiente problema, que tiene además mucha aplicacion en la práctica.

1142. *Dada la línea ondulada* EHF (fig. 733; lám. 54) *que separa dos propiedades* M, N *comprendidas entre las rectas* AB *y* CD, *reemplazarla por una recta* FG *sin que se alteren las superficies de las dos propiedades.*

En el punto de interseccion E de la línea ondulada con la recta AB, se levantará á esta una perpedicular EF prolongándola hasta su encuentro en F con CD, y se hallarán las superficies de los tres segmentos a, b y c que forma con la línea ondulada. La propiedad AEHFC se hallará aumentada en los segmentos a y c y disminuida en el b: si b fuese igual á

$a+c$ la recta EF resolvería el problema; pero si resulta $a+c>b$ se hallará la diferencia $a+c-b$ y se dividirá por $\frac{\text{EF}}{2}$; tomando á partir de E una parte EG igual al cociente hallado, y trazando la FG, esta resolverá el problema siendo la recta de compensacion que ha de representar el nuevo límite comun á ambas propiedades. En efecto, se tiene

$$\text{triáng. EFG} = \frac{\text{FE}}{2} \times \text{EG} = a+c-b.$$

M. Puissant, en su tratado de Geodesia, observa lo notable que es esta solucion, tanto por su sencillez cuanto porque es independiente del valor de las superficies de las propiedades contiguas.

1143. Este método de compensaciones es tambien aplicable á los planos parcelarios. En efecto, las descomposiciones de que hemos hablado (1119) suelen á veces presentar dificultades por la naturaleza del contorno de las parcelas, cuyos ángulos pueden no estar bien pronunciados, dando lugar si se emplean las descomposiciones enunciadas á que resulten mayores diferencias en los cálculos de las superficies, que las que resultarían si ciertos trozos del contorno se considerasen como líneas rectas. Conviene entonces reemplazar aquellos por estas, haciendo uso del *método de compensaciones*. Cuando las líneas quebradas son comunes á dos ó más parcelas es necesario al reemplazarlas con rectas trazar estas de manera que establezcan la compensacion para unas y otras parcelas.

Puede hacerse aplicacion por consiguiente de estos procedimientos en la determinacion de las superficies de las parcelas que comprenden las figs. 636 y 637 (lám. 45)

1144. *Segundo método.—Por el papel trasparente cuadriculado.*—Puede tambien emplearse el papel trasparente llamado de *calcar* para la determinacion expedita y aproximada de la superficie de un polígono. Para esto, se trazará en dicho papel un cuadrado MNPQ (fig. 734; lám. 54) que pueda comprender en su interior al polígono construido en el papel, y tal que su lado sea un múltiplo de la magnitud que en la escala del plano represente 10^m, trazando por los puntos de division líneas que formen los cuadrados que representan las áreas. Si el múltiplo de Mm es divisible por 5, se podrán trazar las líneas gruesas que se ven en la figura para tener cuadrados que contengan 25 áreas.

Para hallar ahora la superficie del polígono *abcdefghl*, se coloca encima el papel trasparente y se ve el número de cuadrados de 25 áreas que comprende, que en este caso son cuatro; se cuentan despues los cuadrados pequeños que representan áreas y resultan tambien comprendidos, y por último se aprecian las fracciones de área, tomando unos cuadrados y despreciando otros, de manera que exista la debida compensacion. Se repite esta operacion varias veces, colocando el papel trasparente en distintas posiciones y comparando los resultados, pudiéndose tomar un término medio entre ellos. Se concibe que es necesario estar muy acostumbrados á los cálculos de esta especie para poderse prometer cierta aproximacion en el resultado, en términos que no debe tolerarse entre el obtenido por este método y el que den los cálculos rigurosos, sino un error de 2 á 10 áreas en superficies de 1 á 50 hectáreas.

Existen otros métodos gráficos expeditos, que dan los valores de las superficies con toda la aproximacion que pueda desearse, y los cuales están fundados en el uso de los instrumentos conocidos con el nombre de *planímetros*, de los cuales nos ocuparemos especialmente en otro capítulo.

1145. **Reduccion de las áreas al horizonte**.—Antes de concluir debemos recordar lo que hemos dicho (151), por cuyas razones, y habiéndonos servido de los datos numéricos ó gráficos que dan las proyecciones horizontales de los terrenos en la valoracion de las superficies, resulta haber determinado tambien estas en sentido horizontal en todos las procedimientos que hemos empleado. Hay, sin embargo, un caso particular en que es posible calcular la superficie real, que es cuando el terreno, aunque inclinado al horizonte, presenta una superficie plana; y vamos á manifestar, cuando esta se conozca, la manera de hallar su proyeccion horizontal.

Sea el triángulo ABC (fig. 735; lám. 55) inclinado al horizonte, *abc* su proyeccion horizontal, y *p* la pendiente ó el ángulo que forman los planas en que se hallan situados dicho triángulo y su proyeccion, prolongados hasta que se encuentren. Si en la arista A*a* del prisma troncado ABC*abc* se toman las partes iguales AA′ y *aa′*, y por los puntos A′ y *a′* se tiran los planos A′B′C′ y *a′b′c′* respectivamente paralelos á los ABC y *abc*, resultarán las prismas equivalentes ABCA′B′C′ y *abca′b′c′* (Geom. Teorema 211). Llamando S á la superficie del triángulo ABC y tirando desde A′ la perpendicular A′*d* á esta base, el volúmen del prisma ABCA′B′C′ será $S \times A'd$, y como el volúmen del *abca′b′c′* es igual á $abc \times aa'$ tendremos, lamando *s* á la proyeccion horizontal *abc*, que

$$S \times A'd = s \times aa'.$$

En el triángulo rectángulo AA′*d* tenemos (19)

$$A'd = AA' \times \cos. AA'd;$$

y como el ángulo *a*A′*d* no solo es suplemento del AA′*d* sino tambien del ángulo *p* que forman los planos (Geom. Teor. 147), resulta $AA'd = p$, y por consiguiente

$$A'd = AA' \cos. p;$$

cuyo valor sustituido en la ecuacion de los volúmenes, recordando que se tiene $AA' = aa'$, nos da por último

$$s = S \times \cos. p.$$

Lo que nos dice que el *área de la proyeccion horizontal de una superficie plana inclinada al horizonte es igual al producto del área de dicha superficie por el coseno del ángulo agudo que forman los planos de ambas superficies.*

Si se tiene $p = 90°$ ó $p = 60°$, será $\cos. p = 0$ ó $\cos. p = 0{,}5$ (14 y 12), y por lo tanto $s = 0$ ó $s = \frac{S}{2}$.

Cuando los planos son paralelos es $p = 0$, y por consigniente $\cos. p = 1$ (11) y $s = S$.

1146. **Verificacion de los cálculos, y tolerancia de los errores que pueden admitirse en el cálculo de las superficies.**—Cualquiera que sea el método empleado en la determinacion de la superficie de un polígono, debe verificarse repitiendo las operaciones y ejecutando de nuevo todos los cálculos, á fin de comparar los resultados finales, pues fácil es concebir las equivocaciones de todo género que pueden cometerse; y si se obtiene siempre el mismo resultado, puede asegurarse la exactitud de la operacion, pues es difícil que en ambos casos se cometan los mismos errores

Tambien se puede verificar una superficie siguiendo un método distinto del que se haya elegido primero, es decir, que si se ha adoptado al principio el medio de inscribir un polígono en el terreno ó en papel, se adopte despues el de circuscribirle; ó bien que si se ha dividido primero en triángulos, se haga despues la descomposicion en trapecios, para hacer por último la comparacion de los resultados. Conviene advertir, sin embargo, que las verificaciones han de ser por el mismo método que se haya hecho la primera valuacion, pues nunca saldrian del todo iguales los resultados, si habiendo empleado el método numérico para hallar una superficie, se hiciera la verificacion por el gráfico y recíprocamente; bien que en algunos casos puede hacerse así cuando no hay inconveniente por la naturaleza de la cuestion ó por no ser necesario obtener un resultado muy exacto.

En el Catastro suele ser suficiente la comparacion entre sí de las parcelas, las cuales en muchos casos suelen presentar la forma de rectángulos ó trapecios de poca altura y de base casi igual, como pueden servir de ejemplo las 5, 6 y 7 de la fig. 638 (lám. 45), cuyas superficies no pueden diferenciarse mucho unas de otras, y en la comparacion de las cuales no es fácil equivocarse cuando se tiene mucha práctica. Pueden tambien formarse grupos de parcelas que formen polígonos de una á cuatro ó cinco hectáreas, examinando despues si la suma de las superficies de las parcelas que componen cada polígono es igual á la superficie del mismo

1147. Cuando el valor hallado para la superficie de un polígono ha de corresponder á condiciones dadas, como sucede para las distintas parcelas cuya suma ha de dar el área de un triángulo del canevás trigonométrico ó de un polígono cualquiera ó zona en que están comprendidas, puede tolerarse un error en más ó menos, que no debe pasar de $\frac{1}{100}$ par las superficies menores que 100 hectáreas, es decir, que el plano de la parcela se considera bien levantado cuando su superficie difiera de la que le corresponde como parte del triángulo ó del polígono en menos de un área ó una hectárea por cada 100 de las que comprenda la parcela. La tolerancia es de $\frac{1}{200}$ para las superficies que comprenden de 100 á 300 hectáreas, y de $\frac{1}{300}$ para las que excedan de este límite. Las diferencias en más ó en menos se reparten proporcionalmente á las áreas de las parcelas.

Antes de terminar con el estudio de las áreas, nos ocuparemos en el párrafo siguiente, de una cuestion que ocurre con mucha frecuencia en la práctica.

1148. **Cálculo de las áreas de los perfiles trasversales en desmonte y terraplen.**—Hemos dicho (Acotaciones, párrafos 124 al 130) lo que se entiende por *perfil* y que se dividen en dos clases, á saber, en *perfiles longitudinales* y *perfiles trasversales*.

La determinacion de la superficie del cuadrilátero *acdf* que se traza, unas veces debajo del perfil *af* (fig. 770; lám. 58) para dejar un espacio libre de tierra en una cierta longitud y cuya operacion se llama *desmonte*, y otras veces encima del perfil (fig. 771; lám. 58) para rellenar de tierra un espacio en cierta longitud tambien, y que se llama *terraplen*, ofrece varios casos que estudiar, por la diversidad de formas que presenta al hacer el estudio de una *carretera*, pues unas veces el camino va sobre terreno llano, otras todo en desmonte, otras todo en terraplen y frecuentemente parte en desmonte y parte en terraplen, todo con arreglo á lo más ó menos accidentado del terreno y que hace variar contínuamente la forma y tamaño de las superficies que se consideran.

Se han ideado varios métodos para verificar el cálculo del movimiento de tierras, que está basado en la determinacion de las áreas de las figuras rectilíneas y mistilíneas que presentan los perfiles del terreno con las rectas que determinan la forma de los desmontes y terraplenes.

Propongámonos, por ejemplo, determinar el área ABCD (fig. 794; lámina 59) de un perfil trasversal en terraplen. Supongamos una série b, b', b''... de líneas paralelas equidistantes que dividan al área total en cierto número de trapecios de igual altura; pudiendo algunos de ellos ser triángulos que no son otra cosa que trapecios en que una de las bases es *cero*. Llamando a á la equidistancia de las paralelas, altura comun de los trapecios parciales, tendremos para el área de cada uno de ellos:

$$t = \frac{b \times a}{2}$$

$$t' = \frac{(b + b')\,a}{2}$$

$$t'' = \frac{(b' + b'')\,a}{2}$$

$$t^{n-2} = \frac{(b^{n-2} + b^{n-1})\,a}{2}$$

$$t^{n-1} = \frac{(b^{n-1} + b^{n})\,a}{2}$$

$$t^{n} = \frac{b^{n} + a}{2}$$

y el área total, que llamaremos S, será

$$S = \frac{b \times a}{2} + \frac{(b + b')\,a}{2} + \frac{(b' + b'')\,a}{2} + \ldots + \frac{(b^{n-2} + b^{n-1})\,a}{2}$$
$$+ \frac{(b^{n-1} + b^{n})a}{2} + \frac{b^{n} \times a}{2}.$$

Sumando estos quebrados, sacando fuera de un paréntesis el factor a comun á todos los términos del numerador, resultará

$$S = \frac{(b + b + b' + b' + b'' + b'' + \ldots + b^{n-2} + b^{n-2} + b^{n-1} + b^{n-1} + b^{n} + b^{n})a}{2};$$

de donde

$$S = \frac{2b + 2b' + 2b'' + \ldots + 2b^{n-2} + 2b^{n-1} + 2b^{n}}{2} \times a;$$

y por último, suprimiendo el factor comun 2 á los dos términos del quebrado, se tendrá

$$S = (b + b' + b'' + \ldots + b^{n-2} + b^{n-1} + b^{n})\,a.$$

Donde se ve que el área total equivale á la de un rectángulo que tenga por altura la de los trapecios y por base la suma $b+b'+b''+\ldots$ de las paralelas equidistantes.

Si $a=1$ metro, resulta $S=b+b'+b''+\ldots+b^{n-2}+b^{n-1}+b^{n}$, y por lo tanto el área equivaldrá á tantos metros cuadrados como unidades tiene la recta $b+b'+b''+\ldots$

Casos de inexactitud de este método de determinacion de áreas. — 1.º Cuando la altura ab (fig. 795; lám. 59) de los triángulos extremos es menor que cb', equidistancia de las rectas, b', b''...; porque la fórmula da el área de los triángulos dec que es mayor que la verdadera deb en las del triángulo dbc. Para hallar el área verdadera, habría que restar de la calculada la de los triángulos dbc.

2.º Cuando entre dos de las rectas mo, so.... queda comprendido un vértice n de un ángulo saliente; en cuyo caso se desprecia un triángulo mno cuya área debe agregarse á la que da la fórmula para obtener la verdadera.

3.º Cuando comprenden un ángulo entrante q que produce un triángulo pqr, cuya área debe restarse.

Como estas áreas son por lo regular muy pequeñas, se desprecian en la práctica sin error sensible.

De un modo análogo se procedería para calcular el área de un perfil trasversal en desmonte.

1149. Ponemos á continuacion la Nota que acerca del cálculo de las áreas de los perfiles trasversales en *desmonte* y *terraplen*, publicó nuestro entendido y laborioso compañero D. Bernardo Giral, en el núm. 9 del *Boletin de la Asociacion de Ayudantes de Obras públicas* del 1.º de Diciembre de 1865, tanto por contribuir á que se conozca y generalice, como para dar una muestra del interés que nos inspiran los trabajos científicos y prácticos de nuestros compañeros. Dice así:

«La determinacion de la superficie de un perfil trasversal, bastante conocida de nuestros lectores, es sin embargo una cuestion, que á pesar de la práctica establecida y de los muchos razonamientos, fórmulas y métodos llamados exactos que se practican, no está, digámoslo así, suficientemente discutida, puesto que entre el dato práctico y el cálculo numérico existen notables diferencias desde el momento en que se pone en ejecucion la obra ó proyecto.

En general, entre contratistas y concesionarios, casi siempre, ó con raras escepciones, se da lugar á divergencias y sérias polémicas por la valoracion del cubo de las obras de la tierra, y á pesar de los muchos métodos para hallar esos cubos entre dos secciones contiguas, no hay uno seguro y tan exacto, por el cual se preste una verdadera sancion, que evite los litigios que comunmente se establecen, á pesar de la buena fé y verdadera inteligencia entre el constructor y el encargado de hacer la estima del trabajo que ha de servir para determinar el pago de la construccion.

No es, pues, mi ánimo presentar al exámen el único y verdadero recurso, el medio esclusivo que habria de ser la planta del trabajo, porque mi modestia no permite señalar el método que voy á presentar sino como un medio más que creo haber encontrado en la práctica de mis trabajos, ya en el campo como en el gabinete, y que con él he logrado satisfacer las necesidades de este importante servicio.

Algunos ejemplos podrán servir de tipo para la demostracion gráfica indispensable para discutir la fórmula de que me ha servido, y que resulta con bastante sencillez.

Sea el perfil de un desmonte (fig. 770; lám. 58), en el cual se supone que el del terreno se confunde sensiblemente con una recta; principiaremos por hacer abstraccion del perfil de las cunetas, cuya superficie es constante para un gran número de casos, y préviamente conocida, y se cuadrará el cuadrilátero *acdf*, restando del trapecio *abcf* los dos triángulos rectángulos *abc* y *fde*, llamando a á la línea *cd* y q al área correspondiente á las cunetas: la superficie total del perfil, hechas todas las reducciones, estará representada por

$$D = \frac{(a+x)\,y' + (a+x')\,y}{2} + q;$$

las ordenadas y é y' y las abscisas x y x' se obtienen directamente en la obra, con un reglon provisto de un nivel de aire en su centro y una plomada en el extremo, y la línea a, que representa el ancho de la via, más el de las cunetas, se conoce antes de principiar el cálculo.

Con un razonamiento idéntico, hallaremos que el área del perfil del terraplen (fig. 771; lám. 58), es

$$T = \frac{(a+x)\,y' + (a+x')\,y}{2}$$

fórmula sumamente fácil de retener en la memoria por la simetría de los términos del numerador, y porque examinando la figura, se observa désde luego que es la semi-suma de los productos que se obtienen, multiplicando el ancho, más la abscisa de un lado, por la ordenada del otro y vice-versa.

Siendo $y = o$, será $x = o$; y entonces el perfil tendrá una forma triangular, en cuyo caso las fórmulas anteriores podrán aplicarse.

Sea un perfil en ladera con desmonte y terraplen (fig. 772; lám. 58).

Para calcular cada una de las partes correspondientes al desmonte y terraplen, podria hacerse uso de las fórmulas halladas, haciendo en cada una $x = o$, $y = o$; $a = co$ en la primera y $a = od$ en la segunda; pero sin necesidad de estas consideraciones, se puede calcular directamente el área de los triángulos *aco* y *odf*, para lo cual se empezará por determinar el punto o, que divide á la recta *be* en dos partes proporcionales á y é y', y por consiguiente, será

$$do = \frac{be}{y+y'} \times y' - x', \quad \text{y} \quad co = a - do;$$

conociendo do, co, y é y', que son las bases y alturas de los dos triángulos, se sabrá el área del perfil en cuestion.

Supongamos que el perfil del terreno sea una línea quebrada en un punto comprendido en la zona de explanacion, como en el *desmonte* de la (fig. 773; lám. 58): se calcularán los dos cuadriláteros $AafB$ y $BfbC$ con el auxilio de la fórmula

$$S = \frac{(a+x)\,y' + (a+x')\,y}{2}$$

haciendo en ella para el primer cuadrilátero $x=x$, $y=y$, $a=a'$, $x=o$ $y''=y'$, resultando entonces

$$AafB = \frac{a'y + (a'+x)\,y''}{2}$$

por idéntico razonamiento,

$$BfbC = \frac{a''y' + (a''+x')\,y''}{2}.$$

De manera, que el área del perfil, habiendo abstraccion de las cunetas, será

$$S = \frac{a'y + a''y' + (x + a' + a'' + x')\,y''}{2} = \frac{Ly'' + a'y + a''y'}{2};$$

siendo $L = x + a' + a'' + x'$.

El punto B se hallará despues de hecha la obra de un modo fácil, aplicando á la superficie del terreno, y en un plano próximamente normal al eje de la via, dos cuerdas en línea recta, las cuales se encontrarán en un punto, que será el que se busca; desde este punto se bajará una vertical Bf, y quedarán determinados los valores de a', a'', y'', y por consiguiente, el de C, puesto que x y x', lo mismo que y é y', sabemos ya cómo se obtienen. Si el punto B se proyecta horizontalmente sobre ca (fig. 774, lám. 58), haremos la fórmula anterior $a' = -fa$ y $a'' = +fb$; puesto que $a' + a'' = ab = a$, y resultará:

$$S = \frac{Ly'' - a'y + a''y'}{2}$$

si se confunde f con a, será:

$$S = \frac{Ly'' + ay}{2}$$

siendo a igual al ancho de la via, más el de las cunetas. La vertical Bf se obtiene sumando By'' con ra, fáciles de conocer con la plomada y el reglon.

En el caso de la (fig. 775; lám. 58), el área de cada uno de los cuadriláteros $AafB$ y $BfbC$, haciendo uso de la fórmula,

$$S = \frac{(a + x)\,y' + (a + x')\,y}{2}$$

será como en el caso anterior; y sumando estas áreas, se encuentra la misma fórmula

$$\frac{Ly'' + a'y + a''y'}{2}.$$

Para el ejemplo del perfil en *terraplen*, primer caso (fig. 776; lám. 58), nada nuevo podemos añadir á lo expuesto en el caso anterior para cuadrarle, puesto que las fórmulas son idénticas. Para obtener la ordenada Bf y el punto f, es necesario emplear otro procedimiento, por hallarse el punto B cubierto con la obra construida. Se empezará por hallar la pendiente del terreno en la parte AA′ y en la parte CC′, usando el reglon y la plomada; porque sin dar menos exactitud que un eclímetro, facilitan esta clase de trabajos. Sean p y p' las dos pendientes, en cuyo caso se obtendrán las ecuaciones $y - y'' = cf \times p$, $y' - y'' = fd \times p'$, y $cf + fd = L$, de las cuales resulta:

$$cf = \frac{L \times p' + y - y'}{p + p'};\; y'' = y - \frac{L \times p' + y - y'}{p + p'} \times p;\; fd = L - cf.$$

El caso segundo del terraplen (fig. 777; lám. 58), es análogo al ejemplo segundo, que se considera en desmonte, por cuya razon no se entabla su discusion.

Desmonte y terraplen.

Primer caso. Suponiendo que el punto donde cambia la direccion del terreno se halla en la parte que corresponde al desmonte (fig. 778; lámina 58), empezaremos por denominar y'' y el punto f, haciendo uso de las ecuaciones

$$y' + y'' = fd \times p',\; y - y'' = cf \times p \text{ y } cf + fd = L\,;$$

p y p' son las dos pendientes del terreno; de modo, que se obtendrá

$$cf = \frac{y + y' - Lp'}{p - p'};\; y'' = y - \frac{y + y' - Lp'}{p - p'} \times p;\; fd = L - cf.$$

El punto o se determinará dividiendo la recta fd en dos partes proporcionales á y' é y'', y resultará:

$$of = \frac{fd}{y''+y'} \times y'' \quad \text{y} \quad ob = od - x' = \frac{fd}{y''+y'} \times y' - x'.$$

Con estos elementos se podrá calcular el área del cuadrilátero $AafB$, empleando la fórmula

$$\frac{(a+x)\,y' + (a+x')\,y}{2};$$

y la del triángulo obc, con su base y su altura.

Segundo caso. En este ejemplo (fig 779; lám. 58), son aplicables en todas sus partes las consideraciones anteriores, lo mismo que cuando la direccion del terreno cambia en la parte terraplenada.

DISCUSION DE LA FÓRMULA $\dfrac{(a+x)\,y' + (a+x')\,y}{2}$ COMO EXPRESION DEL ÁREA DE UN CUADRILÁTERO.

Supongamos que a representa un lado, x y x' las proyecciones de los lados contiguos sobre él, y que y é y' son las líneas proyectantes de los vértices que no se encuentran en dicho lado (fig 780; lám. 58),

$$a = Ac, \quad x = AB, \quad y = FB, \quad x' = CD, \quad y' = ED.$$

Consideraremos como negativas las cantidades x y x' cuando las perpendiculares y é y' caen dentro de los ángulos del cuadrilátero, y como positivas cuando caen fuera. En esta figura, x es negativa y x' positiva. Las ordenadas y é y' las consideraremos como positivas, porque conceptuadas como negativas, equivaldría á invertir la figura.

Sean $x > o$ y $x' > o$, el cuadrilátero será de la forma (figura 781; lámina 58), y su área será:

$$S = \frac{(a+x)\,y' + (a+x')\,y}{2}.$$

Consideremos $x > o$ y $x' < o$, entonces tendrá fig. 782 (lám 58) su área será

$$S = \frac{(a+x)\,y' + (a-x')\,y}{2}.$$

Siendo $x < o$ y $x' < o$, el cuadrilátero se presentará en la forma de la fig. 783 (lám. 58) y el área será

$$S = \frac{(a - x)\,y' + (a - x')\,y}{2}$$

Cuando $x = o$, se tendrá la fig. 784 (lám. 58) y el área será

$$S = \frac{ay' + (a \pm x')\,y}{2}$$

empleando uno de los dos signos cuando y' caiga dentro ó fuera del ángulo.

Se trasformará en trapecio, haciendo $x = o$ y $x' = o$.

El área de un paralelógramo será un caso particular de esta fórmula, en la cual $x' = - x$' é $y = y'$ como en la fig. 785 (lám. 58) y la expresion

$$S = \frac{(a + x)\,y' + (a + x')\,y}{2}$$

se trasformará en $S = ay$.

Si uno de los valores de x ó x' es positivo, el valor absoluto de los dos tiene por límite el infinito; pero si los dos valores son negativos, la suma de los valores absolutos tiene por límite a, y en este caso el cuadrilátero se habrá convertido en triángulo (fig. 786; lám. 58); porque cuando los puntos B y D se hayan confundidos en N, se habrán encontrado los E y F en M.

La fórmula $\frac{(a + x)\,y' + (a + x')\,y}{2}$, es todavía aplicable á los cuadriláteros cóncavos (fig. 787; lám. 59) con la significacion establecida para x y x', y tomando por lado a uno de los que no forman el ángulo entrante: así el área del cuadrilátero ABCD es

$$S = \frac{(a - x)\,y' + (a - x')\,y}{2}$$

haciendo $\mathrm{A}b = x$, $\mathrm{B}b = y$, $c\mathrm{D} = x'$ y $\mathrm{C}c = y'$, lo que se demuestra hallando el área del triángulo ABD, y restando la del cuadrilátero CcDB, menos el triángulo CcD.

Si una de las ordenadas se hace cero, el cuadrilátero se convierte en triángulo; y si las dos, en una línea recta.

ÁREA DE UN POLÍGONO CUALQUIERA CÓNCAVO Ó CONVEXO.

Como queda dicho, la expresion $\frac{(a + x)\,y' + (a + x')\,y}{2}$ puede representar el área de una superficie plana, limitada por cuatro rectas, y análogamente vamos á demostrar que la fórmula

$$\frac{Ly'' + a'y + a''y'}{2} \quad (1)$$

representa el área de un pentágono cóncavo ó convexo, en la hipótesis de que y, y' é y'' sean las tres ordenadas de los vértices e, c y d, (fig. 788; lám. 59); a, la proyeccion sobre la base del lado ed menos la del ae; L, la del ed menos la del cd y a'', la del cb menos la del cd; de modo, que será

$$a' = af, \ L = hg, \ a'' = -bf$$

y haciendo

$$t = y, \ y'' = y_1, \ y' = y_2, \ a' = p, \ L = p_1 \text{ y } a'' = p_2$$

en la fórmula [1], resultará:

$$\frac{Ly'' + a'y + a''y'}{2} = \frac{py + p_1y_1 + p_2y_2}{2}.$$

Hemos adoptado nuevas letras para indicar que los términos del numerador representan cantidades del mismo género, y en la que sigue consideraremos al término general $p_n y_n$ como el producto de la ordenada del vértice del mismo índice, empezando por el que sigue á la izquierda de la base, por la suma algebráica de las proyecciones sobre la base de los dos lados que concurren en dicho vértice; para lo cual convenimos en llamar positiva á la proyeccion de un lado cuando este se proyecta de izquierda á derecha, y negativa si se proyecta de derecha á izquierda. En en la fig. 788 (lám. 59), el lado ae se proyecta negativamente, el ed positivamente, el cd negativamente y el cb positivamente.

El área del pentágono (fig. 788; lám. 59) será igual á la del trapecio $ehfd$, menos la del $cgfd$, más la del triángulo cgb, menos la del aeh, y por lo tanto, estará representada por

$$\frac{(y+y_1) \times hf + y_2 \times gb - (y_1+y_2) \times gf - y_2 \times ha}{2} = \frac{py + p_1y_1 - p_2y_2}{2}.$$

Si el pentágono tiene dos ángulos entrantes (fig. 789; lám. 59), se demuestra del mismo modo; su área será igual á

$$\frac{ax \times y + (y+y_1) \times xx_1 + (y_1+y_2) \times x_1x_2 + y_2 \times x_2 b}{2} = \frac{py + p_1y_1 + p_2y_2}{2}.$$

Sea por último un polígono cualquiera (fig 790; lám. 59): su superficie estará representada por

$$\frac{(y+y_1)\times xx_2-y\times xa-(y_1-y_2)\times x_1x_2+(y_2+y_3)\times x_1x_3+(y_4+y_3)\times x_3x_4+}{2}$$

$$\frac{(y_5+y_6)\times x_4x_5+y_6\times x_5b}{2}=\frac{py+p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3+p_4y_4+p_5y_5+p_6y_6}{2}$$

De lo cual se deduce, que el área de una superficie plana limitada por n rectas, tiene por expresion

$$\frac{py+p_1y_1+p_2y_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+p_{n-3}\,y_{n-3}}{2} \qquad [2].$$

Cuando el contorno del polígono es una curva, los lados son infinitamente pequeños, y su número infinito. Los términos py, p_1y_1, etc., se trasforman en cantidades diferenciales, y su suma en la expresion

$$\int ydx$$

La fórmula $\frac{(a+x)\,y'+(a+x')\,y}{2}$ es un caso particular de la $\frac{py+p_1y_1+p_2y_2+\&}{2}$, porque si se examina la fig. 791 (lám. 59), se ve que es $p=a+x$ y $p_1=a+x$; y llamando y_1 á y', resulta:

$$\frac{(a+x)\,y'+(a+x')\,y}{2}=\frac{py+p_1y_1}{2}.$$

A pesar de ser más sencilla la segunda fórmula, hemos adoptado la primera al tratar de los perfiles trasversales, porque en ella están separadas las cantidades que representan los datos de campo. La expresion (2) es de escasa utilidad en la práctica cuando se trata de cuadrar una superficie tal como la fig. 792 (lám. 59), sin embargo de que se hace una multiplicacion menos que por el método ordinario; y donde tiene su verdadera aplicacion es en el cálculo de la superficie de la fig. 793 (lámina 59).

CAPÍTULO XX.

Trasformacion de los polígonos.

1150. **Ideas generales.**—Se dice que se *trasforma* un polígono en otro, cuando por medio de una *operacion gráfica* se sustituye al primero otro que le es *equivalente*, es decir, que tiene la misma superficie que el polígono dado, pero cuya forma es distinta de la de éste, pudiendo ser el mismo ó diferente el número de sus lados y ángulos; pero siempre distintas las relaciones de magnitud de unos y de otros.

Se concibe que esta operacion gráfica debe ejecutarse en el papel, despues de haber construido el polígono del terreno en la mayor escala posible, para verificar despues las referencias al terreno; puesto que aunque pudiera ejecutarse desde luego sobre este último, las dificultades que se ofrecen en general producen resultados menos exactos. En lo que vamos á decir se entenderá, sin embargo, que operamos lo mismo sobre el terreno que sobre el papel.

La trasformacion de los polígonos es una operacion de la mayor importancia, por las razones siguientes:

1.ª Porque es indispensable como auxiliar en la resolucion de muchas cuestiones, especialmente en las que tienen por objeto la division de los terrenos y heredades.

2.ª Por la aplicacion que puede hacerse de ella como auxiliar tambien para la medicion de las superficies, trasformando los polígonos dados en otros, cuyas formas sean más adecuadas para el cálculo de aquellas.

3.ª Por la conveniencia que puede resultar en casos dados á los propietarios colindantes, de la trasformacion convencional de sus heredades, en otras que tengan el mismo ó menor número de lados, para regularizar las figuras de los terrenos y rectificar los linderos, ó para satisfacer á otra circunstancia cualquiera.

Pasaremos por lo tanto á la resolucion de varios problemas.

1151. **Problema 1.º—Trasformar un triángulo equilátero ó isósceles en otro triángulo rectángulo equivalente.**—Si el vértice B (fig. 796; lám. 59) ha de ser el mismo, bájese la perpendicular BD, prolónguese DA de modo que DE sea igual á AC, tírese la BE, y el triángulo rectángulo EBD será equivalente al ABC, por tener ambos igual base y altura (Geom. Teor. 94.—Cor. 1.º). Si la base AC ha de ser la misma, levántese en C la perpendicular CB′ hasta encontrar en B′ á la paralela tirada por B á la AC, y trazando la AB′, el triángulo AB′C será el que se pide.

1152. **Problema 2.º—Trasformar un triángulo escaleno en otro rectángulo equivalente.**—Si la base AC (fig. 797; lám. 59) ha de ser la misma, levántese la perpendicular CB′ á la AC y por el punto B tírese la paralela BB′ á dicha AC, y el triángulo AB′C resolverá la cuestion. En el caso de que haya de ser el mismo el vértice, bájese la perpendicular BC′ á la AC prolongada, tómese C′A′ = AC; y trazando la BA′, el triángulo A′BC′ será el que se pide.

1153. **Problema 3.º—Trasformar un triángulo cualquiera en otro equivalente que tenga la misma base.**—Trácese por el punto B (fig. 798; lám. 59), la paralela B′B″ á la base AC, y todos los triángulos AB′C, AB″C, que tengan la base AC y sus vértices se hallen en dicha paralela serán equivalentes al propuesto. Este problema sirve para trasformar un triángulo acutángulo ABC′ en otro obtusángulo equivalente AB″C y recíprocamente; siendo determinado el problema cuando se da el valor que ha de tener uno de los ángulos de la base, y pudiéndose enunciar entonces de este modo.

Trasformar un triángulo ABC *en otro equivalente* AB′C *que tenga la misma base y altura, y el ángulo* ACB′ *ó* CAB′ *de la base igual á un ángulo dado.*

Si el triángulo dado ABC se ha de trasformar en otro isósceles AFC, se levantará la DF perpendicular en el punto medio D de AC; y si en otro rectángulo AEC, la AE perpendicular á AC en uno de sus extremos A.

1154. **Problema 4.°—Trasformar un triángulo** ABC (fig. 799; lámina 59), **en otro equivalente** AB′C′ **que tenga una altura dada.**— El vértice B′ del nuevo triángulo puede darse situado en el lado AB ó en su prolongacion; en ambos casos tírese la B′C y por el punto B la paralela BC′ á la B′C; únase el punto B′ con el C′ por medio de la B′C′, y el triángulo AB′C′ resolverá la cuestion; pues resultan equivalentes (1153) los triángulos BB′C, C′B′C para el primer caso, y los B′BC′, CBC′ para el segundo.

Si el vértice B′ estuviera fuera del triángulo ABC, como en las dos posiciones de la fig. 800 (lám. 59), se tirará la recta AB′ y por el punto B la BD paralela á AC hasta que encuentre á la AB′ ó á su prolongacion en el punto D; trácese la CD y por el caso anterior constrúyase el triángulo AB′C′, el cual siendo equivalente al ADC, como éste lo es al ABC, quedará resuelta la cuestion.

Se comprende que si el punto B′ no se da de posicion, podrá resolverse por este medio el problema de

Trasformar un triángulo ABC *en otro equivalente* AB′C′ *cuya altura sea dada, así como un ángulo* B′AC′ *de la base.*

1155. **Problema 5.°—Trasformar un triángulo** ABC (fig. 801; lámina 59), **en otro equivalente que tenga una base dada.**—Si la base ha de ser FC, que resulta de prolongar la AC en uno de sus sentidos, se tirará la BF y por A la paralela AD á la BF, y uniendo el punto F con el D se tendrá el triángulo FDC equivalente al ABC.

Si la base ha de ser la FE que resulta de prolongar la AC en sus dos sentidos, despues de hacer la construccion anterior, se trazará la DE, y por C la CO paralela á DE, y uniendo el punto O con el E, el triángulo FOE será equivalente al FDC y por consiguiente al ABC.

1156. **Problema 6.°—Trasformar un cuadrilátero cualquiera** ABCD (fig. 802; lám. 59), **convexo ó cóncavo, en un triángulo equivalente cuyo vértice sea el B del cuadrilátero.**—Tírese la diagonal BD, y por el punto C la paralela CE á la BD hasta que encuentre á la AD, ó á su prolongacion en el punto E; trácese la BE, y el triángulo ABE será el que se busca.

1157. **Problema 7.°—Trasformar un cuadrilátero cualquiera** ABCD (fig. 803; lám. 59), **en un triángulo equivalente cuyo vértice E se halle situado en el lado** BC.—Tírense las rectas EA y ED, y por los puntos B y C las BF y CG respectivamente paralelas á las primeras, hasta que encuentren á la AD prolongada en los puntos F y G; y trazando las EF y EG, el triángulo FEG resolverá la cuestion.

En el caso de ser el cuadrilátero un paralelógramo, bastará prolongar la base AD (fig. 804; lám. 59), de modo que resulte DF = AD, y uniendo el punto E con los A y F, se tendrá el triángulo AEF equivalente al paralelógramo ABCD, por tener la misma altura y doble base que éste.

1158. A veces se quiere trasformar un polígono en otro que tenga el mismo número de lados, pero que su forma sea distinta, caso que suele tener aplicacion en muchas ocasiones.

Sea, por ejemplo, el cuadrilátero ABCD (fig. 805; lám. 59): en vez de prolongar uno de sus lados AB hasta B′ en sentido de su direccion, se trazará por el punto B una recta BE′ en la direccion que convenga, y tirando la diagonal BD y por C la paralela CE á la BD, se unirá el punto de interseccion E con el D, y el cuadrilátero ABED será equivalente al propuesto ABCD.

1159. **Problema 8.°—Trasformar cualquier polígono** ABCDE (figura 806; lám. 59), **en otro equivalente que tenga un lado menos.**—Tírese la diagonal AC, y por el punto B la BF paralela á AC, hasta que encuentre en el punto F á la AE prolongada; únase el punto C con el F, y el pentágono propuesto será equivalente al cuadrilátero FCDE.

1160. Como por el caso anterior se puede trasformar el cuadrilátero en un triángulo, resulta que cualquier polígono se puede trasformar en un triángulo, reduciéndole primero á otro que tenga un lado menos, el que resulte á otro que tenga un lado menos que el anterior, y así sucesivamente, hasta convertirle en triángulo, como se ve en el pentágono ABCDE de la fig. 807; (lám. 60), que se halla trasformado en el triángulo equivalente FCG, habiendo servido de bases para las operaciones las diagonales CA y CE que parten de un mismo vértice C.

1161. Ahora bien, como hemos dicho (1154) el modo de trasformar un triángulo en otro que le sea equivalente y que tenga una altura dada y uno de los ángulos de la base, resulta que se podrá reducir un polígono cualquiera á un triángulo que tenga el vértice en cualquier punto dado, dentro ó fuera del mismo polígono, y de modo que un ángulo de la base sea igual tambien á un ángulo dado.

1162. **Problema 9.°—Trasformar un triángulo en un cuadrado equivalente.**—Hállese una media proporcional (Geom. Probl. 28) entre la base y la mitad de la altura, ó entre la altura y la mitad de la base del triángulo, y se tendrá el lado del cuadrado.

En efecto, sea x el lado del cuadrado, a la altura y b la base del triángulo: tendremos

$$x^2 = \frac{1}{2}\, ab = \frac{1}{2}\, a \times b = a \times \frac{1}{2}\, b:$$

de donde se deducen las proporciones

$$\frac{1}{2}\, a : x :: x : b \qquad \text{ó} \qquad a : x :: x : \frac{1}{2}\, b.$$

1163. **Problema 10.—Trasformar cualquier polígono en un cuadrado equivalente.**—Se reduce primero á triángulo, y luego este triángulo á cuadrado.

Si el polígono es un *rectángulo*, un *paralelógramo* ó cualquier figura cuya área pueda obtenerse por el producto de dos rectas, la cuestion está reducida á *hallar una media proporcional entre dichas dos rectas*, para tener el lado del cuadrado equivalente que se pide.

Si el polígono es *regular*, se desarrollará el perímetro sobre una recta indefinida, y se hallará la media proporcional entre la mitad del perímetro y la apotema, ó sea el rádio del círculo inscrito.

Por último, para hallar el lado de un cuadrado equivalente á un círculo, se construirá la media proporcional entre la mitad de la circunferencia rectificada y el rádio; pero este resultado no es más que aproximado, pues dependiendo de la rectificacion de la circunferencia, sería necesario para obtenerle con exactitud, poder construir una recta con la regla y el compás, que tuviese la longitud exacta de la circunferencia; lo que hasta hoy no ha podido conseguirse.

1164. Cuando el número de lados del polígono empieza á ser considerable, se dificulta la trasformacion tomando por bases las diagonales á partir de un mismo vértice (1160), tanto por la configuracion del polígono y la confusion de las líneas que habria que trazar, como porque á veces la gran distancia de dos vértices en el papel impide hacer uso de la regla y las escuadras para el trazado de la diagonal; debiendo tambien tenerse en cuenta que las construcciones que se ejecuten, permitan que los puntos de interseccion de las líneas que se establezcan se hallen situados en el papel del dibujo. En estos casos, conviene tomar por bases las diagonales más á propósito que partan de distintos vértices, como se ve en el eptágono ABCDEFG de la fig. 808 (lám. 60), en la que se ha tomado primero por base la diagonal CA, para tener el exágono HCDEFG; despues se ha trazado la diagonal DH para que resulte el pentágono YDEFG, luego la EG para obtener el cuadrilátero YDEL, y por último se trazará la diagonal DL para convertir el cuadrilátero en el triángulo YDM, que será equivalente al eptágono propuesto.

1165. Si se examina con detencion la marcha que hemos seguido, se verá que está reducida la cuestion á operar en el sentido del contorno del polígono, cuyo procedimiento es indispensable en los que se componen de un gran número de lados, pues siendo éstos en lo general de cortas y muy variadas longitudes presentan contornos muy sinuosos, y son estas líneas quebradas las que con más frecuencia limitan los terrenos.

Supongamos que se trata de reducir á un solo triángulo el polígono *rectilíneo* ABC.... FZ (fig. 809; lám. 60), algunos de cuyos lados presentan bastante longitud, pero otros son de cortas dimensiones. Para facilitar la operacion, se empezará por dividir el polígono en dos partes **A** y **B**, ó en mayor número si fuere necesario, prolongando en uno ó en ambos sentidos uno de los lados tal como FE, de modo que la recta VV' atraviese el polígono, siendo E*z* la línea que le divide. Despues, á partir de esta recta, que tomaremos por base de la operacion, se trazará la CE y por el punto D la paralela D*a* á ella; y tirando la C*a*, ésta reemplazará á los dos lados CD y DE. Se trazará despues la B*a* y por C la C*b* paralela á B*a*, y tirando la B*b*, ésta reemplazará á los tres lados BC, CD y DE. Se trazará por último la A*b* y por B la paralela B*c* á la A*b*, y trazando la A*c*, ésta reemplazará la parte del contorno formada por los cuatro lados AB, BC, CD y DE. La parte del polígono formada por las AZ y ZT se reemplazará por la T*d* como se ve en la figura, y procediendo del mismo modo supongamos que la T*e* es la línea que reemplaza á la parte del contorno formada por los lados TS, SR.... O*z*; se habrá trasformado de este modo el polígono EDC.... O*z*, que constituye la parte **A**, en el cuadrilálero equivalente *cd*T*e*. Se procederá del mismo modo en la otra parte **B**, y supongamos que la recta L*f* reemplaza á la línea quebrada *z*NML, y L*n* á la EFGHYL, y tendremos el triángulo *f*L*n* equivalente al polígono FGH.... N*z*. Si ahora por el problema 5.º (1153) trasformamos el triángulo *f*L*n* que tiene por base la *fn* en el equivalente *exc*, que tenga por base el lado *ec* del cuadrilátero *e*T*dc*, resultará trasformado el polígono propuesto en el pentágono *cd*T*ex*, el cual será ya fácil trasformar en un triángulo, ya á partir de un vértice ó de dos, por los métodos empleados en las figuras 807 y 808 (1160 y 1164).

Cuando el polígono presenta muchos lados de poca longitud ó es curvilíneo, se emplea con ventaja el *método de las compensaciones*, que consiste en sustituirle por otro de ménos lados, dispuestos de manera que haya *compensacion* entre las partes excedentes y deficientes como hemos explicado (1141).

1066. **Aplicacion de la trasformacion de los polígonos á la medida de sus áreas.**—Pudiendo reducirse á triángulo, cuya área se determina fácilmente (1060), un polígono cualquiera, áun cuando su contorno sea curvilíneo ó se componga de muchos lados, como hemos visto por todo lo que precede, se ve la importante aplicacion de las trasformaciones que forman el objeto principal de este capítulo; debiendo tenerse presente, que si bien el resultado que se obtenga es solamente aproximado, debe esperarse que exista cierta compensacion entre los errores procedentes de las operaciones de trasformacion y los que se cometerían por el método general de la descomposicion en triángulos (1101), quedando siempre al primero de estos métodos la ventaja de la brevedad.

En algunos casos puede limitarse la trasformacion de un polígono á convertirle en otro, el cual pueda calcularse con más facilidad, por la descomposicion en dos ó más triángulos. Así en la figura 808 (lám. 60), bastará haber trasformado el eptágono ABCDEFG en el cuadrilátero YDEL, el cual estando descompuesto por la diagonal DL en los dos triángulos YDL y DEL, que tienen la base comun DL, no habrá más que bajar perpendiculares desde los vértices Y y E sobre la base para tener las alturas y poder calcular sus superficies. En el caso de la figura 809 (lámina 60) se detendria la trasformacion cuando se hubiese obtenido el polígono *cd*T*ex*, en el cual tirando la diagonal *c*T se hallaria descompuesto á partir del punto *c* en los tres triángulos *cd*T, T*ce* y *ecx*, cuyas superficies se calcularán fácilmente. Como la menor desviacion de los vértices de su verdadera posicion, produciria diferencias de consideracion en el resultado, debe ante todo tenerse seguridad en la exactitud de las construcciones.

1167. En todo caso vemos, que la determinacion de la superficie se halla reducida al cálculo de uno ó más triángulos, que en general son oblicuángulos, por lo que este método es muy expedito y vamos á exponer la manera de simplificar más el cálculo. En efecto, como hemos enseñado el modo de convertir un triángulo oblicuángulo ABC (fig. 810; lámina 60) en otro rectángulo ADC (1153), la cuestion está reducida ahora á trasformar el triángulo ADC en otro tambien rectángulo AFE, tal que dando un cierto valor al cateto AE que sirve de base, no haya más que tomar en la escala el valor del otro cateto AF que ha de ser la altura. Para esto, se prolongará AC de modo que AE sea igual á 200^m de la escala, se tirará la DE, y por el punto C la CF paralela á la DE; uniendo despues F con E por medio de la FE, el triángulo AFE será equivalente al ADC, y por consiguiente al ABC. Para hallar ahora la superficie del AFE tendremos

$$AFE = \frac{AE}{2} \times AF = \frac{200^m}{2} \times AF = AF \times 100^m;$$

donde vemos que con solo tomar la longitud de AF en la escala y multiplicarla por 100 se tiene la superficie del triángulo.

Ejemplo: Sea $AF = 54,^m35$; tendremos

$$AFE = 54,^m35 \times 100^m = 5435^{m^2} = 54,^a35;$$

luego la superficie del triángulo contendrá 54 áreas y 35 centiáreas.

1168. Cuando se han obtenido las áreas por el método de la *cuadrícula*, que hemos dado á conocer (1144), pueden reducirse los polígonos excedentes á triángulos rectángulos que tengan por bases los lados de los cuadrados, y cuyas alturas se tomen tambien en lados de los mismos; y entonces las superficies se calculan fácilmente del siguiente modo. Sea ABCDEFGH (fig. 811; lám. 60) la parte de polígono comprendida dentro del cuadrado MNPR; tomando el lado MR de éste por base de reduccion, se trasformará (1164) la porcion de polígono en el triángulo equivalente A*ab*, y éste en otro M*d*R que tenga por base el lado MR del cuadrado (1155), para lo cual se tirará primero la *a*M y por A la A*c* paralela á *a*M, y por último la M*c*, y se tendrá el triángulo M*cb*. Se unirá el punto *c* con el R, se trazará por *b* la *bd* paralela á *c*R, y uniendo el punto *d* con el R se tendrá el triángulo M*d*R que se queria, el cual se trasformará (1167) en el triángulo rectángulo M*e*R, que tiene por base el lado MR del cuadrado y cuya altura M*e* es parte del lado MN; por lo que no habrá más que tomar el valor de Me en la escala y se tendrán los datos suficientes para calcular la superficie por la fórmula

$$MeR = \frac{Me}{2} \times MR$$

Ejemplos: 1.° Si el lado MR del cuadrado representa 500^m de la escala, y Me vale $324,^m50$, se tendrá

$$MeR = 162,^m25 \times 500^m = 81125^{m^2}$$

2.° Si $MR = 1000^m$, se hallará del mismo modo

$$MeR = 162,^m25 \times 1000^m = 162250^{m^2}$$

CAPITULO XXI.

Planímetros.

Generalidades.—Definicion de los planímetros.—Orígen de los planímetros.—Método-Rigaux.—Sistema de la escuadra-regla.—Sistema de dos escalas y regla.—Ruleta de Dupuit.—Usos del instrumento.—Apreciacion de las longitudes.—Reduccion á la escala del plano.—Determinacion de las áreas.—Escala de áreas.—Aplicaciones á varios casos particulares.—Observaciones acerca del grado de aproximacion de los resultados obtenidos con la ruleta.—Planímetro de Beuviére.—Verificacion y correccion.—Uso del planímetro.—Reduccion á la escala del plano.—Planímetro de Wetli y Starke.—Verificaciones y correcciones.—Teoría y uso del planímetro.—Determinacion de las áreas.—Reduccion á la escala del plano.—Aritmoplanímetro de Lalanne.—Teoría en que se funda el uso del instrumento.—Aplicacion del aritmoplanímetro á la determinacion de las áreas.—Reduccion á la escala del plano.—Planímetro de Amsler.—Determinacion de las áreas y reduccion á la escala del plano.—Reducciones para los planímetros modernos de Amsler.—Observaciones generales.

1169. **Generalidades.**—En ninguna de las obras de Topografía publicadas en España con anterioridad á las nuestras, se habia tratado de los planímetros. En la primera edicion de nuestro *Tratado de Topografía*, publicada en los años de 1864 y 1865, nos hicimos cargo de los que estaban generalmente más en uso, que eran la ruleta de Dupuit, los planímetros de Beuvière, de Wetli y de Amsler, y el aritmoplanímetro de Lalanne. Se comprende las dificultades que tendríamos que vencer, si se atiende á lo poco que podiamos aprender por falta de explicacion minuciosa de instrumentos que, construidos en naciones extranjeras, solo podíamos consultar en párrafos de algunas obras de Geodesia y de Topografía de aquellas naciones, y en memorias y artículos de periódicos científicos, incompletas las unas, lacónicos los otros, y unas y otros en oscuro lenguaje. Por otra parte, la mayoría de esta clase de instrumentos se prestan mucho á ser explicadas sus teorías fácilmente por sus autores, por fundarse en los cálculos diferencial é integral, y hay que prescindir de estos, encerrándose en los estrechos límites de la Geometría elemental, para no traspasar tampoco los de una obra de Topografía y poner al alcance del mayor número de personas su explicacion y uso, que es una circunstancia del mayor interés, todo lo cual implica un trabajo por parte de los autores, que debe tenerse en cuenta para que el público sea indulgente con las faltas y errores que no pueden menos de cometerse.

Como son distintas las propiedades de la Geometría en que se funda cada planímetro, un tratado de esta clase de instrumentos no puede guardar uniformidad en la exposicion de sus descripciones y teorías, y es por lo tanto indiferente adoptar la marcha que se quiera al tratar de ellos. Nosotros, despues de exponer su definicion y orígen, nos ocuparemos de los que publicamos en la primera edicion de esta obra, y son los que están hoy generalmente más en uso, y trataremos además de otros medios que hemos creido conveniente adicionar.

1170. **Definicion de los planímetros.**—Se dá en general el nombre de *planímetros* á los instrumentos que se emplean en la determinacion gráfica de las áreas de las figuras planas, simplificando las operaciones gráficas de los métodos ordinarios conocidos y los minuciosos cálculos que exigen. Varias son las disposiciones que estos ingeniosos aparatos presentan, proporcionando más ó menos exactitud en sus resultados; pero hoy se ha generalizado su uso hasta el punto de preferir sus indicaciones á las que resultan del cálculo, basado siempre en la determinacion de elementos geométricos que no es posible obtener con una exactitud que exceda de la que proporcionan los planímetros debidamente perfeccionados.

1171. **Orígen de los planímetros.**—En la época de 1808 á 1809, cuando se empezó el Catastro parcelario en el Imperio francés, tuvo orígen la invencion de los planímetros más en uso y acreditados. Antes de esta época, se ponian en práctica los procedimientos hasta aquí expuestos en este Tratado en el capítulo XIX, para determinar por los métodos gráficos las superficies agrarias ó parcelas contenidas en los planos geométricos ó topográficos, dividiendo cada una de estas parcelas en triángulos ó trapecios, y trazando las líneas necesarias en el papel para determinarlos y medirlos por medio del compás y las escalas, ó bien empleando los métodos numéricos trazando estos elementos de cálculo en el terreno y midiéndolos con las cintas metálicas ó las cadenas.

Tanto en unos casos como en otros se verificaban los cálculos por las reglas que enseña la Aritmética, ó abreviándolas haciendo uso de los logaritmos, que despues se han reemplazado á su vez por las tablas publicadas de operaciones aritméticas.

En las operaciones pequeñas, de poca importancia ó aisladas, cualquiera método que se elija de los explicados es bueno; pero cuando se trata de operaciones considerables, y en las que se ha de invertir mucho tiempo, como cuando se trata de la carta geográfica de una nacion ó de su catastro parcelario, entonces la cuestion se hace de suyo en extremo penosa. En efecto, siendo muy excesivo el número de millares y aun de millones de triángulos y de trapecios que habria que considerar, era necesario verificar las operaciones siguientes: 1.ª su trazado; 2.ª su numeracion; 3.ª las medidas de las alturas y de una base ó de dos en cada figura con la cadena ó cinta si se trabajaba en el terreno, ó con el compás y la escala si se operaba en el papel; 4.ª el registro de las longitudes de todas estas líneas; 5.ª el estado de las operaciones indicadas para obtener las áreas parciales; 6.ª La columna de los resultados obtenidos; 7.ª la adicion de las partidas contenidas en la columna anterior, y por último, la inscripcion por su órden de los resultados obtenidos en los voluminosos libros que despues se amontonan en los archivos catastrales y los cuales hay necesidad de revisar y confrontar diez veces por lo ménos, debiéndose con frecuencia á la casualidad el descubrimiento de parte de los errores materiales que pueden contener y que es preciso rectificar. De aquí la idea, para evitar estos inconvenientes, de sustituir estos procedimientos con otros más sencillos, económicos y exactos.

Lo primero que se ocurrió á muchos de los geómetras jefes de los departamentos, fué la trasformacion de cada parcela de más de cuatro lados en un triángulo ó cuadrilátero equivalente y sujeto á ciertas condiciones que simplificasen el trabajo, reduciendo este á la mitad, lo que se consiguió haciendo que los triángulos tuviesen una altura expresada en medida decimal determinada y en números redondos de metros, es decir, que fuesen de 10^m, 20^m, 30^m..... 100^m; determinando la eleccion de esta altura con arreglo á la forma y magnitud de cada parcela, ó bien con respecto á la conformacion del triángulo resultante, pues de esta manera se evitaba al calcularlos la medida de este factor y los cálculos quedaban reducidos á la multiplicacion de la longitud de la base por una de las nueve cifras significativas, añadiendo despues al producto tantos ceros como tuviese la altura empleada.

Por ejemplo, sea el triángulo ABC (fig. 812; lám. 60); se prolongará la base AB y se trazarán paralelas á esta base prolongada y cuya equidistancia sea de 20^m y estas paralelas determinarán las distintas alturas que pueden darse á los triángulos equivalentes, debiendo atenernos en la eleccion á las más convenientes, segun la conformacion del triángulo; escogeríamos, pues, el triángulo A'C''B mayor que el propuesto ABC y el AC'B' menor.

En el polígono *abcdemnor* de la fig. 813 (lám. 60), despues de hacer la misma construccion que en el caso anterior, elegiríamos el triángulo ABC de altura de 100 metros y mayor que la del polígono; despues el A'B'C' de 80 metros, y por último, el A''B''C'' de 60 metros.

1172. **Método Rigaux.**—M. Rigaux, ingeniero geómetra del departamento del Cantal (Francia), adoptó el procedimiento de trasformar todo polígono en triángulos (1160) y éstos á otros de una misma altura dada (1154) por ejemplo de 10 metros, con lo cual queda reducida la operacion á la medida de las bases y á la suma de sus longitudes, cuyo resultado se multiplica por 10 añadiendo un cero á su derecha.

La dificultad principal de este sistema estriba en la trasformacion de los polígonos en triángulos, y para hacer esta operacion con sencillez, el autor adopta una placa de cristal ó de talco trasparente y de figura rectangular, que está graduada paralelamente á su base por líneas trasversales equidistantes de 2 en 2 metros y paralelamente á la altura por líneas equidistantes de 10 en 10 metros. Colocando esta placa sobre las parcelas y en contacto de uno de sus lados ó bien diagonalmente, indicaba la subdivision que se pedia y la suma de las bases que habia que multiplicar por 10. Esta suma de bases se abrevia y simplifica haciendo uso de una rueda grande dentada que se llama *rueda sumatoria*, que engrana con otras dos más pequeñas situadas en el mismo plano. Para reducir la cantidad de metros cuadrados contenidos en cada polígono á hectáreas y áreas, se hacia uso de una aguja que desempeñaba las funciones de la de segundos de un reloj que se pudiera hacer girar á arbitrio, segun las cantidades diversas de segundos para componer sucesivamente sobre círculos graduados accesorios los minutos, las horas y los dias.

Este sistema ha ido sucesivamente recibiendo modificaciones debidas á varios autores, y sus planímetros presentan ingeniosas combinaciones para obtener la trasformacion, y la adicion de alturas y bases de los triángulos y trapecios de igual altura contenidos en los polígonos regulares é irregulares, así como la subdivision de superficies en hectáreas y áreas sobre diversos círculos graduados, por un solo motor ó índice que solo le basta recorrer el contorno de cada parcela que deba calcularse.

Conviene observar, antes de tratar en particular de cada planímetro, que estando en general construido cada uno para una escala determinada, solo dan la verdadera superficie en los planos levantados en la misma escala, y con el fin de que puedan aplicarse á otros planos que lo estén en otras escalas distintas, vamos á tratar del modo de corregir los resultados obtenidos.

Sea, por ejemplo, un rectángulo del terreno, y representemos por B la longitud de su base, por A la de su altura y por S su área, se tendrá

$$S = B \times A$$

Si el plano del rectángulo se ha levantado en la escala de $\frac{1}{M}$, las cantidades B y A estarán representadas en magnitud en el plano por las expresiones $\frac{B}{M}$ y $\frac{A}{M}$, y es evidente, que si un planímetro dá la superficie del plano en el tamaño que tiene, resultará

$$S = \frac{B}{M} \times \frac{A}{M} = \frac{B \times A}{M^2}.$$

Para hallar ahora la verdadera superficie del terreno, habrá que multiplicar el valor anterior dado por el planímetro por M^2 y se tendrá por último

$$S = \frac{B \times A}{M^2} \times M^2 = B \times A.$$

Cuando el planímetro está construido de modo que dá las superficies verdaderas del terreno cuando se emplea en los planos que han sido levantados en la misma escala, para la cual ha sido construido el planímetro y que representaremos por $\frac{1}{M}$; si se quiere medir el área del mismo rectángulo anterior, suponiendo ahora su escala diferente de la $\frac{1}{M}$ y representándola por $\frac{1}{M'}$, las longitudes de la base y altura en este plano serán $\frac{B}{M'}$ y $\frac{A}{M'}$ y su área tendrá por expresion

$$S' = \frac{B \times A}{M'^2}$$

El resultado que dá el planímetro será

$$S = \frac{M^2}{M'^2} \times B \times A\,;$$

y la relacion entre la superficie verdadera $B \times A$ que se busca y la obtenida con el planímetro, será

$$\frac{B \times A}{\frac{M^2}{M'^2} \times B \times A} = \frac{1}{\frac{M^2}{M'^2}} = \frac{M'^2}{M^2}.$$

Luego si se considera un polígono cualquiera y llamamos S su área verdadera y S′ la obtenida con un planímetro construido para la escala $\frac{1}{M}$, siendo $\frac{1}{M'}$ la escala del plano del polígono, se tendrá tambien la relacion

$$\frac{S}{S'} = \frac{M'^2}{M^2};$$

de donde

$$S = S' \times \frac{M'^2}{M^2},$$

que nos manifiesta, que el área verdadera S de un polígono se obtiene multiplicando la obtenida en el planímetro, por la relacion $\frac{M'^2}{M^2}$ entre M'^2 correspondiente á la escala del plano y M^2 correspondiente á la del planímetro.

1173. **Sistema de la escuadra-regla.**—El procedimiento con la escuadra-regla es muy sencillo y puede considerarse como un planímetro fundado en la trasformacion de los planos de los polígonos en su triángulo equivalente.

Sea ABCDEFG (fig. 814; lám. 60) el polígono trazado en el papel cuya área queremos determinar; se colocará una escuadra *abc* de manera que la hipotenusa *ab* pase por los vértices B y D, y se apoye sobre el cateto mayor *bc* una regla R. Teniendo bien fija esta regla, se hace correr á la escuadra á lo largo de ella hasta que la hipotenusa pase por el punto C y se traza la recta CM que será paralela á la recta BD; colóquese la punta de un lápiz en el punto de interseccion M con la base AB prolongada y se hace girar la escuadra siempre acompañada de la regla alrededor de la punta del lápiz, hasta que la hipotenusa pase por el vértice E. Hecho esto, se vuelve á hacer resbalar la escuadra sobre el canto de la regla hasta que pase por el punto D y se señala el punto P en que vuelve á cortar á la prolongacion de la base AB, resultando ser la recta DP paralela á la EM, y se traza la EP, y verificando despues la misma operacion con los lados AG, GF y FE se hallará trasformado el polígono dado en el triángulo equivalente ENP. Mídase la base y altura de este triángulo con la escala y la mitad del producto de estas líneas será el área pedida. A pesar de la sencillez de este método, se obtiene el resultado con tanta ó mayor exactitud que con algunos de los planímetros que nos proponemos describir.

1174. **Sistema de dos escalas y regla.**—En la Direccion de operaciones topográfico-catastrales se ha ensayado con buen éxito este sistema de dos escalas que es bastante ingenioso, y consiste en dos escalas de metal ó de marfil ó boj unidas por uno de sus extremos por medio de una charnela. Este aparato, construido en París con arreglo á los planos remitidos por dicha Direccion, se halla representado en la fig. 815 (lámina 60). Las escalas son las AB y *ab* y la pieza *c* que es la charnela de union, tiene un taladro circular para poder colocar el centro de giro sobre el punto que se quiera, y el boton *d* colocado en la escala AB sirve para separar esta escala de la *ab* que se oprime sobre el papel para fijarla. Por separado le acompaña una regla RR de bastante longitud (fig. 816; lámina 60).

Uso del aparato.—Sea el polígono ABCDE (figuras 815 y 816; lám. 60) el que se quiere reducir á triángulo equivalente, para medirle despues. Se pone en contacto con la base AB prolongada por ambos extremos, el canto interior de la escala *ab* y de modo que el centro *c* coincida con el vértice B del polígono. Hecho esto, se coloca la regla RR en contacto con el centro exterior de dicha escala *ab* y procurando tener bien fijas la regla RR y la escala *ab*, se hace girar á la otra escala AB alrededor del eje de la charnela *c*, abriendo las dos escalas lo suficiente para que el canto interior de la escala AB, pase por el vértice D y se podrá trazar ó imaginar la recta BD. Haciendo resbalar ahora á la escala *ab*, sin variar la abertura que tienen las dos escalas, á lo largo de la regla RR, hasta que el canto interior de la escala AB pase por el vértice C, el centro *c* se hallará ahora en el punto N, resultando la CN paralela á la BD; trácese la DN y volviendo á hacer girar á la escala AB hasta que su canto interior pase por el vértice E, se imaginará la NE y se hará resbalar á la escala *ab* como antes, con la abertura que tienen ahora las dos escalas hasta que el canto interior de la escala AB pase por el vértice D, en cuyo caso se habrá trasportado el centro *c* al punto S y la recta DS será paralela á la EN, obteniéndose el triángulo AES que será equivalente al polígono dado.

Para hallar ahora las longitudes de la base y altura del triángulo AES, se hace mover el aparato á lo largo de la regla RR, siempre fija, y colocando el *cero* de la escala *ab* en el punto A, la division que marque el punto S nos dará la longitud de la base AS del triángulo AES y para obtener la altura se hará girar la escala AB hasta que quede perpendicular á la *ab* y corriendo el aparato á lo largo de la regla RR hasta que el canto interior de la escala AB pase por el vértice E del triángulo AES, se obtendrá la longitud de dicha altura en la division que marque el punto E en la escala AB. Para obtener ahora la superficie del triángulo AES ó del polígono en cuestion ABCDE, se tomará la mitad del producto de la base y altura halladas.

Cuando la longitud de la base AS excede á la de la escala *ab*, se puede hacer la trasformacion por ambos lados de los extremos A y B de la base, dando al triángulo la altura DP del vértice más elevado del polígono; en este caso, despues de marcar el punto N como antes, á la derecha de la base, se colocará el instrumento invertido, y por el mismo método se marcaría el punto F, con lo que se tendría el triángulo DNF equivalente al polígono propuesto.

Si de antemano se determina la altura del triángulo resultante, con el fin de evitar la medicion de aquella y hasta la multiplicacion por la base, se toma por altura un múltiplo fijo decimal de la unidad, que suponemos sea el *metro*, y habrá que hacer una nueva trasformacion, como vamos á explicar. Supongamos que la altura haya de ser de 100 metros y que el punto L del polígono tenga esta altura; despues de trasformado el polígono en el triángulo EAS, se trata ahora de trasformar este triángulo en otro que tenga dicha altura. Colocada la escala *ab* sobre la base

AB del polígono y el centro *c* del instrumento en S, se hace girar á la escala AB hasta que su canto interior pase por el punto L, y se imaginará la recta SL; se hace resbalar ahora el aparato sobre la regla RR hasta que dicho canto pase por el vértice E y el centro *c*, señalará el punto T, resultando la TE paralela á la SL, y el punto T nos dará la longitud de la nueva base AT del triángulo LAT, cuya altura LZ es de 100 metros, equivalente al EAS, y por lo tanto al polígono propuesto. No habrá más que añadir dos ceros á la longitud de esta base, y tomando la mitad del resultado se obtendrá la superficie del polígono.

Puede tambien exigirse que la altura del triángulo equivalente á un polígono dado, no solo sea determinada, sino que despues de obtenido aquel, se quiera tambien trasformarle en otro equivalente, cuyo vértice tenga una posicion dada. Para esto, supongamos que ABC (fig. 815 y 817; lám. 60) sea el triángulo resultante hallado por el método anterior de una altura determinada, y que además sea F el vértice dado de posicion del nuevo triángulo que se quiere determinar; se colocará como siempre la escala *ab* sobre la base AB y apoyada sobre la regla RR de modo que el centro *c* esté en A, y se abrirá la escala AB de modo que su canto interior pase por F, con lo cual se podrá trazar una recta AF por los puntos A y F. Colocando la escala AB perpendicular á la *ab*, se correría el instrumento para obtener la altura CP del triángulo ABC, y se continuaría moviendo aquel, sin dejar de ser las escalas perpendiculares, para señalar sobre la AF prolongada, el punto E de la misma altura que el C. Volviendo á mover el aparato hasta que el centro *c* se halle en B, se hace girar á la escala AB hasta que pase por el punto F, se traza la FB y se vuelve á seguir el movimiento hasta trazar por el punto E la paralela ED á la FB, la cual determinará el punto de interseccion D que nos dará la base AD del nuevo triángulo AFD, que es equivalente al ABE y éste al ABC, como es fácil ver en la misma figura.

Cuando este aparato está construido de modo que la escala AB dispuesta perpendicularmente á la *ab*, puede correr á lo largo de ésta y fijarse en el punto que se quiera por medio del tornillo *t* (fig 815; lámina 60), puede tambien servir para fijar los puntos de un plano cuando se conocen sus coordenadas, pues de este modo pueden determinarse las alturas de las ordenadas contadas en la escala AB, correspondientes á las abscisas dadas y medidas en la escala *ab*.

Como acaba de verse en lo dicho hasta aquí, los métodos ó sistemas, así como los aparatos expuestos hasta ahora, no tienen otro objeto que enseñar la práctica de ejecutar las operaciones gráficas de trasformacion que hemos explicado en el capítulo XX, y no pueden considerarse dichos aparatos como los instrumentos llamados á tener el verdadero nombre de planímetros, pues los resultados obtenidos hasta ahora son los mismos que se obtienen en el dibujo lineal, haciendo uso de una regla y una ó dos escuadras de madera de peral y de un juego de escalas de metal, marfil ó boj (490), y áun se hacen las operaciones con más prontitud y desembarazo. Tambien hay escuadras de madera que, además de tener los cantos de metal, llevan grabadas escalas en sentido del borde del cateto mayor.

1175. **Ruleta de Dupuit**.—Este instrumento está destinado á la medida de la longitud de una recta, y á la de la suma de varias rectas recorridas sucesivamente por los puntos de la circunferencia de una rueda *r* (fig. 736; lám. 55), que gira con un piñon concéntrico é invariablemente unido á ella, alrededor de un eje proyectado *m*. Los dientes del piñon engranan con los de la rueda R, móvil alrededor del eje *n*, y el sistema está dispuesto de manera que la rueda R dé una revolucion completa en el tiempo que la *r* da diez, por el engranaje de diez dientes de que consta el piñon con ciento que presenta la rueda R. Dos agujas indicadoras *s*, *t* están fijas con los ejes *m*, *n* en una armadura metálica *p*, sujeta al mango A. Un tornillo de presion *x* acerca ó separa de la rueda *r* un resorte de acero, con el fin de poderla hacer girar más ó menos libremente. La circunferencia de la rueda *r* está rayada como las cabezas de los tornillos de los instrumentos, á fin de que no resbale sin girar, pues en este caso no se tendrían exactamente las magnitudes de las líneas que recorriese.

La circunferencia de la rueda *r* tiene un desarrollo de un decímetro exacto, que está dividido en diez partes, numeradas con las cifras 0, 1, 2..... y cada una de estas partes corresponde á un centímetro, subdividido en otras veinte, cada una de las cuales vale medio milímetro. Las divisiones correspondientes á los milímetros exactos aparecen algo más largas que las otras, prolongándose más entre ellas las que corresponden á los cinco milímetros.

La rueda R presenta tambien las cifras 0, 1, 2..... que indican con las unidades que representan el número de revoluciones completas ó de decímetros recorridos por la rueda *r*, á partir de una posicion en que los ceros de las graduaciones de R y de *r* coinciden con los extremos de las agujas *s* y *t*; posicion que se obtiene haciendo girar á la rueda *r* hasta que tenga lugar la coincidencia, es decir, hasta tanto que la aguja *s* marque el *cero* en la rueda R, teniendo en cuenta que la *t* marcará *cero*, siempre que la *s* esté en una de las divisiones señaladas con números y con el *cero* en la rueda R.

1176. Supongamos otra ruleta en que la circunferencia de la rueda *r* (fig. 736; lám. 55) tenga de desarrollo en escala natural $0,^{m}05$ y que esté dividida en 10 partes, como lo está generalmente; cada division valdrá

$$0,^{m}05 : 10 = 0,^{m}005$$

que en la escala de $\frac{1}{200}$ representará un metro. La ruleta estará entonces en la escala de $\frac{1}{200}$ y el desarrollo del arco *t1* será la longitud de un metro; el del arco $t2$ la de $2,^{m}$...; y el del toda la rueda r será de 10 metros en la escala adoptada.

Cada una de las divisiones t—1, 1—2, 2—3, etc., de la rueda r, está dividida en 10 partes iguales que son decímetros de la escala adoptada.

Teniendo en cuenta la relacion que hemos dicho existir entre el número de vueltas de ambas ruedas, es claro, que partiendo de los dos *ceros*, cuando la rueda r haya dado una revolucion completa, la rueda R habrá dado $\frac{1}{10}$ de revolucion; y como está dividida en 10 partes, la aguja s marcará la division 1. Á las 2, 3... revoluciones de r, la aguja s marcará los números 2, 3....; es decir, las decenas de metros recorridos por el punto t.

1177. **Usos del instrumento.—Apreciacion de las longitudes.**— Para medir la longitud de una recta trazada en el plano, se hace en la ruleta la coincidencia de los ceros con las agujas, como acabamos de indicar, y se coloca el instrumento verticalmente de modo que el extremo de la aguja t coincida con el de la recta dada que se halle más próximo al operador, y se pone en movimiento al instrumento apoyando la mano ligeramente en el mango A para que la rueda r no resbale sin girar, recorriendo de este modo todos los puntos de la recta dada, con los que irá coincidiendo sucesivamente el extremo de la aguja t, hasta que corresponda exactamente al último de ellos. La observacion de las posiciones ocupadas entonces por las agujas indicadoras, dará la longitud buscada. Si tomamos por unidad el centímetro, y la aguja s resulta situada entre las divisiones 3 y 4 de R, la rueda r habrá dado tres revoluciones ó recorrido 30^{cm}, y si la distancia del cero de la rueda r al extremo de la aguja t es de dos centímetros marcados por la cifra 2, y seis milímetros y medio observados en la graduacion, que componen $2,^{cm}65$, la longitud de la recta será $32,^{cm}65$ en escala natural. Se vé, pues, que las decenas se leen con la aguja s en los números de la rueda R: las unidades con la aguja t en las divisiones de la rueda r señaladas con números y las décimas y centésimas con la misma aguja en las divisiones que esta rueda lleva simplemente marcadas.

Cuando la recta que se mide es de mucha longitud, puede suceder que la rueda R dé más de una revolucion: entonces es preciso cuidar de anotar las veces que pasa por s el cero de la graduacion de esta rueda y se tendrán las centenas correspondiendo cada vuelta á 100^{cm}.

Para hallar el valor de la suma de varias rectas, se empieza por colocar las dos ruedas de modo que ambas agujas coincidan con los *ceros* de sus respectivas direcciones, y dispuesto así el aparato, se coloca verticalmente de modo que la punta t de la aguja mt (fig. 736; lám. 55) caiga sobre el punto b (fig. 794; lám. 59) y se le mueve paralelamente á su primera posicion, recorriendo la recta bh; se levanta despues con cuidado para que la aguja no deje de señalar la misma division que en el punto h y se recorre la recta b'; y así se continúa hasta haber recorrido todas las paralelas y entonces el punto t habrá recorrido una longitud igual á la suma $b+b'+b''+\ldots$ la cual en la figura propuesta es $1,^{m}2+2,^{m}4+2,^{m}6+2,^{m}8+3,^{m}0+3,^{m}2+3,^{m}4+3,^{m}6+2,^{m}8+2,^{m}0+1,^{m}2+0,^{m}4=28,^{m}6$

Puede hacerse la medida de una recta sin la coincidencia prévia de los ceros con las agujas, anotando la lectura que marca la ruleta en el momento de empezar á recorrer la recta, y hallando despues la diferencia entre esta y la que señala al concluir de recorrerla. Si, por ejemplo, se empezase á medir una segunda recta con la graduacion $32,^{cm}65$ que marcaba al concluir la que antes hemos propuesto como ejemplo, y despues marcase $79,^{cm}80$, la longitud que se busca sería de $47,^{cm}15$

1178. Cuando se quiere hallar el valor de la suma de varias rectas, se recorren sucesivamente como hemos indicado, observando tan solo la lectura inicial, si no se parte de la posicion en que marca los ceros, y la obtenida despues de recorrer todas las rectas.

Si al medir una de ellas se prolonga el camino de la ruleta más allá de la longitud correspondiente, se rectifica el error que pudiera resultar volviendo á su punto extremo por el mismo camino.

La suma de las rectas puede obtenerse tambien con la escala de marfil, ó por medio de la escala gráfica ordinaria y el compás.

1179. **Reduccion á la escala del plano.**—Obtenidas como hemos visto las lecturas en escala natural, se reducen á la escala del plano, viendo la longitud que en esta representa la magnitud real de un centímetro, y multicando por esta longitud el valor obtenido por medio de la ruleta. En la escala de $\frac{1}{100}$, en que un centímetro representa un metro en el plano, la longitud hallada $32,^{cm}65$ representará $32,^{m}65$. En la de $\frac{1}{1000}$, representará $326,^{m}5$. En la de $\frac{1}{5000}$, $32,65\times 50=1632,^{m}50$. En la de $\frac{1}{250}$, $32,65\times 2,5=81,625$.

1180. **Determinacion de las áreas.**—Para medir el área de un polígono convexo ABCDE (fig. 737; lám. 55) se le supone dividido en trapecios y triángulos por una série de rectas b, b', b'', b''' paralelas, equidistantes y trazadas en una direccion tal, que todos los vértices coinciden con una ú otra de las mismas líneas. Esta última condicion se satisface haciendo girar sobre el polígono un papel trasparente en el que se han trazado anteriormente las paralelas, ó bien recortando el polígono y haciéndole girar sobre un papel cuadriculado hasta que coincida con paralelas equidistantes. Representando por a la equidistancia de las b, b'... el área S del polígono será la suma de las áreas de los triángulos y trapecios en que queda dividido, resultando

$$S=\frac{a\times b}{2}+\frac{a\,(b+b')}{2}+\frac{a\,(b'+b'')}{2}+\frac{a\,(b''+b''')}{2}+\frac{a\times b'''}{2};$$

sumando estas fracciones, reduciendo, suprimiendo el factor 2, que resulta comun á numerador y denominador, y sacando á la cantidad a como factor de las cantidades á que multiplica, se obtiene por último

$$S = a\,(b + b' + b'' + b''') \qquad [1].$$

Hallando la suma de las paralelas y el valor de a, tomando para ambos un centímetro por unidad, la fórmula dará el área del polígono en centímetros cuadrados; no habrá más que multiplicar este valor por el área que representa el centímetro cuadrado en la escala del plano, para obtener en metros cuadrados el área que se busca.

Ejemplo.—Tratemos de hallar el área del polígono ABCDE, construido en la escala de $\frac{1}{250}$. Se hallará la suma $6,^{cm}3$ de las paralelas b, b'.... (1178), y observando que distan seis milímetros entre sí, se tendrá $a = 0^{cm}6$, resultando para el área

$$S = 6,^{cm}3 \times 0,6 = 3,^{cm^2}78;$$

como en la escala del plano un centimetro lineal representa $2,^{m}5$, el centímetro cuadrado representará $6,^{m^2}25$, por lo que el polígono representará el área

$$s = 6,^{m^2}25 \times 3,78 = 23,^{m^2}625.$$

1181. Si se hace que las paralelas equidisten en la cantidad real que representa un metro en la escala del plano, será $a = 1$, y la fórmula anterior se convertirá en

$$S = b + b' + b'' + b''' \qquad [2];$$

no habrá por lo tanto más que hallar la suma de las paralelas (1178), y reducirla á la escala (1179) para obtener el área del polígono

Ejemplo.—Sea ABCD (fig. 738; lám. 55), un polígono en la misma escala $\frac{1}{250}$, que puede ser tambien un perfil trasversal, y supongamos que las paralelas distan entre sí cuatro milímetros que representan un metro en la escala adoptada: aplicando la fórmula [2] supongamos que resulte $S = 13,^{cm}3$, y observando que un centímetro lineal representa en la escala $2,^{m}5$, será por último

$$s = 13,^{cm}3 \times 2,5 = 33,^{m^2}25.$$

Si la escala del plano ó perfil fuese como antes de $\frac{1}{250}$ y la de la ruleta fuese la de $\frac{1}{200}$ que hemos descrito (1176), como cada $0,^{m}005$ representan un metro en la ruleta y $1,^{m}25$ en la escala de los perfiles; es evidente que habrá que multiplicar por $1,^{m}25$ el número abstracto obtenido en la ruleta al hallar la suma $b+b'+b''+\ldots$

En general, *se determina* la longitud en escala natural del desarrollo de la unidad de la ruleta; véase á cuánto corresponde este desarrollo en la escala del perfil, y el número que resulte será el factor por quien hay que multiplicar la suma $b+b'+b''+\ldots$

Otro ejemplo —Con una ruleta en la escala de $\frac{1}{100}$, *se quiere hallar el área de un perfil en la de* $\frac{1}{450}$.

El desarrollo en escala natural de la unidad de la ruleta es $0,^{m}01$ que en la escala de $\frac{1}{450}$ representan $4,^{m}5$; luego el factor que buscamos es $4,^{m}5$.

1182 La equidistancia de las paralelas puede hallarse en distinta escala que ellas, cuando su direccion es determinada: se aplica entonces la fórmula [1], expresando el valor de a en su escala correspondiente, y multiplicándole por la suma de las paralelas, reducida á su escala (1179).

Si en la fig. 737 (lám. 55) se tiene por ejemplo $a=6^{m}$, lo que indica que la escala á que la equidistancia corresponde es la de $\frac{1}{1000}$, se tendrá (1180),

$$b+b'+b''+b'''=6,^{cm}3,$$

que reducida á su escala de $\frac{1}{250}$, dará (1179),

$$b+b'+b''+b'''=15,^{m}75:$$

haciendo entonces aplicacion de la regla que acabamos de dar, resultará

$$s=6^{m}\times 15,^{m}75=94,^{m^2}50.$$

1183. **Escala de áreas** —Puede evitarse el cálculo indicado (1180), construyendo desde luego una *escala de áreas*, para lo cual observaremos que siendo $0,^{cm}6$ la separacion de las ordenadas, $\frac{1}{0,6}$ será el lado de un rectángulo cuya área sea un centímetro cuadrado, y como esta área comprende $6,^{m^2}25$ en la escala de $\frac{1}{250}$, la fraccion $\frac{1}{0,6\times 6,25}=0,^{cm}2666\ldots$

será la longitud que ha de recorrerse en las paralelas para que resulte un metro cuadrado en la escala del plano, y por consiguiente la magnitud que corresponde á la unidad de la escala de áreas. Tomando sucesivamente sobre una recta dada á partir de un mismo punto, las distancias $0,^{cm}266$... $0,^{cm}533$... $0^{cm}799$..., y escribiendo los números 1, 2, 3..... en los puntos de division correspondientes, no habrá más que recorrer con la ruleta las ordenadas como hemos ya dado á conocer, colocarla despues en el cero de la escala formada, y hacerla marchar sobre ella en sentido contrario á la graduacion del instrumento, hasta que coincidan en él de nuevo los ceros. El punto de la escala en que esto se verifique indicará el área que se trataba de conocer, quedando los ceros en coincidencia para proceder á la medicion de una nueva área.

La escala correspondiente á la fig. 738 (lám. 55) se hallará por la fraccion cuyo numerador es la unidad y el denominador $0{,}4 \times 6{,}25$, que da $0,^{cm}4$.... $0,^{cm}8$.... $1,^{cm}2$.... $1,^{cm}6$.... para 1, 2, 3, 4... metros cuadrados del área que se trata de hallar.

1184. **Aplicaciones á varios casos particulares.**—Puede suceder que las paralelas tengan una direccion determinada como en la fig. 739, (lámina 55), que puede representar un perfil trasversal, en cuyo caso, no pasando por todos los vértices, la aplicacion del método general da en vez del área del triángulo *adc* la del *acb* que tiene la misma base y por altura la equidistancia de las paralelas. En los ángulos entrantes *s* se obtendrá el área del trapecio *lnre* en vez de la del polígono *lnsre* que resulta de la descomposicion; y en los ángulos salientes *z* se obtendrá el trapecio *actm* en vez del polígono *actmz*. Se hallará el área verdadera del polígono dado, restando las de los triángulos *bdc* y *nsr*, y añadiendo las de los *azm*.

1185. Cuando se aplica el procedimiento general y las paralelas pueden tomar una direccion cualquiera, es posible hacer que pasen como ya hemos indicado (1180) por todos los vértices del polígono si es rectilíneo, ó bien por estos y los puntos de inflexion de las curvas si es mistilíneo, y cuando la superficie está terminada por una curva contínua como la de la fig. 602 (lám. 40), haciendo que las paralelas extremas resulten tangentes á la curva.

En este último caso puede hallarse el área con más aproximacion, recorriendo primero todas las paralelas, despues todas menos la primera y la última, y tomando la semisuma de los resultados obtenidos.

1186. En los casos análogos al de la fig. 600 (lám. 40), pueden hallarse separadamente las áreas del polígono principal y de las porciones comprendidas entre los lados de este y el contorno, aplicando á todas ellas los procedimientos generales que hemos expuesto, y haciendo la suma de las áreas obtenidas. Se comprende que en algunos casos, como en el que presenta la fig. 601 (lám. 40), será preciso restar las áreas de aquellas porciones que resultan interiores al polígono principal.

1187. **Observaciones acerca del grado de aproximacion de los**

resultados obtenidos con la ruleta.—La experiencia ha dado á conocer que el error cometido en la apreciacion de las áreas con la ruleta, puede ser en las escalas ordinarias de 2 á 3 por 100 de la superficie que se considera; menor por lo tanto que el que tiene lugar cuando se aplica el cálculo determinando gráficamente los elementos geométricos. En la escala de $\frac{1}{100}$ para las paralelas que han de medirse, no hay diferencia apreciable entre los errores que produce el uso del instrumento de que nos ocupamos y los que resultarían de la aplicacion del cálculo, en razon á la mayor apreciacion en los valores de las paralelas.

1188. **Planimetro de Beuvière.**—Fundado en el mismo principio que la ruleta, varía la disposicion de este instrumento y se compone de dos partes principales: la una, fija, consta de una plancha AB (fig 740; lám. 55) de hierro fundido, la cual se puede colocar sobre un tablero perfectamente plano juntamente con los dibujos de las figuras cuyas áreas se trate de determinar, y se maneja por dos agarraderos *m*; de una regla CB fija invariablemente á la plancha, y de una banda metálica EF mantenida por medio de resortes en una posicion paralela á la regla CB, de la cual puede separársela tirando del agarradero *a*. Esta banda se designa con el nombre de *regla tangente*, por serlo á la circunferencia de un disco horizontal graduado *c*, que forma parte del *aparato móvil*. Se compone este último del tablero *hk*, al que está fija invariablemente una regla *r*: el eje de rotacion del disco se apoya en esta regla y en el soporte D, á cuyo extremo se halla el de un resorte en espiral fijo por el otro á la misma regla, á la cual está unido tambien el nonius *n* correspondiente á la graduacion del disco. Una placa rectangular P de cristal, en la cual se hallan trazadas varias rectas paralelas entre sí y á la regla CB á la distancia de 5^{mm} una de otra, así como una perpendicular á ellas llamada *línea de fé*, está dispuesta en una armadura relacionada con la regla *r* por medio de la palanca acodada *p* y de los tornillos *t*. Otros dos tornillos convenientemente dispuestos en la palanca sirven para corregir la posicion de la línea de fé, haciendo que sea perpendicular á la regla CB.

1189. *Movimientos del aparato.*—Tirando del soporte D puede darse al aparato móvil un movimiento de traslacion, durante el cual se apoya constantemente contra la regla CB, y el engranaje que tiene entonces lugar entre la cara interior de la regla tangente y la circunferencia del disco *c*, rayadas ambas con este objeto, imprime un movimiento de rotacion al disco, en cuya circunferencia se desarrolla un arco igual al camino recorrido durante el movimiento de traslacion por cada uno de los puntos que no giran en el aparato móvil, é igual por consiguiente á la distancia entre la primera y la última posicion de la línea de fé, que se ha movido paralelamente á sí misma.

Cuando se quiere evitar el movimiento de rotacion del disco, se separa de él la regla tangente tirando del agarradero *a*, y puede darse al aparato el solo movimiento de traslacion

1190. *Graduaciones*.—La circunferencia del disco tiene un desarrollo de 500mm, correspondiente á un rádio de 8cm próximamente, y está dividido en cien partes numeradas de diez en diez. Cada una de estas tiene de desarrollo cinco milímetros, y se subdivide en 100 partes iguales con ayuda del nonius.

En virtud de esta disposicion, tomando por unidad cada una de las cien divisiones del disco, las indicaciones del planímetro representarán metros y decímetros cuadrados en la escala de $\frac{1}{200}$, correspondiendo cada metro á un cuadrado que tiene de lado la separacion 5mm de las paralelas en la placa P; y cada decímetro, centésima parte del metro cuadrado, á el que tiene de lado medio milímetro, y que se obtiene en la subdivision con el auxilio del nonius.

Cuando el área pase de 100^{m^2} en la escala del instrumento, el disco habrá dado más de una revolucion, y es preciso tener cuidado de anotar las veces que el cero de su graduacion pasa por el del nonius, para obtener las centenas de metros que ha recorrido.

1191. **Verificacion y correccion**.—La línea de fé de la placa trasparente P debe ser perpendicular á la direccion de la regla CB. Para ver si tiene lugar esta circunstancia, se trazan en un papel dos rectas perpendiculares entre sí, haciendo coincidir con ellas la línea de fé de la placa y una de sus perpendiculares; dando entonces al aparato el movimiento de traslacion, se ve si esta perpendicular continúa en coincidencia con la trazada en el tablero, ó se separa de ella: en el primer caso, el instrumento está corregido; en el segundo, será preciso variar la posicion de la línea de fé relativamente á la regla fija del instrumento, por los tornillos dispuestos al efecto en la palanca acodada (1188).

1192. **Uso del planímetro**.—Para determinar el área de un polígono M (fig. 744; lám. 55), se dispone sobre él la placa de cristal P del instrumento, de modo que dos de sus paralelas pasen por los vértices opuestos, y á ser posible, por uno de los lados y el vértice más distante, como tiene lugar en la figura. Cuando está terminado por una curva contínua, se dispone el planímetro de modo que dichas paralelas sean tangentes á la curva. Para conseguir la debida colocacion del instrumento, es preciso mover la plancha AB que sostiene todo el instrumento, manejándola por los mangos *m*.

Las paralelas de la placa dividen así el polígono en zonas, que tienen en general la forma de trapecios, los cuales es preciso reducir á rectángulos equivalentes *por compensacion* (1141) considerando perpendiculares *ad*, *bc*, que formen con los lados no paralelos triángulos próximamente iguales: la cuestion estará reducida á determinar las áreas de estos rectángulos, que tienen una altura comun, y hacer la suma de estas áreas. El área total será por lo tanto la de un rectángulo que tenga por altura la equidistancia de las paralelas, y por base la suma $ab+a'b'+a''b''+a'''b'''$ de las bases de los rectángulos. Para hallar esta suma, se da al aparato móvil el movimiento de traslacion hasta que la línea de fé de la placa de cristal ocupe la posicion *ad*; se hace la coincidencia del cero de la placa giratoria con el del nonius, y se da al aparato el movimiento de traslacion, hasta que la línea de fé ocupe la posicion *bc*; con lo cual habrá girado el disco, y la graduacion marcará la distancia *ab* recorrida por la línea de fé (1189) Se separa del disco la regla tangente á fin de impedir el movimiento de rotacion, y se lleva la línea de fé de la placa trasparente á la posicion $a'd'$, recorriendo como antes la recta $a'b'$, cuyo valor aparecerá sumado con el de *ab* en la graduacion del instrumento; continuando del mismo modo hasta haber recorrido la base $a'''b'''$ del último rectángulo. Entonces se habrá desarrollado la circunferencia del disco en una cantidad igual á la suma de estas bases, y el área del polígono M estará expresada por la graducion en metros y decímetros cuadrados en la escala de $\frac{1}{200}$ (1190).

1193. **Reduccion á la escala del plano.** — Cuando la escala sea diferente de la del planímetro, habrá que multiplicar el resultado obtenido por el número de metros cuadrados que representa en la escala del plano el área del cuadrado de 5^{mm} de lado. Si el plano está en la escala de $\frac{1}{2000}$, habrá que multiplicar por 100 el resultado obtenido. Si está en la de $\frac{1}{250}$ habrá que multiplicarle por $(1,25)^2 = 1,5625$.

Con el auxilio de las subdivisiones de la placa P pueden aplicarse los principios expuestos á diferentes equidistancias para las paralelas, lo cual no puede presentar dificultades á los que hayan comprendido la teoría y uso del planímetro de que acabamos de ocuparnos, así como lo que hemos expuesto para la ruleta (1180 y siguientes).

1194. **Planímetro de Wetli y Starke.** —Consta de dos partes principales: la primera de ellas es móvil en sentido de la longitud del tablero metálico T (fig. 742; lám. 55), que sirve de base al instrumento, por medio de tres ruedas (r, r') sobre unas barras fijas al mismo tablero, y se compone de una regla (b, b') armada de un estilo *e*, la cual se mueve en su plano horizontal y en sentido perpendicular á la longitud del mismo tablero entre cuatro ruedas (s, s'), cuyos ejes están fijos al bastidor del aparato móvil. Un hilo metálico (h, h') tendido paralelamente á la longitud de la regla, está fijo por sus extremos á unos soportes dispuestos en ella, y se pone en estado de tension por medio de un tornillo *a* Este hilo se arrolla con una sola vuelta á un cilindro ó tambor *c*, que es susceptible de girar alrededor de un eje vertical que se apoya en una pieza fija al indicado bastidor del aparato móvil, comunicando su movimiento á un disco de cristal (P, P') cubierto de papel de grano y dispuesto perpendicularmente al eje del tambor, al cual está unido de una manera invariable. Los tornillos *t*, que terminan los ejes de las ruedas (r, r') sirven para variar trasversalmente la posicion del eje de rotacion de la rueda y el tambor.

La parte fija del instrumento se compone de un tablero metálico C, elevado perpendicularmente al plano del tablero T y fijo invariablemente á él, constituyendo con otras piezas el contador del aparato. Una rueda lenticular *(m, m')* que descansa por su peso sobre el disco (P, P'), siendo tangente á su plano, forma un solo cuerpo con la varilla *v* y puede girar con ella alrededor del eje de esta última, la cual se apoya por sus extremos en una armadura *d*. Esta armadura puede elevarse con la varilla y la rueda lenticular, impidiendo el contacto de esta con el disco, á causa de ser susceptible de girar alrededor del eje determinado por los tornillos *(z, z')*, que unen la armadura al tablero del contador y sirven para corregir lateralmente la posicion de la varilla. Termina esta última con una doble aguja indicadora, que corresponde á la semicircunferencia graduada *l*, y un piñon cuyos dientes engranan con los de la rueda graduada *k*, móvil en su plano alrededor de un eje fijo al tablero del contador.

1195. *Movimientos del aparato.*—El aparato móvil es susceptible de un *movimiento de traslacion* en sentido de la longitud del tablero T, haciendo avanzar ó retroceder al tablero del bastidor sobre las ruedas *(r, r')* sin tocar á la regla *(b, b')*, y de un *movimiento de rotacion* el disco y el tambor, que se obtiene haciendo deslizar á la misma regla entre las ruedas (*s*, *s'*): el hilo *(h, h')* se arrolla entonces por un lado y se desarrolla por el otro en el tambor, haciéndole girar de modo que cada punto de su seccion recta recorre un arco de igual longitud que el camino recorrido en línea recta por cada uno de los puntos del hilo, que lo es á su vez al que corresponde al estilo *e*. El mismo movimiento de rotacion experimenta el disco P, el cual hace girar á la rueda (*m*, *m'*), en virtud de una especie de engranaje que tiene lugar entre los puntos del filete de esta rueda y los de la placa que van pasando por debajo de ella, debido á las asperezas del papel que la recubre. A causa del movimiento de rotacion, el punto inferior de la rueda lenticular describe sobre la placa en cada posicion del eje de esta última en la recta que puede recorrer por el movimiento de traslacion, una circunferencia cuyo rádio es la distancia de dicho punto inferior al centro de la placa; siendo nula para el caso en que ambos puntos coinciden. El movimiento de la rueda lenticular y de las piezas que con ella forman cuerpo, se comunica por medio del piñon en que aquella termina á la rueda dentada *k*, cuya línea de fé se halla fija en la parte superior del montante del contador.

1196. *Graduaciones del contador.*—La rueda *k* está dividida en ciento veinte partes iguales, numeradas de diez en diez; y la semicircunferencia *l* lo está en tres partes iguales, y cada una de ellas subdividida en cien partes, numeradas tambien de diez en diez. La aguja indicadora correspondiente á esta graduacion recorre la tercera parte de ella, esto es, el espacio comprendido entre dos ceros, en el mismo tiempo en que pasa una division de la rueda *k* por debajo de la línea de fé correspondiente Cada una de estas últimas divisiones corresponde á un centímetro cuadrado, y por consiguiente, cada una de las del arco *l* á su centésima parte, que es un milímetro cuadrado.

1197 **Verificaciones y correcciones.**—Para el debido empleo del planímetro que nos ocupa, es condicion precisa que el eje de la varilla *v* y el de rotacion de la placa y el tambor se hallen en un mismo plano, perpendicular á la vez al del montante C y al del tablero T para todas las posiciones del eje del tambor; será preciso, por lo tanto, hacer:

1.° Que el centro del disco P pase exactamente por debajo del punto inferior de la rueda lenticular, en el movimiento de traslacion de dicho centro. Para ver si esta circunstancia se verifica, se dá al aparato este movimiento hasta que tenga lugar á la vista la coincidencia de dichos puntos, y se busca una posicion en la cuál, dando al disco el solo movimiento de rotacion por medio de la regla *b*, las agujas indicadoras no acusen el menor movimiento permaneciendo completamente inmóviles; si esta posicion no existe, se hace mover á la varilla paralelamente á sí misma por los tornillos (*z*, *z'*), aflojando uno de ellos y apretando el opuesto, hasta conseguir, por medio de varios tanteos, dar al eje la indicada posicion.

2.° Que el eje de rotacion del disco se halle, en todas las posiciones que adquiere por su movimiento de traslacion, en el plano determinado por el eje de la varilla y la posicion del primero en la correccion anterior. Esta segunda circunstancia tiene lugar cuando las agujas indicadoras permanecen estacionarias durante todo el movimiento de traslacion del aparato móvil; haciéndose la correccion necesaria en caso contrario por los tornillos (*t*, *t'*), que permiten variar la posicion del bastidor con respecto á las ocupadas por las ruedas (*r*, *r'*).

Se comprende que será preciso repetir estas verificaciones hasta que las agujas indicadoras permanezcan estacionarias durante los movimientos del aparato indicados para las verificaciones que anteceden.

1198. Además, el hilo (*h*, *h'*) debe hallarse en un estado de tension tal, que su desarrollo en el tambor tenga lugar segun la seccion recta de este último; lo cual se consigue por el tornillo *a*, observando si durante el movimiento de rotacion, la parte arrollada del hilo aparece á la vista formando exactamente una línea recta con sus prolongaciones á uno y otro lado. En caso contrario, se desarrolla segun una elipse, y las indicaciones del aparato no son exactas, faltando á las condiciones en que se apoya la teoría del instrumento.

1199. **Teoría y uso del planímetro.**—Sea MNRQ (fig. 743; lám. 56) un rectángulo cuya área se trata de medir: disponiendo el dibujo y el planímetro en un plano lo más horizontal que sea posible, se sitúa el extremo inferior del estilo sobre el vértice M, y levantando la armadura de la varilla se hace girar á ésta, á fin de establecer la coincidencia del cero de la rueda graduada con su línea de fé, haciendo al mismo tiempo que una de las agujas indicadoras señale una de las divisiones cero del arco dividido; supongamos además que la altura NR del rectángulo es exactamente paralela á la direccion de la varilla v. Poniendo en movimiento á la regla de modo que la punta del estilo recorra exactamente la base $MN = b$ del rectángulo, se habrá desarrollado una longitud b en el hilo, y cada punto de la seccion recta del tambor habrá recorrido un arco igual á b. Al mismo tiempo habrá pasado por debajo del punto inferior de la rueda lenticular un arco de círculo del mismo número de grados que el arco cuyo desarrollo es b, correspondiente á una circunferencia cuyo rádio R es la distancia de m al centro de la placa: por lo tanto, si representamos por A la longitud de este arco y por r el rádio del tambor, se tendrá la proporcion

$$A : R :: b : r;$$

de la que resulta

$$A = \frac{Rb}{r}.$$

El valor del arco A estará representado en el contador por las indicaciones de la línea de fé en la rueda móvil y de una de las agujas indicadoras en el arco dividido (1196). Llevando el estilo de N á R, la aguja y la línea de fé continuarán marcando el valor del mismo arco, toda vez que, como sabemos, la rueda m no gira en el movimiento de traslacion del aparato.

El disco habrá pasado entonces de la posicion P á la P′ y su centro al otro lado de m. Llevando despues el estilo de R á Q, el disco gira en sentido contrario, pero la rueda lenticular en el mismo que en la primera posicion; y el cero de la rueda del contador recorre, á partir de la graduacion que marcaba el valor del arco A y en el mismo sentido, otro arco A′, para el cual se tiene como antes

$$A' = \frac{R'b}{r};$$

correspondiente al rádio R′. El contador señalará por lo tanto un arco

$$A + A_{,} = \frac{Rb}{r} + \frac{R'b}{r} = \frac{(R + R')\,b}{r}.$$

Observando que la suma de los rádios R y R′ es igual á la distancia de posiciones sucesivamente ocupadas por el centro del disco (Geometría. Teor. 46.—2.°), y que esta lo es á $NR = a$, se tendrá

$$A + A' = \frac{a \times b}{r}.$$

Para que el arco total recorrido en el contador represente el área del rectángulo, el constructor ha dispuesto los engranajes y los rádios de las distintas ruedas de modo que r corresponde á un centímetro cuadrado, y por lo tanto el arco recorrido expresa en centímetros cuadrados el área del rectángulo.

Si en las disposiciones P y P′ (fig 744; lám. 56) el centro de la placa quedase al mismo lado de m, el movimiento de esta rueda tendrá lugar en sentidos contrarios para ambas posiciones, y la lectura final estaría dada por la expresion

$$A - A' = \frac{(R - R')\,b}{r} \quad ;$$

pero entonces serían tangentes interiormente las circunferencias descritas por m, y la distancia de los centros, siempre igual á la altura a del rectángulo, lo sería tambien á R—R′ (Geom. Teor. 46—3.°), resultando como antes

$$A - A' = \frac{a \times b}{r} \qquad [3].$$

Así el área del rectángulo estará siempre representada en centímetros y milímetros cuadrados por la lectura final del contador.

1200. Puede obtenerse el área del rectángulo sin la prévia coincidencia de los ceros, observando la lectura que marca el contador en la posicion inicial M del estilo, y la que señala al llegar al punto Q: la diferencia de estas lecturas será la expresion del área del rectángulo.

1201. **Determinacion de las áreas.**—Supongamos que se trata de hallar separadamente las áreas de los rectángulos MNlk y klRQ (fig. 743; lám. 56): se llevará el estilo al punto M y se recorrerá la línea MNlk, con lo que se tendrá en la lectura del contador la expresion del área del primer rectángulo (1199) partiendo de los ceros que suponemos coincidiendo en la posicion inicial.

Para hallar el área del segundo rectángulo, será preciso recorrer la línea klRQ y obtener el valor que se busca por la diferencia entre la lectura final y la que señalaba el contador en la posicion k del estilo. La lectura final expresará de todos modos el área del rectángulo total. Pero si solo se tratase de hallar esta última, sin ser preciso el conocimiento de las que corresponden á los rectángulos parciales, se comprende que bastará recorrer la línea MNRQ, pues el arco que por el procedimiento anterior recorrería el contador al marchar el estilo de l á k para determinar el área del primer rectángulo parcial, sería recorrido en sentido contrario al pasar el estilo de k á l para determinar la del segundo, y la lectura del contador en el punto l sería la misma antes y despues; por lo que bastará recorrer con el estilo la línea MNLQ como en el caso general (1199). Advertiremos por otra parte, que si despues se pasa el estilo de Q al punto

orriendo el lado QM, la lectura del contador no variará por
nces más movimiento que el de traslacion. Así, para ha-
un rectángulo compuesto de otros varios, no habrá más
perímetro total con el estilo, observando la lectura final
s ceros del contador en la primera posicion de aquel, ó
rencia de las lecturas que corresponden respectivamente
M del estilo, antes y despues de haber recorrido el perí-

1202. *Areas de los polígonos*.—Para hacer extensivo á un polígono cualquiera ABCDE (fig. 745; lám. 56) el procedimiento que acabamos de indicar, se le considera dividido por un sistema de rectas paralelas entre sí, en un número de trapecios que pueden considerarse como rectángulos, siempre que el número de paralelas sea suficientemente grande para que los lados no paralelos de los trapecios se confundan sensiblemente con las alturas de los rectángulos que tuviesen las mismas bases que aquellos. En esta suposicion, y observando que no es necesario recorrer en el estilo las paralelas que consideramos, por la misma razon que no lo fué para la recta kl en el caso que hemos considerado (1201), se hallerá el área de un polígono partiendo de uno de sus vértices A, recorriendo el perímetro con el estilo, y observando la lectura final ó la diferencia de lecturas dadas por el contador (1200).

Conviene que la rueda móvil k (fig. 742; lám. 55) empiece á marchar en el sentido de su graduacion; para lo cual se dispone el polígono y el instrumento como en las figs. 743 y 744 (lám. 56) y se elige como punto de partida del estilo el vértice A (fig. 745; lám. 56) más á la izquierda del observador, caminando en el sentido ABC..... para recorrer el perímetro.

El procedimiento que se sigue con los polígonos, y la descomposicion que se supone tiene lugar para ellos, se aplica tambien al rectángulo cuando la altura de este último no está exactamente en direccion paralela á la recta que sigue el eje de rotacion del disco en su movimiento de traslacion, como hemos supuesto (1199).

1203. **Reduccion á la escala del plano**.—Obtenida el área en centímetros cuadrados, cuando se toma por unidad el valor de una de las divisiones de la rueda graduada k (fig. 742; lám. 55), se reducirán á la escala del plano del mismo modo que las que se obtienen con la ruleta (1179). En la escala de $\frac{1}{100}$ las áreas están dadas en metros cuadrados por las lecturas hechas en el contador. Tambien lo están para la escala de $\frac{1}{1000}$, tomando por unidad la division del arco l.

1204. Cuando se aplica el planímetro á la determinacion del área de un polígono construido por abscisas y ordenadas en distinta escala, hay que multiplicar tambien el resultado obtenido en las graduaciones del contador por el valor que representa el centímetro cuadrado. Si las abscisas se han tomado, por ejemplo, en la escala de $\frac{1}{10000}$ y las ordenadas en la de $\frac{1}{1000}$, uno de los lados del cuadrado representará 100 metros lineales y el otro 10; por lo que el área del centímetro cuadrado valdrá 1000 metros cuadrados. Así, representando por L el área dada por el planímetro, la del polígono tendrá por expresion

$$A = L \times 1000$$

1205. **Aritmoplanimetro de Lalanne.**—Este ingenioso instrumento, destinado á la resolucion gráfica de muchos problemas de aritmética y de trigonometría, se aplica tambien á la determinacion de las áreas de las figuras planas. Nosotros solo le consideraremos bajo este último concepto, describiéndole en la parte en que se emplea como planímetro. Se compone de un tablero *bdfg* (fig. 746; lám 56) perfectamente plano, sobre el cual se mueve un aparato que descansa sobre un bastidor, con ayuda de tres ruedas verticales *r*; dos de los cuales recorren una barra dispuesta segun el lado *df* del tablero, y la otra una ranura practicada segun *bg*.

El aparato móvil se compone: 1.° De un tronco de cono recto C dispuesto de manera que la generatriz que ocupa sucesivamente la parte superior se conserva horizontal durante todo el movimiento de rotacion del tronco de cono alrededor de su eje de figura. Este eje se apoya en dos soportes fijos al bastidor del aparato móvil. Con el tronco de cono gira una rueda *c*, rayada en su circunferencia, la cual recorre en el movimiento de traslacion del aparato una barra *p* igualmente rayada é invariablemente fija al tablero *bdfg*. Para impedir que resbale la rueda *c* y hacer que engrane con la barra, se halla dispuesto en el indicado bastidor del aparato móvil y en la parte que se halla debajo de la rueda, un resorte que obra tendiendo á elevar la barra.

2.° De una regla A, móvil en el sentido trasversal *bd* del tablero, por medio del boton B, entre tres ruedas horizontales *s*. Con ella se mueve un estilo *e*, que se apoya en la regla D, fija al bastidor del aparato. El movimiento de esta parte del mismo se impide, cuando es necesario, apretando el tornillo de presion *t*.

3.° De un contador invariablemente unido á la regla A por el montante *a*, y formado de la rueda *m* y los cuadrantes R, S, provistos de sus correspondientes agujas indicadoras. Lleva además una rueda dentada y dos piñones para la comunicacion de los movimientos que por el uso del aparato se imprimen á las agujas.

1206. *Movimientos del aparato.*—Puede imprimirse un movimiento general al aparato en el sentido longitudinal *df* del tablero, por medio del boton B', é impedirle por el tornillo de presion t', que le fija á un liston metálico tendido longitudinalmente con respecto al tablero y que forma cuerpo con él.

En el movimiento que acabamos de indicar, la rueda c gira por su engranaje con la barra p, así como el tronco de cono que imprime un movimiento á la rueda m alrededor de su eje. Este movimiento se comunica por medio de un piñon de eje horizontal á la rueda dentada k y á la aguja del cuadrante S que se mueve con ella. Unos dientes, practicados en la circunferencia de la misma rueda m por la parte posterior á la representada en la figura, ponen en movimiento un piñon de eje vertical que mueve á la aguja del cuadrante R.

Cuando se aprieta el tornillo t' y se afloja el t, se puede dar movimiento como hemos indicado (1205) á la regla A y al contador por medio del boton B. En este movimiento no giran las agujas del contador; pues durante él coincide sucesivamente con los distintos puntos de la generatriz horizontal del tronco de cono un mismo punto de la rueda m, no verificándose tampoco el engranaje de la c con la barra.

Puede evitarse el contacto de la rueda m con el tronco de cono si se levanta con la mano el contador, girando alrededor del eje k, que se apoya en el montante a. En esta disposicion puede hacerse girar con la mano á la rueda m hasta que las agujas del contador coincidan con los ceros de sus respectivos cuadrantes, ó señalen una graduacion cualquiera.

1207. *Graduaciones del contador.*—El cuadrante horizontal R está dividido en 50 partes, cada una de las cuales lo está en 10, presentando así 500 subdivisiones. La numeracion es doble, partiendo en sentidos contrarios del cero de la graduacion. Igualmente lo es la del cuadrante vertical S, que lo está en 50 partes, y cada una de ellas se subdivide en 2. La aguja de este último cuadrante avanza una de estas semidivisiones para cada vuelta entera de la aguja del primero, y corresponde por lo tanto á 50 unidades del cuadrante R: una division de S corresponderá á 100 unidades: de manera que si la unidad en el cuadrante R representa un área, cada division del S representará una hectárea. Estando subdividida en 10 partes cada division del cuadrante R, y pudiendo apreciarse á ojo las décimas de cada subdivision, se tendrán así centésimas de área ó centiáreas. Supongamos, por ejemplo, que la aguja del cuadrante S haya pasado de la semidivision que sigue á la division 15, en cuyo caso marcará 15 hectáreas y 50 áreas, y que la aguja del cuadrante R señale 23 divisiones, 7 subdivisiones y 4 décimas de subdivision apreciadas á ojo, lo que representará 23 áreas 74 centiáreas; el área total será 15 hectáreas, 73 áreas y 74 centiáreas, ó 1573,ª74, tomando el área por unidad. Si la aguja de S marca 36 divisiones, y la de R señala 5 divisiones y 2 subdivisiones exactas, el área total será 36 hectáreas, 5 áreas y 20 centiáreas, ó 3605,ª20.

1208. **Teoría en que se funda el uso del instrumento.**—Supongamos que se trata de determinar el área del rectángulo MNPQ (fig. 747; lámina 56): se le coloca de modo que su base MN$=b$ sea perpendicular y su altura NP$=a$, paralela á la direccion que recorre el boton B′ (fig. 746; lámina 56) para hacer avanzar ó retroceder al aparato móvil; se hace que el canto de la regla D coincida con MN y el estilo e con el punto N, para lo que se emplean convenientemente de la manera que hemos indicado al describir el aparato los botones B y B′ y los tornillos t y t'; haciendo despues en el contador la coincidencia de las agujas con los ceros de los cuadrantes respectivos. Hecho esto, se fija el tornillo t y se pone en movimiento al aparato móvil por el boton B′, haciendo que el extremo del estilo recorra la recta NP hasta que llegue á coincidir exactamente con el punto P: durante este movimiento, las agujas del contador habrán girado en cierto sentido, hasta señalar una graduacion correspondiente á la posicion del estilo en P Anotando la lectura que corresponde á esta graduacion, se afloja el tornillo t, se oprime el t' y se da á la regla A el movimiento trasversal por el boton B, haciendo que el estilo recorra la recta PQ, hasta que vaya á parar exactamente á Q: las agujas no girarán, y la rueda m del contador se habrá trasladado á otro punto de la generatriz superior del tronco de cono Si se hace que el estilo recorra la recta QM, las agujas girarán en sentido contrario al anterior; y anotando la graduacion que marque el contador cuando el extremo del estilo llegue á M, la diferencia entre esta anotacion y la anterior será la expresion del área del rectángulo MNPQ con arreglo á una escala dada En efecto, sea ACD (fig 748; lám. 56) la seccion principal del cono á que corresponde el tronco de cono del aparato, AB el eje de rotacion, y GL$=$R, FH$=r$ los radios de las secciones rectas correspondientes á las dos posiciones en que ha girado la rueda del contador. La primera lectura hecha en las graduaciones de los cuadrantes depende del radio R de la seccion correspondiente y de la altura a del rectángulo, que el extremo del estilo ha recorrido; podremos por lo tanto representarla por la expresion $z\mathrm{R}a$, en que z es una constante, cuyo valor se determina en virtud de las indicaciones que se quiera que suministre el instrumento. Análogamente, la segunda indicacion del contador podrá representarse por zra, siendo r el radio de la seccion correspondiente; y si se quiere que la diferencia entre estas expresiones represente el área A del rectángulo, se tendrá

$$\mathrm{A} = za\ (\mathrm{R} - r) \qquad [4].$$

En el triángulo FGJ se tiene GJ $=$ FG sen. GFJ (18); pero GJ $= \mathrm{R} - r$; FG $= b$, base del rectángulo, y llamando x al ángulo GFJ $=$ CAB, se tendrá $\mathrm{R} - r = b$ sen. x: sustituyendo esta expresion en la fórmula [4] se tiene por último

$$\mathrm{A} = z \text{ sen. } x \times ab \qquad [5]:$$

dando valores convenientes á z y á x por la disposicion del contador y del engranaje de la rueda c (fig. 746; lám. 56) con la banda metálica, así como por la eleccion de la seccion principal del tronco de cono, se tendrá la expresion del área del rectángulo en la diferencia de lecturas hechas en el contador. El aparato está dispuesto de modo que en la escala de $\frac{1}{2000}$ se tiene z sen $x = \frac{1}{2}$; de donde la fórmula [5] se convierte en

$$A = \frac{ab}{2} \qquad [6].$$

Así, la lectura del contador da la mitad del área del rectángulo expresada (1207) en hectáreas, áreas y centiáreas para la escala de $\frac{1}{2000}$.

1209. **Aplicacion del aritmoplanimetro á la determinacion de las áreas.**—Supongamos que se trata de hallar el área del espacio comprendido entre la recta MN (fig. 749; lám. 56), las MA, NE perpendiculares á ella en sus extremos y la línea poligonal ABCDE: tiremos desde los vértices de estas rectas perpendiculares á MN y otras paralelas á la misma línea hasta encontrar á las perpendiculares más inmediatas, con el objeto de obtener los triángulos rectángulos t, t, t', t'.... Si puestas en cero las agujas del contador y la regla directriz del aparato coincidiendo con MN, se hace que el estilo recorra la recta MA′ y despues las A′B, BB′, B′C.... continuando por el contorno marcado con líneas gruesas hasta N, se habrá obtenido en las indicaciones del contador el mismo resultado que si se hubiesen recorrido los rectángulos MB, HC.... y se hubiera hecho la suma de las indicaciones: pues en efecto, para el primer rectángulo se hubiera tenido que recorrer la línea MA′BH y para el segundo la HB′DL, resultando que el giro de la rueda del contador al recorrer con el estilo la recta BH para el primer rectángulo, hubiera tenido lugar en sentido contrario al recorrer la parte HB para el segundo, volviendo las agujas á señalar en el punto B la misma graduacion. El área así considerada está representada por la suma

$$r + 2t + r' + 2t' + r'' + r''' \qquad [7],$$

como indica la sola inspeccion de la figura.

Poniendo de nuevo en cero las indicaciones del contador, y recorriendo desde N la línea poligonal NE″DD″CC″BB″AM, las agujas indicarán en la graduacion del contador dirigida en sentido contrario al de la anterior, una lectura que corresponderá al área

$$r''' + 2t''' + r'' + 2t'' + r' + r \qquad [8];$$

haciendo la suma de las áreas [7] y [8] resulta

$$2r+2t+2r'+2t'+2r''+2t''+2r'''+2t'''$$

cuya mitad

$$r+t+r'+t'+r''+t''+r'''+t'''$$

constituye el área cuyo valor se busca. Fácil es comprender, que bastará sumar las dos lecturas hechas en las graduaciones del contador para tener la expresion del área MABCDEN, en razon á que el contador da tan solo la expresion de la mitad del área medida (1208).

1210. *Areas de los polígonos.*—Para hallar el área de un polígono, se parte de uno de los vértices, en el cual se dispone el instrumento como hemos indicado y el contador en cero, dando al estilo el movimiento longitudinal hasta que la regla directriz pase por el vértice más inmediato, y llevando á él el estilo por el movimiento trasversal, continuando así hasta volver al punto de partida, y anotando la lectura del contador. Partiendo de nuevo desde él, se recorre otra vez el polígono en sentido contrario, anotando la lectura final, que tendrá lugar en la graduacion dirigida en sentido contrario al de la primera. La suma de ambas lecturas será la expresion del área considerada (1209).

Para este procedimiento, se considera el polígono dividido por una de sus diagonales en dos partes, cada una de las cuales puede considerarse como el caso particular de la fig. 749 (lám. 56), en que las distancias AM, EN se reducen á cero.

1211. Hay casos en que la disposicion particular de los polígonos conduce á que las lecturas tengan lugar en el mismo sentido, á partir del cero en vez de serlo en las graduaciones opuestas, como hemos visto en el caso general. Entonces se hallará el área por la diferencia de las lecturas hechas.

1212. *Determinacion de las áreas por un movimiento contínuo del estilo.*—Moviendo simultáneamente los botones B y B′ (fig. 746; lám. 56) para hacer que el estilo recorra los distintos puntos del perímentro de un polígono rectilíneo ó de una figura mistilínea ó terminada por una curva contínua cualquiera, hasta volver al punto de partida, bastará una sola lectura para la determinacion del área. La lectura á que acabamos de referirnos representará la mitad del área buscada, y para obtener ésta habrá que multiplicar aquella por 2.

En el caso del movimiento contínuo del estilo, se considera á la figura cuya área se trata de hallar, como compuesta de un gran número de rectángulos de altura sumamente pequeña, como en el planímetro de Starke (1202). En este mismo caso puede hallarse un área cualquiera por la diferencia de lecturas relativas á las posiciones inicial y final del estilo (1200), sin la coincidencia prévia de las agujas con los ceros del contador.

1213. **Reduccion á la escala del plano.**—Teniendo en cuenta que las indicaciones del contador se refieren al área, representada en la escala de $\frac{1}{2000}$ por un cuadrado de 5^{mm} de lado, no habrá más que multiplicar el resultado obtenido con ayuda del instrumento, por el área que dicho cuadrado representa en la escala del plano, análogamente á lo que hemos expuesto para el planímetro de Starke (1203).

1214. **Planímetro de Amsler.**—Se compone de dos reglas *a*, *b* (figura 750; lám. 56), que forman un ángulo variable girando alrededor de una charnela fija en la parte *s* de una armadura *c*, que lleva consigo al contador del aparato. La regla *b* es cilíndrica y termina por el extremo más distante de la charnela en la aguja *h*, que puede subir ó bajar fijándola por un tornillo de presion, y que se clava en el plano en que insiste la figura cuya área se trata de determinar, fijando así el extremo de la regla, permitiéndola sin embargo girar alrededor de él. La regla *a* puede correrse á lo largo de la armadura *c*, con objeto de fijar uno de los extremos de esta última, que sirve de línea de fé, en la division de la primera que corresponde á la indicacion que se quiere obtener con el planímetro, y termina por uno de sus extremos en el estilo *d*. El contador se compone de una rueda graduada vertical *r*, susceptible de girar alrededor de un eje que se apoya en la armadura *c* y de trasmitir su movimiento por medio de un tornillo sin fin á una rueda horizontal *m* tambien graduada. El nonius *n* correspondiente á la rueda *r*, está fijo á la misma armadura. Un cilindro metálico que acompaña al instrumento en su caja, sirve para disponerle sobre la armadura de la aguja *h*, á fin de aumentar su estabilidad.

1215. *Graduacion del contador.*—La rueda *r* está dividida en 100 partes numeradas de diez en diez, y su nonius aprecia décimas de una de estas divisiones. La rueda *m* está dividida en 10 partes, cada una de las cuales corresponde á una vuelta entera de la rueda *r*.

Cada division de *r* representa un centímetro cuadrado, y por consiguiente cada una de las de *m* corresponde á un decímetro cuadrado.

Si por ejemplo la línea de fé de *m* se encuentra entre las divisiones 6 y 7, y la de la rueda *r* marca 53 divisiones y el nonius 4, la lectura del planímetro corresponderá á $653,^{cm^2}4$. Si la primera se hallase entre 0 y 1, la segunda marcase 5 divisiones y el nonius 7, la lectura correspondería á $5,^{cm^2}7$.

Para que las lecturas estén expresadas como acabamos de indicar, es preciso correr la regla *a* en la caja de la armadura *c* hasta la coincidencia del canto *f* que hace veces de línea de fé con la division correspondiente en la regla. Las otras divisiones corresponden á medidas inglesas y no tienen generalmente aplicacion para nosotros.

1216. **Determinacion de las áreas y reduccion á la escala del plano.**—Se disponen sobre un plano lo más horizontal y bien construido que sea posible el planímetro y el papel que contiene la figura cuya área se trata de determinar. Para la disposicion del planímetro se clava la aguja h, colocando sobre ella el cilindro de metal de que hemos hecho mencion para darla estabilidad, descansando entonces el instrumento sobre tres puntos que son: la indicada aguja, la punta del estilo d y el punto inferior de la rueda r: la disposicion de h debe ser tal, que permita al estilo recorrer todo el perímetro de la figura. Se coloca entonces exactamente el estilo en uno de los vértices ú otro punto notable del perímetro, anotando la lectura que entonces señale el contador (1200); se recorre el perímetro con un movimiento contínuo del estilo hasta que vaya á parar exactamente al punto de partida, anotando tambien la lectura correspondiente á esta posicion. La diferencia de ambas lecturas será en centímetros cuadrados, la expresion del área comprendida en el perímetro recorrido. Puede partirse de la posicion cero (1206) del contador como en los planímetros explicados anteriormente, con el objeto de tener la expresion del área por una sola lectura; pero la disposicion particular del contador en el de Amsler no se presta tan cómodamente al establecimiento de la coincidencia.

La teoría de este instrumento se apoya en consideraciones de cálculos superiores, y por lo tanto prescindimos de ocuparnos de ella, remitiendo á nuestros lectores al tomo IX de la *Revista de Obras públicas*, pág. 246, donde se ha publicado.

1217. Para la reduccion á la escala del plano, no tendremos más que observar que las áreas se obtienen con este planímetro como en el de Starke en metros cuadrados para la escala de $\frac{1}{100}$, siendo las reducciones las mismas que hemos dado á conocer (1203).

1218. **Reducciones para los planímetros modernos de Amsler.**— Los planímetros más modernos de este autor tienen la disposicion que presenta la fig. 731 (lám. 56), que es su proyeccion horizontal, y que no varía esencialmente de la que tenian los primeros modelos: sólo la regla a no es corrediza. Su uso es tambien el mismo; pero el resultado se obtiene siempre en pulgadas cuadradas, que será preciso reducir á metros cuadrados en la escala del plano.

Supongamos, por ejemplo, que la diferencia de lecturas obtenida en el planímetro como hemos dicho (1216) es 769,5—611,2=158,3: dividiendo esta diferencia por 10 se tendrá el número 15,83 de pulgadas cuadradas inglesas, y multiplicando por 6,45, que son aproximadamente los centímetros cuadrados á que equivale la pulgada cuadrada, el producto tambien aproximado 102,10 representará en centímetros cuadrados el área que se busca; los que se reducirán á la escala del plano de la manera indicada (1203).

1219. **Observaciones generales.**—Cuando un planímetro cualquiera no está bien corregido, pueden hallarse con él sin embargo las áreas con el mismo grado de aproximacion que si lo estuviese, construyendo en el papel un cuadrado exacto, de un decímetro por ejemplo, y tomando el término medio de las áreas que para él dé sucesivamente la aplicacion del planímetro á la determinacion de su medida, haciendo despues una correccion análoga á la que hemos indicado (1122) para las áreas obtenidas por medio de una cadena inexacta.

Supongamos, por ejemplo, que el término medio entre varias mediciones hechas con un planímetro para un cuadrado de un decímetro exacto de lado ha resultado de 0,98, y que no pudiendo corregir el instrumento es preciso hacer la correccion en las áreas que por su medio se obtengan. Representando por a el resultado obtenido en el planímetro para una área cualquiera, se hallará su verdadero valor x por la proporcion

$$0{,}98 \; ; \; 1 \; : : \; a \; : \; x \; ;$$

de la que resulta

$$x = \frac{1}{0{,}98} \times a = 1{,}0204082 \times a.$$

Será preciso por lo tanto multiplicar las áreas obtenidas con el auxilio del planímetro por el coeficiente constante 1,0204082.

El mismo procedimiento se seguiría si las indicaciones del planímetro tuviesen lugar por exceso.

1220. Cuando la suma de varias superficies ha de resultar igual á una superficie dada, se hace la correccion proporcional que hemos indicado (1147) al tratar de las que corresponden á los planos parcelarios.

1221. Respecto á la exactitud en general de esta clase de instrumentos, consiste como en todos los demás, de la perfeccion en su construccion y de la inteligencia, habilidad y práctica del operador, ó en otros términos, la que se puede obtener en todas las operaciones gráficas de la misma clase, en las que hay que apreciar fracciones pequeñas de la unidad de la escala. A pesar de todas las precauciones, los instrumentos mejor construidos no dan en general mayor aproximacion que la de $\frac{1}{50}$ á $\frac{1}{500}$ segun la magnitud de la escala.

1222. Los planímetros no sirven solamente para el cálculo de las superficies agrarias, pues tienen otros usos útiles á las ciencias y á las artes; empléanse ventajosamente para facilitar las más complicadas operaciones del cálculo aritmético y trigonométrico, para evitar los cálculos de los desmontes y terraplenes en los proyectos de carreteras, canales y ferro-carriles, para lo que algunos son muy útiles, para la construccion gráfica de los planos topográficos y los perfiles de nivelacion, y por último, tambien ha sacado partido la *Autografía* de alguno de estos instrumentos para una porcion de usos y aplicaciones. Nosotros solo hemos hecho mencion de los planímetros más en uso y no hemos hecho más aplicacion de ellos que para la medicion de superficies, prescindiendo de las demás usos que pueden tener.

FIN DEL TOMO PRIMERO.

ÍNDICE.

CAPÍTULO PRIMERO

NOCIONES DE TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

CAPÍTULO II.

DEFINICION DE LA TOPOGRAFÍA.—DEL GLOBO TERRESTRE Y LÍNEAS PRINCIPALES QUE EN ÉL SE CONSIDERAN.

CAPÍTULO III.

DE LA SUPERFICIE TERRESTRE Y DE SU REPRESENTACION GEOMÉTRICA.

CAPÍTULO IV.

NOCIONES DE ÓPTICA.—ANTEOJOS.

CAPÍTULO V.

DE LOS INSTRUMENTOS EN GENERAL Y DE SUS PARTES PRINCIPALES.

CAPÍTULO VI.

INSTRUMENTOS ANGULARES

Brújula.—Declinatoria.

CAPÍTULO VII.

PLANCHETA.

CAPÍTULO VIII.

ESCUADRA.

CAPÍTULO IX.

GRAFÓMETRO.—PANTÓMETRA.

CAPÍTULO X.

TEODOLITO.—CÍRCULO REPETIDOR.

CAPÍTULO XI.

GONIÓMETROS Y GONIÓGRAFOS FUNDADOS EN LAS PROPIEDADES DE LA LUZ.

CAPÍTULO XII.

CONSTRUCCION DE LOS ÁNGULOS OBTENIDOS CON LOS GONIÓMETROS.

CAPÍTULO XIII.

ALINEACIONES. — TRAZADO Y MEDICION DE LAS LÍNEAS EN EL TERRENO.

CAPÍTULO XIV.

TELÉMETROS.

CAPÍTULO XV.

LEVANTAMIENTO DE LOS PLANOS TOPOGRÁFICOS.

Problemas preliminares.

CAPÍTULO XVI.

LEVANTAMIENTO DE LOS PLANOS DE TERRENOS DE CORTA EXTENSION.

CAPÍTULO XVII

LEVANTAMIENTO DE LOS PLANOS DE TERRENOS DE MEDIANA EXTENSION.

CAPITULO XVIII.

LEVANTAMIENTO DE LOS PLANOS DE TERRENOS DE GRANDE EXTENSION.—TRIANGULACION.

CAPITULO XIX

—

CÁLCULO DE LAS SUPERFICIES.

CAPITULO XX.

—

TRASFORMACION DE LOS POLÍGONOS.

CAPITULO XXI

PLANÍMETROS

FÊ DE ERRATAS

Página.	Linea.	Dice.	Debe decir.
31	24	$\frac{\pi}{648000} \times r \frac{3,1416}{648000} \times r$	$\frac{\pi}{648000} \times r = \frac{3,1416}{648000} \times r$
50	3	el pié de	el pié
86	15	$\frac{Dc \times DE}{Dc}$	$\frac{Dc \times DE}{De}$
118	15	Distancia	Distancias
152	4	a'	a
165	13	$30' - 1' - 29'$	$30' - 1' = 29'$
244	11	misma	mismas
»	23	(m, m)	(m, m')
244	14	de ángulos	de los ángulos
»	»	Brumser	Brunner
271	27	de estacion	en estacion
273	18	del *cero*,	del *cero* del limbo azimutal *aa*,
276	2	resultado	resultado que es la lectura definitiva
276	7	*d*	D
277	29	1	I
317	38	Empabonado	Empavonado
329	8	$\frac{bb'}{BB}$	$\frac{bb'}{BB'}$
337	19	50	30.
344	3	OPQ^2	PQ^2
364	15	Telémetro	Telémetros
394	33	27 metros	20 metros
419	31	expondremos	nos ocuparemos de
487	34	vemos	vimos
490	27	datos que	datos con que
561	14	$s' -- \frac{cd}{2}$ sen A:	$s' = \frac{cd}{2}$ sen A;
604	13	*abcf*	*abef*
609	10	$t = y$	$y = y$
634	27	pianimetro	planímetro
638	29	A + A,	A + A'