Nov. 12. 1719.

IMPRIMATUR.

IS. NEWTON, *P. R. S.*

Geometria Organica:

SIVE

DESCRIPTIO

LINEARUM CURVARUM

UNIVERSALIS.

AUCTORE
COLINO MAC LAURIN, *Matheseos in Collegio Novo* Abredonensi *Professore, & Reg. Soc. Soc.*

LONDINI:

Impensis GUL. & JOH. INNYS, Regiæ Societatis Typographorum in Areâ Occidentali D. Pauli. MDCCXX.

VIRO ILLUSTRISSIMO

D. *ISAACO NEWTON*, Eq. Aur.

Regalis Societatis PRÆSIDI.

ETSI non deerant, Vir ampliſſime, Cauſæ variæ, quæ hanc audaciam, magno tuo Nomini Lucubratiunculas haſce inſcribendi, cohibere poſſent; vicit tamen eas omnes ſingularis tua in me meoſque conatus qualeſcunque Benevolentia; cui rependendæ quidem nunquam par ero, agnoſcendæ certe nulla in re deeſſe debeo. Nec erat cui pari jure dicari poſſent hæc Theoremata: Te enim prælucente indagata ſunt; Tuis etiam Auſpiciis nunc in Lucem edita. Nec quicquam Matheſeos Cultoribus prius eſſe debet, quam ut Magno NEWTONO, quavis occaſione oblata, gratum animi ſenſum publice profiteantur. Si enim prior iſtarum Scientiarum tenuitas, cum eo ad quod à Te ſubvectæ ſunt Dignitatis & Splendoris Faſtigio, conferatur; næ Tu ad id natus videris, ut specimen exhiberetur, quantam Ratio humana, veritatibus sublimioribus indagandis, operibusque naturæ perscrutandis incumbens, profundæ rerum Caligini Lucem diemque, inferre posset.

Ante annos non ita multos Geometria, cujus ditiones in immensum proferri queunt, etsi a Magnis Viris plurimum aucta, intra angustos tamen limites continebatur. Philosophia vero Naturalis, Geometriæ Præsidiis nimium destituta, & proinde lascivientis cujusque ingenii petulantiæ obnoxia, insulsis & inter se pugnantibus Philosophorum somniis diu multumque vexabatur. Vanarum Hypotheseων, Commentorumque omni Rationis Patrocinio carentium, nec finis erat nec modus. Immanes de rerum natura Fabulas, à Mentis Rectricis sapientia maxime alienas, comminisci, aliisque superciliose obtrudere, id demum erat philosophari. Non Religio erat mirificam opificii divini Harmoniam figmentis discordibus corrumpere, venustam Naturæ faciem indignissimo fuco deformare, ordinem exquisitissimum perturbare. Ad singula Naturæ Phænomena solvenda singulæ fere fingebantur causæ; quarum porro ipsarum explicatio, quam Phænomenων illorum, longe erat difficilior. Hujusmodi erant Materiæ subtilis Mæandri; Vorticum & Epicyclorum ambages; aliaque id genus plurima.

Philosophia Naturalis, tot malis laborans, diu vindicem desiderabat, cujus auspiciis è Fabularum Caligine emergens, Nativo suo decori & splendori restitueretur. Cl. quidem *Verulamius*, Britanniæ perenne Decus, Philosophos præmonuerat ut Experimentorum suffragia

ſuffragia ſedulo opperirentur, neque ea præmaturis Hypotheſibus anteverterent; iis vero Veritatibus Univerſalibus indagandis præcipue incumberent, ex quibus, cum Experimentorum & Phænomenων obſervatione apte conſociatis, vera Lux Philoſophica eliceretur. Verum deerant quibus Ingenium, Animus, Patientia, ad tantos Labores ſuppeditarent. Tu tandem unus, tam ſtupendo Operi par, innumeras Veritates reconditiſſimas Philoſophiæ Naturali mirifice inſervientes indagaſti; indagatas fœliciſſime ad Phænomena Naturæ explicanda adhibuiſti; atque ex multiplici ſubtiliſſimorum Experimentorum penu, magis magiſque confirmaſti; nec cujuſquam ante Te veſtigiis inſiſtens, nec à quoquam in poſterum æquandus.

Geometria demum ultra priſtinos fines, incredibili Tua Perſpicacitate & Ingenii vi, longe lateque exporrecta eſt; recondita præſertim Curvarum Theoria mirum in modum aucta; quantitatum fluentium Algorithmus inventus, & ad ingentia Naturæ Opera enucleanda ſummo Judicio adhibitus; Philoſophia Naturalis in Libertatem aſſerta, variiſque Errorum monſtris purgata; materia ſubtilis exploſa; eliminata prorſus è Cœlis Vorticum & Epicyclorum ſupellex: Variæ & perplexæ admodum Lunaris motus inæqualitates calculo & certis Legibus ſubjectæ; Cometarum orbitæ per remotiſſima Cœli ſpatia pertinaciter inveſtigatæ; ſubtiliſſima Luminis Phænomena ex intimis Naturæ penetralibus Arte mirifica eruta; Corporum terreſtrium Gravitas, & cœleſtium Motus, cum innumeris aliis Naturæ Phænomenis, ad eandem ſimplicem Cauſam reducta; denique, pulſis Fabulis, vera operum divinorum Majeſtas, Ordo, Harmonia, Omnium Contemplationi ſimul & Admirationi commendata. Quæ omnia, ſeu Veritatis æterni Triumphi, ſeu Errorum diu graſſantium clades, tanquam monumenta Ære & Marmore perenniora, certatim ad Nominis Tui perpetuitatem poſteris mandandam conſpirant. Cæterum de rebus tam præclaris præſtat ſilere, quam levia dicere. Quocirca, id unum oro, Vir Spectatiſſime, ut hanc, utcunque tenuem, magni tamen Studii voluntatiſque propenſiſſimæ Teſſeram, in bonam partem accipias.

Tui Nominis

Obſervantiſſimus Cultor

Colin Mac Laurin.

PRÆFATIO.

CUM recondita ac sublimis Philosophia, quam mortalibus his tandem sæculis indulsit benignissimum Numen, Geometriæ promotæ accepta referenda sit; atque Incrementa egregia, quæ plures aliæ Artes ac Disciplinæ humano generi apprime utiles nostra ætate ceperunt, ex eodem fonte promanarunt; novos quoscunque in hac Scientia processus non esse contemnendos, colendamque in primis eam esse studiosis veritatis indagatoribus, nemo cordatus non fatebitur. Nec varia Geometrarum ad Mathesin puram promovendam Conamina quisquam vituperabit (etsi fortassis primo intuitu non innotescat hujusmodi inventorum utilitas) qui meminerit quam multa, quæ prima fronte parum proficua visa sunt, dein temporis decursu, aliorum industria, ad usus eximios accommodata sint.

Neque hoc tantum Nomine Geometria studiose excolenda videtur, quod magnas utilitates afferat, & Ornamento sit; verum etiam quod innata quadam Pulchritudine plurimum alliciat; imo ei non absimilem, quam ex humanioribus disciplinis percipimus voluptatem, in animis nostris ingeneret. Etenim cuivis, varia vitæ oblectamenta consideranti, patebit ea ex perceptione Proportionis, in qua omnis sita est Pulchritudo, potissimum enasci; atque animos nostros ita à natura esse comparatos,

 ratos,

ratos, ut rerum persæpe vulgarium, pæne dixi inanium, Harmonia seu Proportione nuda haud parum delectentur. Quid quæso tantopere juvat in Musica? Non soni, sed sonorum harmonia, ex commensurabili Vibrationum æquabilium proportione assurgens; cum soni ipsi seorsum editi exiguam aut nullam animo pariant delectationem. In omni scribendi genere (ne singula percurram) post ipsam veritatem, justa rerum dispositio & methodus Auctoribus curæ, & Lectoribus voluptati sunt. Ipsa vero illa veritas quid est aliud, quam, sive immutabilium idearum, sive fluxarum rerum, mutuus quidam ordo & habitus, in intimis Naturæ penetralibus delitescens; sedula opera & studio indagandus. Universalem porro hujus Proportionis vim penitus animo persensisse videntur primarii inter veteres; qui etiam ipsam Virtutem in debita affectuum Proportione, & justo Tono, collocarunt; imo & nonnunquam pronuntiare non dubitarunt, pravam omnem electionem ex ejus Scientiæ defectu oriri, quæ docet Artem mensurandi; *scil. infinita cum finitis; magna cum parvis, perfecta cum imperfectis, seu bona cum malis comparandi.*

Quorsum autem hæc; nisi ut aliquatenus intelligamus unde tanta insit amœnitas Theoriis illis, quas scientiæ omnes, & speciatim Mathematicæ, intellectui exhibent; & ut sua puræ Geometriæ constet laus & commendatio? Philosophiæ quidem Mathematicæ præstantia apud omnes hodie in confesso est: Quippe quæ animum ad grandiloquam cœlorum facundiam advertendam evocat, universique operis formam speciosissimam oculis quasi subjicit. Cujus ope, sive corporis mundani cujusvis seorsum sumpti motus & Phænomena exquiramus; sive integri Systematis, quatenus adhuc innotuit, dispositionem & structuram contemplemur; ubique summum rerum ordinem & harmoniam consummatissimam deprehendentes, suavissima tanti operis, magnique ejus Auctoris, admiratione non possumus non perfundi.

Sed Mathesis pura, quæ partem hujus gloriæ, quanta quanta est, longe præcipuam sibi pro jure suo vendicat; licet tam obvia nos voluptate non percellat; menti tamen conceptus suppeditat pulcherrimos; quæ Harmoniam & Proportionem ubique desiderat. His contemplationibus quicunque deditus est, sive unius alicujus accuratæ Lineæ aut Figuræ varias proprietates invicem consentientes; sive integram aliquam Linearum

& Fi-

& Figurarum speciem, aut specierum Systema, perpendat; aut varia illa systemata universalia conferat; is proportionis omnis, atque adeo pulchritudinis, unam infinitis modis variegatam ideam animos perlustrat; cum omnis harmoniæ & proportionis Lex aut Regula possibilis, curvam habere possit sui observatricem. Mentis interea vires hujusmodi exercitiis mirum in modum augentur & confirmantur. Dum autem, Geometriæ puræ auxilio, tum præsentem Mundi fabricam, tum etiam quæ futura fuissent illius secundum alias quascunque Leges efformati Phænomena, investigamus; indicia undequaque prodeunt luculentissima sapientissimi Numinis, supremi universorum Domini; cujus opus Auctore suo dignum, quantum nobis adeo exiguæ ejus extensionis & durationis partis spectatoribus assequi licet, omni ex parte deprehendimus. Hæc in eum finem dicta sunto, ut pateat non inutiles nec injucundas esse appellandas illas ipsas puræ Geometriæ Theorias, quæ ad quam vitæ partem perficiendam pertineant non statim apparet; & quarum penitior indagatio summorum Virorum exemplo est perpetuo comprobata.

Geometria veterum ad Figuras duntaxat, quæ Lineis rectis vel curvis primi generis circumscribuntur, pertingebat. Recentiores vero, Linearum ordines infinitos in Geometriam receperunt; & æquationibus, ordinatas & abscissas curvarum involventibus, definierunt. Nemo tamen, ante Illustr. Newtonum, *universalem aggressus est descriptionem organicam Linearum Ordinis secundo altioris. Hujus methodus commodissimam suppeditat viam Lineas tertii Ordinis puncto duplice ditatas mechanice describendi; nonnullas etiam Lineas altiorum Ordinum complectitur. His vestigiis insistentes, Methodum universalissimam in sequenti Tractatu tradimus; qua curvæ cujuscunque Ordinis superioris, motu continuo datorum angulorum secundum Lineas rectas, aut etiam secundum curvas cujuscunque inferioris Ordinis, generantur.*

In prima parte, quo pacto Lineæ secundi Ordinis, ope unius tantum Lineæ rectæ, describi possint ostendimus. Deinde, ex duabus Lineis rectis, Linearum tertii Ordinis puncto duplice donatarum Genesin deduximus. Tum Lineas hujus Ordinis, puncto duplice destitutas, & quarti, trium Rectarum ope, descripsimus. Denique methodum curvas quascunque, ope plurium Rectarum, describendi universalissime demonstravimus; &

nonnullarum

nonnullarum, etiam vigesimi quarti Ordinis, descriptionem nonnunquam sex Rectarum ope perfici posse, exempli causa, ostendimus.

In secunda parte, curvas omnium superiorum Ordinum, ope inferiorum quorumcunque, pariter describi posse demonstravimus. Epicycloides quasvis, quæ Curvarum revolutione super seipsas tanquam Bases generantur, universaliter tractavimus. Expeditam, ad bene multas series infinitas harum Epicycloidum dimetiendas, viam aperuimus. Dein motum corporum, curvas datas in mediis quibuscunque describentium, & ipsorum mediorum Resistentiam ac Densitatem parvo admodum labore investigandi methodum exposuimus. Tandem, qua ratione curvæ Geometricæ dati Ordinis per data puncta duci possint, in omnibus casibus quos adhuc accurate perpendere licuit, ostendimus.

In primæ Partis Propositionibus plerisque, non solum ad quem Ordinem curvæ descriptæ pertineant demonstravimus; sed etiam quo pacto illarum æquationes Algebraicæ obtineri possint ostendimus. Lectores autem monitos velim, varia admodum, pro variis Rectarum datarum Positionibus, & pro varia angulorum datorum specie, exurgere in illis Æquationibus quantitatum signa; quæ in aliquibus tantum casibus designare operæ pretium fuit.

In Sectione ultima Partis primæ postulavimus, punctorum in quibus Lineæ duæ quæcunque inter se occurrunt numerum maximum æqualem semper esse facto ex numeris, qui ambarum Ordines exprimunt. Cum vero res demonstratione indigere videretur; eam, quantum adhuc fas fuit, ad omnes casus accommodatam, ad calcem subjunximus posthac fortassis suis numeris absolvendam. Quod, vero hæc qualiacunque rudiori quam optassemus manu pertractata in lucem edere coacti simus, exinde accidit; quod otium & præli facultas, defuerunt.

Linearum

Linearum Geometricarum
DESCRIPTIO
Organica Universalis.
Pars Prima.

Ubi Methodo Universali Lineæ omnium Ordinum describuntur sola datorum Angulorum & Rectarum Ope.

Sectio I.
De Descriptione Curvarum primi Generis seu Linearum Ordinis secundi.

Prop. I.

Circa duo puncta C & S *in Plano quovis data tanquam Polos moveantur Anguli dati* FCO & KSH; *ducatur concursus Crurum* CF & SK *per Rectam* AE *in eodem Plano Positione datam; atque reliqua interea Crura* CO & SH *Concursu suo* P *describent Curvam primi Generis.*

JUngantur puncta data C & S; atque in Rectam CS demittantur normales PM & QN; ducantur Rectæ PR, QU, PT, QL ita ut Anguli CUQ & CRP æquales sint sibi mutuo atque dato FCG, Anguli vero SLQ & STP æquales dato KSD. His positis, Angulus RCP æqualis erit Angulo CQU, propterea quod RCP duos rectos conficiat cum Angulis RCQ & QCA, atque CQU duos etiam rectos conficiat cum Angulis RCQ &

QUC dictis RCQ & QCG æqualibus; proinde cum æquales sint Anguli CUQ & CRP manifestum est Triangula CQU, CPR esse similia; & eadem ratione demonstratur similia esse Triangula SLQ & STP.

Unde erit CR : PR : : QU : CU

atque ST : PT : : QL : SL

Sit CS $= a$, CA $= b$, sinus Anguli FCO ad ejus Cosinum ut d ad a, Sinus Anguli KSH ad ejus Cosinum ut e ad a, sinus Anguli CAE ad Cosinum ut c ad a; sit porro PM $= y$, CM $= x$, QN $= z$, atque erunt RM : PM : : $a : d$. PR : PM : : $\sqrt{d^2 + a^2} : d$. AN : QN : : $a : c$ unde RM $= \frac{ay}{d}$, CR $= x - \frac{ay}{d} = \frac{dx - ay}{d}$, PR $= \frac{y\sqrt{d^2 + a^2}}{d}$,

QU $= \frac{z\sqrt{d^2 + a^2}}{d}$ & CU $=$ CA $-$ AN $-$ NU $= b - \frac{az}{c} - \frac{az}{d}$

$= b - \frac{a \times \overline{d + c} \times z}{dc}$. Cumque sit CR ad PR ut QU ad CU patet, esse

$\frac{dx - ay}{d} : \frac{y\sqrt{d^2 + a^2}}{d} : : \frac{z\sqrt{d^2 + a^2}}{d} : \frac{bdc - a \times \overline{d + c} \times z}{dc}$; unde

$$QN = z = \frac{bc \times \overline{dx - ay}}{dc - a^2 \times y + a \times \overline{d + c} \times x}.$$

Porro simili Ratiocinio prodit ST $= a - x - \frac{ay}{e}$, PT $= \frac{y\sqrt{a^2 + e^2}}{e}$,

QL $= \frac{z\sqrt{a^2 + e^2}}{e}$ & SL $=$ AN $-$ AS $-$ NL $= a - b + \frac{a \times \overline{e - c} \times z}{ec}$.

Est vero ST ad PT ut QL ad SL; seu $a - x - \frac{ay}{e} : \frac{y\sqrt{a^2 + e^2}}{e} : :$

$\frac{z\sqrt{a^2 + e^2}}{e} : \frac{\overline{a - b} \times ec + a \times \overline{e - c} \times z}{ec}$ & proinde QN $= z =$

$\frac{\overline{a - b} \times c \times \overline{ae - ex - ay}}{ec + a^2 \times y + a \times \overline{e - c} \times x + a^2 \times \overline{c - e}}$. Æquentur duo reperti Valores Rectæ QN, & Denominatorem unius ducendo in Numeratorem alterius, prodibit Æquatio Curvæ descriptæ ad Axem C S

$$\left.\begin{matrix} \overline{a - b} \times ce \\ + \overline{ae - bc} \times d \end{matrix}\right\} x^2 \quad \left.\begin{matrix} + a^2 \times \overline{d + c - e} \\ + dce \end{matrix}\right\} yx \quad \left.\begin{matrix} + a \times - \overline{a^2 + cd} \\ - bc \times \overline{e + d} \end{matrix}\right\} y^2$$

$$\left.\begin{matrix} + abc \times \overline{d + e} \\ - a^2 e \times \overline{d + c} \end{matrix}\right\} x \quad \left.\begin{matrix} - bc \times \overline{a^2 - ed} \\ - ae \times \overline{dc - a^2} \end{matrix}\right\} y = 0$$

Cum vero in hac Æquatione variabiles Quantitates x & y ad duas tantum Dimensiones ascendant, manifestum est curvam describi primi Generis seu Lineam secundi Ordinis; cujus Intersectiones cum Linea recta possunt esse duæ.

Corol. I. Curva hac Propositione descripta transit per data puncta C & S; nam si $y = o$ Æquatio Curvæ evadet $\overline{a - b} \times ce + \overline{ae - bc} \times d \times x^2 + abc \times \overline{d + e} - a^2 e \times \overline{d + c} \times x = o$. Proinde cum $\overline{a - b} \times ce + \overline{ae - bc} \times d = ae \times \overline{d + c} - bc \times \overline{d + e}$ erit $x^2 - ax = o$ adeoque vel $x = o$ vel $x = a$; in priore casu curva transit per C in posteriore per S. Idem ex Constructione patet immediate; quippe dum SH coincidit cum SC Curva transit per C; & CO evadit Linea Curvam in dato puncto C contingens; Curva vero transit per S dum CO coincidit cum CS, & crus SH Curvam tunc in puncto S contingit; quod satis est manifestum. Puncta C & S sunt simplicia, nec Linea quævis Ordinis tertio inferioris punctum habet duplex.

Corol. II. Hinc si dati Anguli HSX, OCX moveantur circa puncta C & S ut Polos, & crurum SH, CO concursus P ducatur per Lineam secundi Ordinis, seu sectionem Conicam, per data puncta C & S transeuntem; concursus X crurum CX & SX percurret aliam sectionem Conicam; nam dabuntur Anguli QSX & QCX; adeoque cum Q percurrat Rectam, punctum X describet Lineam Ordinis secundi seu sectionem Conicam per hanc Propositionem.

Theorema hoc primus demonstravit D. *Neutonus* egregio Ratiocinio ad morem veterum *Lemmate* 21°, *Lib.* 1^{mi} *Principiorum*; idem quoque analytice investigavit in *Arithmetica Universali*; Analysin vero diversam hac Propositione exhibuimus, quoniam nostra in sequentibus calculis usus erit non exigui & æquationem ad Ordinatas axi normales exhibeat.

PROP. II. PROBLEMA.

Determinare Curvarum Assymptotos atque Species.

Super datâ Rectâ CS (*Fig.* 2.) describatur segmentum circuli cui inscribi possit Angulorum datorum QCP, QSP supplementum ad quatuor rectos. Si Recta data AE huic circulo bis occurrat describetur Hyperbola Conica; si Recta AE circulum contingat describetur Parabola; si recta AE tota ponatur extra Circulum curva descripta erit Ellypsis.

Imprimis occurrat Recta AE Circulo in punctis duobus Q & N; cumque SK pervenerit ad positionem SQ vel SN manifestum est crura CO & SH evadere parallella, eorumque concursum P abire in utroque casu in infinitum; quippe Quadrilateri QSCP quatuor anguli æquales sunt quatuor rectis, adeoque cum CQS, QCP, QSP ex hypothesi, totidem conficiant rectos, manifestum est angulum CPS evanescere, & crura CP & SP concurrere ad Distantiam infinitam. Similiter cum SK pervenerit ad positionem SN, erunt Cπ & Sπ parallelæ, atque puncta P & π eundo ac redeundo in infinitum, quatuor describent crura infinita ad duas Assymptotos rectis CP & Cπ parallelas; quæ se mutuo secant in Centro Figuræ, angulo æquali QCN seu QSN.

Ut Positio Assymptotωn prodeat, sit q punctum ipso Q quamproximum & anguli qSp, qCp æquales fiant datis QSP & QCP; atque erit p punctum ipso P quamproximum; unde si pB ducatur parallela rectæ CP, erit Bp curvæ Assymptotos. Est vero angulus SpB $=$ pSP $=$ QSq & anguli quoque BpC, pCP, QCq æquales; sed patet angulos evanescentes BpS & BpC esse in ratione subtensarum BS & BC, & proinde erit BS ad BC ut QSq ad QCq. Sed anguli quicunque sunt ut arcus subtendentes directe & arcuum radii reciproce, adeoque QSq erit ad QCq ut Qu $\times$ CQ ad qe $\times$ SQ sive (cum Qu sit ad Qq ut perpendiculum SF S in AE demissum ad SQ; & sit qe ad Qq ut CG perpendiculum ex C in AE demissum ad CQ) ut SF $\times$ CQ^2 ad CG $\times$ SQ^2. Proinde BS erit ad BC ut AS $\times$ CQ^2 ad AC $\times$ SQ^2 & BC ad CS ut AC $\times$ SQ^2 ad AC $\times$ SQ^2 $\pm$ AS $\times$ CQ^2; unde si anguli QgS, QTC sint æquales sibi mutuo & dato angulo CQS, erit BC ad CS ut AC $\times$ Sg ad AC $\times$ Sg $\pm$ AS $\times$ CT. Proinde dabitur BC, & angulus CBp datur, adeoque positione determinatur Assymptotos parallela rectæ CP; similiter plane determinari potest altera Assymptotos parallela rectæ Sπ; duarum vero concursu determinatur centrum figuræ.

Ex his consequitur 1° Curvam descriptam fore Hyperbolam Conicam, quoties recta AE circulum SDC in duobus punctis secat; & si illa duo puncta sint Q & N, patet ex dictis, quo pacto duæ Assymptoti determinari possunt & species proinde curvæ investigari. 2°. Si recta AE circulum contingat, coincidunt Q & N cum D, curvæ Assymptoti abibunt in infinitum & curva descripta erit Parabola Conica. Quippe angulus ADS æqualis erit angulo DCS per *Prop*. 32. Lib. 3". *Elem.* & proinde similia erunt triangula ASD & ADC, adeoque erit AS : AD : : SD : CD sed per *Prop*. 36. ejusdem Libri est AS : AD : : AD : AC & proinde AS : AC : : AS^2 : AD^2 : : SD^2 : CD^2. Sed prius demonstravimus esse BS : BC : : AS $\times$ CQ^2 : AC $\times$ SQ^2 : : (in hoc casu)

2

casu) $AS \times CD^2 : AC \times SD^2 :: AS \times AC : AC \times AS$ unde $BC : CS :: AC \times AS : AC \times AS - AS \times AC :: AC \times AS : o$ *i. e.* BS evadit infinite major quam CS; unde Assymptotos abit in infinitum & crura curvæ evadunt Parabolica. Proinde in hoc casu describitur Parabola cujus duæ diametri erunt rectæ SP & CP (SK perveniente ad positionem SD) earumque vertices C & S, tangentes vero ad eos vertices C & S per Corol. I. Prop. I. atque ex his Parabola facile determinantur. 3°. Quod si Recta data AE Circulo neque occurrat, nec eum contingat, sed tota extra circulum cadat, describetur Ellypsis; quippe in hoc casu rectæ CP & SP, quarum concursu Curva determinatur, nunquam possunt evadere parallelæ; & proinde curva non abit in infinitum sed in se redit.

Corol. I. Axes Figurarum non minus quam Assymptoti sic facile geometrice determinantur; sit O (*Fig.* 3.) centrum circuli SQC, & ex O in Rectam AE cadat Linea perpendicularis OX Circulo occurrens in punctis Y & G atque rectæ AE in X; & si anguli HSK crus SK ducatur ad positionem SY, alterum crus SH evadet parallelum axi majori & perpendiculare axi minori figuræ in positione nim. Sz; nam $YN = YQ$ & angulus $YSN = YSQ = \frac{1}{2} NSQ = PSz$; cumque NSQ æqualis sit angulo quo Assymptoti se mutuo intersecant, erit PSz dimidium illius anguli, adeoque Sz parallela axi majori quæ Assymptotωn angulum bisecat. Sed ex Conicis constat axem majorem esse ad minorem ut co-sinus dimidii anguli Assymptotωn ad sinum dimidii ejusdem anguli; est vero YSN, qui æqualis est dimidio anguli Assymptotωn etiam æqualis angulo YGN; adeoque erit GX ad XN ut Axis major ad minorem; sed $GX : XN :: XN : XY$ & $GX : XY :: GX^2 : XN^2$: proinde Quadrata Axium erunt ad se mutuo ut GX ad XY.

Corol. II. Manente recta AE atque Angulorum QCO & QSK summa, manet species Curvæ; quippe his manentibus, non mutatur angulus NSQ, æqualis angulo in quo Assymptoti se mutuo secant in centro figuræ; adeoque manet species figuræ.

Corol. III. Si una Assymptotωn positione determinetur ut B*p*, altera nullo labore dabitur; nam si *b* sit punctum ubi quæsita secat rectam CS, erit $Cb = SB$, ex natura Hyperbolæ.

Corol. IV. In nullo casu nisi cum Recta AE abit in infinitum describi potest Circulus; quippe si punctum describens P Circulum percurreret, cum Curva necessario transeat per data puncta C & S, angulus CPS esset invariabilis, adeoque & CQS; id vero fieri non potest dum Q rectam tangit, nisi recta illa sit ad distantiam infinitam.

Corol.

Corol. V. Si anguli FCO, KSH ſint ſibi mutuo ſupplementa ad duos rectos, Aſſymptoti longe facilius determinari poſſunt; quippe evaneſcit angulus CQS in hoc caſu; atque tunc evadunt SP & CP parallelæ, quando punctum Q *(Fig. 4.)* pervenit ad A ubi Recta AE occurrit SC productæ ſi opus eſt, & quando Q abit ad diſtantiam infinitam; cum in utroq; caſu evaneſcat angulus CQS. In priori caſu erit $BS : BC :: (AS \times CQ^2 : AC \times SQ^2)\ AS \times CA^2 : AC \times SA^2 :: AC \cdot AS$; & $BS : CS :: AC : CS$ adeoque $BS = CA$; unde facillime determinatur Aſſymptotos Bp quæ ad punctum B rectæ CS inſiſtit & Angulum cum eâ recta conſtituit æqualem dato FCO. Altera Aſſymptotos tranſit per A per *Corol.* 3^{um}. ſecans rectam CS angulo æquali differentiæ angulorum datorum KSH & CAE; & ex datis duabus Aſſymptotis illis dabitur curva.

Corol. VI. Si anguli ut in ſuperiori *Corolario* ſibi mutuo ſupplementa ſint ad duos rectos, & recta AE occurrat rectæ CS productæ, deſcribetur Hyperbola; ſi recta AE parallela ſit rectæ CS, abibit Aſſymptotos Bp in infinitum, cum ſemper ſit $SB = CA$; adeoque curva erit Parabola Conica; Aſt in nullo caſu, ſi angulorum KSH, FCO ſumma ſit æqualis duobus rectis, deſcribetur Ellypſis.

Corol. VII. Quoties recta AE tranſit per circuli SQC centrum angulus NSQ evadit rectus & proinde Aſſymptoti ſe mutuo ſecabunt ad angulos rectos, adeoque Hyperbola deſcribetur Æquilatera.

Corol. VIII. Aliæ etiam ſuppetunt Methodi quibus ſpecies curvarum diſcriminantur, præter eam quam hac Propoſitione explicavimus; eam vero nos adhibuimus quæ in ſequentibus uſus erit frequentioris. Notandum interea crura angulorum quibus curva deſcribitur, conſiderari debere tanquam Rectas infinitas ad datos angulos ſe mutuo ſecantes; alias pars tantum curvæ deſcribetur; & in omni linearum ſuperiorum conſtructione, ope inferiorum quarumcunque, hæ inferiores ſunt totæ aſſumendæ, non earum Arcus quicunque ad integram ſuperiorem ducendam; quod ſemel monuiſſe ſufficiat.

PROP.

PROP. III.

Si in Descriptione Prop. primæ angulorum KSH *&* FCO, *quorum motu curva describitur, crura* SH *&* CO *simul coincidant cum recta* SC, *punctum describens* P *percurret Lineam rectam non curvam.*

DUcatur CK (*Fig.* 5.) Normalis ad AC, & producatur SQ donec ei occurrat in K; ducantur quoque QG & SL paralleiæ rectis CS & AE, normali CK occurrentes in G & L. Erit angulus QSC = KQG, & QCO = CQG, & EAC = EQG; adeoque iisdem retentis symbolis ac in Prop. I. erit QG : GK :: $a : e$, QG : GC :: $a : d$; QG : GE :: $a : c$ & GK : GC :: $e : d$ & GC : GE :: $d : c$; unde CK : GC :: $d+e : d$; atque EC : GC :: $d+c : d$, & proinde CK : EC :: $d+e : d+c$: sed CK $= e$ cum CS sit æqualis a; atque ut CS : CK :: CA : CE : *i. e.* $a : b :: c$: CE $= \frac{bc}{a}$ unde consequitur $e : \frac{bc}{a} :: d+e : d+c$ & $\overline{d+e}\times bc = \overline{d+c}\times ae$. Proinde in æquatione generali Prop. I. evanescit terminus $\overline{abc\times\overline{d+e} - a^2e\times\overline{d+c}}\times x$ cumque $\overline{a-b}\times ce + \overline{ae-bc}\times d = \overline{d+e}\times bc - ae\times\overline{d+c}$ evanescit quoque terminus primus $\overline{\overline{a-b}\times ce + \overline{ae-bc}\times d}\times x^2$ & manebunt tres tantum termini qui dividi possunt per y; quo quidem facto, prodit æquatio lineæ unius tantum dimensionis

$$\left.\begin{matrix} a\times\overline{-a^2+cd} \\ -bc\times\overline{e+d}\end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix} +a^2\times\overline{d+c-e} \\ +dce\end{matrix}\right\} x$$

$$-bc\times\overline{a^2-ed} \quad -ae\times\overline{dc-a^2} = 0.$$

Quæ æquatio est ad rectam. Proinde quoties anguli CSP, SCP simul evanescunt, non describetur Linea quævis curva sed recta.

Corol. I. Recta deſcripta ex æquatione determinari poteſt, ſed facilius hoc pacto: ſumatur CH ad CS ut $AS \times CQ^2$ ad $AC \times SQ^2 - AS \times CQ^2$, eritque H punctum ubi recta occurrit datæ CS. Per S, Q & C ducatur Circulus ſecans AE in N, & per punctum H ducatur recta HR angulum CHR conſtituens æqualem angulo NSQ; recta HR ea erit quæ deſcribetur concurſu crurum SH & CO ad modum *Prop. primæ.* Punctum H inveſtigatur ſumendo q ipſo puncto Q quamproximum, & inveſtigando h ubi concurrunt crura CO & SH cum Q ad q pervenerit, cui quamproximum erit ipſum punctum H. Et quoniam cum SK pervenerit ad poſitionem SN abibit P in infinitum, hinc conſtat inclinatio ea rectæ HR ad CH quam explicuimus.

Corol. II. Hinc ſi anguli KSH & FCO ſibi mutuo ſupplementa ſint ad duos rectos, & recta AE angulum conſtituat CAE angulo FCO æqualem, non deſcribetur curva, ſed recta LR, ita poſita, ut $CH = SA$ & angulus EHR æqualis alterutro angulorum FCO & KSH; nam in eo caſu abit Q in infinitum & $CQ = SQ$; adeoque $CH : CS :: AS \times CQ^2 : AC \times SQ^2 - AS \times CQ^2 :: AS : AC - AS :: AS : CS$ & proinde $CH = AS$.

Corol. III. Speciatim ſi anguli ſint recti, & AE ſit perpendicularis in CA, deſcribetur alia recta perpendicularis in CS; cujus Diſtantia a C æqualis erit Diſtantiæ prioris a puncto S.

Corol. IV. Curvæ omnes, Methodo *Prop. primæ* deſcriptæ, poſſunt delineari ſi loco anguli FCO ſubſtituatur recta circa Centrum C volubilis. Quippe ſi in figura *Prop. primæ* ſumatur angulus $SCI = FCO$ & angulus $QSU = ISC$, punctum U concurſus crurum CO & SU deſcribet rectam BU: Unde motu anguli HSU circa S ut Polum, & rectæ CO circa C, deſcribetur eadem Curva quæ *Prop. prima* deſcribebatur; ſi nimirum ducatur CO & SL Concurſus U per rectam infinitam BU, Concurſus ejuſdem CO cum altero crure SH deſcribet Lineam, ſecundi Ordinis, *Propoſitionis primæ* Methodo deſcriptam.

PROP. IV.

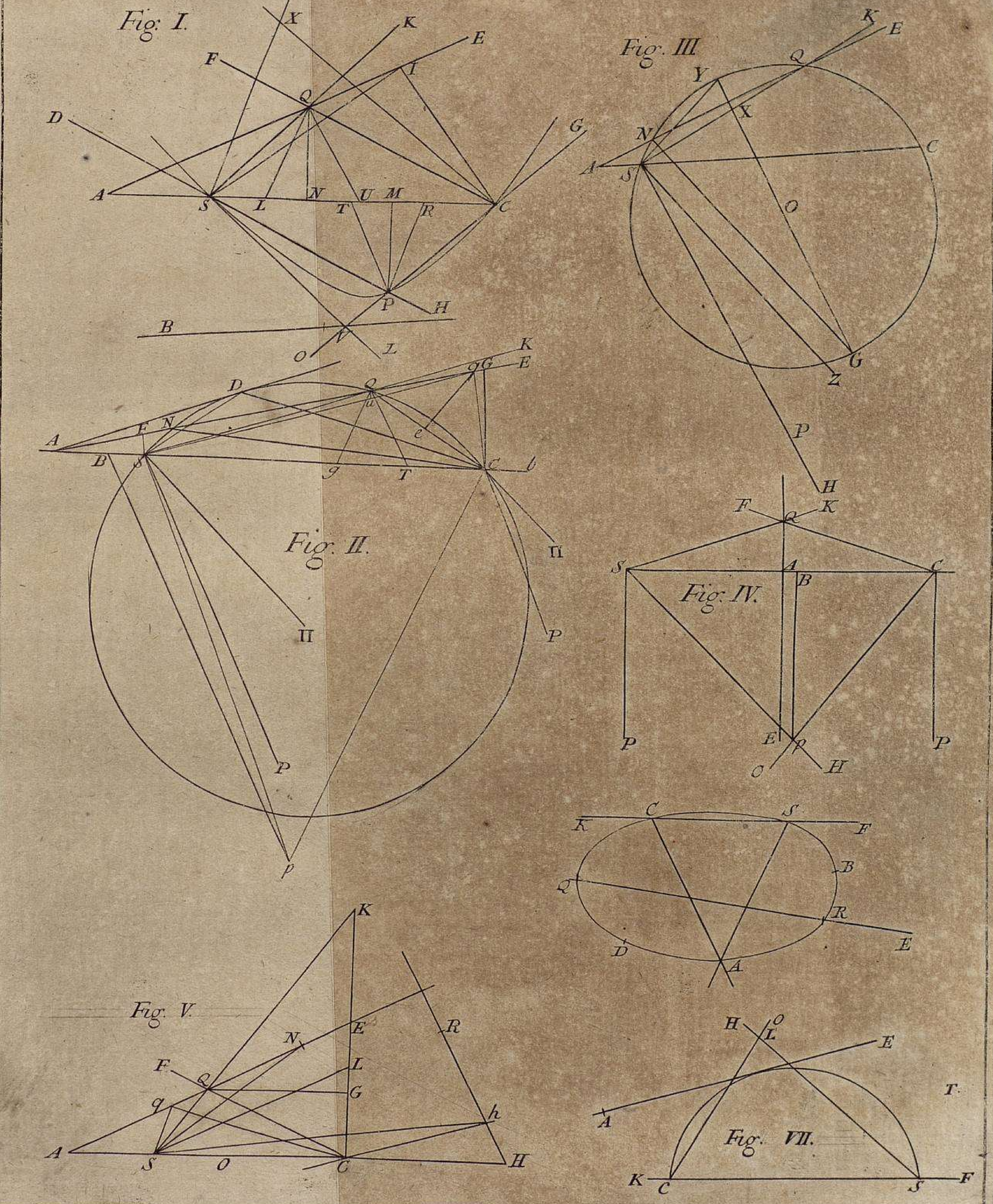


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VII.

PROP. IV.

Lineam Secundi Ordinis ducere per data quævis quinque puncta; & Lineam datæ speciei per quatuor quævis puncta describere.

IMprimis dentur quævis quinque puncta A, B, C, S, D, (*Fig.* 6.) per quæ ducenda sit Conica sectio; ducantur rectæ CA, CS, SA, & circa Polos C & S rotentur Anguli dati ACS, ASC, & applicentur crurum CA & SA Concursus primum ad punctum B, dein ad punctum D, & interea notentur puncta Q & R ubi crura CF & SK se mutuo decussant; per puncta Q & R ducatur recta infinita EQ, & si crurum CF, SK Concursus semper ducatur per rectam QE, aliorum crurum concursus describet Lineam secundi Ordinis per data quinque puncta transeuntem; quippe ubi crurum CF, SK Concursus accedit ad Q & R, sectio conica transit per B & D; quando vero coincidunt crura CF & SK cum CS curva transit per A & necessario quoque transibit per C & S per *Corol.* I. *Prop.* I. curva igitur ducitur per data quinquepuncta.

Quod si dentur tantum quatuor puncta, infinitæ Lineæ secundi Ordinis per ea duci possunt; curva vero datæ speciei, quæ per quatuor puncta duci potest, sic determinatur.

Ducenda sit imprimis Parabola per quatuor puncta C, S, L, T: (*Fig.* 7.) Jungantur ut prius puncta C, S, L & circa data puncta C & S ut Polos rotentur anguli LCS & LSC; applicetur crurum CO & SH concursus puncto quarto T, & interea concurrant reliqua crura bina CF & SK in A. Dein per C & S describatur arcus Circuli cui inscribi possit Angulus æqualis supplemento datorum LCS & LSC ad duos aut quatuor rectos; & ex determinato puncto A ducatur recta AE circulum hunc contingens. Si concursus crurum CF & SK ducatur per hanc rectam, concursus crurum CO & SH describet Parabolam per dicta quatuor puncta transeuntem; ut ex Prop. secunda satis est manifestum.

Ducenda sit nunc Hyperbola per data quatuor puncta cujus Assymptotωn angulus datur MIO (*Fig.* 8.) ejusque supplementum ad duos rectos MIU; cæteris manentibus ut in constructione præcedente ducatur ex A recta AQ circulo dicto occurrens in punctis N & Q & arcum NQ abscindens in quo inscribi possit angulus datus MIU; si crurum CF, SK concursus ducatur per hanc rectam, Hyperbola describetur per data quatuor puncta transiens & datæ speciei, motu puncti P concursus crurum CO & SH.

Si vero ex data axium ratione Hyperbola vel Ellypsis sit determinanda; id ex Corol. primo, Prop. secundæ non difficulter conficitur.

Quippe sint ut prius *(Fig. 9.)* C, S, L, T, quatuor puncta data, & rotentur Anguli LCS & LSC circa Polos C & S; applicetur Concursus crurum CL & SL ut prius puncto T, & interea notetur punctum A ubi concurrunt crura CF & SK; describatur Circulus quoque per C & S cui idem angulus inscribi poterit, datorum nim. LCS & LSC supplementum ad duos aut quatuor rectos, cujus centrum O dabitur & Radius OY in quo investigari potest punctum X hac ratione. Ex data specie Curvæ datur ratio Linearum GX & YX, quæ sunt ut latera Quadrata axium per Corol. I. Prop. II. Proinde datur ratio OX ad OY, adeoque cum detur OY, dabitur OX. Centro O, radio vero OX, alius describatur circulus, cui tangens ducatur ex jam determinato puncto A: Si Concursus crurum CF & SK ducatur per hanc rectam Circulum tangentem, Concursus crurum reliquorum CL & SL describet Curvam datæ speciei per data quatuor puncta transeuntem. Hæc est Constructio quam absque Demonstratione protulit D. *Neutonus* in Schol. *Prop.* 27. *Lib.* 1. *Princip.* ea vero ex *Corol.* 1. *Prop.* 2. facile consequitur.

Corol. I. Cum ex puncto quovis A duæ duci possint tangentes Circulo; patet duas Conicas sectiones, ejusdem speciei, per data quatuor puncta posse duci. Unica tantum sectio Conica per quinque data puncta duci potest; nam si duæ per eadem quinque puncta transirent, duæ Lineæ secundi Ordinis se mutuo secare possent in pluribus punctis quam quatuor.

Corol. II. Eædem Curvæ describi possunt variis admodum Angulis & diversarum Rectarum Ope. Quippe eædem describerentur Curvæ si junctis C, S & B vel D, A, C diversi sumerentur Anguli, & rectæ quoque investigarentur diversæ ab iis quas nos adhibuimus.

Curvæ *Prop.* I. descriptæ integrum curvarum systema constituunt; atque eæ solæ Linearum Ordinem secundum complent. Hæ fuerunt veterum Geometrarum deliciæ, quarum speculationi plurimum admodum indulserunt; nec ullo supersedebant Labori, ut earum Proprietates licet maxime Complexas rimarent, & secundum Methodum suam demonstrationibus elegantibus admodum ornarent. Harum vero Geometria tandem quantum fieri potest perfecta reddita est, sublimiori horum seculorum Geometra, qui earum Theoriam absolvit, variis iis viis quibus sectiones conicas, vel datis umbilicis, vel iis non datis, determinavit in *Princip.* *Lib.* 1. Sectionibus 4 & 5.

Egregius vero idem Auctor, non tantum curvarum primi generis Contemplationem ita absolvit, ut parum admodum aliis supersit indagandum; sed primus aliud novum Curvarum Systema, Lineas scil. tertii Ordinis, enumerare aggressus est; harum Proprietates generales Sectionum Conicarum Proprietatibus consimiles protulit, ipsasque in classes atque species pulcherrime redegit, in eximio quem de Enumeratione Linearum tertii Ordinis conscripsit Tractatu; earum numerus longe major, aut Figura magis complexa, longe difficilius determinanda, non deterruit acre Viri ingenium ad summa quævis feliciter assequenda nati. Curvis vero primi Generis jam descriptis, ad novas has delineandas progredimur.

SECTIO II.

De Descriptione Linearum Tertii Ordinis quæ punctum duplex habent.

PROP. V.

Moveatur ut in Prop. I. *Angulus datus* FCO (*Fig.* 10.) *circa Polum* C; *& interea Angulus datus* LNQ *semper percurrat, angulari suo puncto* N, *Rectam infinitam* AE, *ita ut Crus* NQ *perpetuo transeat per datum punctum* S; *si Concursus crurum* CF *&* SN *ducatur per rectam infinitam* BQ *concursus crurum* CO *&* NL *describet Lineam tertii Ordinis.*

SIT punctum Q concursus crurum CF & SN, punctum P concursus crurum CO & NL; & ex punctis P, N, Q ducantur PM, NH, QK normales in datam CS; sint quoque Anguli PRC, QUC æquales sibi mutuo atque angulo dato FCO. Ducatur NT constituens angulum STN æqualem dato SNP, & ex S in NT cadat perpendicularis Sg, quæ

 producta

producta occurrat perpendiculo NH in I, Sit Pe parallela rectæ CS curvæ occurrens in P atque rectæ NH in e.

Dicatur CS $= a$, BC $= b$, PM $= y$, CM $= x$, SA $= e$; sitque anguli FCO sinus ad ejus cosinum ut d ad a; sit BK : KQ :: $a : c$, AH : HN :: $a : f$, & sinus anguli SNL ad cosinum ut g ad a.

His positis, eadem ratione quâ investigavimus Valorem primum perpendicularis QN in Prop. I. deprehendemus QK $= \dfrac{bc \times \overline{dx + ay}}{a \times \overline{d + c} \times x + \overline{a^2 - dc} \times y}$ ubi signa aliqua mutanda sunt si angulus FCO obtusus sit: Est vero CK $=$ BK $-$ BC $=$ (cum BK : QK :: $a : c$) $\dfrac{bdcy - bacx}{a \times \overline{d + c} \times x + \overline{a^2 - dc} \times y}$

& SK $=$ CS $-$ CK $= \dfrac{\overline{a^2d + a^2c + bac} \times x + \overline{a^3 - adc - bdc} \times y}{a \times \overline{d + c} \times x + \overline{a^2 dc -} \times y}$.

Sed SK : QK :: SH : HN :: SA $-$ AH : HN. Unde cum AH : HN :: $a : f$ erit HN $= \dfrac{efbc \times \overline{dx + ay}}{\overline{a^2d + a^2c + bac} \times fx + \overline{a^3 - adc - bdc} \times fy + abc \times \overline{dx + ay}}$

Sit $a^2d + a^2c + bac = m$ & $a^3 - adc - bdc = n$ eritque HN $= \dfrac{efbc \times \overline{dx + ay}}{mfx + nfy + abc \times \overline{dx + ay}}$ & SH $= \dfrac{emfx + nefy}{mfx + nfy + abc \times \overline{dx + ay}}$.

Cum Angulus externus STN æqualis sit duobus TGN, TNG, & Angulus SNL (qui supponitur æqualis ipsi STN) sit æqualis duobus TNS, TNG; patet TGN $=$ TNS, adeoque Triangula SNg, NGH, NPe esse similia; cumque Angulus STg $=$ NTH manifestum est Triangula STg, NTH, NIg similia esse: Proinde erit Sg. Ng :: Ne : Pe. ST : NI :: Sg : Ng adeoque ST : NI :: Ne : Pe. Dicatur HN $= z$ eritque ST $=$ SH $-$ HT $= e - \dfrac{az}{f} - \dfrac{az}{g}$. NI $=$ NH $+$ HI $= z + \dfrac{ea}{g} - \dfrac{a^2z}{gf}$. N$e = z - y$ & P$e = a + x - e + \dfrac{az}{f}$. Et proinde $e - \dfrac{az}{f} - \dfrac{az}{g} : \dfrac{ea}{g} + \dfrac{\overline{fg - a^2}}{fg} z :: z - y : a + x - e + \dfrac{az}{f}$. Loco z substituatur valor prius repertus rectæ HN & prodibit $efg \times \overline{mfx + nfy + abc \times \overline{dx + ay}} - aefbc \times \overline{g + f} \times \overline{dx + ay} : eaf \times \overline{mfx + nfy + abc \times \overline{dx + ay}} + \overline{fg - a^2} \times efbc \times \overline{dx + ay} :: efbc \times \overline{dx + ay} - mfxy - nfy^2 - abc \times \overline{dxy + ay^2} : \overline{a - e} \times \overline{mfx + nfy + abc \times \overline{dx + ay}} \times \overline{a - e} + aebc \times \overline{dx + ay} + mfx^2 + nfyx + abc \times \overline{dx^2 + ayx}$.

Unde

4

Unde ducendo media & extrema in se mutuo prodibit æquatio hujus formæ $Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 = o$, cujus coefficientes A, B, G, D, E, F, G calculo obvio ex Analogia inventa investigari possunt.

Cum vero variabiles Quantitates x & y in hac æquatione ad tres tantum dimensiones ascendant, manifestum est Lineam describi Ordinis tertii quæ in tribus punctis Rectâ secari potest.

Corol. I. Curva habet punctum duplex in C; Quippe si in æquatione curvæ evanescat y, manebunt tantum termini Dx^3 & Gx^2, & æquatio erit formæ $Dx^3 + Gx^2 = o$; cujus radices tres sunt o, o, $-\frac{G}{D}$; unde cum C sit principium abscissæ, curva transibit necessario per C bis. Curva vero nunquam transit per S, cum curvæ puncta semper versentur in recta NL, quæ nunquam potest transire per S; alias duæ rectæ Lineæ SN, NL se mutuo secare possent in duobus punctis N & S.

Corol. II. Super recta Linea *(Fig.* 11.*)* CS describatur segmentum Circuli cui inscribi possit angulus datus SNL; secet Circulus hic rectam AE in duobus punctis N & n, & jungantur CN, Cn atque SN, Sn occurrentes rectæ BQ in punctis Q, q. Ducantur CQ, Cq, atque rectæ CP, Cπ angulos datos PCQ, πCq æquales ipsi FCO constituentes; tunc rectæ CP & Cπ tangent arcus curvæ concurrentes in puncto duplice C, & se mutuo decussantes ad formam *Nodi* vel *Crucis*.

Corol. III. At si Recta AE Circulum in quo inscriptus est angulus datus SNL contingat in puncto quovis D, evanescet Ovalis quæ jacebat inter CP & Cπ, & curva evadet *Cuspidata* in C.

Corol. IV. Quod si recta AE cadat penitus extra circulum nec eum contingat nec secet; curva habebit *Punctum* conjugatum in C absque nodo, cruce, cuspide vel ovali.

Corol. V. Quod si, cæteris manentibus ut in Propositione, *(Fig.* 12.*)* Concursus cruris CF cum alia SZ angulum datum cum SN constituente, ducatur per rectam infinitam XZ, punctum P describet adhuc Lineam tertii Ordinis punctum duplex habentem in C: Nam hæc constructio ad eam hujus Propositionis reduci potest; Quippe si sumatur CSD æqualis NSZ, & circa C moveatur datus angulus QCZ æqualis ipsi SCD, & crurum CZ, SZ concursus ducatur per rectam XZ, concursus crurum CQ & SN describet aliam rectam per *Prop.* 3. Unde hæc constructio ad eam hujus Propositionis facile reduci poterit.

PROP.

Prop. VI. Problema.

Determinare Curvarum Assymptotos & crura infinita.

Super Rectam (*Fig.* 13. *n.* 1.) CS describatur segmentum Circuli cui inscribi possit Angulorum datorum FCO, LNS supplementum ad quatuor rectos. Supponamus imprimis rectam BQ huic Circulo occurrere in duobus punctis Q & I: Cumque angulus SQC sit supplementum angulorum FCO, SNL ad quatuor rectos, manifestum est crura CP & NL evadere parallela ubi concursus crurum CF & SN in Q circulum tangit, & proinde tunc curvam abire in infinitum. Id vero bis contingit, cum recta circulo bis occurrat; adeoque si anguli QCP, ICπ æquales sint dato FCO, erunt CP & Cπ parallelæ duabus curvæ Assymptotis; quarum Positio determinatur eadem fere ratione qua Assymptotos Linearum secundi Ordinis in *Prop.* II. determinavimus.

Sit G punctum ubi Assymptotos occurrit rectæ CS; & GC erit ad GH ut QCq ad QSq si puncta Q, q sint quamproxima; GC vero erit ad CH ut QCq ad $QCq - QSq$ sive ut $BC \times SQ^2$ ad $BC \times SQ^2 - BS \times CQ^2$. Unde cum detur angulus PCS quem Assymptotos per G ducta constituit cum CG, dabitur Assymptotos Positione; & similiter determinatur Assymptotos quæ parallela est rectæ Cπ.

Adhæc curva abit in infinitum cum N fit punctum infinite distans; nam P versatur semper in Recta NL: Proinde per S (*n.* 2.) ducatur SU parallela AN, occurrens Rectæ BQ in R; ducatur CR, & dein Recta CZ angulum ZCR constituens æqualem dato FCO, eritque CZ parallela tertiæ Assymptoto Curvæ. Unde Curva habebit sex crura infinita Hyperbolica ad tres Assymptotos.

Sed 2°. Si recta BQ (*n.* 3.) circulum contingat in Q evadet $QCq = QSq$ ex natura circuli, adeoque GC quæ est ad CH ut QCq ad $QCq - QSq$ evadet infinita; Assymptotos proinde abit in infinitum & nullibi reperiri potest. Quod si AN non sit parallela rectæ SQ curva habebit duo crura Hyperbolica ad Assymptoton rectæ CZ parallelam, & duo Parabolica quæ abibunt in plagam rectæ CP, si $QCP = FCO$.

3°. Si AN sit parallela rectæ SQ vel SI, (*Fig.* 14.) evadet CH infinita, adeoque cum $GC : CH :: BC \times SQ^2 : BC \times SQ^2 - BS \times CQ^2$, erit CG quoque infinita, & proinde crura evadunt Parabolica abeunte Assymptoto in infinitum. Cumque in hoc casu abeat N in infinitum quando Q circulum

circulum tangit; patet curvam quatuor habituram crura infinita duo Parabolica & totidem Hyperbolica.

In duobus igitur casibus curva fit Hyperbolo-Parabolica; cum scil. BQ circulum contingit nec tamen AN parallela fit SQ, atque cum BQ, circulum secat & AN existit parallela alteri rectarum SQ, SI.

Quod si 4°. BQ circulum contingat & simul AN parallela sit ipsi SQ curva duo habebit crura infinita Parabolica eritque *Neutonianarum* speciei 68, 69 vel 70.

Denique cadat BQ tota extra circulum, & duo describentur curvæ crura infinita abeunte puncto N in infinitum; ea vero Hyperbolica erunt, & curva erit Hyperbola defectiva, classis quintæ tertii Ordinis, secundum Enumerationem D. *Neutoni*.

Corol. I. Si angulus FCO (*Fig.* 15.) supplementum sit anguli SNL ad duos rectos, angulus CQS evanescet vel evadet æqualis duobus rectis; atque crura NP, CP evadunt parallela cum Q coincidit cum B & cum Q abit in infinitum. Assympototos cruris quod formatur in primo casu sic determinatur: Coincidat CO cum CS, & sumatur punctum O in recta CS ita positum ut OA sit ad CA, ut est CB ad CS, & per O duc rectam O*p* parallelam cruri CF erit O*p* curvæ Assymptotos. Quippe supponamus Q & N esse punctis B & A quam proxima, adeoque *p* punctum curvæ concursui ejus cum Assymptoto sua quamproximum, atque si *p*O ducatur parallela rectæ CF ea erit curvæ Assymptotos. Sed angulus O*p*C = FC*o* = BCQ & O*p*N = AL*n* = ASN, cum triangula A*n*L & S*n*N æquiangula sint. Sed anguli O*p*C, O*p*N (qui evanescunt cum *p* abit in infinitum) erunt ut rectæ OC & OA; anguli vero evanescentes (ipsis O*p*C, O*p*N æquales) BCQ, ASN sunt ut rectæ SB & CB; & proinde est OC ad OA, ut SB ad CB; adeoque OA ad CA, ut CB ad CS.

Altera vero Assymptotos, (*Fig.* 16.) ad quam crura duo describuntur quando Q abit in infinitum, sic determinatur positione. Ducantur CF & SN parallelæ rectæ BQ, & sint anguli SND, FCG æquales datis FCO, SNL; & sumatur CU ad CD, ut CB ad CS, eritque Recta *p*U ducta per U parallela ipsi CG altera Curvæ Assymptotos; cujus rei demonstrationi, cum similis sit præcedenti, non opus est immorari.

Corol. II. Cæteris manentibus ut in *Corol.* præcedente, Si BQ parallela sit ipsi CS, Assymptoti O*p*, U*p* abeunt ad distantiam infinitam, & crura deveniunt Parabolica; nam in eo casu CB evadit infinita; sed OA : CA :: CB : CS & CU : CD :: CB : CS; adeoque OA & CU evadunt infinitæ; proinde duo Assymptoti in infinitum abeunt & earum crura evadunt Parabolica. Alia vero describuntur duo crura Hyperbolica cum punctum N abit in infinitum; adeoque curva evadit Hyperbolo-Parabolica speciei, secundum Enumerationem *Neutonianam* 47, 48, 49, 51

49, 51 vel 54; cum hæ solæ habeant punctum duplex ad finitam distantiam, & simul duo crura Parabolica atque duo Hyperbolica.

Corol. III. Si AN & BQ sint parallelæ erit *(Fig.* 16.) CD infinita, adeoque & CU; proinde Assymptotos curvæ, ad quam crura describuntur cum Q abit in infinitum, nullibi reperitur, & crura ea curvæ evadunt Parabolica; cumque N abeat in infinitum una cum Q manifestum est curvam dicta habere crura infinita Parabolica & duo tantum præterea Hyperbolica ad Assymptoton O*p*. Quod si sint AN & BQ parallelæ quoque ipsi CS, curva habebit duo tantum crura pure Parabolica; eritque speciei 68, 69, vel 70.

Corol. IV. Quod si maneat BQ ut in *Corol.* I, & fiat AN parallela ipsi CS, erit CA infinita; sed OC : CA :: BS : CS; & proinde OC quoque infinita erit; adeoque ea crura quorum duo erant ad Assymptoton O*p*, & duo describebantur cum N abibat in infinitum, nunc coincidunt (quoniam cum N infinite distat Q fit in B) & evadunt Parabolica. Manet vero altera Curvæ Assymptotos Recta nim. *p*U, adeoque Curva est Hyperbolo-Parabolica ut in prioribus *Corolariis*.

Corol. V. Si anguli FCO, SNL *(Fig.* 13.) sint recti, altera Assymptotωn erit perpendicularis ipsi CS, altera perpendicularis rectæ BQ.

LEMMA I.

Si datus Angulus SNP (Fig. 17.) *angulari suo puncto* N *percurrat Rectam infinitam* AE, *& ex dato puncto* S *ducatur perpetuo* SR *angulum datum* NSR *cum recta* SN *constituens, ea semper occurret rectæ* NP *productæ in puncto aliquo aliæ Rectæ* RF *Positione datæ.*

Sit R punctum ubi recta SR occurrit rectæ NP & si angulus SFN = dato SRN circulus per N, S, R ductus transibit per F; adeoque angulus RFN = RSN, cum vero detur punctum F & angulus RFN (=dato RSN) dabitur Recta FR, quam perpetuo tangit punctum R concursus Rectarum NP & SR.

Corol. Hinc vicissim si duæ rectæ datæ AE, FR se mutuo secent in puncto F, & ex S educatur SR datæ FR occurrens in puncto R, atque ad id punctum constituatur RP, ita ut angulus SRP = SFE, occurrat vero RP datæ AE in N, angulus SNP dabitur eritque semper æqualis angulo SFR.

PROP.

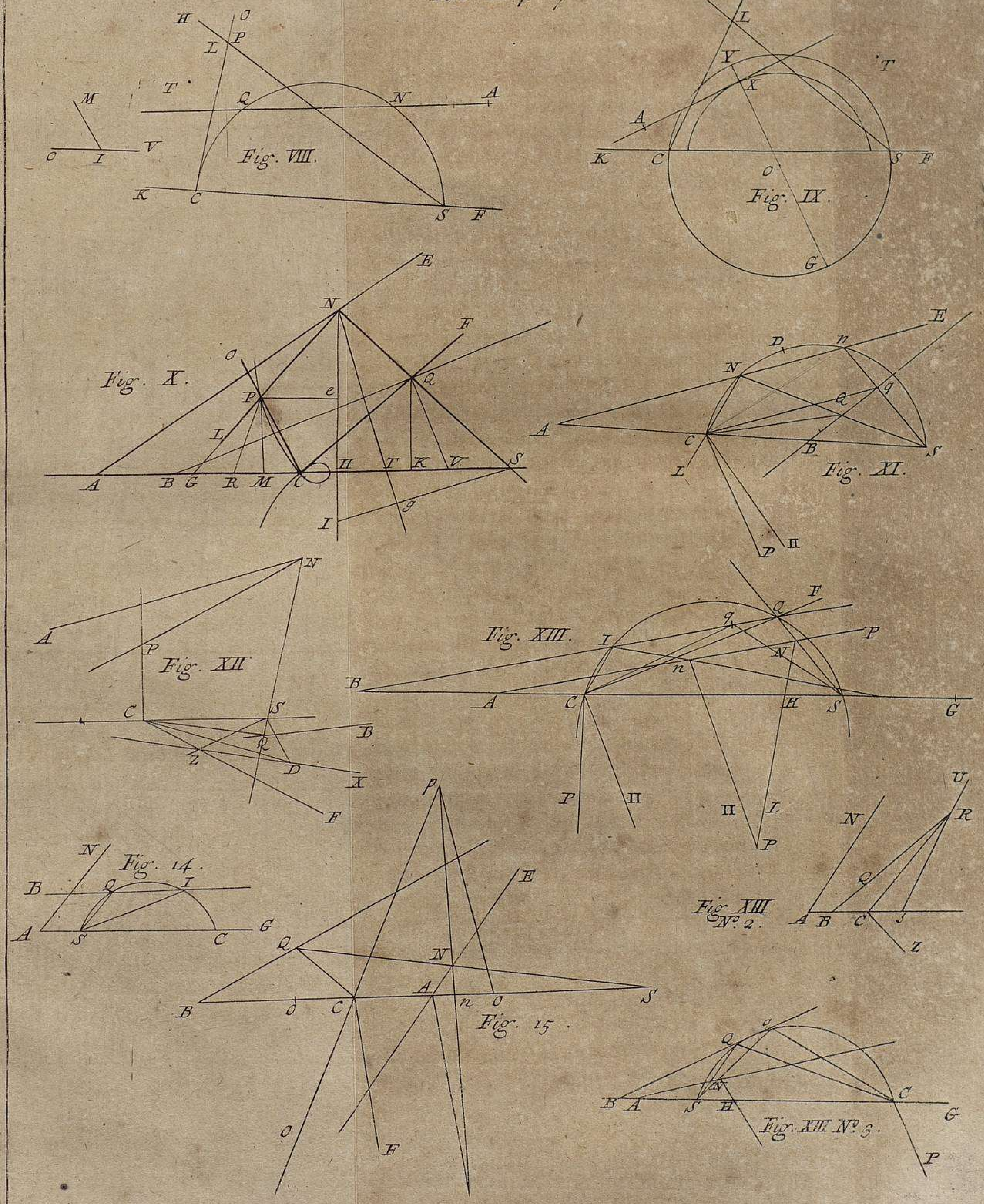


Fig. VIII.
H O P L T Q N A M O I V K C S F
Fig. IX.
L Y T X A K C S F O G
Fig. X.
E N F O Q P e L A B G R M C H T K V S I g
Fig. XI.
D n E N q Q A C B S L P Π
Fig. XII.
N A P C S B Q Z D X F
Fig. XIII.
F Q q P I N n B A C H S G P Π Π L P
Fig. 14.
N B Q I A S C G
Fig. 15.
p E Q N B o C A n o S O F
Fig. XIII N.° 2.
U R N Q A B C s Z
Fig. XIII N.° 3.
q Q N B A S H C G P

Prop. VII.

Curvæ omnes Prop. V. *descriptæ possunt facilius duci si cæteris manentibus, loco anguli dati* FCO *revolvatur recta Linea* CO *circa Polum* C, *cujus Concursus cum* NP *Lineam tertii Ordinis describet, si ejusdem Concursus cum* SN *ducatur per Rectam datam.*

CÆteris manentibus ut in *Prop.* 5. sumatur angulus KCS (*Fig.* 18.) æqualis angulo FCO & ducatur SK; Ex S exeat recta S*q*, angulum RSN constituens æqualem CSK, occurrens rectæ NP productæ in R & radio CO in *q*. Manifestum est ex *Lemmate* 1. R semper fore in recta data ER, atque angulum SRP dari: Patet quoque ex *Prop.* 3. crura CO & S*q* concursu suo *q* rectam percursura cum CQ & SQ concursu suo describant rectam BQ, & simul coincidant CO & S*q* cum CS quando Q pervenit ad K. Proinde punctum Curvæ P determinatur concursu Radii CO, circa C ut Polum revolventis, cum RP crure dati anguli SRP angulari suo puncto R rectam FR percurrentis, dum ejusdem radii CO concursus cum crure SR (punctum nimirum *q*) percurrit aliam rectam G*q*. Hinc igitur simplicior evadit descriptio, dum loco FCO circa C revolventis Radius rectilineus CO substituitur.

Corol. I. Simili plane ratiocinio demonstrari posset omnes curvas *Prop.* 5. describi posse licet alteruter angulorum FCO, SNP supponatur semper rectus aut datæ cujusvis Magnitudinis.

Corol. II. Hujus *Prop.* ope failius species curvarum deteguntur. Super CS (*Fig.* 19.) describatur circulus habens angulum datum SNP inscriptum; huic circulo occurrat BQ in punctis duobus Q & L, atque rectæ CQ, CL parallelæ erunt curvarum Assymptotis duabus, & denotant plagas quatuor crurum Hyperbolicorum. Sumatur QH in recta SQ ita ut QH : NQ : : QC*q* : QS*q*—QC*q*, & ducatur per H recta infinita parallela ipsi CQ atque ea erit Assymptotos curvæ, & similiter altera Assymptotos quæ parallela est rectæ CL determinatur. Porro (*Fig.* 20.) ducatur SG parallela rectæ AE occurrens rectæ BQ in G; dein ducatur CG atque ei parallela erit tertia curvæ Assymptotos.

D *Corol.*

Corol. III. Ex his atque *Corol.* 2, 3 & 4, *Prop.* 5. species curvarum investigari possunt: Quippe ex *Corol.* præcedente curvarum crura innotescunt, & ex *Corol. Prop.* 5. constare potest an curva sit *Nodata*, *Cuspidata* an *Punctata*. Curva nimirum habebit *Nodum* vel *Crucem* quoties AN occurrit bis circulo priore *Corollario* descripto, *Cuspidem* vero quoties AN dictum circulum contingit, & *Punctum* conjugatum si tota extra circulum ponatur.

Corol. IV. Hinc 1. Si rectæ BQ & AN circulum secent, nec sit AN parallela alterutri rectarum SQ vel SL, Curva habebit tres Assymptotos, sex crura Hyperbola, & duos arcus se mutuo secantes in C vel ad formam *Nodi* vel ad formam *Crucis*, atque curva descripta erit aliqua *specierum* 2, 7, 8, 25, si diametro careat, sed *specierum* 11, 18, 19, 20, si diametrum habeat.

2. Si BQ Circulum secet, AN vero eum contingat, Curva habebit sex crura Hyperbolica ad tres Assymptotos ut prius, sed *Cuspidata* erit in C, atque *speciei* 3 vel 12; hujus scil. cum diametrum habet, illius vero cum diametro caret.

3. Quod si BQ circulum secet, AN vero integra extra circulum ponatur, curva adhuc constabit ex tribus Hyperbolis, & *Punctum* conjugatum habebit in C absque nodo, cruce, Cuspide vel Ovali, & *speciei* erit vel 4, vel 13.

4. Nunc tangat recta BQ circulum eumque secet AN; nec sit AN parallela rectæ SQ aut SL; tunc Curva habebit quatuor crura infinita duo Parabolica & duo Hyperbolica cum *nodo* vel *cruce* & *speciei* erit 47, 51, seu 54.

5. Quod si BQ adhuc circulum contingat & AN ei quoque tangens sit; *Nodus* in *Cuspidem* mutabitur & figura Hyperbolo-Parabolica erit *speciei* 48.

6. Contingat adhuc BQ circulum, cadat vero AN tota extra Circulum, & figura Hyperbolo-Parabolica habebit *Punctum* conjugatum in C absque nodo, Cuspide vel Ovali eritque curva *speciei* 49.

7. Cadat nunc recta BQ penitus extra Circulum, at eum secet AN; atque curva habebit duo tantum crura Hyperbolica ad unicam Assymptoton parallelam rectæ CG & *Nodum* in C cum Ovali eritque *speciei* vel 34 vel 41; hujus scil. cum Diametrum habet, illius vero si Diametro careat.

8. Contingat AN circulum sed BQ extra eum ponatur, & *Nodus* mutabitur in *Cuspidem* acutissimum, atque curva erit Hyperbola defectiva *speciei* vel 35 vel 42; in hoc casu curva fit Cissois veterum & Diametrum habet in illo Diametro caret.

9. Cadat AN extra Circulum simul ac BQ & *Nodus* cum Ovali abibit in *Punctum* conjugatum & Hyperbola erit defectiva *speciei* vel 36, 43 vel 44.

10. Sit

10. Sit AN parallela rectæ SQ vel SL, & NQ evadet infinita, adeoque & HQ; unde si BQ secet circulum curva habebit duo crura infinita Hyperbolica & duo Parabolica; atque Lineæ describi possunt secundum varias Positiones rectæ AN *specierum* 47, 51, 48, 49: Quod si BQ circulum contingat curva habebit duo tantum crura infinita Parabolica; eritque Parabola *Nodata* si AN circulum secet, adeoque *speciei* 68, *Cuspidata* si AN circulum contingat, adeoque *speciei* 70, & denique *Punctata* si AN neque circulum secet nec eum contingat, & proinde *speciei* 69.

11. Abeat punctum C in infinitum, & moveatur Recta CO (*Fig.* 21.) sibi semper parallela, ejusque concursus cum SN ducatur perpetuo per Rectam datam BQ, & concursus ejusdem cum NL altero Crure dati anguli SNL describet curvam quæ punctum duplex habet ad distantiam infinitam, & D. *Neutono* Hyperbolismus Hyperbolæ dicitur; cujus tres Assymptoti ex descriptione facile determinantur. Ducatur 1. per datum punctum S Recta SB parallela datæ AN, & per punctum B ducatur EB parallela rectæ CO, atque recta EB erit Assymptotos Curvæ; nam cum Q accedit ad B, punctum N atque Recta NL abeunt in infinitum, adeoque etiam punctum Curvæ quod in recta NL semper versatur; unde EB evadit tangens Curvæ ad Distantiam infinitam. 2. Ex dato puncto S ducatur recta SK constituens angulum SKB æqualem Differentiæ datorum SNL, OQB; & si ad punctum K constituatur angulus SKR æqualis dato SNL erit KR alia Curvæ Assymptotos; quippe accedat Q ad K, & coincidet CO cum KR, adeoque ob angulos SKR, SNL æquales, in hoc casu erit CO parallela rectæ NL; proinde punctum curvæ P, quod determinatur concursu rectarum CO & NL abibit in infinitum, & recta KR curvam tanget ad distantiam infinitam. 3. Ducatur SF parallela datæ BQ occurrens rectæ AN in F, sit angulus SFI=SNL & sumatur in recta SF Linea FU ad FI, ut est IG ad IK; si per punctum U ducatur UL parallela recta FI, ea erit tertia curvæ Assymptotos. Curvarum species quæ hac ratione describi possunt sunt 57, 58, 59, 60; quarum Figuras delineatas in sæpe citato D. *Neutoni* Tractatu cernere licet.

12. Cæteris manentibus ut in præcedenti casu sit angulus SBT=SNL —OQB, & coincident puncta K & B, adeoque etiam duæ Assymptoti coincident quæ per ea puncta transibant; Curva vero evadit ea quæ D. *Neutono* Hyperbolismus Parabolæ appellatur, quæ quatuor habet crura infinita Hyperbolica ad Assymptotos EB & UL; estque *speciei* 64, si diametro careat, sed *speciei* 65, si diametrum habeat.

13. Duo denique sunt casus in quibus Hyperbolismus migrat in Parabolam *Cartesianam*, vel scil. si AN & BQ sint parallelæ, vel si angulus SNL=OQB: In priori casu coeunt puncta B & F &. in infinitum una abeunt, unde crura hyperbolica quæ erant ad Assymptotos EB, UL in

 duo

duo migrant Parabolica; in posteriori coincidunt Assymptoti KR, UL, & una in infinitum abeunt, eorumque crura evadunt parabolica; in utroque curva est *speciei 66*.

Corol. V. Curva semper transit per punctum A; nam cum N pervenit ad A tum Q semper accedit ad B & CO ad positionem CA, unde CO occurret NP in A, earum vero Occursu Curvæ puncta determinantur.

Prop. VIII. Problema.

Æquationes Curvarum ad aliquam quatuor Neutoniana-rum *reducere atque inde speciem Curvæ detegere.*

UT Æquatio curvæ possit obtineri quæ ad aliquam quatuor D. *Neutoni* facile reduci poterit ea indaganda est ad Ordinatas alicui Assymptotωn parallelas; quod ad Ordinatas tertiæ Assymptoto, *Corol.* 2. Prop. præcedentis determinatæ, parallelas sequenti fit calculo.

Sit SG *(Fig. 22.)* parallela rectæ AN occurrens datæ rectæ BQ in G, & ducatur CG; ea erit Assymptoto curvæ parallela. Ducatur CB angulum ACB constituens æqualem dato SNP; huic parallela sit SD, & rectæ CG parallelæ ducantur PM, QT, N*e*; dicatur CB $= b$, CG $= d$, SD $= a$, CD $= e$, eritque DG $= d - c$; sit AG $= e$, PM $= y$, CM $= x$. Quoniam PM : CM :: QT : CT & BT : QT :: BC : CG :: $b : d$ erit QT $= \frac{bdy}{dx + by}$ & RQ $= \frac{cdx + \overline{c - d} \times by}{dx + by}$ & CT $= \frac{bdx}{dx + by}$ atque SR (= CT + SD) $= \frac{\overline{a + b} \times dx + aby}{dx + by}$. Sed SR : RQ :: SU : NU, atque si ducatur N*o* parallela rectæ SD erit (ob similia Triangula AN*o*, SDG) A*o* : N*o* (= UD) :: GD : SD :: $d - c : a$ :: AG — N*u* : S*u*; unde calculo obvio prodibit NU $= \frac{ae \times \overline{cdx + \overline{c - d} \times by}}{\overline{d^2a + d^2b - dbc} \times x}$.

Ducatur NK constituens angulum NKU = NUK = SNP, & dabitur angulus KNU, adeoque ratio NU ad UK; quæ sit ut a ad f atque UK $= \frac{f}{a}$ NU, & SK $= \frac{\overline{ae \times \overline{a + b} - fec} \times dx + \overline{a^2be - feb \times \overline{c - d}} \times y}{\overline{d^2a + d^2b - dcb} \times x}$

Sed

Sed angulus NSK $=$ PNe quoniam angulus PNe cum SNu ſupplementum conſtituit anguli SNP ad duos rectos, atque NSK cum SNU ejuſdem anguli idem ſupplementum conficiat; angulus etiam PeN $=$ SKN, & proinde ſimilia ſunt triangula KNS, eNP; atque SK : KN ($=$ NU) : : Ne ($=$ CD $-$ NU $-$ PM) : Pe $=$ DU $-$ CM. Unde ſi $\overline{d^2a + d^2b - dbc} = m$ prodibit $ae \times \overline{a+b} - fec \times dx + \overline{a^2be - feb} \times \overline{c-d} \times y$: $ae \times \overline{cdx + b \times \overline{c-d} \times y}$: : $cmx - mxy - ae \times \overline{cdx + b \times \overline{c-d} \times y}$: $ae \times \overline{a+b} \times d - am \times x + a^2bey - mx^2$; unde ducendo media & extrema in ſe mutuo & terminos in ordinem redigendo prodit æquatio hæc

$$a \times \overline{\overline{a+b} - fc} \times dmx^3 + \overline{a^2b - acd + fb \times \overline{c-d}} \times mx^2y + mab \times \overline{d-c} \times xy^2$$

$$\left.\begin{array}{l} + \overline{cm - aecd} \times \overline{acd} \\ + \overline{ad \times \overline{a+b} + fcd} \times am \\ - a^2de^2 \times \overline{a+b}^2 - afced^2 \times \overline{a+b} \end{array}\right\} x^2 \quad \left.\begin{array}{l} + \overline{cm - 2aecd} \times ab \times \overline{c-d} \\ \quad - a^3dbe \times \overline{a+b} + fcda^2be \\ - aed \times \overline{a+b} - am \times \overline{a^2b - fb \times \overline{c-d}} \end{array}\right\} xy.$$

$$- b^2a^2e \times \overline{c-d}^2 - a^4b^2e + a^2b^2ef \times \overline{c-d} \times y^2 = o.$$

In hac Æquatione deeſt Terminus y^3 quoniam Ordinatæ parallelæ ſunt curvæ Aſſymptoto; ſed ut æquatio hæc ad formam *Neutonianam* reducatur reſtat adhuc ut termini x^2y, xy, y^2 exterminentur.

Caſus I. Ducatur BH parallelæ rectæ CG, ſumatur BH ad BC, ut $a^2b - cad + fb \times \overline{c-d}$ ad $2ab \times \overline{d-c}$; ducatur recta CH, ad quam producatur PM, donec ei occurrat in N, atque in Æquatione ad axem CH (ſi nunc CN $= x$ & PN $= y$) deprehendemus duos tantum reperiri terminos trium dimenſionum x^3 & xy^2 ſed x^2y evaneſcere.

Sit $a^2b - acd + fb \times \overline{c-d} = i$ & $2ab \times \overline{d-c} = k$; ſintque tres rectæ BH, BC, CH tribus i, k, g proportionales eritque CM ($= x$) $= \frac{kx}{g}$ atque PM (y) $=$ PN $-$ NM $= y - \frac{ix}{g}$. Proinde in æquatione generali modi inveſtigata loco x & y ſubſtituantur illi valores & prodibit æquatio in qua deerit terminus x^2y. Æquatio prius reperta eſt hujus formæ ſi b ſcribatur pro $ad \times \overline{a+b} - fcd$, &c.

$mbx^3 + mix^2y + \frac{mk}{2}xy^2 + qx^2 + uxy + ny^2 = o$ pro x ſcribatur

$\frac{kx}{g}$

$\frac{kx}{g}$ & pro y ejus valor $y - \frac{ix}{g}$ & prodibit $\frac{\overline{mhk^3 - \frac{mi^2k^2}{2}} \times x^3}{g^3}$

$$+ \frac{mk}{2g}xy^2 + \frac{\overline{qk^2 - uki + ni^2}}{g^2}x^2 + \frac{\overline{uk - 2ni}}{g}xy + ny^2 = 0.$$

Dein pro x scribas $x - \frac{2ng}{mk}$ & pro y scribe $y - \frac{uk + 2ni}{mk}$ atque termini xy & y^2 evanescent, & æquatio prodibit pura *Neutoniana* hujusmodi.

$$xy^2 + \frac{2ng}{m^2k^2}\overline{2ni - uk} \times y = \frac{i^2k - 2hk^2}{g^2}x^3 - \left.\begin{array}{l} \frac{6ni^2k - 2hk^2}{mkg} \\ + \frac{2uki - 2qk^2 - 2ni^2}{mkg} \end{array}\right\} x^2$$

Hæc æquatio solis Coefficientibus ab ea differt D. *Neutoni* $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Cas. II. Quod si in æquatione imprimis inventa sint Termini x^3, x^2y at desit xy^2, alia methodo opus est ut Æquatio ad *Neutonianas* reduci possit. Sit æquatio investigata $mhx^3 + mix^2y + qx^2 + uxy + ny^2 = 0$, sume BH : BC :: $h : i$ & æquatio prodibit hujus formæ $\frac{hi^3}{g^3} - \frac{hi^3}{g^3}x^3 + \frac{i^3}{g^2}x^2y$ &c. ubi terminus x^3 evanescit & manet tantum terminus x^2y trium dimensionum; unde ad formam *Neutonianam* reducta æquatio erit hujusmodi $xy^2 + ey = bx^2 + cx + d$, atque hæc est forma æquationum quoties BQ transit per D, nam in eo casu $d = c$, & $k = 2ab \times \overline{d - c} = 0$; adeoque terminus $\frac{mk}{2}xy^2$ evanescit. Cum vero coincidant G & D, erit AH parallela rectæ SD, adeoque per *Corol.* 4. *Prop.* 7. *n.* 10. curva erit Hyperbolo-Parabolica; quæ probe consentiunt cum §. 21 & 22 Enumerationis *Neutoni*, ubi ostendit curvas eas esse Hyperbolo-Parabolicas quæ hac æquatione $xy^2 + ey = bx^2 + cx + d$ designantur.

Cas. III: Quod si Terminorum x^2y & xy^2 uterque desit, & æquatio sit hujus formæ $hx^3 + qx^2 + uxy + ny^2 = 0$; sumatur BH ad BC, ut u ad $2n$, & terminus xy exterminabitur; atq; æquatio induit hanc formam, $\frac{8hn^3}{g^3}x^3 + \frac{\overline{4qn^2 - u^2n}}{g^2}x^2 + ny^2 = 0$, quæ est æquatio formæ Casus tertii apud *Neutonum*, atque Curvarum est Parabolicarum *specierum* 68, 69 vel 70.

Cas. IV.

Caſ. IV. Quod ſi Punctum duplex C abeat in infinitum, & *Co* moveatur ſibi ſemper parallela (*Fig.* 21.) Æquatio ad Ordinatas parallelas Rectæ EB (quæ per *Corol.* 4. *Prop.* 7. eſt Curvæ Aſſymptotos) erit hujus formæ.

$$Ax^3 + Bx^2 + CX + D = x^2y + Exy + F$$

ubi deſunt Termini xy^2, y^3, y^2, & proinde ſi abſciſſa ſumatur in Aſſymptoto UL, evaneſcet etiam Terminus Ax^3, & æquatio Curvæ reduci poterit ad formam $xy^2 + ey = cx + d$: Quod ſi coincidant K & B æquatio ad formam D. *Neutoni* reducta erit $xy^2 + ey = d$.

Caſ. V. Denique ſi Punctum duplex ſit ad Diſtantiam infinitam, ut in præcedenti Caſu, coincidant vero rectæ SK & SF, vel rectæ SB & SF, æquatio Curvæ erit formæ

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = xy + Fy.$$

quæ ad Æquationem Caſus 1. D. *Neutoni* loco x ſcribendo $x - F$ facile reducitur.

Schol. Quoniam Contemplationes cujuſcunque generis ſi maneant nimium generales, tandem tædio fiunt, ne hoc vitio laboret noſtra Curvarum Conſideratio, particulares aliquas Conſtructiones, ex generali *Prop.* 5. deductas, ſimpliciorum tertii Ordinis Linearum ſubjungere lubet; quarum demonſtrationes cuivis in Locorum Conſtructione vel leviter verſato ſatis Obviæ erunt.

Ex. 1. Sit angulus SNP (*Fig.* 23.) rectus, & ſint Lineæ AN, BQ perpendiculares in C; ponantur puncta A & B inter C & S; ſitque CB $= b$, SA $= c$, CS $= a$, PM $= y$, CM $= x$, eritque

$$xy^2 + \frac{cby^2}{a-b} = \frac{\overline{a-b}}{b}x^3 + \frac{\overline{a-b}\times\overline{a-c}}{b}x^2.$$

Unde ſi ſit CD ad CB, ut SA ad SB, & DM dicatur x, prodibit æquatio formæ *Neutonianæ*,

$$xy^2 = \frac{\overline{a-b}}{b}x^3 - \overline{3c + \frac{\overline{a-c}\times\overline{a-b}}{b}}\,x^2 + \frac{3bc^2}{a-b} - 2c\times\overline{a-c}\times x - \frac{b^2c^3}{\overline{a-b}^2} + \frac{bc^2\times\overline{a-c}}{a-b}.$$

Cujus radices ſi $y = o$ erunt $\frac{cb}{a-b}$, $\frac{cb}{a-b}$, $\frac{cb}{a-b} + c - a = \frac{ca}{a-b} - a$. Proinde cum radices majores ſint æquales quoties SA eſt minor SC, & tertia ejuſdem ſigni quoties SB eſt minor SA, manifeſtum eſt in hoc caſu curvam deſcribi *ſpeciei undecimæ*, atque tres habere Aſſymptotos, ſex crura Hyperbolica, diametrum CD atque *Nodum* in C. Aſſymptotωn una eſt perpendicularis in CS ad punctum D, reliquæ duæ ſunt parallelæ rectæ CQ quando angulus CQS evadit rectus, earumque Occurſus cum CS facile determinari poteſt ex *Corol.* 2. *Prop.* 7. *v. Fig.* Curvæ apud *Neutonum.*

II. Coincidat

II. Coincidat C cum A, *i. e.* transeat recta AN per C; eritque æquatio Curvæ hujusmodi quoniam $c = a$. $xy^2 = \frac{a-b}{b}x^3 - 3ax^2 + \frac{3ba^2}{a-b}x - \frac{b^2a^3}{\overline{a-b}^2}$ cujus radices sunt $\frac{ab}{a-b}$, $\frac{ab}{a-b}$, $\frac{ab}{a-b}$. Unde cum radices sint omnes æquales, Hyperbola fit *Cuspidata* in C, atque *speciei duodecimæ*.

III. Sit C inter S & A, seu sit SA major SC, & æquatio eadem erit ac in primo exemplo & radices eædem; cum vero nunc c sit major quam a manifestum est $\frac{cb}{a-b} + c - a$ majorem quam $\frac{cb}{a-b}$, adeoque radices duas minores nunc esse æquales, & proinde curvam esse *speciei decimæ tertiæ* atque *Punctatam* esse in C. Eadem erit species Curvæ descriptæ cum AN versus contrarias partes abit, & S intercedit punctis C & A.

IV. Sint rectæ AN & BQ inter C & S, sitque SA minor quam SB, atque CD minor erit quam CB; & quoniam $a - b$ ($=$ SB) major est quam SA ($=c$) erit a major quam $\frac{ca}{a-b}$, adeoque radix $\frac{ca}{a-b} - a$ negativa erit. Unde cum duæ $\frac{cb}{a-b}$, $\frac{cb}{a-b}$ sint æquales, & tertia signi contrarii, figura erit *Cruciformis* atque *speciei* 18 vel 19.

V. Quod si $4c^2 - \frac{2c \times \overline{a-c} \times \overline{a-b}}{b} = \frac{\overline{a-c}^2 \times \overline{a-b}^2}{b^2}$ Curva habebit tres diametros atque erit *speciei* 30.

VI. Hujusque supposuimus BQ poni inter C & S; at si ad alias partes vel puncti C vel S transferatur, Curva unicam habebit Assymptoton perpendicularem ipsi CS ad punctum D, ita ut CD : CB : : SA : SB; æquatio reducta ad formam D. *Neutoni* in hoc casu est hujusmodi

$$xy^2 = -\frac{\overline{b \mp a}}{b}x^3 - \frac{3cb \pm \overline{a + c} \times \overline{b \mp a}}{b}x^2$$

$$\overline{- \frac{3bc^2}{b \mp a} + 2c \pm a} \times x - \frac{b^2c^3}{\overline{b \mp a}^3} + bc^2\frac{\overline{c \pm a}}{b \mp a}.$$

Cujus Radices sunt $\frac{cb}{b \mp a}$, $\frac{cb}{b \mp a}$, $\frac{cb}{b \mp a} \mp a - c$.

Signa

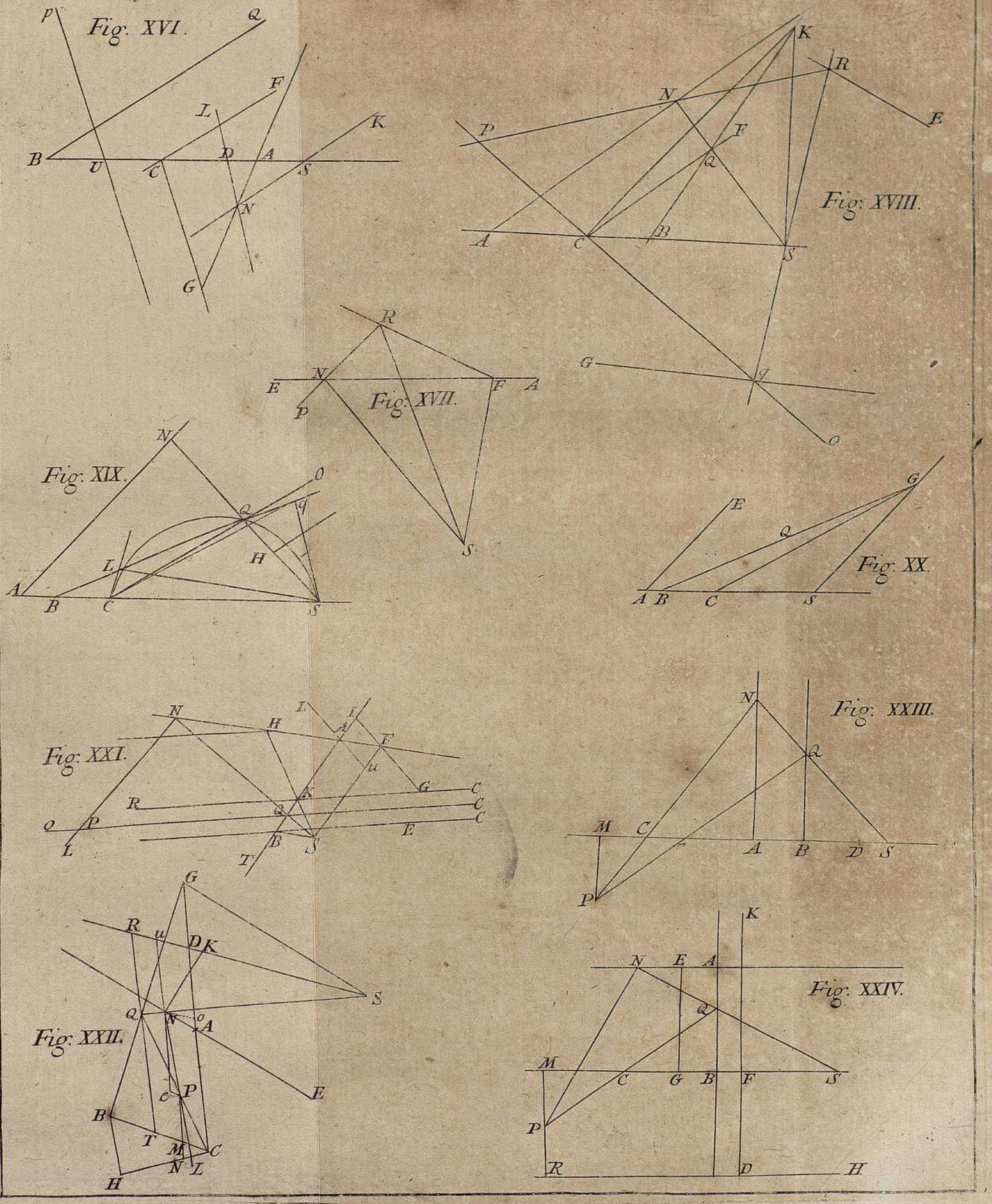


Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.
Fig. XIX.
Fig. XX.
Fig. XXI.
Fig. XXII.
Fig. XXIII.
Fig. XXIV.

Signa ſuperiora obtinent cum AN ponitur ad alias partes puncti S quam eſt C; Terminus x^3 eſt negativus & deeſt terminus y, adeoque curvæ pertinent ad Hyperbolas defectivas diametrum habentes §. 20. in Enumeratione *Neutoniana*; quare ſi A ſit inter C & S (quoniam in eo caſu a eſt major quam c, adeoque $\frac{cb}{b+a} + a - c$ major quam $\frac{cb}{b+a}$) patet duas radices minores fore æquales & tertiam ejuſdem ſigni, adeoque curvam eſſe *ſpeciei Quadrageſimæ tertiæ*, quæque *Nodata* eſt in C & Ovalem habet inter C & A jacentem.

VII. Sit AN ad alias partes puncti S quam eſt C; eruntque radices omnes ejuſdem ſigni ſi SA ſit major SB; ſed cum $\frac{cb}{b-a}$ major ſit quam $\frac{cb}{b-a} - c - a$, patet in hoc caſu duas majores radices æquari, & proinde curvam eſſe *ſpeciei Quadrageſimæ tertiæ*, & Hyperbolam eſſe Conchoidalem habentem *Punctum* Conjugatum in C ad Convexitatem ſuam.

VIII. Quod ſi SB major ſit SA, adeoque $\frac{ac}{b-a}$ minor quam a, patet radicem tertiam $\frac{cb}{b-a} - a - c = \frac{ac}{b-a} - a$ reddi negativam; proinde in hoc caſu radices duæ ſunt æquales, & tertia ſigni contrarii, adeoque curva erit *ſpeciei Quadrageſimæ quartæ*, & habebit *Punctum* Conjugatum ad Concavitatem ſuam.

IX. Quod ſi denique AN tranſeat per C, radices omnes $\frac{ab}{b+a}$, $\frac{ab}{b+a}$, $\frac{ab}{b+a}$ erunt æquales, & curva fit *Cuſpidata* in C, atque evadit *Ciſſois* veterum. Quæ ſpecies eſt *Quadrageſima ſecunda*.

X. Hucuſque eas ſolas curvas deſcripſimus quæ diametrum habent; aliæ vero quæ diametris carent facillime deſcribuntur, ſi recta BQ ut prius maneat perpendicularis in CS, recta vero (*Fig.* 24.) AN ei ſit parallela. Sit CB $= b$, BA $= c$, CS $= a$, PM $= y$, CM $= x$, & æquatio curvæ prodibit facili calculo hujus formæ $\mp b^2y^3 + b^2cy^2 = \overline{a \pm b} \times bx^2y + ab \times \overline{a \pm b} \times xy - c \times \overline{a + b}^2 \times x^2$ quæ ad formam *Neutonianam* ſic reduci poteſt. Ad F punctum medium inter C & S erigatur FK normalis in CS; atque in ea ſumatur FD quæ ſit ad BA ut SB ad CB; ducatur per D recta DH parallela rectæ CS, & producatur PM ad R; dicatur nunc DR $= y$, PR $= x$, & æquatio prodibit formæ *Neutonianæ*

$$xy^2 + \frac{\overline{a-b}\times ca}{b}y = \frac{bx^3}{a-b} - \frac{\overline{3c-bc}}{a-b}\times x^2 + \overline{\frac{3\times\overline{a-b}\times c^2}{b}+2c^2+\frac{a^2}{4}}\times x$$
$$-\frac{\overline{a-b}^2\times c^3}{b^2} - \frac{\overline{a-b}c^3}{b} - \frac{a^2c\times\overline{a-b}}{4b}.$$

Investigentur radices æquationis $\frac{bx^4}{a-b} - \frac{3c-bc}{a-b}\times x^3 + \overline{\frac{3\times\overline{a-b}\times c^2}{b}}$
$\overline{+2c^2+\frac{a^2}{4}}\times x^2 - \overline{\frac{\overline{a-b}^2\times c^3}{b^2} - \frac{\overline{a-b}\times c^3}{b} - \frac{a^2c\times\overline{a-b}}{4b}}\times x$
$+\frac{\overline{a-b}^2\times c^2a^2}{4b^2}=0$ secundum præcepta D. *Neutoni*; & prodibunt
$\frac{c\times\overline{a-b}}{b}$, $\frac{c\times\overline{a-b}}{b}$, $\frac{a}{2b}\times c+\sqrt{c^2-ab+b^2}$, $\frac{a}{2b}\times c-\sqrt{c^2-ab+b^2}$.

Si BA minor sit quam $\frac{CS}{2}$, seu c minor quam $\frac{a}{2}$, & simul si (ducto semicirculo super CS rectam AN secante in E, & perpendiculo EG in CS) sit CG major CB, erunt omnes radices reales; atque duæ æquales erunt vel majores reliquis duabus vel iis utrisque minores, & curva constabit ex tribus Hyperbolis cum Ovali; eritque *Nodata* in C & *speciei secundæ*.

XI. Quod si CG = CB, & Circulus super diametrum CS descriptus transeat per A, curva non erit Linea Ordinis tertii sed Conica sectio; nam tunc fit CB : BA :: BA : SB & $c^2+b^2=ab$ adeoque est $\sqrt{c^2-ab+b^2}=0$ & radices duæ ultimæ evadunt quoque æquales.

XII. Quod si sit CB major CG, neque tamen æqualis rectæ SG, erit c^2+b^2 minor ab adeoque c^2-ab+b^2 evadet Quantitas negativa cujus radix est impossibilis; proinde duæ ultimæ radices fiunt impossibiles, aliæ vero duæ sunt æquales, adeoque figura erit *Cruciformis speciei septimæ* vel *octavæ*.

XIII. Quod si BA $=\frac{CS}{2}$, seu $c=\frac{a}{2}$, erit $c^2-ab+b^2=\frac{a^2}{4}-ab+b^2$, & $\sqrt{c^2-ab+b^2}=\frac{a}{2}-b$; adeoque radices erunt $\frac{a\times\overline{a-b}}{2b}$, $\frac{a\times\overline{a-b}}{2b}$, $\frac{a\times\overline{a-b}}{2b}$, $\frac{a}{2}$. Et proinde tres radices æquantur, adeoque curva evadit *Cuspidata* in C *speciei tertiæ*.

XIV. Si

Tab. IV. p. 27.

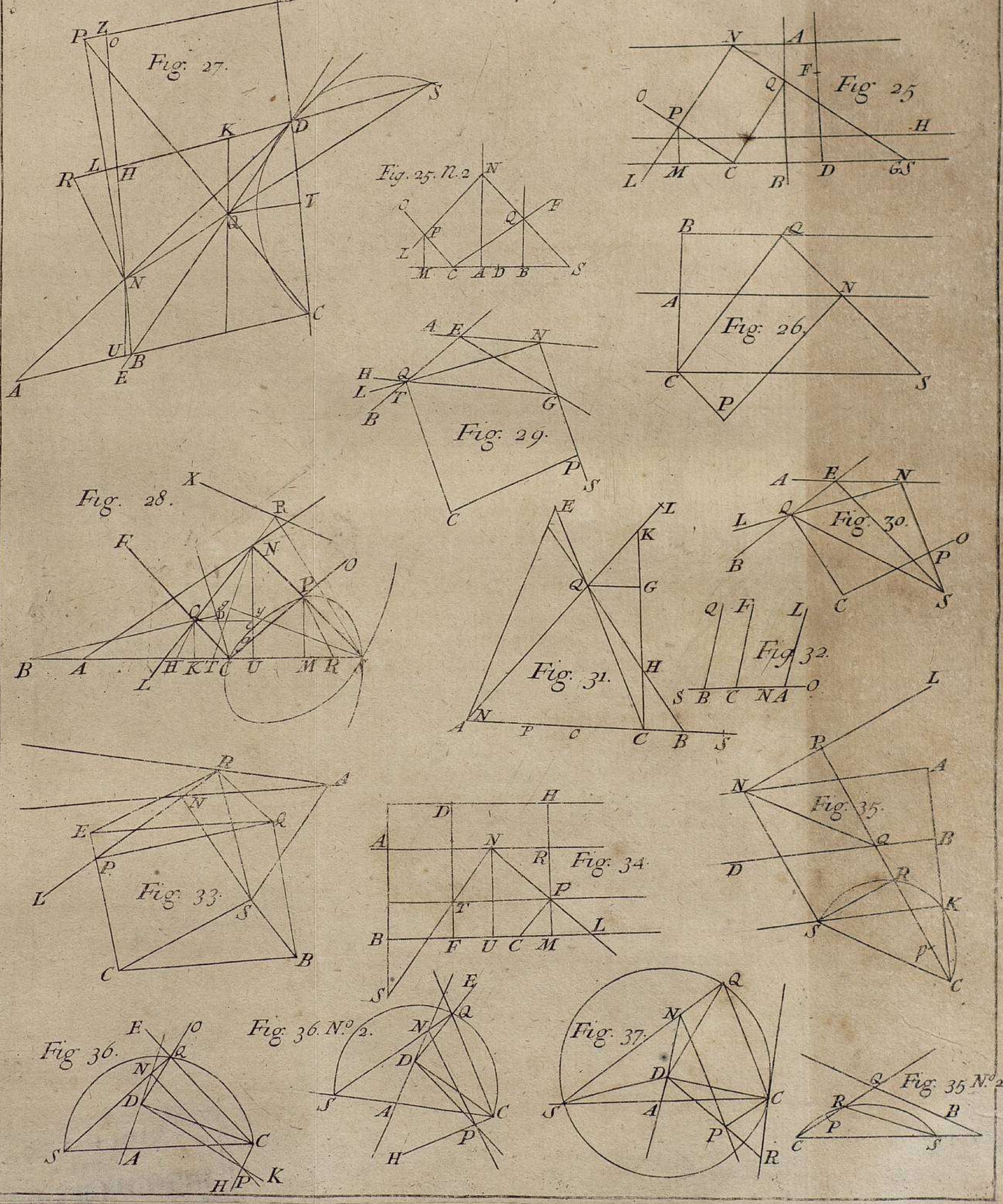


Fig. 27
Fig. 25. N. 2
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 29
Fig. 28
Fig. 31
Fig. 30
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 36. N.° 2.
Fig. 37
Fig. 35 N.° 2

XIV. Si vero BA ſit major quam $\frac{CS}{2}$, radices mediæ erunt æquales, & figura conſtabit ex tribus Hyperbolis ut prius cum *Puncto* conjugato in C; eritque curva *ſpeciei quartæ*.

XV. Hucuſque ſuppoſuimus rectam BQ poni inter C & S: Quod ſi transferatur ad alias partes puncti C quam eſt S, vel ad alias partes puncti S quam eſt C; curva evadet Hyperbola defectiva unicam habens Aſſymptoton, & duo tantum crura Hyperbolica juxta Aſſymptoton illam in plagas oppoſitas progredientia. Quod ſi BA ſit minor quam $\frac{CS}{2}$, curva habebit *Nodum* in C cum Ovali, eritque *ſpecici* 34.

XVI. Quod ſi BA $= \frac{CS}{2}$ curva evadet *Cuſpidata* in C atque *ſpeciei* 35.

XVII. Denique ſi in hoc caſu BA ſit major quam $\frac{CS}{2}$; curva habebit *Punctum* conjugatum in C evaneſcente nodo & ovali; eritque curva *ſpeciei* 36. Hæc omnia vel ex Cl. *Neutoni* Tractatu, vel ex *Corol.* 4. *Prop.* 7. facile deducuntur.

Curvas omnes pure Hyperbolicas tertii Ordinis quæ punctum duplex habent ad diſtantiam finitam deſcripſimus. Reſtant curvæ Hyperbolo-Parabolicæ & pure Parabolicæ, quarum Deſcriptiones facillimæ ex methodo ipſius *Prop.* 5. deduci poſſunt.

XVIII. Sint in *Prop.* 5. *(Fig.* 25.*)* Anguli SNP, FCO recti; ſitque BQ perpendicularis in CS, & AN eidem parallela; ſit CB $= b$, BA $= c$, CG $= a$, PM $= y$, CM $= x$, & æquatio curvæ erit

$$bx^2y + \overline{a-b}\times bxy - \frac{b^2c}{a}x^2 = \frac{\overline{a-b}^2\times c}{a}y^2.$$ Sumatur igitur CD $= \frac{SB}{2}$, atque DF ad BA, ut eſt BC ad CS, & æquatio ad axem FB (ſi F ſumatur principium abſciſſæ) erit formæ *Neutonianæ*

$$y^2x + \frac{\overline{a-b}\times bc}{a}y = \frac{\overline{a-b}^2\times c}{ab}x^2 + \frac{2\times\overline{a-b}^2\times c^2}{a^2} + \frac{\overline{a-b}^2}{4}\times x$$
$$+ \frac{\overline{a-b}^2\times c^3 b}{a^3} + \frac{\overline{a-b}^2\times cb}{2a}.$$ Radices vero Æquationis cubicæ $\frac{cx^3}{ab} + \frac{8c^2+a^2}{4a^2}\times x^2 + \frac{c^3b}{a^3} + \frac{bc}{2a}\times x + \frac{b^2c^2}{4a^2}$ ſecundum præcepta D. *Neutoni* ſunt inveſtiganda, & prodeunt quidem $\frac{bc}{a}$, $\frac{bc}{a}$, $\frac{ab}{4c}$. Unde ſi BA

ſit minor quam $\frac{CS}{2}$, curva habebit *Nodum* in C eritque *ſpeciei Quadrageſimæ ſeptimæ.*

XIX. Quod ſi $BA = \frac{CS}{2}$, erunt radices tres æquales ipſi $\frac{b}{2}$; & proinde curva evadit *Cuſpidata* in C *ſpeciei Quadrageſimæ octavæ.*

XX. Si vero BA major ſit quam $\frac{CS}{2}$, radices æquales $\frac{bc}{a}$, $\frac{bc}{a}$ fiunt majores tertia, & curva fit *Punctata ſpeciei Quadrageſimæ nonæ.*

XXI. Sint nunc AN & BQ parallelæ ſibi mutuo, atque rectæ CS perpendiculares; ſitq; $CB = b$, $SA = c$ & $CS = a$ eritq; ſi $CM = x$, $PM = y$ $y^2x + \frac{\overline{a-c}\times\overline{a-b}}{a}\times y^2 = \frac{cb^2}{a\times\overline{a-b}}x^2$. Proinde ſi ſumatur CD ad CB, ut SA ad CS, & D ſit principium abſciſſæ, ſeu $DM = x$. Æquatio prodibit formæ D. *Neutoni* $xy^2 = \frac{cb^2}{\overline{a-b}\times a}x^2 - \frac{2cb^2}{a^2}\overline{a-c}\times x + \frac{cb^2\,\overline{a-b}\times\overline{a-c}^2}{a^3}$, cumque æquationis $x^2 - \frac{2\times\overline{a-c}\times\overline{a-b}}{a}x + \frac{\overline{a-b}^2\times\overline{a-c}^2}{a^2}$ radices duæ $\frac{\overline{a-b}\times\overline{a-c}}{a}$, $\frac{\overline{a-b}\times\overline{a-c}}{a}$ ſint æquales, patet curvam eſſe *ſpeciei Quadrageſimæ tertiæ* & Hyperbolo-Parabolicas lineas ſe mutuo decuſſare ad morem *Crucis* in C.

XXII. Sint porro rectæ AN & BQ (*Fig.* 26.) parallelæ ipſi CS; ſitque $CB = 2CA$, $CB = b$, $CS = a$, atque æquatio curvæ ſi $CM = x$, $PM = y$ erit $y^2 = \frac{2ax^3}{b^2} + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\times x^2$. Unde ſi CB ſit minor quam CS curva habebit *Nodum* in C cum Ovali eritque Parabola *ſpeciei* 68.

XXIII. Quod ſi $CB = CS$, æquatio curvæ erit $y^2 = \frac{2x^3}{b}$ unde curva evadit *Cuſpidata* in C atque ipſa eſt Parabola Neiliana ſeu ſemicubica *ſpeciei* 70.

XXIV. Si vero CB major ſit quam CS, curva erit *Punctata* in C *ſpeciei Sexageſimæ nonæ.*

Hæ ſimpliciſſimæ ſunt Conſtructiones omnium fere Linearum tertii Ordinis, quæ aliquod punctum duplex habent; atque ſingulæ duplici ratione demonſtrantur; vel ex *Corol.* 4. *Prop.* 8. vel ex ipſis D. *Neutoni* Characteribus quibus curvarum ſpecies diſcriminavit.

Schol. II. Simili ratione qua in hac *Prop.* Curvarum *Prop.* 5. & 8. deſcriptarum Reductionem ad *Neutonianas* demonſtravimus, oſtendi poteſt æquationes omnes trium dimenſionum, ad quatuor *Neutonianas* reduci

duci posse. Quippe omnis Linea tertii Ordinis aliquam habet Assymptoton, & in ejus æquatione ordinatæ illi Assymptoto parallelæ ad duas tantum dimensiones ascendere possunt; omnes proinde æquationes Linearum tertii Ordinis ad hanc possunt reduci $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dx^2 + exy + fy^2 + gx + hy + k = 0$, terminus vero cx^2y exterminari potest ut in Propositione docuimus; termini quoque exy, fy^2, facile exterminantur ut in pluribus exemplis ostendimus, unde manebunt tantum termini xy^2, y, x^3, x^2, x, & k; atque nonnunquam loco xy^2, y habebimus tantum y^2, xy vel ipsum y; ut satis est manifestum.

PROP. IX.

Si in Prop. 5. *quando crus* NL *anguli* SNP *transit per punctum duplex* C, *crus* CO *anguli* FCO *simul coincidat cum* NP; *curva descripta non erit Linea tertii Ordinis sed Sectio Conica.*

EX *Prop.* 7. manifestum est omnes curvas quas hac *Prop.* asserimus esse Conicas sectiones, eas esse quæ *(Fig. 27.)* secundum *Prop.* 7. facilius describuntur, si circulus SQC (habens angulum SNL inscriptum) & rectæ BQ, AN in eodem puncto D concurrant. Eas vero sectiones esse Conicas sic demonstratur.

Jungatur CD, sint PM, QT, CB parallelæ & DCB = SNL, atque ad rectam CD investigetur æquatio curvæ, dicatur CB $= b$, CA $= c$, CD $= d$, DS $= a$, PM $= y$, CM $= x$, eritque TQ $= \frac{dby}{dy + bx}$, CT $= \frac{dbx}{dy + bx}$. Sed AU : UN :: $c : d$ & DT : SD + QT (= QK) :: SH (= $a + c$ — AU) : NH = CD — NU, unde prodit NH $= \frac{ad^2y}{d \times \overline{a + b - c} \times y + abx}$. Sit NHR = NRH sitque NH : HR :: $a : f$, atque erit SR $= \frac{ad \times \overline{a + b} \times y + a^2bx + fd^2y}{\overline{a + b - c} \times dy + abx}$. Similia vero sunt triangula SRN & NZP, adeoque SR : NR :: NZ : PZ. Unde $ad \times \overline{a + b} \times y + a^2bx - fd^2y : \overline{a + b - c} \times dyx + abx^2 + \overline{c - b} \times d^2y + adbx :: d^2ay : \overline{a + b - c} \times dy^2 + abyx - dcay$. Proinde erit $\overline{a + b} \times ady + a^2bx$

$+a^2bx - fd^2y : \overline{a+b-c}\times dyx + abx^2 + \overline{c-b}\times d^2y + adbx :: d^2a : \overline{a+b-c}\times dy + abx - dca$. Unde ducendo media & extrema in se mutuo prodibit æquatio duarum tantum dimensionum; quæ proinde erit ad sectionem Conicam.

Corol. I. Punctum C nunc evadit simplex, & cum curva non transeat per S, hinc postea hæc Descriptio erit nobis usui, cum sectio Conica est describenda per punctum C, quæ non transit per S; nam in descriptione *Prop.* 1. curva transit per utrumque punctum.

Corol. II. Quoniam in Constructione hujus *Prop.* BQ necessario semper circulo occurrat bis vel eum contingat, patet hac ratione eas solas sectiones Conicas describi quæ crura habent infinita; Ovales enim hac ratione describi nequeunt.

Satis explicuimus methodum *Prop.* 5. qua Lineæ tertii Ordinis punctum duplex habentes describi possunt; restant duæ aliæ methodi easdem delineandi quas paucissimis explicabimus.

Prop. X.

Cæteris manentibus ut in Prop. 5. *ducatur Concursus crurum* NL *&* CF (Fig. 28.) *per rectam infinitam* BQ *dico Concursum crurum* CO *&* SN *descripturum Lineam tertii Ordinis.*

Sint PM, NU, QK Normales in CS, atque anguli FHC, PRC æquales sibi mutuo atque angulo dato FCO, angulus vero NTS$=$SNL, & sit Sg perpendicularis in NT ac Qe parallela CS, dicatur recta CS$=a$, CB$=b$, SA$=g$, PM$=y$, SM$=x$, CM$=a-x$; sit sinus anguli FCO ad cosinum ut d ad a; sit BK ad KQ, ut a ad c, & Au ad Nu ut a ad e. His positis eadem plane ratione atque in *Prop.* 5. deprehendes QK$=\dfrac{bc\times\overline{ay+d\times\overline{a-x}}}{\overline{dc+a^2}\times y - a\times\overline{c-d}\times\overline{a-x}}$ & CK$=\dfrac{bdcy - bac\times\overline{a-x}}{\overline{dc+a^2}\times y - a\times\overline{c-d}\times\overline{a-x}}$; cumque SM : PM :: SU : NU; & sit SU$=g-\dfrac{a\text{NU}}{e}$, erit NU $=\dfrac{gy}{x+\frac{a}{e}y}$ & SU$=\dfrac{gx}{x+\frac{a}{e}y}$. Sed similia sunt triangula SgN & NeQ,

adeoque

adeoque Sg : gN :: Ne : Qe, & similia quoque sunt triangula SgT & Nyg, adeoque Sg : gN :: ST : Ny; unde ST : Ny :: Ne : Qe. Sed ST $= SU + UT =$ (si sit sinus anguli SNP ad cosinum ut a ad f) $SU + \frac{fNU}{a}$,

$$= \frac{gx + \frac{fgy}{a}}{x + \frac{ay}{e}} \text{ \& } Ny = NU - Uy = \frac{gy - \frac{fgx}{a}}{x + \frac{ay}{e}} \text{ \& } Ne = NU - QK$$

$$= \frac{\overline{dc + a^2} \times gy^2 - ga \times \overline{c - d} \times \overline{a - x} \times y - bc \times \overline{ay + da - dx} \times \overline{x + \frac{ay}{e}}}{\overline{dc + a^2} \times y - a \times \overline{c - d} \times \overline{a - x} \times \overline{x + \frac{ay}{e}}},$$

& $Qe = a + CR - SU$. Unde deducitur hæc Analogia

$$x + \frac{fy}{a} : y - \frac{fx}{a} :: g \times \overline{cd + a^2} \times y^2 - ga \times \overline{c - d} \times \overline{a - x} \times y - bcayx - \frac{bca^2y^2}{e}$$

$$- bcd \times \overline{a - x} \times x - bcd \times \overline{a - x} \times \frac{ay}{e} : \overline{dc + a^2} \times ayx + \frac{a^2}{e} \times \overline{dc + a^2} \times y^2$$

$$- a^2 \times \overline{c - d} \times \overline{a - x} \times x - \overline{c - d} \times \frac{a^3}{e} \times \overline{a - x} \times y + bdcyx + \frac{bcda}{e} \times y^2$$

$$- bac \times \overline{a - x} \times x - \frac{ba^2c}{e} \times \overline{a - x} \times y - g \times \overline{dc + a^2} \times yx + ga \times \overline{c - d} \times \overline{a - x} \times x.$$

Unde ducendo media & extrema in se mutuo prodibit æquatio hujus formæ ad Axem CS. $Ay^3 + By^2x + Cyx^2 + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 = 0$, Coefficientes vero A, B, C, D, E, F, G ex hac Analogia obvio calculo investigari possunt, & speciatim D (coefficiens Termini x^3) $= -\frac{fcdb}{a} - bac + \overline{ga - a^2} \times \overline{c - d}$ & G (coefficiens Termini x^2) $= aD$.

Cum vero in hac æquatione x & y ad tres tantum ascendant dimensiones, manifestum est curvam esse Lineam Ordinis tertii, & in tribus punctis rectâ posse secari.

Corol. I. Curva habet punctum duplex in S; quippe evanescente y, æquatio evadit hujus formæ $Dx^3 + Gx^2 = 0$; sed $G = aD$, adeoque æquationis tres radices sunt 0, 0, a. Unde curva transit per S bis & semel per C; ast in nullo alio puncto præter hæc duo curva secat rectam CS.

Corol. II. Sit angulus DCS = FCO, & super DS describatur Arcus Circuli cui inscribi possit datus angulus SNP; si recta AN huic circulo bis occurrat, Curva habebit punctum duplex & *Nodum* in S; quod si recta AN circulum contingat Ovalis evanescet & curva evadet *Cuspidata* in in S; quod si Recta AN tota ponatur extra circulum curva habebit *Punctum* conjugatum in S absque nodo, Cuspide vel Ovali.

Corol. III. Quod si curva describi supponatur concursu cruris CO cum SR angulum datum RSN constituente cum SN, curva ejusdem Ordinis describetur ac in *Prop.* quippe hæc constructio ad eam Propositionis reduci potest, cum SR perpetuo occurrat rectæ NP in puncto rectæ RX, ex *Lemmate* 1. Positione datæ, & per idem *Lemma* angulus SRP detur.

Corol. IV. Concurrant rectæ BQ & AN (*Fig.* 29.) in E, & ducatur EG ita ut GEB = SNL, & sumatur SGH æqualis ipsi BEN, atque cæteris manentibus ut in *Prop.* substituatur EG loco rectæ AN, & angulus SGH loco anguli SNL, eademque plane curva describetur quæ in Propositione. Concurrant enim rectæ GH & NL in T, atque angulus GTN = SGH — SNT = BEN — BEG = GEN, adeoque circulus per G, N, E ductus transibit per T; sed ex hypothesi QEG = QNG, adeoque circulus per G, N, E ductus transibit per Q: sed Q, T, N sunt puncta in eadem recta Linea, adeoque Q & T coincidunt, proinde BT, BQ atque CT ac CQ etiam coincidunt, unde eadem curva describetur si angulus SGT percurrat rectam EG, vel si SNL percurrat rectam AN.

Corol. V. Jungatur SE (*Fig.* 30.) & si angulus SNL æqualis sit angulo SEB, curva non erit Linea tertii Ordinis sed sectio Conica. Quippe cum SEQ = SNQ, circulus per S, N, E descriptus transibit per Q, & proinde angulus QSN dabitur; nam æqualis erit supplemento anguli BEN ad duos rectos. Duo igitur anguli dati QSN, QCO revolvuntur circa data puncta C & S, & crurum CQ, SQ concursus ducitur per rectam BE; proinde per *Prop.* 1. crurum CO & SN concursus describet sectionem Conicam.

Prop. XI.

Cæteris manentibus ut in Prop. X. *si* CP *&* SP *simul coincidant cum* CS *curva evadet sectio Conica.*

COincidat SP cum SC, (*Fig.* 31.) & perveniat N ad A, dico si eodem tempore coincidat CO cum CS Lineam describi secundi Ordinis. Ducatur CK normalis ad CS, & producatur NQ donec ei occurrat in K; sit H punctum ubi BQ eidem normali occurrit, atque angulus SNL = GQK, FCO = CQG atque CBQ = GQH. Proinde iisdem

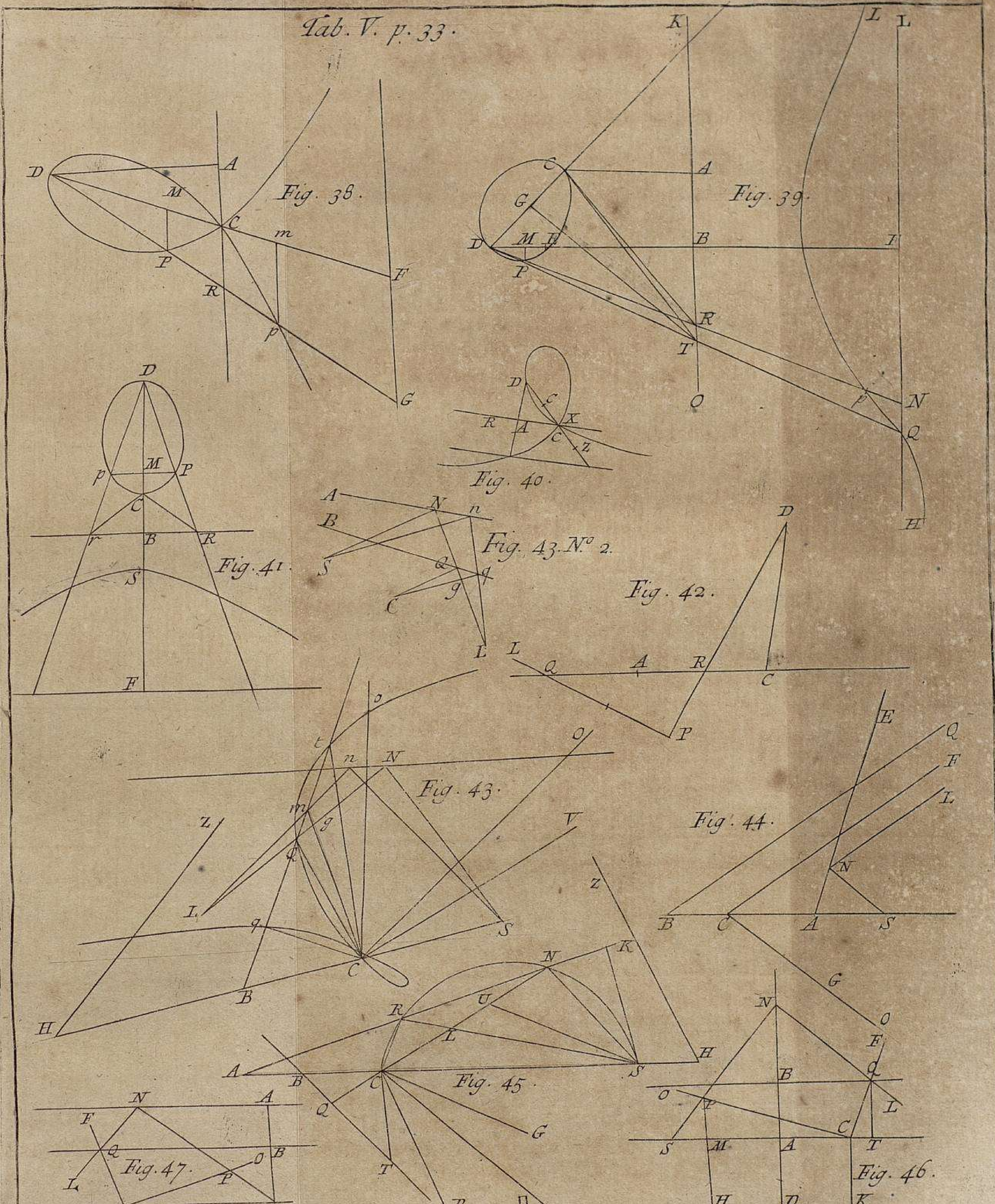


Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43. N° 2.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.

iiſdem retentis ſymbolis ac in *Prop.* præcedente, erit QG : GH :: $a : c$, & QG : GC :: $a : d$ & QG : GK :: $f : a$; adeoque GH : GC :: $c : d$; & CH : GC :: $d - c : d$; ſimiliter GK : GC :: $a^2 : df$, & CK : GC :: $a^2 + df : df$, & proinde CH : CK :: $\overline{d-c} \times f : a^2 + df$. Porro CH : CB :: $c : a$, & CH $= \frac{bc}{a}$; ſimiliter CK : CA :: $a : f$, & CK $= \overline{g-a} \times \frac{a}{f}$; Unde $\overline{g-a} \times \frac{a}{f} : \frac{bc}{a} : a^2 + df : \overline{d-c} \times f$ & $\overline{g-a} \times a^2 \times \overline{d-c} = \overline{a^2 + df} \times bc$, adeoque $fcdb + ba^2c + a^3c - a^3d - ga^2 \times \overline{c-d} = 0$. Cum vero hæc ipſa Quantitas ſit coefficiens termini x^2, & ea diviſa per a ſit coefficiens termini x^3, manifeſtum eſt duos hos Terminos evaneſcere, & proinde nullum in æquatione Terminum manere in quo non reperiatur y; proinde omnes æquationis Termini per y dividantur, & æquatio manebit duarum tantum dimenſionum, adeoque erit ad Conicam ſectionem.

Corol. I. Proinde ſi ad punctum A ſuper recta SA, conſtituatur angulus SNK = SNL, & ad punctum C ſuper eadem recta angulus ACE = FCO, ſi NK & EC in eodem pancto Q occurrant rectæ BQ, Linea deſcripta erit ſectio Conica.

Corol. II. Hinc ſi anguli SNL, FCO (*Fig.* 32.) conficiant duos rectos, & ſi angulus ABQ = FCO, deſcribetur ſectio Conica; atque ſi anguli SNL, FCO ſint recti, & BQ ſit perpendicularis in CS, Linea deſcripta erit ſectio Conica non tertii Ordinis.

Corol. III. Curva deſcripta tranſit ſemel per S, ſed punctum C non attingit.

Ad Aſſymptotos curvarum *Prop.* 10. deſcriptarum inveſtigandas (quod Problema altioris eſt generis quam *Prop.* 6.) *Lemma* 2. eſt præmittendum.

Lemma II.

Dentur puncta C *&* S (Fig. 33.) *recta* AN, *& anguli* SNL, CPN; *percurrat punctum angulare* N *rectam* AN, *& punctum* P *interea deſcribet Hyperbolam defectivam tertii Ordinis, quæ unicam habet Aſſymptoton, eſtque ſpeciei* 34, 35, 36, 41, 42, 43 *vel* 44.

Ad *Lemma* hoc facilius domonſtrandum imprimis oſtendemus eandem curvam angulis obliquis quibuſcumque SNL & CPN atque rectis deſcribi poſſe; cum facilius in caſu quo anguli ſunt recti æquatio inveſtigari poſſit & prodeat ſimplicior.

Ex dato puncto S ducatur SR parallela ipſi CP, & quoniam dantur anguli CPL, SNL, dabitur eorum differentia NSR; proinde per *Lemma* 1. recta SR occurret NL productæ in puncto R, quod tangit rectam

F AR

AR constituentem angulum RAN = RSN ad punctum A ubi angulus SAN = CPL.

Sit SB perpendicularis in CS, & sumatur angulus BCS æqualis supplemento dati CPL ad rectum; ducatur RQ parallela rectæ SB, & huic in Q occurrat PQ normalis in CP ad punctum P; ducatur RE parallela ipsi CS & anguli QRE, QPE erunt recti, adeoque circulus per puncta R, Q, E ductus transibit per P, & angulus REQ = RPQ = BCS; unde cum RE = CS, erit RQ = SB; adeoque cum RQ & SB sint æquales & parallelæ, erunt SR & BQ parallelæ, adeoque BQ & CP parallelæ erunt, & proinde angulus BQP erit rectus. Sed cum RQ sit invariatæ magnitudinis & semper parallela ipsi SB, patet Q semper reperiri in recta parallela ipsi AR; angulus igitur BQP angulari puncto Q rectam percurrit, & CP in PQ est Normalis, unde patet eandem curvam describi his angulis rectis, quæ prius angulis obliquis SNL & CPL describebatur.

Rectam igitur infinitam AE *(Fig. 34.)* percurrat angulari suo puncto N angulus rectus SNL, & in crus NL demittatur ex dato puncto C Normalis CP, atque P erit in curva quam Hyperbolam esse defectivam in *Lemmate* asserimus. Dicatur CM $= x$, PM $= y$, AB $= b$, CB $= a$, SA $= c$; cumque similia sint triangula CMP, RPN, SAN, erit CM (x) : PM (y) :: NA : SA (c) unde NA $= \frac{cx}{y}$, atque CM (x) : PM (y) :: RP $(b-y)$: RN $= \frac{by-y^2}{x}$. Unde cum RN + NA $= a + x$ erit $\frac{cx}{y} + \frac{by-y^2}{x} = a + x$, & $by^2 - y^3 = x^2y + axy - cx^2$. Sit F punctum medium inter C & B & ad F erigatur Linea perpendicularis in CS, in qua sumatur DF = SA, & ducatur DH parallela rectæ AE, eritque DH curvæ Assymptotos, & si DT (= HP) sit nunc x atque PT (= DH) sit y Æquatio erit formæ *Neutonianæ*

$$y^2x - cay = -x^3 + \overline{3c-b}\times x^2 - \overline{3c^2 + 2cb + \tfrac{a^2}{4}}\times x + c^3 - bc^2 - \tfrac{a^2c}{4}.$$

Ubi quoniam x^3 est negativus manifestum est curvam esse Hyperbolam defectivam unicam habentem Assymptoton & duo crura Hyperbolica in contrarias plagas progredientia. Si semicirculus super CS descriptus bis occurrat rectæ AE curva erit *speciei* 34; si recta Circulum contingat curva erit *speciei* 35; quod si extra Circulum prorsus cadat curva erit *speciei* 36; in primo casu curva est *Nodata*, in 2° *Cuspidata*, in 3° *Punctata*.

Si C & S sint in eadem recta Normali ad AE evadet CB $= a = 0$, adeoque evanescet terminus cay, & curva diametrum habebit. Si A sit inter C & S curva habebit *Nodum* in C, & Ovalem inter C & A, eritque

que *speciei* 41; Quod si sit C in A, evanescit Ovalis & curva fit *Cuspidata* in C *speciei* 42, estque *Cissois* veterum. Quod si sit C inter S & A curva evadet Conchoidalis cum *Puncto* conjugato ad Convexitatem eritque *speciei* 43. Denique si sit S inter C & A *Punctum* erit ad Concavitatem Conchoidalis & curva erit *speciei* 44.

Hæ simplicissimæ sunt Lineæ tertii Ordinis & commodissime describuntur tum methodo D. *Neutoni* postea demonstranda tum nostra. Quapropter nonnullas earum simpliciores proprietates non pigebit enumerare sequentibus *Corolariis*.

Corol. I. Ducatur SK parallela datæ AN & CK ei perpendicularis in K. Sumatur AB = CK (*Fig.* 35.) & ducatur BD parallela ipsi AN; super CS describatur semicirculus CRS, & ex C educatur recta quævis CQ occurrens datæ rectæ BD in Q & circulo in R, sume QP = CR, & Q*p* = CR, eruntque P & *p* puncta in curva hujus *Lemmatis*; quippe QN = CS, quoniam CB = KA, & CQ = SN ex hypothesi, & SR est æqualis ac parallela ipsi PN, atque angulus SRC = QPN, cum sint recti & proinde erit QP = CR; hinc vero infinita curvæ puncta facillime reperiuntur.

Corol. II. Quod si loco semicirculi describatur Arcus quicunque circularis (*Fig.* 35. *n.* 2.) transiens per C & S: & ad circulum illum educatur CR rectæ datæ BD occurrens in Q, & sumatur ut prius QP = CR; curva descripta ea erit quæ describitur, secundum *Lemma* hoc, motu anguli SNL æqualis ei qui in circulo dicto inscribi potest (angulo nimirum SRC) adeoque coincidet cum iis *Corolario* præcedente descriptis ipsius semicirculi ope.

Corol. III. Super recta CS (*Fig.* 36.) describatur semicirculus CQS, & ex C in AN sit CD normalis; dico si duo anguli recti ECH, ODK moveantur circa C & D ut Polos & Concursus crurum duorum CE, DO ducatur per dictum semicirculum concursum reliquorum crurum CH & DK, descripturum eandem curvam *Lemmate* & *Corol.* 1. alia ratione delineatam. Quippe cum angulus in semicirculo CQS rectus sit, atque anguli (in Descriptione *Lemmatis*) CPN, PNQ & CDN sint quoque recti, patet circulum eundem per quinque puncta C, P, Q, N & D posse transire; ast angulus PNQ est rectus adeoque rectus erit PDQ; proinde rectorum angulorum QDP, QCP crura CQ & DQ concurrunt in semicirculo, & crurum CP ac DP concursus curvæ *Lemmate* descriptæ punctum P semper denotat. Si circulus secet rectam AN curva erit *speciei* 34, si eam contingat 35, si vero nec secet nec circulum contingat curva erit *speciei* 36. Hæc ita se habent quoties CS est obliqua ad AN, sed si A & D coincidant, curva habebit diametrum eritque *speciei* 41, 43 aut 44, secundum varias positiones rectæ AN.

Corol. IV. Quod si angulus SNP sit obliquus quicunque datus & *(Fig. 36. n.2.)* CPN quoque obliquus; duc CD angulum CDE constituens æqualem dato CPN, & circa datum punctum D moveatur angulus QDP = QNP, & circa C moveatur PCQ æqualis supplemento anguli QDP ad duos rectos, ducatur CQ & DQ per circulum cui inscribi potest angulus SQC æqualis supplemento dati CPN ad duos rectos, & Concursus crurum CP, DP describet Lineam tertii Ordinis quam præcedente *Corolario* Angulorum rectorum ope descripsimus. Hujus demonstratio similis est præcedenti.

Corol. I. Coincidat D cum centro *(Fig. 37.)* Circuli & sit angulus CDN = QCP = SNP. Ducatur per C recta CR parallela datæ DN; cumque PCQ supplementum sit anguli QDP ad duos rectos erit CQD, supplementum anguli CPD ad totidem rectos, & proinde erit CQD = CPR; sed DQC = DCQ ex natura circuli, & DCQ = PCR (cum DCR = QCP) adeoque CPR = PCR, & triangulum PCR erit Isosceles; unde PR = RC. Proinde si *(Fig. 38.)* ex dato puncto D, ad datam rectam quamvis CR, educatur DC constituens angulum DCR æqualem dato SNP, & ex eodem puncto D aliæ rectæ infinitæ ad CR educantur ut DR, & semper sumatur RP = RC, & RC = R*p* curvarum aliquæ de quibus agimus, quas præcedentibus *Corolariis* diversimode descripsimus, hac facili ratione construi poterint.

Corol. VI. Angulus *(Fig. 37.)* SQC=PNQ=CDA; sed SQC=$\frac{SDC}{2}$, adeoque CDA erit dimidium anguli CDS, & proinde erit AN perpendicularis in CS, & A erit punctum medium inter C & S; unde quoties AN perpendiculariter insistit medio rectæ CS, & anguli SNP & CPN sunt æquales, facilior hæc constructio obtinebit. Ex *Lemmate* manifestum est unicam hujus curvæ Assymptoton esse parallelam rectæ CR; *(Fig. 38.)* sed si sint PM, *pm* parallelæ ipsi CR, erit CM = C*m*, quoniam RP = R*p*; adeoque quando R abit in infinitum, & coincidit P cum D, & *p* abit infinitum, erit CM = CD, & C*m* = CF = CD: Proinde si per F ducatur FG parallela ipsi CR ea erit Assymptotos curvæ. Quoties recta CD *(Fig.37.)* sit perpendicularis in AN & A ac D coincidunt curva habet CD diametrum; sed si CD sit Obliqua in CR curva non habebit diametrum; in primo casu curva describitur *speciei* 41, in secundo *speciei* 34.

Corol. VII. Ultimæ huic simplici curvarum constructioni Analoga est quam inveni curvarum hujus classis etiam puncto duplice carentium descriptio. Dentur in *(Fig. 39.)* eodem plano puncta duo C & D atque recta AR; ad singula rectæ AR puncta ducantur ex C & D rectæ CR & DR, & in recta DR semper capiatur RP = RC, & R*p* = RC, ac describetur curva tertii Ordinis puncto duplice destituta, si neutrum punctorum C & D existat in recta AR. Quippe dicatur DB = *a*, CA = *b*,

BA = *c*,

$BA = c$, $PM = y$, $DM = x$, & cum $DM : PM :: DB : BR$, erit $BR = \frac{ay}{x}$, $AR = c + \frac{ay}{x}$, unde $CR^2 = \overline{c + \frac{ay}{x}}^2 + b^2$ & $PR^2 = \overline{\frac{ay}{x} - y}^2 + \overline{a - x}^2$ sed $CR = PR$, unde $b^2 + c^2 + \frac{2acy}{x} + \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a^2y^2}{x^2} - \frac{2ay^2}{x} + y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, ergo $\overline{b^2 + c^2} \times x - 2acy + 2ay^2 - y^2x = a^2x - 2ax^2 + x^3$. Ergo si $BF = BD$, & punctum F sumatur principium abscissæ prodibit Æquatio formæ *Neutonianæ* $y^2x - 2acy = -x^3 + 4ax^2 + \overline{b^2 + c^2 - 5a^2} \times x + 2a^3 - 2b^2a - 2c^2a$.

Curva constabit ex Ovali *(Fig. 39.)* transeunte per C, D ac punctum E si $BE = BC$, atque ex Hyperbola Anguinea Assymptoton flexu contrario amplexa; nam Hyperbolam omnem non ad easdem partes poni Assymptoti hinc constat, quod si ad G punctum medium inter C & S, erigatur perpendicularis ipsi CS rectæ AR occurrens in T, & jungatur DT; ea producta Assymptoto occurret in Q, in eo puncto ubi curva Assymptoton secat; atque ea curvæ pars quæ versatur inter Q & L est omnis inter rectas AR & FL; ea vero Curvæ pars quæ versatur inter Q & H jacet omnis ad alias partes Assymptoti quam est AR. Quippe recta à C ducta ad punctum quodvis rectæ AR quod versatur inter T & K, minor est recta à D ducta ad idem punctum; sed $RN = RD$, & $Rp = RC$, adeoque Rp minor erit quam RN, adeoque puncta curvæ p versantur inter AR & FL. Sed GT perpendicularis est in CD, & $CG = GD$, adeoque $DT = CT$, unde $TQ = TD = Tp$, & proinde curva Assymptoton secabit in Q. Quod si recta ducatur à C ad punctum rectæ AR inter T & O, ea erit major quam recta à D ad idem punctum rectæ AR ducta; unde cum $Rp = RC$, patet in hoc casu p fore ad alias partes Assymptoti FH, & curvæ portio quæ versatur inter Q & H jacebit extra Assymptoton. Hæc ex constructione manifesta sunt, & ex æquatione quoque radicum ope demonstrari possent. Ex dictis patet curvam esse *speciei* 33. *Neutonianarum* cui respondet *Fig.* 39. in Tractatu D. *Neutoni.* Notandum hujus curvæ proprietatem esse omnes rectas ad curvam terminatas concurrentes in D bissecari recta AR.

Quod si C & D æqualiter distent à puncto B curva secabit Assymptoton in F; si vero C magis distet à B quam D, curva erit ejusdem speciei sed secabit Assymptoton ad alias partes puncti F quam est Q. Notandum quoque eandem plane Curvam describi si C ponatur ad alias partes rectæ AR in simili loco, *i. e.* ad eandem distantiam a BF & AR.

Corol. VIII.

Corol. VIII. Producatur DC (*Fig.* 40.) ad rectam AR, donec ei occurrat in X, & sume XZ = XC, atque curva transibit per duo puncta C & Z. Unde si C ponatur in recta AR coincident C & R cum X, adeoque curva habebit punctum duplex in C, & Ovalis ac Anguinea jungentur sese decussantes ad formam *Nodi* & curva evadet *speciei* 34.

Corol. IX. Quod si punctum C (*Fig.* 41.) ponatur in recta DB, manifestum est curvam habere diametrum DB, quoniam si BR = B*r*, erit CR = C*r*, RP = *rp*, adeoque DP = D*p*, & PM = *p*M; quod inde quoque constat quod $c = o$, adeoque in æquatione evanescat terminus $2acy$. Curva vero in hoc casu constabit ex Ovali transeunte per C & D, atque Conchoidali ad Assymptoton FH secante BF in S, ita ut BS = BC; quod si BC minor sit DB, patet Ovalem esse ad Convexitatem Conchoidalis transeuntis per S, cum BS sit minor BF; & proinde curva erit *speciei* 39. At si BD minor sit BC, erit BS major BF, adeoque Conchoidalis habebit Ovalem ad Concavitatem suam & curva erit *speciei* 40.

Corol. X. Quod si punctum C coincidat cum B, coincidet etiam S cum B, adeoque erit B punctum curvæ duplex; Ovalis ac Conchoidalis *Corolarii* præcedentis se decussant in C, ad modum *Nodi* & curva erit *speciei Quadragesimæ primæ*; atque hæc curva est tertii Ordinis cujus Quadraturam exhibuit eximius Geometra D. de *Moivre* in Actis Philosophicis, N° 345.

Corol. XI. Curvæ *Corol.* 8 & 10 (*Fig.* 42.) descriptæ, quæ scil. punctum habent duplex in C, sic motu commodissime describuntur. Sumatur angulus DPL = DCA, & sit PQ æqualis datæ rectæ DC; moveatur angulus DPL ita ut punctum Q, quod datur in crure PL, describat rectam AC & punctum angulare P describet lineam vel *speciei* 34 vel 41; si angulus DPL sit obliquus erit curva *speciei* 34, at si rectus curva erit *speciei* 41. Quippe cum DPQ = DCR & CRD = PRQ, similia erunt triangula PQR & DRC, sed & æqualia sunt cum DC = PQ; adeoque CR = RP; quæ ipsa est constructio quam exhibuimus *Corol.* 5. curvarum specierum 34 & 41. Quod si punctum sumatur medium inter P & Q Linea ejus motu descripta, si angulus DPQ rectus sit, est *Cissois Dioclea.*

PROP.

PROP. XII.

Curvarum Prop. X. *descriptarum species & Assymptotos determinare.*

QUoniam Curvæ puncta determinantur concursu rectarum (*Fig.* 28.) CO & SN, curva abibit in infinitum quoties rectæ CO & SN evadunt parallelæ; quod contingit ubi angulus CQL fit æqualis summæ angulorum SNL & FCO.

Quare si in rectam NL (*Fig.* 43.) demittatur CQ, angulum CQL constituens æqualem summæ datorum SNL & FCO, & ad modum *Lemmatis* secundi curva hac ratione describatur occurrens rectæ BQ in tribus punctis Q, *q*, *t*, jungantur CQ, C*q*, C*t*, & ducantur rectæ CO, C*o*, C*u* constituentes augulos QCO, *q*C*o*, *t*CU æquales dato FCO, erunt rectæ CO, C*o*, C*u* parallelæ Assymptotis curvarum *Prop.* 10. descriptarum.

Quod si sumatur CH ad CS, ut angulus nascens QC*m* ad NS*n*—QC*m*, & per H ducatur recta H*z* parallela rectæ CO, erit HZ curvæ Assymptotos & simili ratione duæ reliquæ determinantur.

Ostendimus in *Lemmate* & *Corolariis* præcedentibus varias methodos, quibus curva hic ad Assymptotωn positionem determinandam assumpta facile delineari potest, quas non opus est repetere: Ex ea vero descripta quot & qualia crura infinita habeat curva facile intelligitur. Quippe si BQ Hyperbolæ defectivæ ter occurrat curva habebit tres Assymptotos & sex crura Hyperbolica; si BQ in puncto quovis Hyperbolam defectivam contingat Curvæ duæ Assymptoti abibunt in infinitum, & curva duo habebit crura Parabolica infinita, & duo Hyperbolica si BQ in alio puncto Hyperbolam defectivam secet. Nam si BQ Hyperbolam defectivam contingat in Q puncta quamproxima Q & *m* erunt simul in recta BQ & in Hyperbola illa, adeoque angulus C*m*L = CQL, & triangula CQ*g*, L*mg* erunt similia; & proinde angulus QC*m* = NL*n* = NS*n*; cumque HC : CS : : QC*m*, NS*n* — QC*m*, patet HC evadere infinitam, adeoque Assymptoton HZ abire in infinitum; & proinde crura curvæ evadere Parabolica; cum vero in alio aliquo puncto recta BQ Hyperbolæ defectivæ occurrat, curva alia duo habebit crura Hyperbolica. Quod si Hyperbola defectiva habeat diametrum & sit BQ ejus Assymptotos curva duo sola habebit crura Parabolica infinita.

Ex

Ex *Corol.* 2. *Prop.* 10. intelligi poteſt an curva habeat *Nodum* in C *Cuſpidem* an *Punctum* conjugatum, unde ex dicto *Corolario* & ex hac Propoſitione collatis ſpecies curvæ dignoſci poteſt.

Corol. I. Si anguli SNL & FCO conficiant duos rectos, facilius determinantur Aſſymptoti & ſpecies curvarum; quippe imprimis manifeſtum eſt curvam abire in infinitum in hoc caſu quando Q abit ad diſtantiam infinitam; (*Fig.* 44.) quippe in eo caſu parallelæ evadunt NL & CF, adeoque cum SNL ſupplementum ſit anguli FCO ad duos rectos, parallelæ quoque evadunt CO & SN. Ducatur igitur CG conſtituens angulum GCS æqualem exceſſui anguli FCO ſupra CBQ, & CG erit parallela Aſſymptoto curvæ.

Corol. II. Porro ſuper (*Fig.* 45.) CS deſcribatur arcus circuli habens angulum SNL inſcriptum occurrens datæ AN in punctis duobus N & R; & ſi conſtituantur anguli NCP, RCπ æquales dato FCO, erunt CP & Cπ parallelæ aliis duabus curvæ Aſſymptotis; quarum Poſitio ſic inveſtigatur, ſit angulus SKN = SNL, & ſumatur NSU = KSN; ſitque CH ad CS ut eſt UQ ad CU, & per H ducatur HZ, ea erit Aſſymptos parallela ipſi CP, & ſimiliter determinatur Aſſymptotos quæ parallela eſt rectæ Cπ.

Corol. III. Duo vero ſunt caſus in quibus loco quatuor crurum Hyperbolicorum ad duas Aſſymptotos curva duo tantum habet crura Parabolica. 1. Quando BQ parallela eſt vel rectæ CN vel CR, nam in eo caſu erit UQ infinita, adeoque & CH cum CH : CS : : UQ : CU. Erit vero in hoc caſu curva Hyperbolo-Parabolica, cum alia habeat crura Hyperbolica ad Aſſymptoton parallelam ipſi Cπ. 2. Quando AN tangit circulum cui inſcribitur angulus SNL; quippe in eo caſu evadit angulus NSC = KSN, adeoque coincidit C cum U, & proinde cum CH : CS : : UQ : CU erit CH infinita, adeoque curvæ crura quæ prius erant ad Aſſymptotos parallelas rectis CP & Cπ evadunt Parabolica; alia vero manent in hoc caſu crura duo Hyperbolica ad Aſſymptoton parallelam ipſi CG.

Corol. IV. Quod ſi AN eum circulum contingat, & ſimul BQ parallela ſit rectæ CN, curva duo tantum habebit crura infinita eaque Parabolica; unde ſi angulus SCT æqualis ſit dato FCO & CT occurrat rectæ BQ in T, atque per puncta C, S, T ducatur circulus; ſi is circulus bis occurrat rectæ AN curva habebit Ovalem & *Nodum* in S eritque Parabola *ſpeciei* 68; ſi AN circulum contingat curva erit *ſpeciei* 70. Parabola nimirum *Neiliana*, & denique ſi AN ponatur tota extra circulum curva erit Parabola *Punctata ſpeciei* 69.

Quoties recta AN cadit tota extra dictum circulum deſcriptum ſuper CS curva unicam habet Aſſymptoton parallelam rectæ CG, (*Fig.*44.) & curva evadit Hyperbola defectiva.

Ex his generalibus *Corolariis* innumeræ deduci poſſunt ſpeciales ſimplices curvarum Conſtructiones, quarum exemplum unum aut alterum afferre erit operæ pretium.

Ex. I. Sint anguli SNL, FCO recti (*Fig.* 46.) & AN perpendicularis in rectam CS atque BQ eidem CS parallela, dicatur CS $= a$, SA $= c$, AB $= b$, PM $= y$, & SM $= x$, eritque SM : PM :: SA : AN $= \frac{cy}{x}$, & CM $(= a - x)$: PM (y) :: QT $(= b)$: CT $= \frac{by}{a - x}$; ſed SM : PM :: BN : BQ, *i.e.* $x : y :: \frac{cy}{x} - b : \frac{by}{a - x} + a - c$, unde

$$cy^2x - cay^2 + baxy = \overline{a - c} \times x^3 - \overline{a - c} \times ax^2.$$

Proinde ſi ſumatur AD : AB :: $\frac{CS}{2}$: SA, & per D ducatur recta DH parallela rectæ CS; & dein ad C erigatur Normalis CK, occurrens rectæ DH in K; & K ſumatur pro principio abſciſſæ in axe DH prodibit æquatio curvæ formæ *Neutonianæ*

$$y^2x - \frac{ba^2}{c}y = \frac{a - c}{c} \times x^3 - \frac{2a - 2c}{c} \times ax^2 + \overline{\frac{a - c}{c} + \frac{b^2}{4c^2}} \times a^2x - \frac{b^2a^3}{2c^2}.$$

Unde cum Terminus x^3 ſit affirmativus quoties SC ſuperat SA, & terminus y non deſit, patet curvam fore *ſpeciei* 7 vel 8; quippe ſi evaneſcat y & æquationis termini omnes ducantur in x & adjiciatur terminus $\frac{b^2a^4}{4c^2}$ prodibit æquatio cujus duæ radices erunt imaginariæ.

II. Quod ſi recta SA major ſit quam SC evadet terminus x^3 negativus, & ſi SA minor ſit quam $\frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{2} + \frac{a}{2}$ curva habebit *Nodum* in S, eritque *ſpeciei* 34; ſi SA $= \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ curva erit *ſpeciei* 35, & ſi SA ſit major ea Quantitate curva erit *ſpeciei* 36.

III. Si recta AN abeat ad alias partes puncti S quam eſt C æquatio curvæ erit ſimilis priori, ſed termini x^3 coefficiens erit $\frac{-a - c}{c}$ adeoque negativus, & proinde curva erit Hyperbola defectiva. Unde ſi CA ſit minor quam $\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}$ curva erit *ſpeciei* 34; ſi CA $= \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ curva erit *ſpeciei* 35; ſi CA major ſit ea Quantitate curva erit *ſpeciei* 36; in primo caſu curva habet *Nodum* in S, in 2° *Cuſpidem*, in 3° *Punctum* conjugatum; & curvæ eæ omnes Aſſymptoton ſuam ſecant in puncto C.

IV. Sint rectæ BQ, AN (*Fig.* 47.) parallelæ rectæ CS, & anguli SNL, FCO ut prius recti; ducatur SA perpendicularis in AN occurrens rectæ BQ in B; & si CS major sit quam 2 SA terminus x^3 in æquatione ad *Neutonianam* formam reducta erit affirmavimus, & curva erit Hyperbola redundans habens tres Assymptotos; si $2SA = CS$ evanescet terminus x^3, & curva evadet Hyperbolo-Parabolica; quod si 2SA major sit quam CS terminus x^3 evadet negativus, & describetur Hyperbola defectiva; hæc specialius prosequi non opus est cum labore exiguo indagari possint.

V. Quæ hactenus descriptæ sunt (*Fig.* 48.) curvæ diametris carent, aliæ vero quæ diametros habent describi possunt, si loco anguli FCO substituatur recta circa C ut Polum volubilis; sintque rectæ AN & BQ perpendiculares in CS. Quippe si $CB = b$, $SA = c$, $CS = a$, $PM = y$, $SM = x$, & CB minor sit quam CA, erit $y^2x - \frac{ca}{c+b} \times y^2 = \frac{a-c-b}{c+b} \times x^3 - \frac{a-c-b}{c+b} \times ax^2$. Unde si sumatur SD ad CS, ut ut est SA ad CB+SA, atque D sumatur principium abscissæ, æquatio prodibit formæ *Neutonianæ* $y^2x = \frac{a-c-b}{c+b} x^3 + \frac{\overline{2ca-ba} \times \overline{a-c-b}}{\overline{c+b}^2} x^2 + \frac{\overline{c-2b} \times \overline{a-b-c}}{\overline{c+b}^3} \times a^2cx - \frac{bc^2a^3}{\overline{c+b}^3} \times \overline{a-c-b}$. Cujus æquationis Radices si evanescat y prodibunt $\frac{ca}{c+b}$, $\frac{ca}{c+b}$, $\frac{-ba}{c+b}$, unde manifestum est duas radices æquales, & tertiam esse signi contrarii. Idem hinc quoque constat quod DS, DS, DC sint tres Radices æquationis cum curva transeat bis per punctum S & semel per C. Proinde cum terminus x^3 sit affirmativus patet figuram esse *Cruciformem speciei* 18 vel 19. Similiter ex aliis positionibus rectarum AN & BQ construuntur *species* 11, 13, 41, &c.

Corol. V. Ostendimus *Corol.* 2. *Prop.* 11. si SNL & FCO conficiant duos rectos, & sit angulus QBA = OCF describi Conicam sectionem cujus Assymptoti & crura sic determinantur ex *Corol.* 2. hujus *Prop.* Super recta CS describatur (*Fig.* 45.) circuli arcus habens angulum SNL sibi inscriptum; si hic circulus rectæ AN occurrat in duobus punctis N & R ducantur CN, CR & CP, Cπ angulos NCP, RCπ constituentes æquales dato FCO, & parallelæ erunt CP, Cπ Conicæ sectionis Assymptotis quarum positio similiter ac in *Corol.* 2. determinatur. Proinde si AN secet dictum circulum describetur Hyperbola Conica, si circulum contingat Parabola, & si extra circulum tota ponatur describetur Ellypsis.

Absolvimus

Abſolvimus duas methodos quibus Lineæ tertii Ordinis puncto duplice donatæ ſola rectarum datarum & angulorum conſtantium ope deſcribuntur; quæ ſupereſt tertiam eas deſcribendi methodum breviter explicabimus; harum vero curvarum contemplationi prolixius immoramur propterea quod ſero in Geometriam receptæ ſint atque à paucis hucuſque tractatæ.

PROP. XIII.

Cæteris manentibus ut in Prop. 5. *ducatur crurum* (Fig. 49.) CF *&* NL *concurſus* Q *per rectam* BG *&* *crurum* CO *&* SN *concurſus* R *per* AR, *dico angulare punctum* N *deſcripturum Lineam tertii Ordinis.*

Ex puncto C ad rectam BG ducatur CB conſtituens angulum CBG = FCO, & occurrat CB producta rectæ AR poſitione datæ in A; ducatur SA, & in recta SA ſumatur abſciſſa ut æquatio curvæ prodeat ſimplicior, quoniam ubi R pervenit ad A abeant Q & N in infinitum, & proinde SA fiat parallela Aſſymptoto curvæ; Ducatur NM ordinata ad Axem SA parallela rectæ BG & RK parallela quoque eidem rectæ BG occurrens axi SA in u, ſitque Qe parallela ipſi axi SA. His poſitis dicatur SA $= a$, CB $= b$, CA $= c$, AD $= e$, CD $= g$, ſitque Au : Ru :: a : d, &c. & quoniam SM ($= x$) : NM ($= y$) :: SU : Ru erit RU $= \frac{day}{dx - ay}$ & SU $= \frac{dax}{dx - ay}$, atque AU $= \frac{a^2 y}{dx - ay}$. Sed UK:AU :: $g : e$ ob parallelas RK, BG, CD & triangula proinde ſimilia AUK, ACD ergo UK $= \frac{a^2 gy}{edx - eay}$ AK $= \frac{ca^2 y}{edx - eay}$, unde RK $= \frac{ade + a^2 g \times y}{edx - eay}$, & CK $= \frac{ecdx - a \times ce + ca \times y}{edx - eay}$. Ducatur CT conſtituens angulum CTB = CBT ſitque BT $= f$, & triangula CTQ, CRK erunt ſimilia; quippe CTQ = RKC & CQT = RCA cum utervis additus angulo QCB conficiat angulum DCB. Proinde eſt RK : CK :: CT : QT; unde QT =

$QT = \frac{ebcdx - ba\times\overline{ce+ca}\times y}{a\times\overline{ed+ag}\times y}$, sed $GQ = GB - BT - TQ$ & $GB = \frac{cg+gb}{c}$, $BT = f$, adeoque $GQ = \frac{cg+gb-fc}{c} - \frac{ebcdx + bc\times\overline{ec+ca}\times y}{\overline{ed+ag}\times ay} = Me$, & $Qe = GM = \frac{\overline{c+b}\times e}{c} + a - x$.

Ducatur NP angulum NPS constituens æqualem dato SNL & ad eam rectam ducatur Sg constituens angulum $SgN = NMP$, ducatur quoque $Nm = NM$; sintque rectæ NM, NP, PM, mP ut Quantitates datæ a, h, l, k respective; his positis cum similia sint triangula SgN & QeN erit $Sg : gN :: Ne : Qe$, sed $Sg : SP :: a : h$ & $SP = SM + \frac{l\times NM}{a}$, ergo prodibit $\frac{ax+ly}{h} : \frac{hy}{a} + \frac{kx}{h} + \frac{kly}{ah} :: y + \frac{cg+gb-fc}{c} - \frac{ebcdx - ba\times\overline{ce+ca}\times y}{\overline{ed+ga}\times ay} : \frac{\overline{c+b}\times e}{c} + a - x$. Sed si centro N radio (*Fig.* 50.) NM (ubi NM evadit æqualis ipsi SA) describatur circulus, is transibit per m & si producatur NP ad circulum occurret ei in punctis X & Y; sed MP : PX :: PY : Pm ex Elementis, adeoque cum $PX = a - h$, & $PY = a + h$, erit $kl = a^2 - h^2$, & $h^2 + kl = a^2$; quod si Analogiæ investigatæ media & extrema in se mutuo ducantur, & loco $h^2 + kl$ substituatur a^2, æquatio prodibit hujusmodi

$$a^2\times\overline{de+ag}\times cy^3 + \overline{k+l}\times\overline{ed+ag}\times acxy^2 + a^2\times\overline{ed+ag}\times cx^2y - bc^2dekx^2$$
$$\left.\begin{matrix} +\overline{cg+gb-fc-lc}\times a^2\times\overline{de+ag} \\ -ba^2c^2\times\overline{e+a}-ale\times\overline{de+ag}\times\overline{c+b} \end{matrix}\right\} y^2 \quad \left.\begin{matrix} +\overline{cg+gb-fc}\times ak-a^2e\times\overline{c+b}\times\overline{de+ag} \\ -bc^2dae-a^3c\times\overline{de+ag}-bakc^2\times\overline{e+a} \end{matrix}\right\} xy$$

$= o$. Quæ est æquatio ad Lineam tertii Ordinis.

Corol. I. Erigatur SE perpendicularis (*Fig* 49.) ipsi SA, & quæratur æquatio ad axem parallelam ipsi SE, & per *Prop.* 8. prodibit formæ *Neutonianæ*, nam exterminabuntur xy^2, x^2 & xy; atque coefficiens termini x^3, postquam æquatio ad formam *Neutonianam* reducta est, erit (si h sit sinus anguli ADC sumpto SA pro Radio) $\frac{2a\times\overline{k+l}^2 - 8a^3}{2ah^2} = \overline{k+l}^2 - 4a^2$

$= Mm^2 - \overline{NM+Nm}^2$, sed duo latera NM & N$m$, simul sumpta majora sunt tertio Mm, & proinde coefficiens termini x^3 erit negativus, adeoque curva descripta erit Hyperbola defecta ad unicam Assymptoton parallelam rectæ SA.

Corol. II.

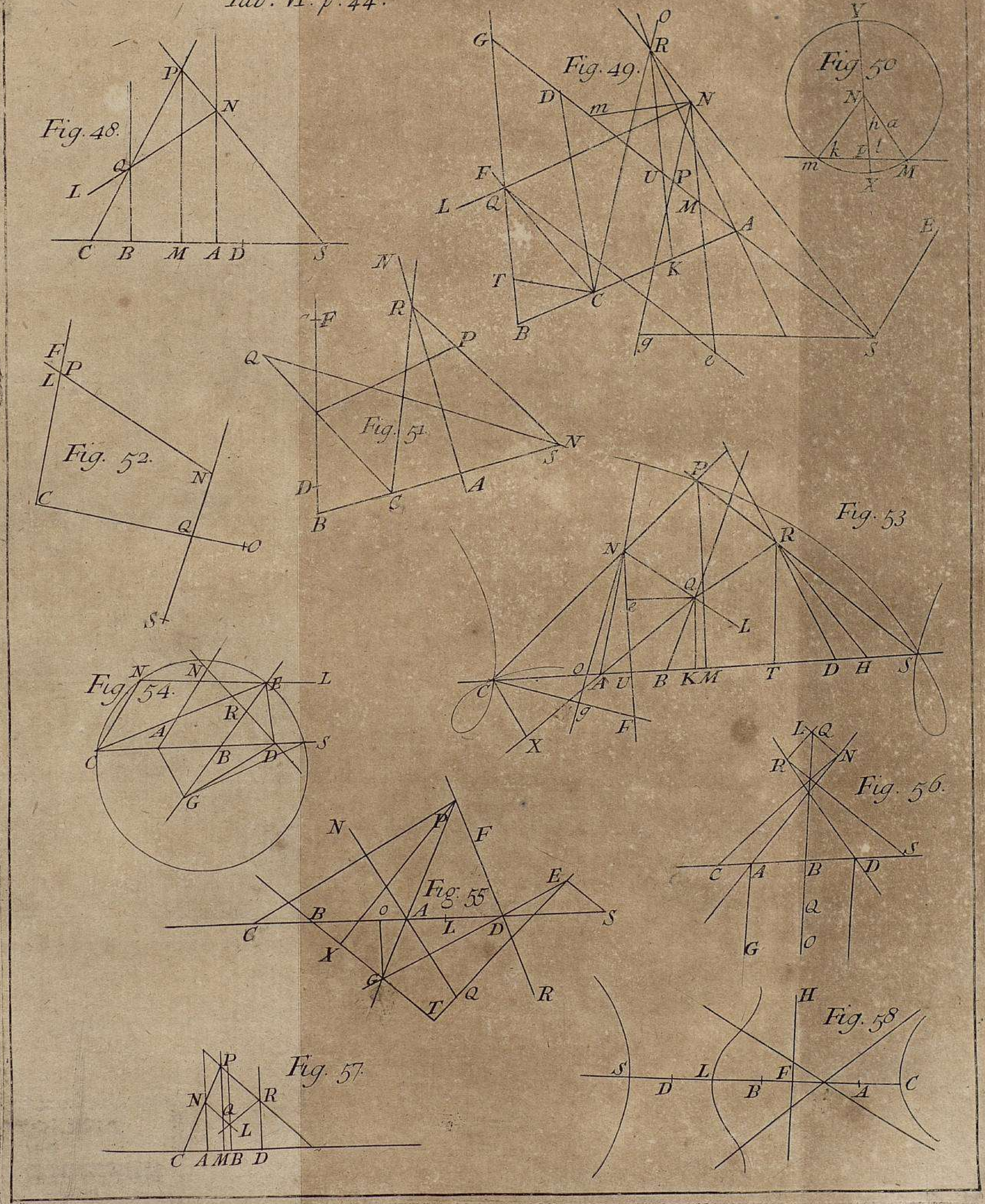


Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50
Fig. 51
Fig. 52.
Fig. 53
Fig. 54.
Fig. 55
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58

Corol. II. Si $y=0$ erit $bcdkx^2=0$, adeoque curva bis tranſibit per S quod punctum erit curvæ duplex; & ſi circa data *(Fig.* 51.*)* puncta C & S moveantur anguli dati QCR & QSR = QNR, ac concurſus crurum CR & SR ducatur per rectam AN, concurſus crurum CQ & SQ deſcribet conicam ſectionem occurrentem rectæ BG in duobus punctis D & F; cumque Q ad hæc puncta pervenerit in deſcriptione Propoſitionis curva tranſibit per S.

Corol. III. Hinc vero curvæ ſpecies dignoſcitur; quippe ſi recta BQ bis occurrat Conicæ ſectioni curva habebit *Nodum* in S, eritque *ſpeciei* 34 vel 41; ſi BQ ſectionem contingat curva erit *Cuſpidata* in S, adeoque *ſpeciei* 35 vel 42. Quod ſi ſectioni recta BQ non occurrat, nec eam contingat, curva habebit *Punctum* conjugatum in S, eritque *ſpeciei* vel 36, 43 vel 44.

Corol. IV. Quod ſi angulus datus SNL æqualis ſit angulo AGB, erit NPM = PMN = NmM, & proinde coincident P & m, & quantitas k evaneſcet, adeoque terminus $bcdkx^2$, unde omnes æquationis termini dividi poterint per y; & proinde curva erit ſectio Conica.

Corol. V. Si anguli QSR & QCR ſint ejuſmodi *(Fig.* 51.*)* ut SQ & CQ ſimul coincidant cum CS punctum Q deſcribet Lineam rectam, ut conſtat ex *Prop.* 3. adeoque punctum S evadet ſimplex, & curva erit ſectio Conica.

Corol. Generale.

Ex Propoſitionibus 5, 10, 13 *univerſaliter colligi poteſt, quod ſi in plano dentur duo puncta* (Fig. 52.) C *&* S, *& ex* S *exeat recta* SN *cui ſemper occurrat ad angulum datum recta* NL *ad punctum* N, *circa* C *moveatur ut Polum angulus datus* FCO, *& crurum* CF *&* NL *concurſus ſit* P, *concurſus crurum* SN *&* CO *ſit* Q, *atque trium punctorum* Q, P, N *(in Quadrilaturo* CQNP*) duo quævis per rectas poſitione datas ducantur, tertium deſcribet Lineam tertii Ordinis habentem punctum duplex vel in* C *vel in* S.

Sectio

SECTIO III.

De descriptione Linearum quarti Ordinis, earumque tertii Ordinis quæ nullum habent Punctum duplex.

Lineas secundi Ordinis descripsimus *Prop.* 1. motu duorum angulorum circa data duo puncta; Lineas tertii Ordinis descripsimus *Prop.* 5. & 10. ope totidem angulorum quorum alterum circa datum punctum moveri, alterum vero per rectam datam duci supposuimus; atque nunc ad Lineas quarti Ordinis describendas uterque angulus per rectam datam est ducendus.

PROP. XIV.

Angulorum datorum (Fig. 53.) CNL, SRQ *crura* CN & SR *semper transeant per data puncta* C & S; *Puncta vero angularia* N & R *percurrant Rectas infinitas* AN & DR; *dico si concursus crurum* NL & RQ *ducatur per Rectam* BQ *concursum crurum* CN & SR *descripturum Lineam quarti Ordinis.*

Sint rectæ PM, NU, QK & RT normales in CS; sit angulus CON=CNL, & SHR=SRQ; dicatur CS=a, CA=c, CB=b, SD=d; sit Au : Nu :: a : e, DT : RT :: a : g, sinus anguli CNQ ad cosinum ut a ad f, & sinus anguli SRQ ad sinum ejus complementi ut a ad k, & BK : QK :: a : h, PM=y, CM=x, SM =a—x.

$= a - x$. His positis est CM : PM :: CU : NU; adeoque $NU = \frac{ecy}{ex - ay}$ & $CU = \frac{ecx}{ex - ay}$. In No cadat Cg normalis, & similia erunt triangula CgN & NeQ, atque Cog & NgF; unde Co : NF :: Ne : Qe; sed $CO = CU - \frac{f\,NU}{a}$, & $NF = NU + f\frac{CU}{a}$. Quare si $QK = z$, erit $x - \frac{fy}{a} : y + \frac{fx}{a} :: \frac{ecy}{ex - ay} - z : b + \frac{az}{b} - \frac{ecx}{ex - ay}$, unde

$$QK\ (= z) = \frac{\overline{c - b} \times abex^2 + \overline{ce - bf} \times aby^2 + \overline{ba^2 + efb} \times bxy}{\overline{a^2 + bf} \times ex^2 - \overline{a^2 - bf + eb - ef} \times axy - a^2 \times \overline{b - f} \times y^2}$$

Simili plane ratione alius investigatur valor rectæ QK ex consideratione Positionis rectæ DR & anguli SRQ; qui facile prodibit si loco ipsius x ponatur $a - x$, pro c scribatur d, atque pro f & e scribantur k & g, & denique pro $b + \frac{az}{b}$ scribatur $a - b - \frac{az}{b}$ in Analogia præcedenti. Duo vero hi valores æquentur &

$$\frac{\overline{c - b} \times aebx^2 + \overline{ce - bf} \times bay^2 + \overline{ba^2 + efb} \times bxy}{\overline{a^2 + bf} \times ex^2 - \overline{a^2 - bf + eb - ef} \times axy - a^2 \times \overline{b - f} \times y^2} =$$

$$\frac{\overline{\overline{a - b} - d} \times gab \times \overline{a - x}^2 - \overline{a - b} \times \overline{a^2 + kg} \times \overline{a - x} \times by + \overline{\overline{a - b} \times k - dg} \times aby^2}{\overline{a^2 + kb} \times g \times \overline{a - x}^2 - \overline{a^2 - bk + gb - gk} \times \overline{a - x} \times y - a^2 \times \overline{b - k} \times y^2}$$

Unde ducendo numeratorem unius fractionis in denominatorem alterius prodibit æquatio $Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3 + Kx^2 + Lxy + My^2 = 0$, cujus coefficientes calculi ope indagari possunt, & speciatim $\frac{A}{a^2b^2e} = \frac{a}{b} + \frac{k}{a} \times \overline{c - b - a - b - d} \times \frac{a}{b} + \frac{f}{a}$ & $F = -2aA$, $K = a^2A$, ut cuivis vel leviter perpendenti manifestum erit. Cum igitur x & y ad quatuor ascendant Dimensiones in ea æquatione & non ad plures, Linea erit Ordinis quarti.

Corol. I. Curva habebit duo puncta duplicia alterum in C, alterum in S; nam si $y = 0$, evanescent omnes æquationis termini præter tres in quibus non reperitur y, & fiet

$$\overline{\overline{a^2 + kb} \times \overline{c - b} - \overline{a - b - d} \times \overline{a^2 + fb}} \times x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 = 0,$$

cujus radices sunt $0, 0, a, a$. Unde curva bis transibit per principium abscissæ quod est in C, & bis quoque transibit per S, cum $CS = a$.

Corol. II. Curva transit per C *(Fig. 54.)* quando recta SR pervenit ad Positionem SD; unde si angulus SDE = SRQ, & si super CE describatur arcus circuli cui inscriptus sit angulus CNL, atque is circulus bis occurrat

occurrat rectæ AN, curva habebit *Nodum* in C cum ovali vel *Crucem*; at si recta AN eum circulum contingat curva erit *Cuspidata* in C, & si AN ponatur tota extra circulum curva habebit *Punctum* conjugatum in C absque *Nodo*, ovali aut *Cuspide*.

Corol. III. Similiter plane si angulus CAG = CNL, & circulus super GS descriptus habens angulum æqualem dato SRQ inscriptum bis occurrat rectæ DR, curva erit *Nodata* in S; si rectam tangat circulus curva erit *Cuspidata* in S, at si cadat DR penitus extra circulum dictum curva erit *Punctata* in S.

Corol. IV. Hinc curvæ hac Propositione descriptæ in sex insigniores species distinguuntur, quæ in inferiores deinceps dividi possunt. 1ª. Est earum quæ duos habent *Nodos*, alterum in C, alterum in S. 2. Est earum quæ duas habent *Cuspides* in iisdem punctis. 3. Earum quæ duo habent *Puncta* conjugata, alterum in C, alterum in S. 4. Earum quæ habent unum *Nodum* & unicam *Cuspidem*. 5. Earum quæ habent unicum *Nodum* & unicum *Punctum* conjugatum. 6. Est earum quæ unicam habent *Cuspidem* & unicum *Punctum* conjugatum.

Corol. V. Quod si, cæteris *(Fig. 53.)* manentibus ut prius, curva non determinetur concursu rectarum CN & SR, sed aliarum rectarum quæ cum CN & SR datos constituunt angulos ad puncta C & S, curva tamen non alia describetur quam quæ methodo hujus *Prop.* describi potest, ut ex *Lemmate* 1. facile demonstratur.

Corol. VI. Curvæ hujus *Prop.* octo habere possunt crura infinita ad quatuor Assymptotos; cum vero eæ aliter determinari non possint quam concursu rectæ cum linea curva Ordinis quarti, iis determinandis non immorabimur. Sed si anguli SNL, SRQ simul conficiant duos rectos tres Assymptoti curvarum determinari possunt describendo Hyperbolam defectivam ad modum *Lemmatis* 2. dimittendo scil. ex C *(Fig. 53)* in RQ lineam CX, ita ut angulus CXR semper æqualis sit dato CNL, dum punctum R ducitur per rectam DR; nam si à puncto C ad hujus Hyperbolæ occursus cum AN ducantur rectæ, eæ erunt curvæ Assymptotis parallelæ.

PROP.

PROP. XV.

Si rectæ SP *&* CP *simul coincidant cum* CS, *curva* Prop. 14. *descripta non erit quarti sed tertii Ordinis, & puncta* C *ac* S *erunt simplicia.*

COincidat CN cum CA, & NL cum AG (*Fig.* 55.) atque simul coincidat SR cum SD & RQ cum DG, dico Lineam tertii Ordinis in eo casu methodo *Prop.* 14. delineari; nam erit BO : GO :: $a : b$ & AO : GO :: $f : a$; DO : GO :: $k : a$, adeoque $\frac{a}{b}+\frac{f}{a}=\frac{BO}{GO}+\frac{AO}{GO}$ $=\frac{AB}{GO}$, atque $\frac{a}{b}+\frac{k}{a}=\frac{BO}{GO}+\frac{DO}{GO}=\frac{BD}{GO}$, unde $\overline{\frac{a}{b}+\frac{f}{a}} : \overline{\frac{a}{b}+\frac{k}{a}}$ :: AB : BD :: $c-b : a-b-d$, & proinde $\overline{a-b-d}\times\overline{\frac{a}{b}+\frac{f}{a}}=\overline{c-b}$ $\overline{\frac{a}{b}+\frac{k}{a}}$; unde termini æquationis Propositione præcedente investigatæ in quibus y non reperitur $\overline{a^2+kb}\times\overline{c-b}-\overline{a-b-d}\times\overline{a^2+fb}$ $\times x^4-2ax^3+a^2x^2$ evanescunt: Reliqui dividantur per y, & æquatio evadet dimensionis unitate inferioris quam prius, adeoque curva erit Linea Ordinis tertii, cujus termini erunt x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^2, xy, y^2, x, y cum suis coefficientibus; cum vero in ea æquatione reperiantur y & x patet principium abscissæ quod est in C esse punctum simplex; proinde C & S erunt puncta duo simplicia.

Corol. I. Producatur GD & sumatur angulus DSE = FDE & PCA = QAG; sintque rectæ PX & ET perpendiculares in rectam BG, & sumatur CL ad SL ut ET × PG² ad PX × EG², eritque L punctum tertium præter C & S ubi curva descripta secat rectam CS. Hæc innotescunt investigando concursum rectarum CN & SR cum quamproxime coincidunt cum CS.

Corol. II. Ex Propositione constat si rectæ AN & DR in eodem puncto secant rectam CS & angulus CNL supplementum sit anguli SRQ ad duos rectos describi Lineam tertii Ordinis; nam ubi simul coincidunt anguli CNL & SRQ cum CAG & SDG, & punctum A coincidit

cidit cum D, patet angulos CAG & SDG evadere supplementa sibi mutuo ad duos rectos.

Corol. III. Si anguli CNL & SRQ (*Fig.* 56.) simul sumpti conficiant duos rectos, & CBQ = CNL, Linea describetur tertii Ordinis; quippe cum N pervenerit ad A abibit Q in infinitum, cum CNL = CBQ, sed SRQ = SBQ, adeoque SR simul coincidet cum SD, unde per *Prop.* Linea describetur tertii Ordinis.

Corol. IV. Unde si anguli CNL & SRQ sint recti atque vel coeant puncta A & D ut in *Corolario* 2 vel recta BQ perpendicularis sit in CS secundum *Corol.* 3. linea descripta erit tertii Ordinis.

Corol. V. Sit imprimis BQ (*Fig.* 57.) perpendicularis in CS & æquatio curvæ erit hujusmodi iisdem retentis symbolis

$$\overline{b-c}\times x^2-cy^2+\frac{ba}{e}xy\times\overline{\overline{a-x}-\frac{ay}{g}}=\overline{a-d-b}\times\overline{a-x}^2-dy^2+\frac{ba}{g}y\times\overline{\overline{a-x}\times x-\frac{ay}{e}}$$

unde si rectæ AN & DR sint quoque perpendiculares in CS, & proinde parallelæ rectæ BQ æquatio erit hujus formæ

$$y^2x-\frac{cay^2}{c+d}=\frac{a-d-c}{d+c}\times x^3-\frac{2a-2d-b-c}{d+c}\times x^3+\frac{\overline{a-b-d}}{d+c}\times a^2x$$

sumatur CF ad SF ut CA ad SD seu CF ad CS ut CA ad CA+SD; & si principium abscissæ sumatur in F æquatio curvæ erit formæ *Neutonianæ*,

$$y^2x=\frac{a-d-c}{d+c}\times x^3+\overline{\frac{3c\times\overline{a-d-c}}{\overline{c+d}^2}+\frac{b+c+2d-2a}{d+c}}\times ax^2$$

$$+\overline{\frac{a-b-d}{d+c}\times a^2+\frac{3c^2a^2\times\overline{a-c-d}}{\overline{c+d}^3}+\frac{2a^2c}{\overline{c+d}^2}\times\overline{b+c+2d-2a}}\times x$$

$$+\frac{a^3cd}{\overline{d+c}^3}\times\overline{a-b-d}-\frac{a^3c^2d}{\overline{d+c}^4}\times\overline{a-d-c}=0.$$ Sit $y=0$ & æquationis Radices erunt $\frac{ca}{d+c}$, $\frac{ca}{d+c}-\frac{a\times\overline{a-b-d}}{a-d-c}$, $-\frac{da}{d+c}$; quod absque prolixo quovis calculo cuivis manifestum erit, qui harum summam cum æquationis termini secundi coefficiente, & productum ex earum multiplicatione resultantem cum ipso termino ultimo contulerit, postquam omnes termini per coefficientem termini primi dividuntur. Cum vero eæ radices sint omnes inæquales & figura diametrum habeat ob defectum termini y patet Lineam nullum habere punctum duplex.

Ejusdem æquationis tres radices (*Fig.* 58.) sic facile geometrice determinantur. In recta CS sumatur imprimis punctum F ita ut CF : SF :: CA : SD. Dein sumatur punctum L ita ut CL : SL :: DB : AB; erunt rectæ FC, FS, FL tres radices æquationis & C, S, L tria designant

nant puncta ubi curva occurrit rectæ CS. Punctum vero F quod principium est abscissæ concursus est rectæ CS cum Assymptoto curvæ ei perpendiculari.

Corol. VI. Hinc si AC sit minor quam DC erit $a-d-c$ quantitas affirmativa, adeoque terminus $\frac{a-d-c}{d+c}x^3$ erit affirmativus; cumque F sit punctum inter C & S adeoque signa radicum FC & FS sint diversa, patet Lineam in hoc casu describi tertii Ordinis *speciei* vel 20 vel 21, & proinde figuram constare ex duabus Hyperbolis in oppositis angulis duarum Assymptotωn positis, & conchoidali intermedia ad Assymptoton perpendiculariter insistentem rectæ CS in puncto F; quoties reliquæ duæ Assymptoti concurrunt ad easdem partes puncti F ad quas est L curva erit *speciei* 20; eritque 21 quoties concurrunt ad diversas. Assymptoti curvarum hac *Prop.* descriptarum (quoties CNL & SRQ conficiunt simul duos rectos) determinantur *(Fig.59.)* ope Hyperbolæ defectivæ descriptæ secundum *Lemma* 2, faciendo ut rectus angulus SRQ angulari suo puncto R percurrat rectam datam DR, & ex C demittendo perpendicularem CH. Quippe si à puncto C ad puncta ubi Hyperbola hæc, quam H perpetuo tangit, occurrit rectæ AN ducantur lineæ rectæ, eæ erunt parallelæ Assymptotis curvarum hac *Prop.* descriptarum. Sed ex *Lemmate* 2° manifestum est Hyperbolam ad Assymptotos determinandas assumptam transire per D & C, atque unicam ejus Assymptoton tantum distare à C quantum D ab S; unde in hoc casu ubi D est inter C & S patet Hyperbolam ovalem habere per C & D transeuntem, quæ bis occurret rectæ AN, cum CA minor sit CD; adeoque curva habebit duas Assymptotos præter eam quæ perpendicularis est rectæ CS in F, quæ formatur cum recta AN occurrit Hyperbolæ ad distantiam infinitam. Imprimis igitur ostendimus tum ex curvæ æquatione tum ex *Lemmate* 2. & *Corol. 6. Prop.* 14. curvam habere tres Assymptotos quoties D est inter C & S atque A inter C & D.

Corol. VII. Sit nunc CA *(Fig. 60.)* major quam CD manente puncto B, & $d+c$ major erit quantitas quam a, & proinde $a-d-c$ erit quantitas negativa, adeoque terminus $\frac{a-d-c}{d+c}x^3$ negativus; cumque radices CF & SF sint adhuc signi diversi, & curva diametrum habeat, patet Lineam tertii Ordinis describi *speciei quadragesimæ*, & figuram constare ex Conchoidali ad Assymptoton FH, & Ovali transeunte vel per puncta C & L vel per S & L. Hæc ex *Lemmate* 2° quoque facile constant cum Hyperbola defectiva ad Assymptotos determinandas assumpta transeat per C & D, ejusque Assymptotos sit KG normalis in CK, si CK = SD. Nam in hoc casu cum CA sit major CD, recta AN Hyperbolæ non potest occurrere nisi ad distantiam infinitam, adeoque curva de qua agimus unicam habebit Assymptoton, unde cum diametrum habeat erit necessario *speciei quadragesimæ*.

Corol. VIII. Sit nunc recta AN ad alteras partes puncti C quam est S, sitque B inter C & S, & æquatio similis erit priori; ejusque radices evanescente y erunt $\frac{ca}{d-c}$, $\frac{da}{d-c}$, $\frac{ca}{d-c} - \frac{a\times\overline{d+b-a}}{a+c-d}$. Quæ geometrice determinantur ut prius sed sumi debent CF, CL versus alias partes ipsius C quam est S. Unde si CA sit major SD & CF major quam CL tres radices erunt ejusdem signi & terminus $\frac{a+d-c}{d-c}x^3$ affirmativus, adeoque curva erit *speciei decimæ*. Idem ope Hyperbolæ defectivæ demonstrari potest.

Corol. IX. Si SD sit major (*Fig.* 61.) SA & A ac D sint ad partes puncti C ad quas non est S æquatio prodibit hujusmodi $\overline{d-a-b}\times\overline{a+x}^2\times x = \overline{c-b}\times x^2\times\overline{a+x} - dy^2x + cy^2x + cay^2$ quæ reducta ad formam *Neutoni* erit $y^2x = \frac{a+c-d}{d-c}x^3$ &c. Unde cum SA $= a+c$, & SD sit major SA, patet terminum $\frac{a+c-d}{d-c}x^3$ esse negativum: Punctum vero L ubi curva secat rectam CS abit ad alteras partes ipsius C quam est A, atque F est inter C & A, unde radices FC, FS, & FL sunt omnes ejusdem signi, adeoque Linea erit *speciei* 39. Locus puncti L ex methodo quantitatum nascentium & evanescentium facillime determinatur investigando versus quam plagam & ubi concurrant SR & CN cum quamproxime coincidunt cum CS, ut prius monuimus.

Corol. X. Si rectæ AN, DR, BQ non sint perpendiculares in CS, sed in obliquo angulo quovis ei occurrant, sint vero sibi mutuo ut prius parallelæ (*Fig.* 62.) & angulus CNL $=$ SDR, SRQ $=$ CAN, ordinata PM parallela sit rectæ AN, sitque PM $= y$, CM $= x$, CA $= c$, SD $= d$, CB $= b$, sinus anguli CNL ad sinum excessus duorum rectorum supra ejus duplum ut $b-c$ ad f, erit $cy^2\times\overline{a-x-b-c}\times\overline{a-x}\times x^2 - fyx\times\overline{a-x} = dy^2x - \overline{a-b-d}\times\overline{a-x}^2\times x - \frac{f\times\overline{a-b-d}}{b-c}\times\overline{a-x}\times yx$. Hæc æquatio ad formam *Neutonianam* reduci poterit ope *Prop.* 8. exterminando terminos x^2y, xy & y^2; & si quis calculi laborem susceperit plures deprehendet Lineas tertii Ordinis quæ diametris destituuntur hac ratione delineari. Sed exempla hæc sufficiunt ad demonstrandum Lineas tertii Ordinis puncto duplice destitutas hac Propositione describi; aliæ rectarum DR & AN Positiones & angulorum CNL, SRQ magnitudines aliarum curvarum descriptionibus inserviunt; & ex iis quæ in prioribus *Corolariis* demonstrata sunt manifestum est Lineas non tantum Hyperbolicas, sed etiam

tiam Hyperbolo-Parabolicas, & pure Parabolicas quæ puncto duplice destituuntur hac *Prop.* describi posse, sed his non opus est diutius immorari.

Corol. XI. Si in *Fig.* 55. rectæ AN, DR contingant circulos super CG, SG descriptos, cui inscripti sint anguli dati CNL, SRQ, Linea descripta non erit tertii Ordinis sed sectio Conica; nam curva non transibit in hoc casu per C vel S, & rectæ ex iis punctis eductæ non possunt curvæ occurrere in pluribus punctis quam duobus.

Prop. XVI.

Cæteris manentibus ut in Prop. 14. *concurrant rectæ* AN, DR (Fig. 63.) *cum* BQ *in punctis* E *&* G, *sit angulus* CEK = CNQ, *& Linea describetur tertii Ordinis, quæ habebit punctum duplex in* S; *si angulus* SRQ = SGK, *Linea descripta erit tertii Ordinis habens punctum duplex in* C, *& si utrumque contingat describetur sectio Conica.*

SI CEK = CNQ, quadrilaterum CNQE inscribi poterit circulo, adeoque angulus NCQ = NEQ. Proinde angulus datus NCQ movetur circa datum punctum C tanquam Polum, & crurum CQ & RQ concursus ducitur per rectam infinitam BQ, adeoque per *Prop.* 10. concursus crurum SR & CN in P describet Lineam tertii Ordinis punctum duplex habentem in S.

Quod si SRQ = SGK circulus per puncta S, G, Q ductus transibit per R, adeoque dabitur angulus RSQ, unde descripta curva erit Linea Ordinis tertii habens punctum duplex in C per *Prop.* 10.

Si CEK = CNQ, & SRQ = SGK anguli NCQ & RSQ dabuntur, adeoque per *Prop.* 1. punctum P concursus crurum CN & SR describet Conicam sectionem transeuntem per C & S.

Corol. I. Si angulus CNQ sit rectus, & semicirculus super CB descriptus transeat per E, Linea describetur tertii Ordinis.

Corol. II. Si puncta A & B coincidant & sit angulus CNQ = CBK describetur Linea tertii Ordinis.

Prop.

Prop. XVII.

Moveantur ut in Prop. 14. (Fig. 64.) *anguli dati* CNL *&* SRQ; *sed nunc concursus crurum* CN *&* SR *ducatur per rectam infinitam* BT, *dico crurum* NL *&* QR *concursum* P *descripturum Lineam quarti Ordinis.*

Sint rectæ NU, PM, RX, TK perpendiculares in CS; sit quoque angulus NOC = CNL, & SHR = SRQ, sit Cg normalis ex C in NO & SI normalis in RH, sit CS $= a$, CB $= b$, CA $= c$, SD $= d$, PM $= y$, CM $= x$. AU : NU :: $a : e$; BK : KT :: $a : h$; DX : XR :: $a : g$; sitque ut prius sinus anguli SRQ ad ejus cosinum ut a ad k, & sinus anguli CNL ad cosinum ut a ad f.

His positis cum triangula CgN & NPe atque triangula COg & NgF sint similia, erit CO : NF :: Ne : Pe. Sed CO $=$ CU $- \frac{f\text{NU}}{a}$ & NF $=$ NU $+ \frac{f\text{CU}}{a}$. Unde si dicatur ordinata NU $= z$ erit $e + \frac{az}{e} - \frac{fz}{a} : z + \frac{fc}{a} + \frac{f}{e}z :: z - y : x - c - \frac{az}{e}$, unde $\frac{e^2+a^2}{e^2} \times z^2 - \overline{\frac{e+f}{e}} \times y + \overline{\frac{ef-a^2}{ea}} \times x - \frac{2ac}{e} \times z = cx - c^2 + \frac{fcy}{a}$, sed CU : NU :: CK : TK. Unde si TK $= u$ erit $z = \frac{ehcu}{au \times \overline{e-h} + beh}$, & proinde

$$\left.\begin{matrix} ac^2h^2 \times \overline{a^2+e^2} + a^3 \times \overline{e^2-h^2} \times \overline{cx-c^2} \\ \overline{ef-a^2} \times x - \overline{e+f} \times ay \times cah \times \overline{e-h} + e^2h^2fcy \end{matrix}\right\} u^2 \quad \left.\begin{matrix} \overline{ef-3a^2} \times x - \overline{e+3f} \times ay \times bceh^2 \\ + 2bahe^2 \times \overline{acx - ac^2 + fcy} \end{matrix}\right\} u$$
$$= b^2ce^2h^2ax - b^2c^2e^2h^2a + b^2fce^2h^2y.$$

Similiter ex consideratione rectæ DR, & anguli SRQ, alius investigari potest valor rectæ KT ($= u$) quæ ex hac facile deduci potest substituendo loco e, f, c, x, b symbolos g, k, d, $a-x$, $a-b$ cum eadem plane ratione investigandus sit valor KT ac prius nisi quod pro rectis AN, CM, CB & angulo CNL & nunc substituendæ sint DR, SM, SB & angu-

& angulus SRQ; Sit m coefficiens termini u^2 in prima æquatione, & p coefficiens termini u in eadem, & si in iis coefficientibus loco e, f, c, x, b scribantur g, k, d, $a-x$, $a-b$ prodibunt duæ coefficientes terminorum u^2, u in secunda æquatione; quæ dicantur n & q; proinde si dicatur $b^2cx - b^2c^2 + \frac{fcb^2y}{a} = \frac{r}{e^2b^2a}$ & $\overline{a-b}^2 \times d \times \overline{a-x} - \overline{a-b}^2 \times d^2 + \overline{a-b}^2 \times \frac{kdy}{a} = \frac{l}{g^2b^2a}$ duo valores rectæ CT his æquationibus exprimi poterint quarum coefficientes ex dictis colligi possunt $\begin{matrix} mu^2 + pu = r \\ nu^2 + qu = l \end{matrix}$

Ex secunda patet $u^2 = \frac{l-qu}{n}$ & ex prima $u^2 = \frac{r-pu}{m}$, unde $\frac{l-qu}{b} = \frac{r-pu}{m}$ & $u = \frac{rn-lm}{pn-qm}$. In æquationum prima scribe loco u hunc ejus valorem & prodibit $\frac{mr^2n^2 - 2rnlm^2 + l^2m^3 + p \times \overline{rn-lm} \times \overline{pn-qm}}{\overline{pn-qm}^2} = r$ unde reducendo prodit $r^2n^2 - 2rnlm + l^2m^2 - p^2nl + pqml + pqnr - q^2mr = 0$.

Cum vero in terminorum r, n, l, m, p, q valoribus quantitates x & y ad unam tantum ascendant dimensionem, & in terminis æquationis $r^2n^2 - 2rnlm + l^2m^2 - p^2nl + pqml + pqnd - q^2mr = 0$ quatuor sint factores, patet si substituantur loco r, n, l, m, p, q eorum valores æquationem prodituram in qua x & y erunt quatuor dimensionum; & proinde lineam describi quarti Ordinis.

Corol. I. Curva transibit neque per punctum C neque per S; quippe punctum curvæ semper versatur in recta NL, quæ nunquam potest transire per C, cum rectæ NL & NC in unico tantum puncto N possint sibi mutuo occurrere, & eodem argumento constat curvam non posse transire per S.

Corol. II. Super recta CS *(Fig. 65.)* describatur circulus, habens angulum inscriptum æqualem summæ datorum CNL & SRQ, occurrens rectæ BT in punctis duobus H & K. Ducantur CH, CK & rectæ HO & KO ita ut anguli OHC, OKC æquales sint dato CNL; atque rectæ HO & KO erunt parallelæ duabus curvæ Assymptotis. Curva vero alias duas Assymptotos potest habere quarum positio sic determinatur; sit CΔ parallela ipsi AN occurrens rectæ BT in Δ; jungatur SΔ occurrens rectæ DR in R; atque sit SRZ æqualis dato SRQ in *Fig.* 64. & recta RZ ostendet plagam aliorum crurum infinitorum, & similiter quartæ Assymptoti directio inveniri potest. Curvæ vero hæ semper

per habent quatuor crura infinita, adeoque eæ quarti Ordinis, quæ nulla habent crura infinita ſed in ſe redeunt, hac ratione deſcribi non poſſunt.

Prop. XVIII.

Si in Prop. *præcedente ſint* AN, BT, DR *parallelæ, Linea deſcripta erit tertii Ordinis.*

Quippe in hoc caſu manentibus iiſdem ſymbolis erit $z = \frac{cu}{b}$ atque ideo $\frac{\overline{e^2 + a^2}}{e^2 b^2} c^2 u^2 +$ &c. $= cx - c^2 + \frac{fcy}{a}$, & $\frac{\overline{g^2 + a^2}}{g^2 \times \overline{a - b}^2} \times d^2 u^2 +$ &c: $= d \times \overline{a - x - d}^2 + \frac{kdy}{a}$, unde $m = \frac{\overline{e^2 + a^2} \times c^2}{e^2 b^2}$, & $n = \frac{\overline{g^2 + a^2} \times d^2}{g^2 \times \overline{a - b}^2}$ adeoque m & n evadunt quantitates invariatæ; ſed $r^2 n^2 - 2nlm + l^2 m^2 - p^2 nl + pqml + pqnr - q^2 mr = 0$, adeoque cum m & n ſint quantitates datæ, ſi loco p, q, l, r earum valores ſubſtituantur patet in æquatione reſultante x & y ad tres tantum dimenſiones aſcendere, adeoque Lineam deſcribi Ordinis tertii.

Corol. I. Ex conſtructione *Prop.* 17. patet univerſaliter ſi rectæ AN, BT, DR concurrant in uno quovis puncto curvam per id punctum tranſituram. Cum igitur in caſu hujus *Prop.* hæ rectæ concurrant ad diſtantiam infinitam patet curvæ Aſſymptoton aliquam rectis his parallelam eſſe; reliquæ duæ ope circuli determinantur ut in *Corol.* 2. *Prop.* præcedentis.

Corol. II. Cum harum curvarum Aſſymptoti adeo facile determinentur, eæ ad *Neutonianas* minori labore reduci poterint inveſtigando æquationem curvæ ad aliquam Aſſymptoton ut extermінetur terminus y^3, & dein ad modum *Prop.* 8. exterminando terminum $x^2 y$. Quod ſi anguli CNL & SRQ conficiant duos rectos curvæ erunt Hyperbolo-Parabolicæ duo habentes crura infinita Parabolica, & duo Hyperbolica ad Aſſymptoton quæ cum CS angulum conſtituit æqualem ipſi CNL & rectæ CS occurrit in puncto O ita poſito ut AO : AD :: SB : CS.

Corol. III.

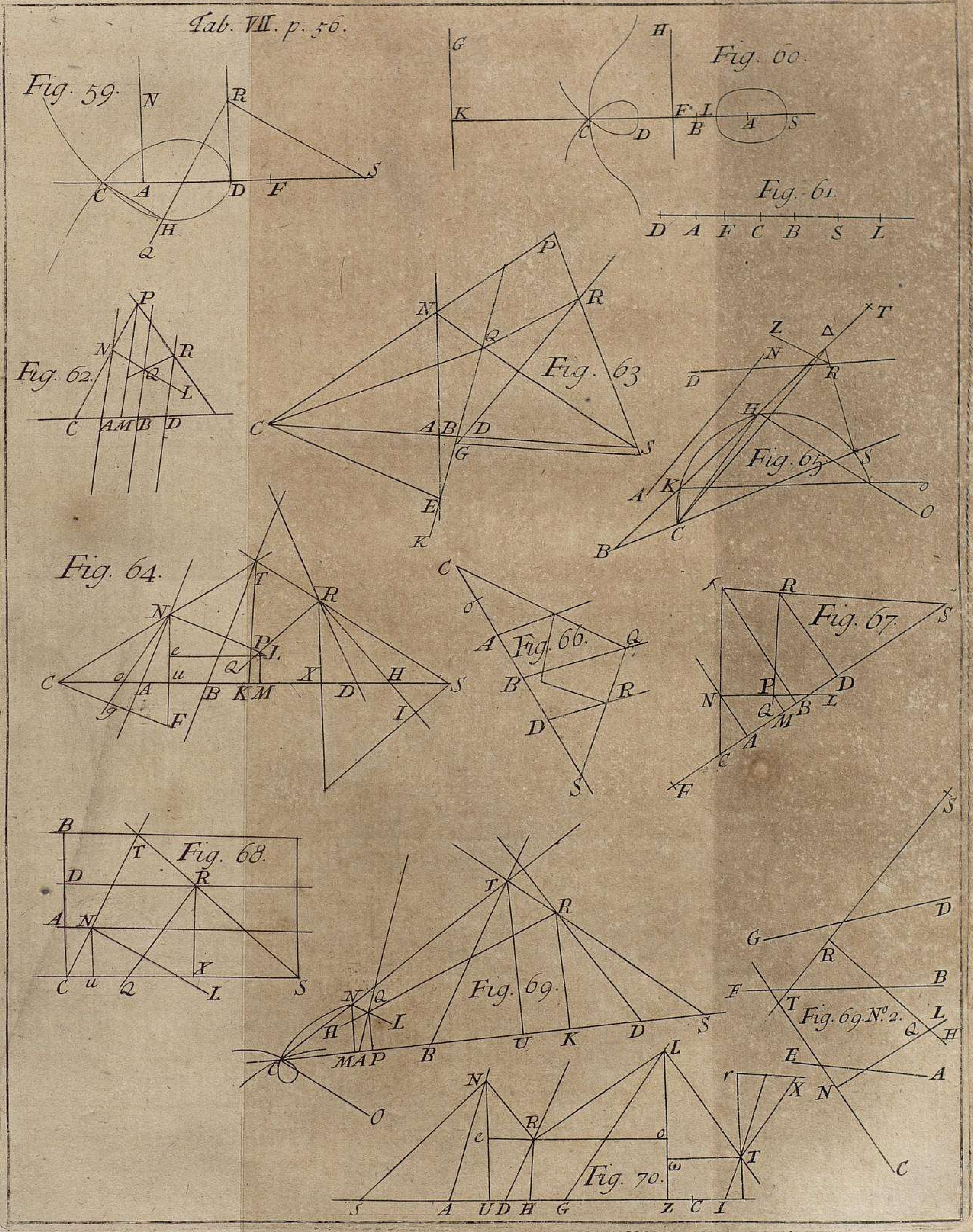


Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 69. No. 2.
Fig. 70.

Corol. III. Sint e.g. anguli (*Fig.* 67.) CNL, SRQ recti & Lineæ AN, BT, DR omnes perpendiculares in CS, eritque si $DR = r$, $NA = z$, $r^2 - ry = d \times \overline{a - d - x}$, & $z^2 - zy = cx - c^2$, sed $c : b :: z : BT = \frac{bz}{c}$ & $d : r :: a - b : BT = \frac{\overline{a - b} \times r}{d}$, unde $r = \frac{dbz}{\overline{a - b} \times c}$ atque adeo erit $z^2 - zy = cx - c^2$ & $\frac{d^2 b^2}{\overline{a - b}^2 \times c^2} \times z^2 - \frac{dby}{\overline{a - b} \times c} z = d \times \overline{a - d - x}$ quare cum $m = 1$, $n = \frac{d^2 b^2}{\overline{a - b}^2 \times c^2}$, $p = -y$, $q = -\frac{dby}{\overline{a - b} \times c}$, $r = cx - c^2$, $l = d \times \overline{a - d - x}$; Prodibit loco symbolorum m, n, p, q, r, l, substituendo eorum valores æquatio hujus formæ $Ay^2 x + By^2 = Cx^2 + Dx + E$ cujus coefficientes simplici calculo sed prolixo sunt investigandæ; dividantur omnes termini per A coefficientem termini $y^2 x$; atque si CF sumatur æqualis $\frac{B}{A}$ coefficienti termini y^2, & F sit principium abscissæ, æquatio prodibit formæ *Neutonianæ* $y^2 x = bx^2 + cx + d$, ubi cum desit terminus x^3 patet figuram esse Hyperbolo-Parabolicam, & diametrum habere CS quoniam deest terminus y.

Corol. V. Sint anguli CNL, SRQ ut prius recti, (*Fig.* 68.) sed nunc sint Lineæ omnes AN, BT, DR parallelæ rectæ CS; sitque $CA = c$, $CB = b$, $CD = d$, $CU = z$, & $SX = r$, & patebit esse $z^2 - xz = cy - c^2$, & $r^2 - \overline{a - x} \times r = dy - d^2$ atque $dac - bdz = bcr$, unde erit $z^2 - \frac{2ac}{b} + \frac{\overline{a - x} \times c}{d} \times z = \frac{\overline{y - d} \times d^2}{d} - \frac{a^2 c^2}{b^2} + \frac{ac^2 \times \overline{a - x}}{bd}$, unde cum $m = n = 1$ & $p = -x$, $q = \frac{\overline{b - 2d} \times ac - bcx}{bd}$, $r = c \times \overline{y - c}$ & $l = \overline{y - d} \times d + \frac{\overline{b - d}\, a^2 c^2 - abc^2 x}{b^2 d}$ si substituantur loco p, q, r, l, hi earum valores prodibit æquatio ubi deerunt termini y^3, $x^2 y$, xy^2 quæ proinde ad casum 3. D. *Neutoni* reduci potest $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Curvam hoc *Corol.* descriptam Parabolam esse ex *Corol.* 2. quoque constat; nam ibi AO : SB :: AD : CS, adeoque cum puncta A & D in infinitum abeant, patet O quoque in infinitum abire, adeoque curvam reddi pure Parabolicam. Harum æquationes earumque radicum investigatio adeo prolixum postulant calculum ut hic commode describi non possint. Qui hisce delectantur modum caculi ex dictis facile percipient, & majore cum voluptate calculum ipsi repetere poterunt quam nostrum perlegerent.

Corol. VI. Si p & q evadunt quoque invariatæ curva erit sectio Conica, nam cum m & n sint invariatæ soli quatuor ultimi termini æquationis

$$r^2n^2 - 2rnlm + l^2m^2 - p^2nl + pqml + pqnr - q^2mr = o,$$

eam reddunt trium dimensionum, in quibus reperitur vel p vel q, unde si p & q sint invariati & loco m, n, p, q, l, r substituantur earum valores æquatio resultans erit ad sectionem Conicam.

Corol. VII. Similiter demonstrari potest, quod si in constructione *Prop.* 17. coincidat recta AN cum DR & anguli CNL, SRQ sint recti, Lineam describi tertii Ordinis.

Prop. XIX.

Cæteris manentibus ut in Prop. 14. *concursus crurum* CN & SR (Fig, 69.) *ducatur per rectam infinitam* BT; *dico anguli* CNL *punctum angulare* N *descripturum Lineam quarti Ordinis.*

SIT NM normalis in CS æqualis y, CM $= x$, CA $= c$, CB $= b$, SD $= d$, &c. & imprimis quæratur valor rectæ QP dicendo (si QP $= z$) ut $ax - fy : ay + fx :: ey - ez : ec + az - ex$. Unde $z = \frac{aey^2 + aex^2 + \overline{fy - ax} \times ce}{ef + a^2 \times x + \overline{e - f} \times ay}$. Porro CM : NM :: CU : UT & proinde erit TU $= \frac{bby}{bx - ay}$ & SU $= \frac{\overline{a - b} \times \overline{bx - a^2y}}{bx - ag}$, sed SU : TU :: SK : RK, unde (si RK $= z$) erit $\overline{a - b} \times \overline{bx - a^2y} : bby :: gd + az : gz$ & proinde RK $= \frac{gbdy}{g \times \overline{a - b} \times bx - a^2gy - baby}$. Sed SK $- \frac{\text{RK}f}{a}$: RK $+ \frac{\text{SK}f}{a}$ :: RK $-$ QP : PK, unde

$$\overline{a - b} \times adxb - a^3dy - dbbfy : adbby + \overline{a - b} \times dfbx - a^2dfy$$
$$:: \frac{dbgby}{\overline{a - b} \times gbx - ag^2y - abby} - \frac{aey^2 - aex^2 - \overline{fy - ax} \times e}{a^2 + ef \times x + \overline{e - f} \times ay}$$

$: a - c$

$: a - c - d - \frac{a^2y - a^2x^2 - \overline{fy - ax} \times ca}{\overline{ef + a^2} \times x + \overline{e - f} \times ay} - \frac{abdby}{\overline{a - b} \times gbx - abby}$. Proinde ducendo media & extrema in ſe mutuo prodibit æquatio, cujus termini erunt x^4, xy^3, x^2y^2, xy^3, y^4, x^3, xy^2, x^2y, y^3 cum coefficientibus ſuis; unde patet Lineam eſſe quarti Ordinis.

Corol. I. Evaneſcente y æquatio erit hujus formæ $Ax^4 + Bx^3 = o$, cujus radices quatuor ſunt o, o, o, $-\frac{B}{A}$. Unde curva ter tranſibit per punctum C, adeoque curvæ hac *Prop.* deſcriptæ habent punctum triplex in C.

Corol. II. Revolvatur circa Polum C angulus datus TCO = LNT, & crurum CT ac SR concurſus ducatur per rectam BT, & crurum RH ac CO concurſus deſcribet Lineam tertii Ordinis quæ occurrere poteſt datæ AQ in tribus punctis, & proinde ter N coincidet cum C; eritque C punctum curvæ triplex, & in eo erit *Nodus* trium curvæ arcuum ſe mutuo ſecantium. Si vero AN dictam curvam contingat curva erit cuſpidata in C, & ſimul præter duos arcus qui cuſpidem formant tertius per idem punctum tranſibit; quod ſi AN in uno ſolo puncto dictæ curvæ tertii Ordinis occurrat, curva ſemel tranſibit ſimpliciter per C, & præterea ibi habebit punctum conjugatum. Univerſaliter rectæ quæcunque ex C eductæ in unico puncto præter C curvæ occurrunt.

Corol. III. Quod ſi anguli dati TCO, TRH ſint ejus magnitudinis ut dum moventur ſecundum *Corol.* 2. ſimul coincidant CO & RQ cum CR, curva deſcripta hac *Prop.* erit Linea tertii Ordinis, & C punctum ejus duplex.

Schol. Ex his *Prop.* intelligi poteſt quam vaſta curvarum multitudo ad quartum hunc Linearum Ordinem pertineat; Lineæ *Prop.* 14. deſcriptæ duo habent puncta duplicia, eæ *Prop.* 19. methodo deſcriptæ unicum habent punctum triplex, aliæ quoque poſtea delineandæ tria habent puncta duplicia, aliæ unicum punctum duplex, atque aliæ denique nulla niſi puncta ſimplicia; *Puncta* vero hæc poſſunt eſſe Nodata, Cuſpidata, Conjugata, vel nonnunquam partim Cuſpidata partim Nodata. Harum etiam curvarum aliæ ſunt pure Hyperbolicæ & crura habent octo, quatuor vel duo tantum pure Hyperbolica; aliæ ſunt Hyperbolo-Parabolicæ & duo habent crura Parabolica cum quatuor Hyperbolicis; aliæ ſunt pure Parabolicæ & habent quatuor vel duo crura pure Parabolica; & denique aliæ in ſe redeunt & in infinitum nequaquam abeunt. Sed nova quoque ex diametrorum numero & crurum poſitione oriuntur curvarum hujus Ordinis diſcrimina. Proinde enumeratio Linearum quarti Ordinis præclaræ *Neutonianæ* Linearum Ordinis tertii ſimilis abſque immenſo calculo nequit obtineri. Sed his ſæculis quibus feliciſſimo

Virorum doctorum studio Artes ac Disciplinæ omnes elegantiores, & præsertim Geometria, ad perfectionem summam properare videntur, sperare licet Lineas quarti Ordinis non tam diu latere posse extra definitos Geometriæ limites quam prius latuerunt eæ ordinis proxime inferioris non ita pridem ab ipso Geometrarum Principe in lucem proditæ.

Dixi Lineas quarti Ordinis tria posse habere puncta duplicia; ea vero nequeunt esse in eadem recta Linea, alias ea recta Lineam quarti Ordinis secaret in sex punctis, quod absurdum est. Linea quarti Ordinis non potest habere puncta quinque duplicia; quippe si haberet quinque duplicia Linea secundi Ordinis seu sectio Conica per ea transiret, ut ex *Prop.* 4. manifestum est, & proinde concursus sectionis Conicæ cum Linea quarti Ordinis essent decem; sed non possunt esse plures octo ex natura Linearum. Et Linea quidem quarti Ordinis nequit puncta duplicia habere plura tribus; quippe si quatuor puncta Lineæ quarti Ordinis duplicia essent sectio Conica per ea quatuor ducta Lineam quarti Ordinis secaret in octo punctis, cum punctum quodvis duplex pro duobus simplicibus haberi possit. Sed sectio Conica per quinque quævis puncta describi potest; sumatur igitur punctum quodvis simplex dictæ Lineæ quarti Ordinis, & sectio Conica duci posset per quatuor ejus puncta duplicia & id quintum simplex, adeoque sectio Conica in ea hyp. secare posset Lineam quarti Ordinis in novem punctis: sed id absurdum est; proinde Lineæ quarti Ordinis puncta quatuor nequeunt esse duplicia.

Ostendimus *Prop.* præcedentibus qua ratione Lineæ quarti Orninis duci possunt, quæ duo puncta habent duplicia vel unicum punctum triplex; methodos similes quibus eæ describuntur quarum puncta tria sunt duplicia, unicum duplex vel omnia sunt simplicia postea explicabimus; easque tanquam *Corolaria Prop.* universalium Sectionis sequentis brevitatis gratia demonstrabimus.

Corol. Generale.

Ex Propositionibus 14, 17 *&* 19. *universaliter colligi potest, si in plano dentur tres rectæ* (Fig. 69.) AE, BF, DG *& dentur anguli* CNL, SRH, *& puncta duo* C *&* S *per quæ crura* CN *&* SR *semper transeunt, concurrant vero crura* CN *&* SR *in* T, *& crura* NL *ac* RH *in* Q, *& quadrilateri* NQRT *tria quævis puncta per datas rectas* AE, BF, DG *ducantur, punctum quartum describturum Lineam quarti Ordinis.*

Sectio

Sectio IV.

Ubi generalia demonstrantur Theoremata de descriptione Linearum Ordinis cujuscunque, Rectarum & Angulorum datorum ope.

Postquam specialiori Linearum curvarum trium primorum generum considerationi præcedentibus sectionibus immorati sumus, non opus est linearum altiorum ordinum examen adeo particulare instituere; eæ generaliter sunt tractandæ & theoria nostra Propositionibus aliquot infinite universalibus hac Sectione perficienda.

Lemma III.

Dentur positione rectæ (Fig. 70.) AN, DR, GL, &c. *anguli* SNR, NRL, RLT, &c. *& punctum* S; *ducantur* NU, LZ *normales in* CS *&* Tω *parallela rectæ positione datæ* CS, *occurrens ipsi* LZ *in* ω, *dico si quantitates quævis* x *&* y *ad unam tantum dimensionem ascendant in valore perpendicularis* NU, *rationem rectarum* Tω *&* Lω *exprimi posse quantitatibus in quibus eædem* x *&* y *erunt unius dimensionis.*

Ex punctis N, R, L, &c. demittantur rectæ perpendiculares in CS ut NU, RH, LZ & ducatur recta Ro parallela ipsi CS occurrens normali NU in e, & LZ in o; sit CS $= a$, SG $= g$, SD $= p$, SA $= h$, sinus anguli SNR ad cosinum ut a ad f, sinus anguli NRL ad cosinum ut a ad k, sinus anguli RLT ad cosinum ut a ad m, & AU : NU :: $a : e$.

His positis cum ex hyp. x & y ad unam ascendant dimensionem in valore ordinatæ NU, patet si a, b, c, d, f, sint quantitates datæ ordinatam exprimi posse hac generali æquatione NU $= \frac{y + ax + b}{cx + dy + f}$. Sed est SU $= h + \frac{a\text{NU}}{e}$, unde SU $= \frac{\overline{hcf + a^2} \times x + \overline{fhd + a} \times y + hfe + ab}{ecx + edy + ef}$.

Sit $\overline{hcf + a^2} \times ax + \overline{fhd + a} \times ay + hfea + a^2b - fe \times \overline{ax + y + b} = i$, & $ae \times \overline{ax + y + b} + \overline{hcf + a^2} \times fx + \overline{fhd + a} \times fy + hf^2e + abf = u$. Et

Et quoniam $SU - \frac{f}{a}NU : NU + \frac{f}{a}SU :: Ne : Re$ per ea quæ ſæpe prius demonſtrata ſunt, & ſpeciatim in principio demonſtrationis *Prop.* 5. erit $Ne : Re :: i : u$, & ſimili argumento oſtendi poteſt eſſe $Re + \frac{k \times Ne}{a} : Ne + \frac{k \times Re}{a} :: Lo : Ro$, unde $au + ki : ai + ku :: Lo : Ro$. Eadem ratione $Ro + \frac{m \times Lo}{a} : Lo + \frac{m \times Ro}{a} :: L\omega : T\omega$: unde $L\omega : T\omega :: \overline{ai + ku} \times a + m \times \overline{au + ki} : a \times \overline{au + ki} + m \times \overline{ai + ku}$. Sed in valoribus ſymbolorum i & u quantitates x & y ad unam tantum aſcendunt dimenſionem, & a, k, m, ſunt quantitates datæ, & proinde ratio $L\omega$ ad $T\omega$ exprimitur quantitatibus in quibus x & y ad unam ſolam aſcendunt dimenſionem. Et ſi T ſit ſemper in recta IT & angulus LTX detur, ſit & Xr parallela CS ac Tr parallela NU, ſimiliter demonſtrari poſſet rationem Tr ad Xr exprimi poſſe quantitatibus in quibus x & y aſcendunt ad unam tantum dimenſionem.

Lemma IV.

Si numerus rectarum datarum (Fig. 70.) AN, DR, LG, &c. *dicatur* (n) *& in valore* NU *ordinatæ ad primam rectam quantitates quævis* x, y *ad unam aſcendant dimenſionem, eæ ipſæ quantitates in valore ordinatæ* LZ *ad ultimam rectam* GL *erunt dimenſionum* (n).

Iiſdem ſymbolis manentibus ac in priori *Lemmate*, ſit præterea $DH : RH :: a : l$, & $GZ : LZ :: a : n$, dicatur $LZ = z$, & $RH = r$, eritque $SZ = g + \frac{az}{n}$, $SH = p + \frac{ar}{l}$, & $Lo = z - r$, $Ro = SZ - SH = g - p + \frac{az}{n} - \frac{ar}{l}$; ſed per *Lemma* 3. ratio Lo ad Ro exprimi poteſt quantitatibus in quibus x & y ſunt unius tantum dimenſionis, atque ſi $au + ki = t$ & $ai + ku = s$, erit $Lo : Ro :: t : s$, unde $z - r : g - p + \frac{az}{n} - \frac{ar}{l} :: t : s$, adeoque $z = \frac{nlt \times \overline{g - p} - anrt + lnrs}{lns - alt}$; quantitates a, l, n, g, p ſunt invariabiles & in valoribus quantitatum t, s ipſæ x & y unius ſunt dimenſionis, unde quantitates x & y in valore ordinatæ LZ $(= z)$ erunt dimenſionis unitate altioris quam in valore ordinatæ RH $(= r)$; & eodem argumento conſtat quantitates x, y aſcendere in valore ordinatæ RH ad dimenſionem unitate altiorem quam eſt earum dimenſio in valore ordinatæ NU; proinde cum in valore ipſius NU ſint

sint x, y unius dimensionis ex hypothesi, erunt duarum dimensionum in valore ordinatæ RH, atque trium in valore ordinatæ LZ ad tertiam rectam GL; proinde si augeatur numerus rectarum ascendet dimensio quantitatum x, y in valore ordinatæ ad ultimam rectam & si numerus rectarum sit (n) quantitates x, y erunt dimensionum (n) in valore ordinatæ ad ultimam rectam.

Corol. Duo hæc *Lemmata* obtinent, licet NU sit ordinata ad Lineam quamvis Curvam si $NU = y$, & $SU = x$.

PROP. XX.

Cæteris manentibus ut in Lemmate præcedenti, detur aliud punctum C, *ex quo in* LT *demittatur semper* CP *angulum* CPL *datum constituens; moveantur puncta* N, R, L, *&c. per rectas suas* AN, DR, GL, *&* *punctum* P *interea describet Lineam Ordinis* $n+2$ *si* n *denotet numerum datarum rectarum.*

EX puncto P in datam rectam CS demittatur perpendicularis PM ordinata curvæ descriptæ ad axem CS, ex eodem puncto ducatur ad datam CS recta PT constituens angulum PTC æqualem dato CPL; sit CE perpendicularis ex C in PT occurrens ordinatæ PM in F, sitque Pω parallela axi CS occurrens rectæ LZ in ω, dicatur $PM = y$, $CM = x$, $CS = a$, $LZ = z$, & PM : TM :: a : t.

His positis anguli PTB, TPω & CPL erunt æquales, & proinde CPE $=$ LPω, adeoque similia erunt triangula CPE, LωP ob angulos rectos CEP, PωL; proinde erit CE : PE :: Lω : Pω, sed CE : CT :: PE : PF, unde CT : PF :: Lω : Pω, adeoque cum sit ex hypothesi recta $MT = \frac{ty}{a}$, $MF = \frac{tx}{a}$, $L\omega = z - y$ & $P\omega = SM - SZ = a + x - g - \frac{az}{n}$

erit $x + \frac{ty}{a} : y - \frac{tx}{a} :: z - y :: a + x - g - \frac{az}{n}$, unde prodit

$$LZ = z = \frac{\overline{a + x - g} \times \overline{anx + nty + any^2 - tnxy}}{a \times \overline{ax + ty} + nt \times \overline{ay - tx}}.$$

Porro per *Lemma* 3 erit $L\omega : P\omega :: a \times \overline{ai + ku} + m \times \overline{au + ki} : a \times \overline{au + ki} + m \times \overline{ai + ku}$; sed per idem *Lemma* si $NU = r$ erit $i = h$

2

$$\frac{i}{ae} = b + \frac{ar}{e} - \frac{fr}{a} \ \& \ \frac{u}{ae} = r + \frac{ar}{e} + \frac{fb}{a}, \text{ unde } ax + ty : ay - tx \ (: : \mathrm{L}\omega : \mathrm{P}\omega) : :$$

$$a \times \overline{ab + \frac{a^2 r}{e} - fr + kr + \frac{kfr}{e} + \frac{kfb}{a}} + m \times \overline{ar + \frac{afr}{e} + fb + kb + \frac{kar}{e} - \frac{kfr}{a}}$$

$$: a \times \overline{ar + \frac{afr}{e} + fb + kb + \frac{kar}{e} - \frac{kfr}{a}} + m \times \overline{ab + \frac{a^2 r}{e} - fr + kr + \frac{kfr}{e} + \frac{kfb}{a}}$$

ex qua analogia deduci poteſt valor ordinatæ NU ($= r$) in quo x & y erunt unius tantum dimenſionis; proinde per *Lemma* 4. quantitates x, y in valore ordinatæ LZ erunt dimenſionum (n) adeoque valor ipſius LZ erit hujus formæ $\mathrm{LZ} = \frac{Ax^n + Bx^{n-1} y + Cx^{n-2} y^2 \ \&c.}{ex^n + fx^{n-1} y + gx^{n-2} y^2 \ \&c.}$ Sed x & y in prius reperto valore ordinatæ LZ erant duarum dimenſionum, & proinde ſi duo valores æquentur, & denominator unius ducatur in numeratorem alterius prodibit æquatio dimenſionum $n + 2$ hujus formæ, $an \times ex^n y^2 - tnex^{n+1} y + anex^{n+2} \ \&c. = Aa^2 x^{n+1} \ \&c.$ Ubi termini notantur tantum altiſſimi cum ii ad ordinem curvæ determinandum ſufficiant. Cum igitur in æquatione hac x & y ad dimenſionem aſcendant $n + 2$, patet Lineam deſcribi Ordinis $n + 2$.

Corol. I. Si ex puncto dato C in rectam RL demittatur ſemper CI conſtituens angulum CIR æqualem dato RLP, punctum I erit in Linea ordinis $n + 1$ (cu m negligatur in hac deſcriptione ultima recta GL) quæ occurret rectæ GL in punctis $n + 1$; horum duo ſint Λ, λ, & in deſcriptione hujus *Prop.* cum L pervenerit ad Λ vel λ, recta LP tranſibit per C, cum CI (quæ nunc evadit Cλ) ſit ex Hypotheſi ſemper parallela rectæ LP; proinde coincidet P cum C, & curva tranſibit per punctum C; atque ubi L pervenerit ad aliud quodvis punctum rectæ GL in quo occurrit dictæ curvæ ordinis $n + 1$, curva tranſibit per punctum C; unde manifeſtum eſt arcus curvæ $n + 1$ tranſire per idem punctum C, quod proinde erit punctum curvæ multiplex; atque idem numerus qui exprimit ordinem curvæ, ſi unitate minuatur exprimet genus puncti C, ſeu quot arcus in eo concurrant.

Corol. II. Curvæ Propoſitione deſcriptæ *Cuſpidatæ* ſunt quoties recta GL dictam curvam ordinis $n + 1$ contingit, & tot poteſt habere *Cuſpides* quot ſunt unitates in numero $\frac{n + 1}{2}$; quod ſi DR curvam hic contingat illic ſecet, curva erit ſimul *Nodata* & *Cuſpidata* in puncto C.

Corol. III. Si demittatur ex C in SN recta CP ad datum quemcunque angulum, cum in hoc caſu n evaneſcat, punctum P deſcribet Lineam Ordinis ſecundi; quæ quidem circulus eſt ut ex Elementis conſtat. Si $n = 1$, & CP demittatur in NR ad datum angulum, linea deſcripta erit Ordinis

Ordinis tertii, & quidem Hyperbola erit defectiva ut ex *Lemmate* 2. manifeſtum eſt; atque hac *Prop.* curvæ ſimpliciſſimæ Ordinis cujuſcunque deſcribuntur, cum vero methodus hæc ad paucas tantum Lineas ſeſe extendat ei non immorabimur ſed ad generaliora progrediemur.

Prop. XXI.

Cæteris manentibus ut in Lemmate 3. (Fig. 72.) *detur Poſitione alia recta* BQ, *angulus* FCO, *& punctum aliud* C; *circa quod ut Polum moveatur angulus* FCO, *& concurſus crurum* SN, CF *ducatur per rectam* BQ, *ſi puncta* N, R, L, *rectas ſuas infinitas percurrant concurſus crurum* CO *&* LT *deſcribet Lineam Ordinis* $n+1$, *ſi* n *denotet numerum Rectarum omnium poſitione datarum.*

SYmbolis Lemmatis 3 & 4 manentibus ſit præterea CB $= b$, PM $= y$, CM $= x$. Similia ſunt triangula LωT & LnP, adeoque per *Lemma* 3. erit $Ln : Pn :: a \times \overline{ai + ku} + m \times \overline{au + ki} :: a \times \overline{au + ki} + m \times \overline{ai + ku}$, ſed $Ln = LZ - y$ & $Pn = SM - SZ = a + x - g - \frac{aLZ}{n}$, unde

$$a \times \overline{ai + ku} + m \times \overline{au + ki} : a \times \overline{au + ki} + m \times \overline{ai + ku} :: LZ - y : a + x - g - \frac{aLZ}{n},$$

$$\& \ LZ = \frac{\overline{na + nx - ng} \times \overline{a \times \overline{ai + ku} + m \times \overline{au + ki}} + ayn \times \overline{au + ki} + nmy \times \overline{ai + ku}}{an \times \overline{au + ki} + nm \times \overline{ai + ku} + aa \times \overline{ai + ku} + am \times \overline{au + ki}}$$

in qua æquatione patet x & y ad duas tantum aſcendere dimenſiones, cum ipſæ reperiantur hic ſimpliciter, & in valoribus ſymbolorum i & u (per *Lemma* 3.) unius ſint dimenſionis. Et ſimilis inveniri poteſt valor ordinatæ ultimæ in ſerie quavis data, in quo x & y erunt ſemper duarum dimenſionum.

Sed per *Lemma* 4. alius indagatur valor ordinatæ LZ in quo x & y ad tot aſcendunt dimenſiones quot ſunt rectæ AN, DR, GL. &c. Proinde erit per *Lemma* 4. (cum omiſſa BQ numerus rectarum AN, DR,

K GL ſit

GL ſit $n-1$) $LZ = \frac{ax^{n-1} + bx^{n-2}y + cx^{n-3}y^2, \&c.}{Ax^{n-1} + Bx^{n-2}y + Cx^{n-3}y^2, \&c.}$ In utroque valore terminos ſcripſimus ſolos altiſſimos cum ii ad ordinem curvæ determinandum ſufficiant.

Æquentur duo valores & prodibit curvæ æquatio hujus formæ,

$$a\,Ex^{n+1} + b\,Ex^{n}\,y + c\,Ex^{n-1}\,y^2 = e\,Ax^{n+1} + e\,Bx_n\,y, \&c.$$

unde manifeſtum eſt Lineam deſcribi Ordinis $n+1$.

Corol. I. Si in RL cadant rectæ ex C ad angulos æquales dato RLP, concurſu earum cum RL deſcribetur per *Prop.* 20. curva ordinis n (non $n+2$ quoniam BQ & GL in deſcriptione hac omittuntur) & quoties hæc curva ſecabit rectam DR toties curva tranſibit per C; proinde curvæ arcus (n) concurrunt in C.

Corol. II. Curvæ hæ cuſpidatæ ſunt in C quoties GL dictam curvam contingit, & tot habere poſſunt *Cuſpides* quot ſunt unitates in numero $\frac{n}{2}$; quod ſi DR curvam hic contingat, illic ſecet, curva erit ſimul *Nodata* & *Cuſpidata* in C.

Corol. III. Producatur LP donec occurrat rectæ SN productæ in e, & rectæ CQ in Δ; cum dentur anguli SNR, NRL, RLP manifeſtum eſt dari angulum $Se\Delta$. Unde ſi ſuper CS deſcribatur circulus, cui inſcribatur angulus æqualis ſupplemento datorum FCO & $Se\Delta$ ad quatuor rectos, occurrens datæ rectæ BQ in punctis K & q, & anguli QCP, $qC\Pi$ æquales ſint dato FCO, erunt rectæ CP, $C\Pi$ parallelæ duabus curvæ Aſſymptotis.

Corol. IV. Dum recta LP tranſit per C, ſi ſimul coincidant CO cum CL, curva erit Linea ordinis tantum n, & ſi in alio quoque caſu quo tranſit LP per C coincidat CO cum CL, curva erit ordinis $n-1$; unde *Prop.* hæc non caſus tantum exhibet quibus lineæ ordinis cujuſcunque delineari poſſunt, ſed ſinguli ejus caſus methodos ſuppeditant particulares curvas aliquas ordinis omnis inferioris eo qui in *Prop.* exprimitur deſcribendi.

Corol. V. Concurrant rectæ AN, DR productæ in E, & ſi angulus SNR cum SER conficiat duos rectos, Linea deſcribetur ordinis n. Nam per *Lemmatis* 2. *Corol.* dabitur angulus SRL; & proinde eadem deſcribetur curva ac ſi omiſſa recta AN, loco anguli NRL ſubſtituatur datus SRL, unde manifeſtum eſt ordinem curvæ evadere unitate inferiorem; ſimiliter ſi concurrant GL & DR in H, & SRL ſupplementum ſit dati SHL ad duos rectos dabitur angulus SLT, & curva erit ordinis $n-1$.

Corol. VI. Eadem deſcribi poteſt curva ſi cæteris manentibus ut in *Prop.* loco anguli FCO revolvatur radius rectus circa Polum C, ſubſtitutis

ſtitutis loco BQ & AN aliis quidem rectis quarum Poſitio ex *Prop.* 7. & 3. intelligi poteſt. Quippe omnes curvas hac Propoſitione deſcriptas faciliori illo modo poſſe conſtrui eadem ratione demonſtratur qua ſpecialem ejus caſum *Prop.* 7. demonſtravimus.

Corol. VII. Cum Linea deſcripta ſit ordinis $n+1$, hinc ſi $n=3$ erit Linea ordinis quarti, & curva habebit punctum triplex; unde alia prodit methodus Lineas quarti Ordinis deſcribendi quæ punctum habent triplex præter eam quam demonſtravimus *Prop.* 19.

Prop. XXII.

Iiſdem poſitis ac in Prop. *præcedente, dico ſi omnia puncta* (Fig. 73.) Q, N, R, L, P, *&c. quorum numerus eſt* $n+1$, *præter unum quodvis, ducantur per rectas infinitas* BQ, AN, DR, GL, EP, *&c. illud unum deſcripturum Lineam Ordinis* $n+1$.

SUpponamus puncta Q, N, R, P rectas ſuas percurrere & inveſtigandum ſit quænam deſcribatur Linea motu puncti angularis cujuſvis L. Ut id conſtet ducatur recta quævis GL, & ſi huic rectæ curva occurrat in punctis $n+1$, neque aliam quamvis rectam in plano ductam in pluribus punctis ſecare poſſit, Linea neceſſario deſcribetur ordinis $n+1$, & conſtabit Propoſitio.

Moveantur imprimis puncta omnia Q, N, R, ut in *Prop.* 21. percurrat punctum L rectam GL, & linea deſcribetur motu puncti P ordinis $n+1$, occurrens rectæ EP in punctis totidem; quorum duo aliqua ſint Π, π, quæ loca ſint puncti P cum L pervenit ad Λ & λ; & ſimiliter erunt puncta $n+1$ in recta GL reſpondentia punctis $n+1$ quibus recta EP occurrit curvæ deſcriptæ ſecundum *Prop.* præcedentem. Proinde ſi nunc P concurſus crurum CO & LT ducatur per rectam infinitam EP, perveniat vero P ad Π & π punctum L ſimul accedet ad Λ & λ; & dum P verſatur in dictis punctis $n+1$, quibus recta EP occurrit curvæ deſcriptæ ſecundum *Prop.* præcedentem, punctum L eodem tempore erit in punctis $n+1$ correſpondentibus rectæ GL; & quoniam curvæ dictæ recta EP non poteſt occurrere in pluribus punctis quam $n+1$, patet punctum deſcribens L non in pluribus locis exiſtere in recta GL dum curvam describit. Curva igitur motu puncti L descripta non potest occurrere rectæ cuivis in plano ductæ in punctis pluribus quam $n+1$; ast in tot rectam GL secare potest, adeoque Linea descripta erit ordinis $n+1$. Sed cum nihil sit assumptum de puncto L quod de reliquis pari jure dici non possit, patet eorum quodvis descripturum Lineam ordinis $n+1$ si reliqua ducantur per rectas suas infinitas. Unde Propositio universaliter constat.

Corol. I. Hinc tot modi deducuntur Lineas ordinis cujuscunque describendi quot unitates sunt in numero qui exprimit ordinem curvæ.

Corol. II. Si curva describatur motu puncti Q ea habebit punctum simplex in C, sed totuplex erit punctum S quotuplex erat C in *Prop.* præcedente; unde tertia prodit methodus Lineas quarti Ordinis describendi quæ punctum habent triplex. Plurima *Prop.* præcedentis *Corolaria* hic quoque obtinent universaliter.

Prop. XXIII.

Cæteris manentibus ut in Prop. 21. *ducatur concursus crurum* (Fig. 74.) CF *&* RL *per rectam infinitam* BQ, *& si numerus* (r) *exprimat ordinem rectæ* RL *in serie rectarum* SN, NR, RL, LT, *&c. concursus crurm* CO *&* LT *describet Lineam Ordinis* $n+r$.

UT Lineæ descriptæ ordo innotescat ducatur recta quævis KX, & investigandum sit quoties curva occurrere potest huic rectæ; supponamus concursum crurum CO & LT duci per rectam KX & crurum CF, SN concursus describet Lineam ordinis $n+1$ per *Prop.* præcedentem, quæ transibit semel per C, & toties per S quoties unitas reperitur in numero *(n)*. Dein supponamus concursum crurum CF, RL duci per rectam infinitam BQ, & per eandem *Prop.* concursus crurum CF, SN describet Lineam ordinis $r+1$, cujus arcus *(r)* transibunt per S, unicus vero arcus transibit per C.

Sed in descriptione hujus Propositionis concursus crurum CF, RL ducitur per rectam BQ, adeoque punctum P tunc erit in recta KX cum concursus crurum CF & SN pervenerit ad occursum aliquem duarum curvarum quas descripsimus, quarum altera est ordinis $n+1$ altera ordinis $r+1$. Sed ex natura Linearum ii concursus possunt esse $nr+n+r+1$, quorum

quorum nr fiunt in puncto S, & unus in ipso C; cum prioris curvæ puncta (n) sint in S, & posterioris puncta r sint in eodem, utraque vero semel transeat per C. Atqui concursus crurum CF, SN in S vel C non sunt considerandi & reliqui sunt $n+r$; ex puncto S ad eos concursus ducantur rectæ SN, & eæ secabunt datam AN in punctis $n+r$; ad ea puncta super dictas rectas ex S eductas constitue angulos æquales dato SNR, & rectæ NR secabunt datam DR in totidem punctis; ducantur dein rectæ totidem RL & LT, & hæ secabunt datam KX in punctis $n+r$, quæ puncta erunt curvæ hac *Prop.* descriptæ. Proinde curva occurrit rectæ KX in punctis $n+r$, atque adeo erit Linea ordinis $n+r$.

Hæc *Prop.* alia quoque ratione ex *Lemmate* 4. demonstrari potest. Ducatur enim concursus crurum CF & RL per rectam BQ, & concursus crurum CO & LT per rectam datam PU, puncta angularia L, K, &c. per rectas infinitas & punctum N describet Lineam Ordinis $n+r$. Quippe cum $NU=y$, & $SU=x$, manifestum est *Lemmate* 4. x, y ascendere ad dimensionem r in valore ordinatæ ad rectam BQ; sed ad eandem ascendunt potestatem in valore ordinatarum ad rectas BQ & PU ob datum angulum QCP; proinde x & y in valore ordinatæ PM erunt dimensionum r, sed per idem *Lemma* x, y in valore ordinatæ ad ultimam rectam PU in serie AN, DR, GL, PU erunt dimensionum n. Duo igitur prodeunt valores ordinatæ PM in quibus x, y ascendunt ad dimensiones n & r; hi vero valores sunt fracti, & proinde si æquentur prodibit æquatio in qua x & y erunt dimensionis $n+r$; adeoque linea motu puncti N descripta erit ordinis $n+r$, quæ occurrere potest rectæ AN in punctis $n+r$. Sed in descriptione hujus *Prop.* quoties N pervenerit ad occursus rectæ AN cum Linea dicta ordinis $n+r$, punctum P concursus crurum CO & LT tanget rectam PU; unde manifestum est Lineam motu puncti P descriptam rectæ in plano ductæ occurrere posse in punctis $n+r$, sed non in pluribus, adeoque Lineam describi ordinis $n+r$.

Corol. I. Curvæ arcus (n) concurrunt in puncto C. Quippe si ex C in RL cadant rectæ CZ semper parallelæ rectæ LT, adeoque constituentes angulum CZR æqualem dato RLT, per *Prop.* 20. punctum Z erit semper in Linea Ordinis (n) quæ rectam GL secare poterit in punctis (n), sed in descriptione hujus *Prop.* ubi punctum L accedit ad concursum rectæ GL cum dicta linea coincidunt L & Z, adeoque etiam LT & ZC, & proinde P coincidet cum C. Unde curva hac *Prop.* descripta habebit puncta (n) in Polo C.

Corol. II. Recta quævis ex C educta curvæ occurrere potest in punctis (r) præter ipsum C; quippe detur recta quævis CO, & quæratur quoties curva huic rectæ occurrere possit; cum detur CO dabitur etiam CF ob datum angulum FCO, & proinde datur punctum Q. Ex dato puncto Q ad rectam NR semper ducantur rectæ parallelæ ipsi RL, atque curva hac

hac ratione describetur ordinis (r) per *Prop.* 20. quæ occurret rectæ DR in punctis (r), & quoties in descriptione *Prop.* hujus punctum R pervenerit ad occursus curvæ dictæ cum DR curva descripta motu puncti P secabit rectam CO; nam ubi R pervenerit ad puncta ubi linea ea ordinis (r) secat rectam DR, punctum L accedet ad totidem puncta iis respondentia in recta GL, adeoque dum unica data manet positio rectæ CO, recta LT potest varias obtinere positiones quarum numerus est r; adeoque rectæ CO occurre potest in punctis (r).

Corol. II. Demonstravimus *Corol.* 1 & 2 absque *Prop.* hujus ope; ex *Corol.* I. manifestum est Lineam *Prop.* hac descriptam habere puncta (n) in dato puncto C; ostendimus *Corol.* 2. eandem Lineam secare rectam ex C eductam in punctis (r) præter ipsum punctum C; unde patet rectam ex C eductam curvæ occurrere in punctis $n+r$; atque hinc *Prop.* confirmatur; cum hoc quoque ratiocinio prodeat ordo curvæ $n+r$.

Corol. III. Quemadmodum *Prop.* 22. ex 21 demonstravimus ex hac ostendi posset universaliter, si omnia puncta N, R, L, Q, P ducantur per rectas suas indefinitas præter unum quodvis, id unum descripturum Lineam ordinis $n+r$.

Coлol. IV. Cæteris manentibus ut in *Prop.* sumantur in eodem plano (*Fig.* 75.) rectæ $\Gamma\Delta$, ΘI, $\Lambda\Phi$, &c. quarum sit numerus $(r-1)$ occurrat $\Gamma\Delta$ rectæ SN in Γ sintque anguli $S\Gamma\Theta$, $\Gamma\Theta\Lambda$ dati, & si concursus crurum CF & $\Theta\Lambda$ ducatur per rectam BQ dum N, R, L, Γ, Θ, &c. rectas suas infinitas percurrunt, dico concursum cruris CO & LT, punctum scil. P, descripturum Lineam ordinis $n+r$. Corolarium hoc eadem ratione demonstratur ac *Prop.*

Corol. V. Ex *Corol.* 3 & 4 manentibus n, & r deducuntur methodi diversæ Lineas ordinis $n+r$ describendi quarum numerus est $n+r$; sed manente summa $n+r$ ipsi numeri n & r variari possunt diversis modis $\frac{n+r}{2}$, ita ut diversas semper methodos exhibeant lineas eas describendi: Proinde ex hac *Prop.* deduci possunt modi $\frac{N^2}{2}$ describendi curvas ordinis N si N sit numerus par, vel $\frac{N\times\overline{N-1}}{2}$ si sit impar. Harum vero aliquæ sæpe coincidunt, & speciatim si N $(=n+r)$ sit numerus par methodi quæ prorsus diversæ haberi possunt ex *Corol.* 3. deductæ, ubi $n=r$ sunt tantum $\frac{n+r}{2}=\frac{N}{2}$, quas supposuimus esse $n+r$; proinde ex dicto numero $\frac{N^2}{2}$ subducatur $\frac{N}{2}$, & methodi diversæ quæ ex *Corol.* 3 & 4

deduci

deduci possunt Lineas ordinis N describendi erunt $\frac{N^2 - N}{2}$, sive N numerus sit par sive impar.

Corol. VI. Si $N = 4$ erit $\frac{N}{2} \times \overline{N - 1} = 6$; proinde ex hac *Prop.* deduci possunt sex methodi diversæ quibus Lineæ quarti Ordinis describuntur; harum quatuor ex præcedente *Prop.* deduci possunt sumendo tres tantum rectas (*Fig.* 68.) AN, DR & BQ; nam quatuor punctorum Q, N, R, P unum quodvis describet Lineam quarti Ordinis, si reliqua ducantur per rectas datas infinitas. Aliæ duæ methodi ex hac *Prop.* ejusque *Corol.* 4. deducuntur; dentur tres rectæ (*Fig.* 76.) AN, DR & BQ, dentur anguli SNQ, SRT & FCO; ducatur concursus crurum CF & NQ per rectam CQ, dum N & R percurrunt rectas suas infinitas AN & DR, atque concursus crurum CO & RT describet Lineam quarti Ordinis punctum duplex habentem in C. Super CS describatur circulus habens angulum SRT ei inscriptum, & si hic circulus bis occurrat rectæ DR curva habebit *Nodum* vel Crucem in C, si circulus rectam contingat curva erit *Cuspidata* in C, & si recta ponatur tota extra circulum curva habebit *Punctum* conjugatum in eodem. Sed si coincidat CO cum RT dum RT transit per C, Linea describetur tertii Ordinis, & punctum C erit simplex; atque hinc Lineæ tertii Ordinis aliquæ quæ puncto duplice destituuntur describi posse videntur. Si puncta Q, N, P ducantur per rectas datas punctum angulare R describet Lineam quarti Ordinis. Atque hæ sex sunt methodi quibus Lineæ hujus Ordinis describuntur præter tres *Prop.* 14, 17, 19 demonstratas. Lineæ motu punctorum N vel Q descriptæ, non suppeditant methodos diversas ab iis quas explicuimus.

Corol. VII. Si $N = 5$ erit $\frac{1}{2} \times \overline{N^2 - N} = 10$, unde decem modi describendi Lineas quinti Ordinis ex *Prop.* deduci possunt, & si $N = 6$ erit $\frac{1}{2} \times \overline{N^2 - N} = 15$.

Prop.

Prop. XXIV.

Sumantur ad libitum rectæ (Fig. 77.) *in eodem plano ubicunque positæ* BN, ER, FT *quarum sit numerus* (n). *Sumantur etiam ad libitum aliæ rectæ* DM, GL, HK *quarum sit numerus* (m) *sint anguli* CNR, NRT, RTQ, *&c. atque anguli* SML, MLK, LKQ, *&c. invariati; dentur puncta* C *&* S, *at puncta angularia* N, R, T, M, L, K *ducantur per rectas infinitas* BN, ER, FT, DM, GL, HK, *& concursus crurum* TQ *&* KQ *per rectam* AQ; *dico concursum crurum* CN *&* SM *descripturum Lineam Ordinis* $n+m+2$.

HÆC ex iis quæ *Prop.* 21. demonstravimus facile constat. Quippe si PM $= y$, CM $= x$, CB $= c$, CS $= a$, BU : NU :: $a : d$, erit NU $= \frac{dcy}{dx-ay}$, & CU $= \frac{dcx}{dx-ay}$. Unde cum x & y reperiantur simplices in valore ordinatæ NU ad rectam primam BN, erunt dimensionis $n+1$ in valore ordinatæ ad ultimam rectam AQ, cujus proinde valor erit $\frac{Ax^{n+1} + Bx^n y, \&c.}{ax^{n+1} + bx^n y, + \&c.}$ ubi notantur tantum termini in quibus indices quantitatis x sunt altissimi.

Similiter Mz ordinata rectæ DM deprehenditur æqualis $\frac{efy}{e \times \overline{a-x} - ay}$, si SD $= f$, CS $= a$, Dz : Mz :: $a : e$. Cumque x & y sint unius dimensionis in valore ordinatæ ad primam rectam, & rectarum numerus si includatur AQ sit $m+1$, patet x & y ascendere ad dimensionem $m+1$ in valore ordinatæ ad ultimam rectam AQ, cujus proinde valor secundus erit $\frac{Ex^m + 1 + Fx^n y, \&c.}{ex^m + 1 + fx^m y, \&c.}$

Æquentur

Æquentur duo reperti valores ordinatæ rectæ AQ, eritque $Aex^{m+2+n} + Afx^{m+n+1}y$, &c. $= aEx^{m+n+2}$, &c. Unde cum index altiſſimus quantitatum variabilium ſit $n+m+2$ patet lineam deſcribi ordinis $n+m+2$. Vel ſi numerus omnium rectarum, ſit N curva erit Linea ordinis $N+1$; ita ut genus curvæ ſemper exprimatur numero datarum rectarum.

Corol. I. Curvæ arcus $n+1$ concurrunt in puncto C, & arcus $m+1$ concurrunt in puncto S, nec alibi quam in C & S curva poteſt occurrere rectæ CS; hæc demonſtrantur ex *Prop.* 20. ad modum *Corol.* 1. *Prop.* 21.

Corol. II. Quemadmodum ex *Prop.* 21. demonſtravimus 22. ex hac demonſtrari poſſet univerſaliter, ſi omnia puncta N, R, T, Q, K, R, L, M, P ducantur per rectas ſuas indefinitas præter unum quodvis, id unum deſcripturum Lineam ordinis $n+m+2$, & manente numero rectarum, quodcunque ſit punctum cujus motu curva determinatur, manere ordinem lineæ deſcriptæ.

Corol. III. Manente ſumma $m+n$ manet ordo curvæ, ſed manente ſumma $m+n$ ipſi m & n variari poſſunt modis $\frac{m+n}{2}$, ita ut in ſingulis hypotheſibus C & S ſint diverſi generis puncta. Sed ipſis m & n manentibus modi ex *Corol.* præcedente deduci poſſunt curvas ordinis ejuſdem deſcribendi quorum numerus eſt $n+m+2$. Unde ſi N exprimat ordinem curvæ, diverſæ methodi quæ ex hac *Prop.* deduci poſſunt quibus curvæ ejus ordinis deſcribuntur erunt $\frac{1}{2}N \times \overline{N-2}$ ſi N ſit numerus par, vel $\frac{1}{2}N \times \overline{N-3}$ ſi ſit impar. At ſi N ſit numervs par, cum m & n fiunt æquales methodi prodeunt diverſæ non $n+m+2$ ſed $\frac{1}{2}\overline{n+m+2} = \frac{1}{2}\overline{N+1}$. Proinde ſubducendi ſunt $\frac{1}{2}N-1$ ex dicto numero $\frac{1}{2}\times\overline{N^2-2N}$, & methodi hujus *Prop.* diverſæ erunt $\frac{1}{2}N \times \overline{N-3}+1$; adjunge methodos *Corollarii* 5. *Prop.* præcedentis, & ſumma N^2-2N+1 oſtendet omnes methodos quas adhuc exhibuimus deſcribendi Lineas ordinis N ſi N ſit numerus par; aſt N^2-2N oſtendit methodos omnes quæ ex *Prop.* præcedentibus deduci poſſunt deſcribendi Lineas ordinis imparis. Unde ſi ordines Linearum exprimantur numeris 3, 4, 5, 6, &c. methodi omnes erunt 3, 9, 15, 25, &c.

Corol. IV. Si in hac *Prop.* cæteris manentibus curva non determinetur concurſu rectarum CN & SM, ſed aliarum rectarum quæ cum CN & SM datos conſtituunt angulos ad puncta C & S, curva tamen non alia deſcribetur quam quæ methodo hujus *Prop.* deſcribi poteſt per *Lemma* 1.

Corol. V. Si ſimul coincidant SP & CP cum CS curva deſcribetur ordinis inferioris quam ſecundum Propoſitionem eſſet. Atque hinc modi indagari poſſunt lineas deſcribendi puncto quovis duplice aut multiplice deſtitutas cujus exemplum exhibuimus *Prop.* 15.

L PROP.

PROP. XXV.

Cæteris manentibus ut in Prop. 24. (Fig. 78.) *concurrant rectæ* RT *&* SM *in* O, *& si puncta* N, R, T, Q, K, L, M, O *omnia ducantur per rectas positione datas præter unum quodvis, dico id unum descripturum Lineam Ordinis* $ms+s+n+1$ *si* s *denotet ordinem Lineæ* RT *in serie rectarum* CN, NR, RT, TQ.

MOveantur imprimis omnia puncta R, T, Q, K, L, M, O per rectas datas ER, FT, AQ, HK, GL, DM, OY & ostendam Lineam motu puncti angularis N descriptam esse ordinis $ms+s+n+1$; unde facile erit *Prop.* universalem reddere.

Cum ordinata curvæ ad axem CS sit $NU=y$, & abscissa sit $CU=x$, erunt per *Corol. Lemmatis* 4. x & y dimensionis s in valore ordinatæ ad rectam OY; sed si ordinata rectæ OY dicatur u, ordinata rectæ $DM=z$, $SY=f$, $SD=h$, sinus anguli SYO ad cosinum ut a ad d, & sinus anguli SDM ad cosinum ut a ad e erit $z=\frac{dheu}{edf-eau+dau}$, unde quantitates x, y erunt dimensionis s in valore ordinatæ ad rectam DM. Sed per *Lemma* 4. erit (u) ordinata rectæ DM dimensionis $m+1$ in valore QI ordinatæ ad rectam AQ, & proinde quantitates x, y erunt dimensionum $ms+s$ in valore eodem.

Sed alius ex eodem *Lemmate* prodit valor QI ordinatæ ad rectam AQ ex consideratione rectarum ER, FT, AQ & angulorum datorum CNR, NRT, RTQ in quo x & y erunt dimensionis $n+1$. Æquentur duo hi valores ordinatæ QI ad rectam AQ, cumque sint fracti ducatur Numerator unius in Denominatorem alterius, & prodibit æquatio in qua solæ quantitates variabiles x & y erunt dimensionum $ms+s+n+1$; sed y est ordinata curvæ motu puncti N descriptæ & x ejusdem abscissa, & proinde ea linea curva erit ordinis $ms+s+n+1$.

Siquidem vero punctum N describat Lineam ordinis $ms+s+n+1$, eadem ratione qua *Prop.* 22 ex 21 demonstravimus, ostendi potest Lineam motu puncti cujusvis omnium N, R, T, Q, O, K, L, M descriptam, dum reliqua rectas positione datas percurrunt, fore ejusdem ordinis.

Corol. I.

Corol. I. Curvæ arcus $ms+s$ in eodem puncto S concurrunt, & recta quævis ex S educta occurret curvæ in punctis tantum $n+1$, hæc ope *Prop.* 20. facile demonstrantur eadem fere ratione qua *Corol.* 1 & 2 *Prop.* 23. ex *Prop.* 20. deduximus.

Corol. II. Si $s=2$, $m=1$ & $n=0$ Linea erit Ordinis quinti; atque hæc simplicissima est descriptio Linearum hujus Ordinis, cum nec plures anguli nec rectæ ad eas describendas necessariæ sint quam ad Lineas ordinis quarti delineandas adhibuimus *Prop.* 14, 17 & 19. Curvæ hæ habent punctum quadruplex in S, & rectis ex S eductis in uno solo puncto occurrunt; eæ vero per C nequeunt transire.

PROP. XXVI.

Cæteris manentibus ut in Prop. 24. (Fig. 77.) *si (s) exprimat ordinem rectæ* RT *in serie rectarum* CN, NR, RT, TQ, *&* *(r) ordinem rectæ* LK *in serie* SM, ML, LK, KQ, *Linea descripta motu puncti* O *concursus rectarum* RT, LK, *dum puncta* N, R, T, Q, K, L, M *percurrunt rectas infinitas datas* BN, ER, FT, AQ, HK, GL, DZ, *erit ordinis* $ms+nr+s+r$.

QUoniam punctum Q rectam AQ percurrit manifestum est ex *Prop.* 24. concursum crurum CN, SM descripturum lineam ordinis $n+m+2$. Proinde ad ordinem lineæ motu puncti O descriptæ investigandum, negligantur rectæ FT, AQ, HK, & supponamus concursum crurum CN, SM duci per Lineam ordinis $n+m+2$ *Prop.* 24. descriptam, quæ puncta habet $n+1$ in C, & $m+1$ in S per *Corol.* I. ejusdem Propositionis, & quæratur ordo lineæ descriptæ motu puncti O concursus crurum RT, LK.

Ducatur recta quævis OY & investigandum sit quoties linea descripta motu puncti O occurrat rectæ OY; ut id constet supponamus concursum crurum RT, LK duci per eam rectam OY, & concursus crurum CN, SM describet Lineam ordinis $r+s$ per *Prop.* 24, quæ occurret Lineæ ordinis $n+m+2$ in punctis $nr+ns+mr+ms+2r+2s$ ex natura Linearum. Lineæ vero ordinis $n+m+2$ puncta $n+1$ sunt in C, & puncta $m+1$ in S; Lineæ ordinis $r+s$ puncta s sunt in C, & r in S; proinde harum Linearum occursus $ns+s$ sunt in C, & $mr+r$ in S; aliæ vero earum intersectiones possunt esse $ms+nr+r+s$. Sed cum concursus crurum CN, SM ad eas intersectiones accedit erit concursus crurum RT, LK in recta OY, & in nullo alio casu in ea recta crura RT, LK possunt concurrere; sed cum concursus crurum CN, SM fit in C vel in S, rectæ RT, LK non possunt concurrere in recta OY; nisi forte Lineæ ordinis $n+m+2$ & $r+s$ se mutuo contingant in iis punctis C, S, quo in casu duæ intersectiones abeunt in unum punctum contactus, & altera earum intersectio erit necessario aliqua earum quas non supposuimus esse in punctis C, S. Proinde intersectiones sunt $ms+nr+r+s$ Linearum dictarum, ad quas cum accedit concursus crurum CN, SM, rectæ RT, LK concurrunt in aliquo puncto rectæ OY; & plures ejusmodi intersectiones non sunt. Proinde Linea descripta motu puncti O secabit rectam OY in punctis $ms+nr+s+r$, & non in pluribus. Cumque idem de alia quavis recta in plano rectarum datarum ducta demonstrari possit, liquet lineam motu puncti O descriptam esse ordinis $ms+nr+s+r$.

Corol. I. Hinc si $r=1$ erit Linea ordinis $ms+s+n+1$, & curva determinabitur concursu rectæ RT cum SM, qui casus est specialis *Prop.* hujus universalissimæ quem *Prop.* præcedente alia ratione demonstravimus; & is est quem proposuimus in Actis Philosophicis, N° 359.

Corol. II. In casu quem figura designat ubi $n=m=s=r=3$ Linea describitur ordinis 24.

Corol. III. Eadem ratione qua *Prop.* 22 ex 21 demonstravimus ostendi potest curvam ejus ordinis qui in *Prop.* hac explicatur describi motu cujusvis punctorum N, R, T, Q, K, L, M, O, si reliqua per rectas suas indefinitas ducantur, & anguli iidem ut prius maneant invariati.

Corol. IV. Curvæ ordinis infimi quæ hac *Prop.* describuntur sunt eæ Ordinis quarti; quæ describuntur cum $m=n=s=r=1$. Si s vel r sint numero binario æquales & $m=n=1$ curva erit Ordinis sexti.

Corol. V. Si super CS describatur circulus cui inscribi possit angulus datus æqualis angulo SML + MLR — CNR — NRT, hic circulus occurret rectis CN & SM in eodem puncto dum crura RT & LK evadunt parallela & curva abit in infinitum. Sed rectæ CN & SM per *Prop.* præcedentem concurrunt semper in curva quæ Linea est Ordinis $n+m+2$ quæque dicto circulo occurrit in punctis $2n+2m+4$, horum vero concursuum $n+1$ sunt in C & $m+1$ in S, & reliqui sunt $n+m+2$; sed ubi P concursus crurum CN & SM pervenit ad concursum curvæ dictæ & circuli, crura RT & LK quorum concursu curva hujus Propositionis determinatur evadunt parallela, & curva excurrit in infinitum. Proinde curva habebit Assymptotos $n+m+2$ parallelas rectis RT & LK ubi CN & SM concurrunt in circulo descripto super CS habente

bente angulum prius determinatum ei inſcriptum. Curva vero plura habebit crura infinita quam quæ ſunt ad eas Aſſymptotos, nam ubi recta RT vel LK abit in infinitum curva quoque abit in infinitum, & alia formantur crura curvæ infinita.

Prop. XXVII.

Cæteris manentibus ut in Prop. 24. (Fig. 79.) *ſumantur ad libitum rectæ in eodem plano bn, er, &c. quarum numerus dicatur* $(s-1)$ *& rectæ aliæ dm, gl, &c. quarum numerus ſit* $(r-1)$ *dentur anguli Snr, nrt, &c. & anguli Sml, mlk, &c. ducatur concurſus rectarum* TQ *&* KQ *ut in* Prop. 24. *per rectam datam* BQ, *& concurſus crurum rt & lk deſcribet Lineam Ordinis* $ms+nr+s+r$.

SIT O concurſus crurum *rt*, *lk*, & ſi O ducatur per rectam quamvis OY in plano *figuræ* ductam, rectarum SN & CM concurſus deſcribet Lineam ordinis $r+s$ per *Corol.* 4. *Prop.* 24. Unde demonſtratio hic eadem ratione procedit ut in *Prop.* 26. quam non opus eſt repetere.

Scholium.

Propoſitionibus his Theoriam exhibuimus deſcriptionis Curvarum motu angulorum per lineas rectas adeo ſimplicem & univerſalem quam rei natura admittere videtur. Recta eſt omnium Linearum prima & in noſtris conſtructionibus poſtulatur; earum unius ope Linearum Ordinis ſecundi ſyſtema proxime ſimplex deſcripſimus; atque his duobus primis Linearum ordinibus concludebatur fere integra veterum Geometria; & raro ulterius provehebantur niſi ad unam aut alteram aſſumendam altioris ordinis ad ſolutionem Problematum difficiliorum obtinendam.

Recentiores novos quidem aperuerunt curvarum campos in infinitum diffuſos, & ardua ſatis Theoremata de earum menſuris variiſque proprietatibus demonſtrarunt, utpote eximiæ methodi Fluxionis ope præditi. Aſt plerique dum ſuas ſpeciales condunt Theorias, varium perpetuo adhibent curvas in ordines redigendi modum, primarii hujus propemodum immemores.

immemores. Sic inter viros illuſtres de re Geometrica qui bene meruerunt plures curvarum Hyperbolicos & Parabolicos novos conſtruxerunt ordines, quorum exemplo ducti ſimiles Spiralium claſſes compoſuerunt D. *Fermat* & *Varignon*; Cl. Geometra D. *de la Hire*, ut veteres conchoidem ex recta, ita ſpecies complexiores aliquas ex ſimplicioribus conſtruere docuit; D. *Nicol* curvas ſuper baſes ſibi æquales rotavit ad complexiores Geometricas delineandas & novo artificio Geometriam adauxit: Illi quidem aliique, quorum induſtriam laudandam non opus eſt hic memorare, ſtudio felici Mathematicas Diſciplinas promoverunt; univerſi tamen ante ipſum *Neutonum* vel ſpecialibus tantum curvis operam dederunt, vel neceſſariam qua uſi ſumus curvarum diſtributionem perfunctoria ſolummodo meditatione dignati ſunt. Methodus vero D. *Neutoni* neque ad omnes Lineas cujuſvis ordinis, nec expreſſe ad aliquas omnium ordinum ab ipſo Auctore extenditur; proin deſiderari videtur methodus aliqua generalis cujus ope Lineæ Geometricæ, ſecundum interſectiones ſuas cum recta in ordines diſtributæ, poſſunt ita deſcribi ut unicuique ordini ſua deſcriptio competat, non minus quam æquatio ſua generalis Algebraica; & poſt tanta nova de curvarum quadraturis inventa, quibus Geometria ampliſſime ditata eſt, pauca quidem alia ad eam Geometriæ ſublimioris perfectionem quam ſperare licet obtinendam deſiderari videntur. Nos vero tantum finem in præcedentibus aſſecutos eſſe nequaquam profitemur; cum varia de curvarum deſcriptione problemata proponi poſſint quibus conſtruendis ea non ſufficiunt; ſed ad eam Geometriæ perfectionem obtinendam viam ſtruunt quæ jam demonſtravimus, & ad eundem finem conducere poterint quæ ſequenti parte ſumus demonſtraturi.

Oſtendimus ſatis prolixe quouſque lineæ rectæ conducere poſſunt ad Lineas omnis ordinis deſcribendas; ſed ut Theoria noſtra reddatur adhuc univerſalior proxime inveſtigabimus quæ Lineæ ex aliis quibuſcunque deſcribi poterint.

Fig. 71.

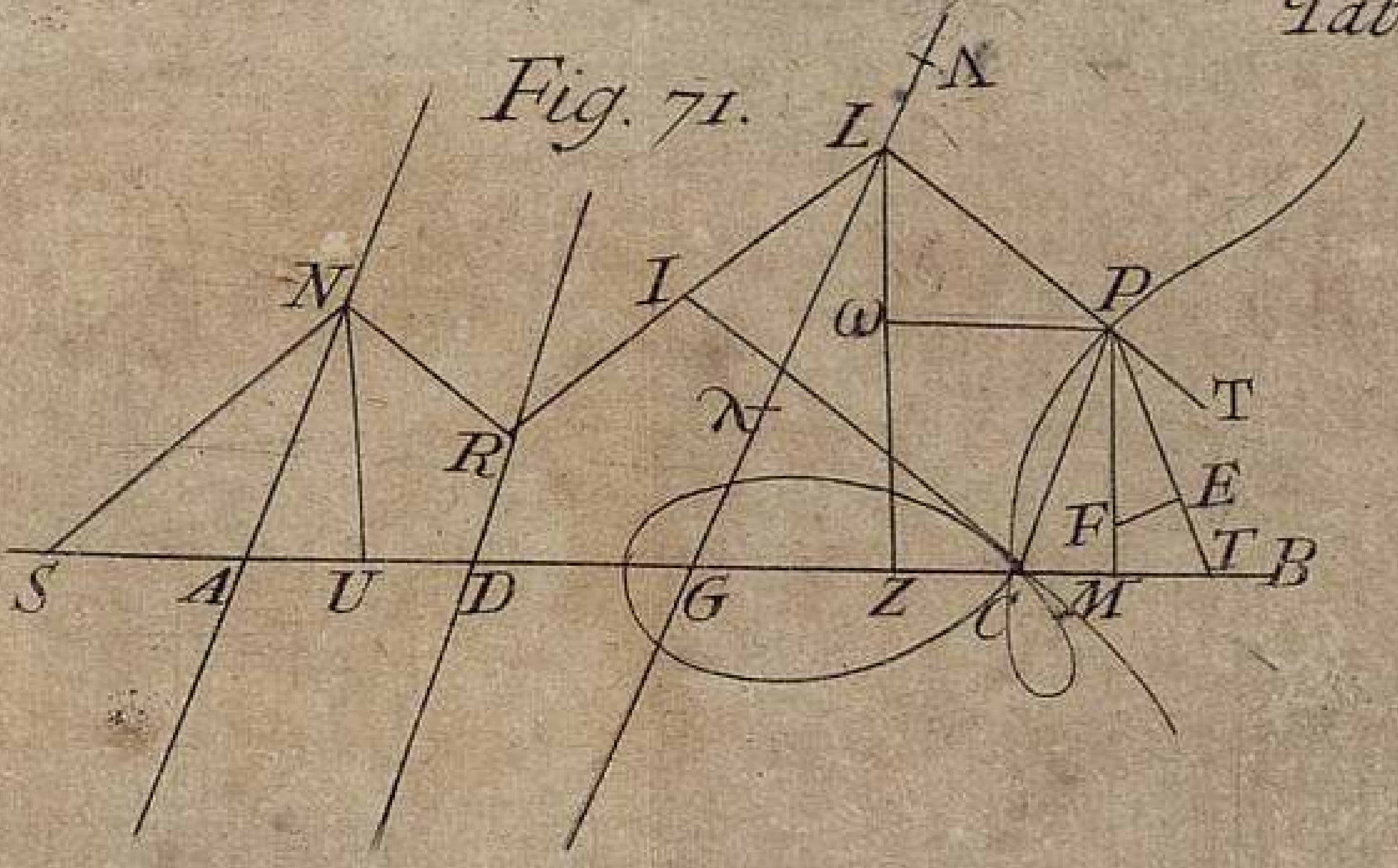


Fig. 72.

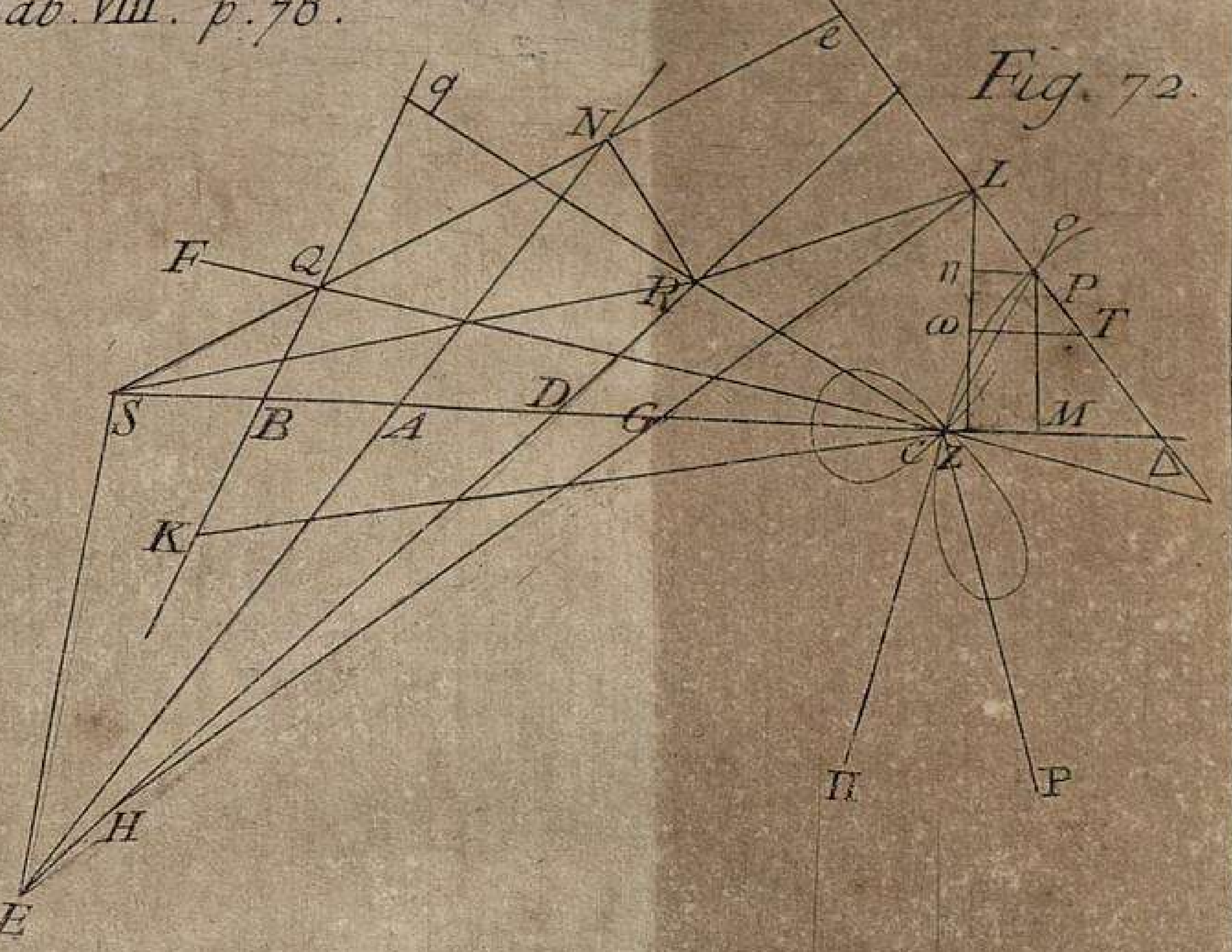


Fig. 73

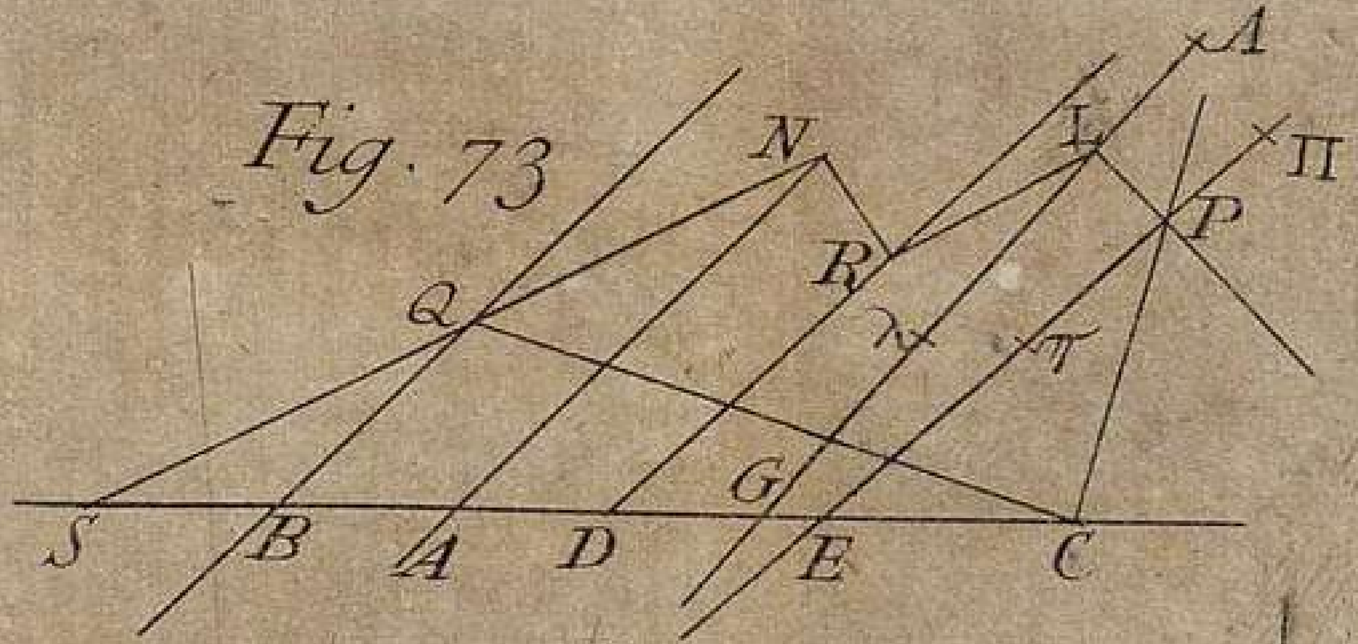


Fig. 76.

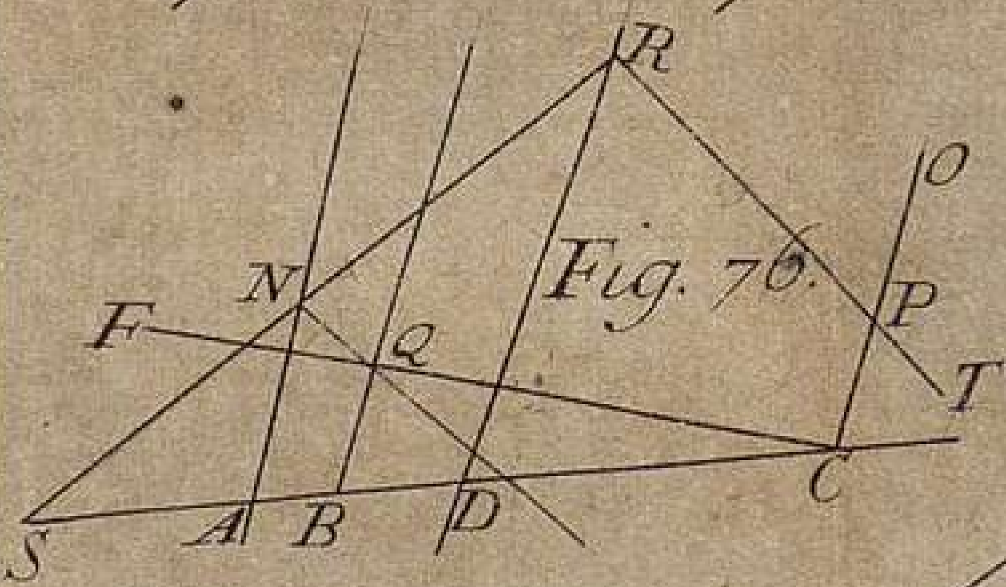


Fig. 75.

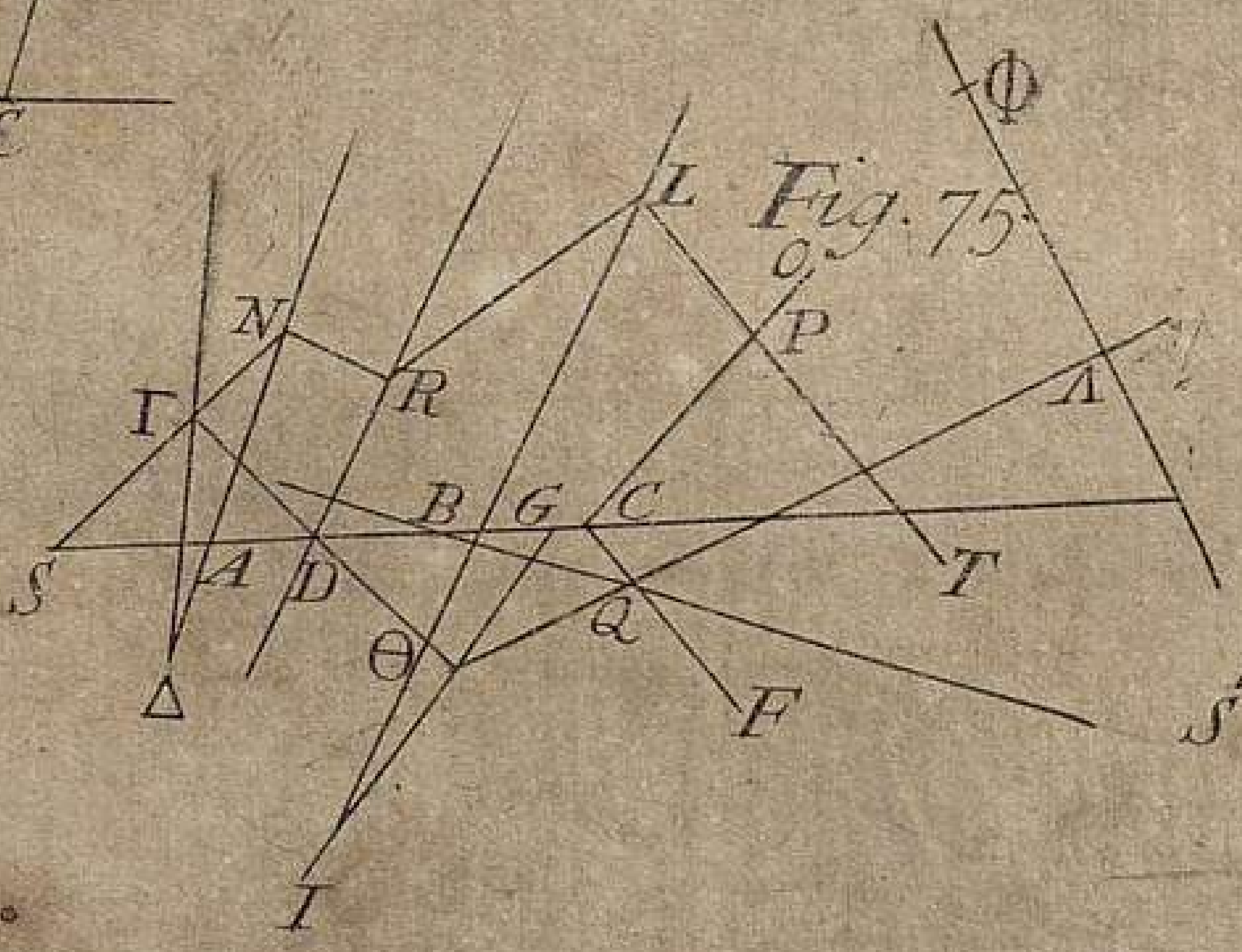


Fig. 74.

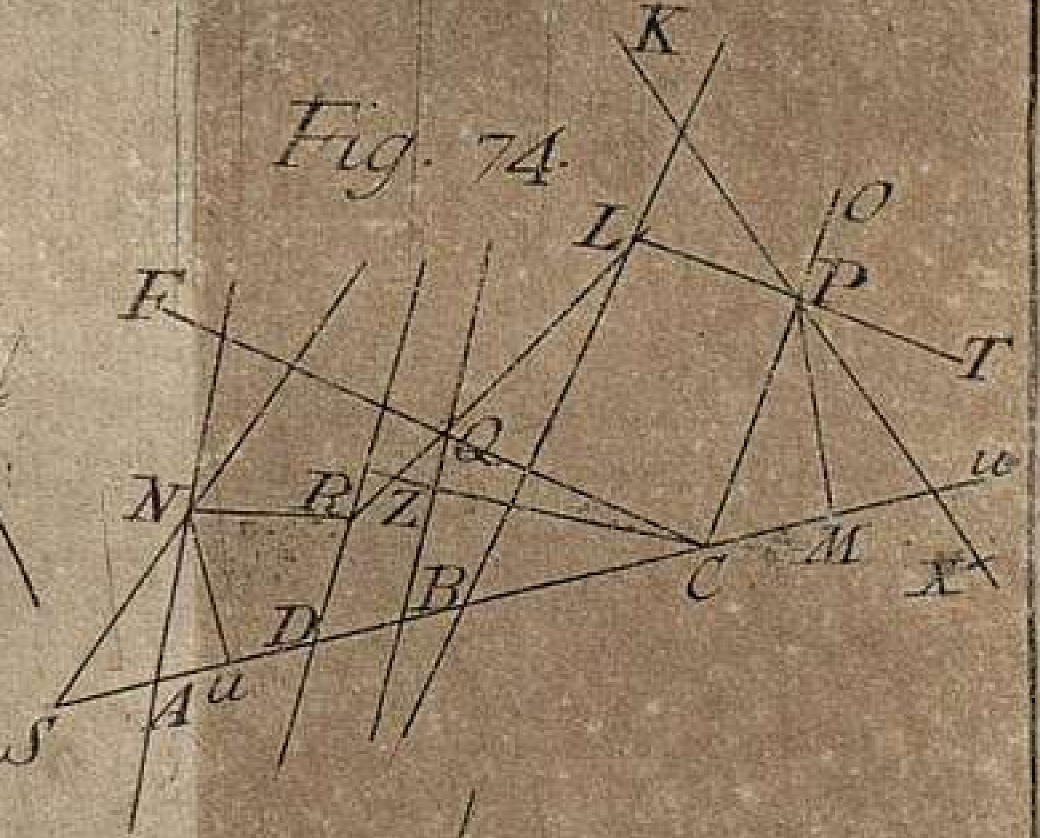


Fig. 77.

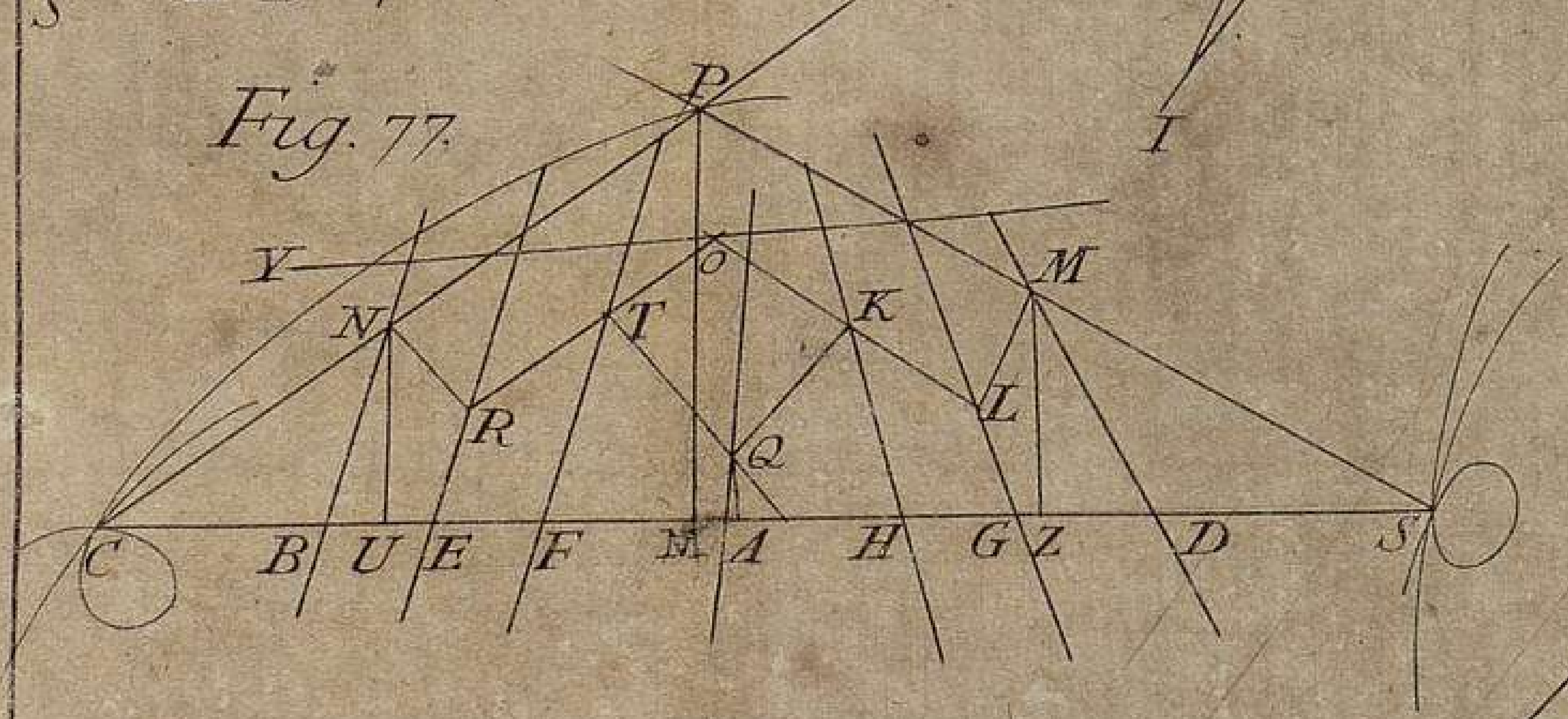


Fig. 78

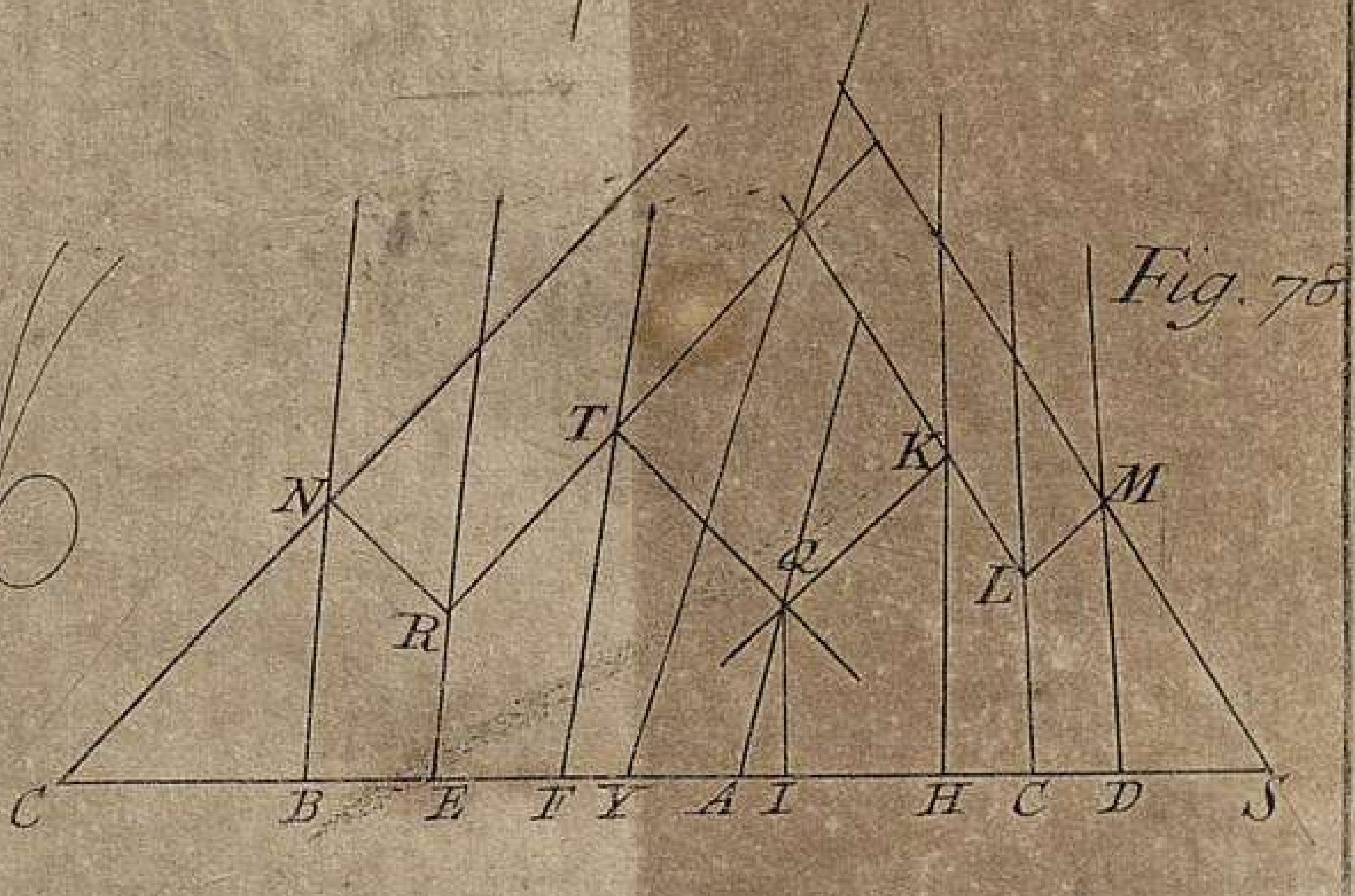
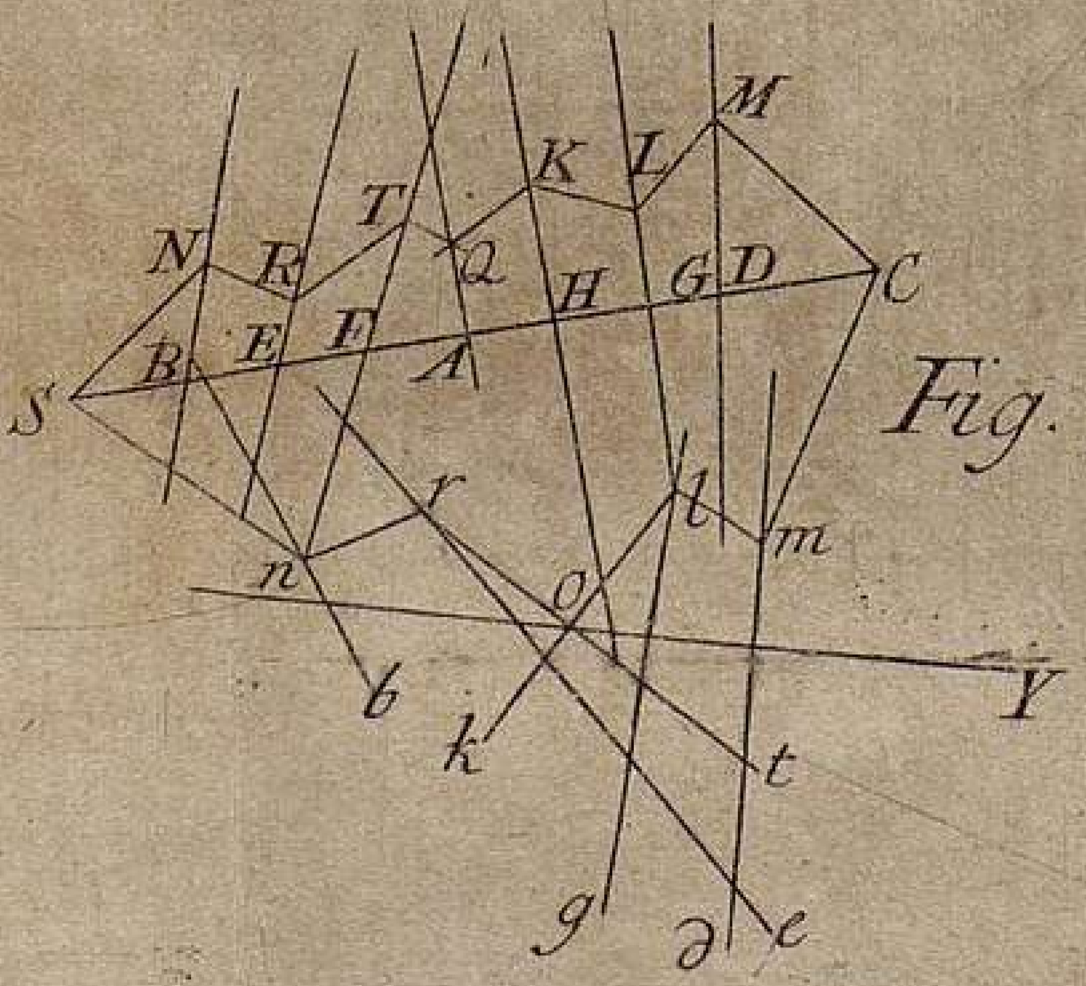


Fig. 79.



PARS SECUNDA.

Ubi Lineæ omnium Ordinum altiorum describuntur ope Linearum Ordinis cujuscunque inferioris.

SECTIO I.

Ubi demonstratur Organica Curvarum descriptio Neutoniana.

PROP. I.

Circa data puncta C, S *ut Polos* (Fig. 1.) *moveantur anguli dati* FCO, KSH, *ducatur concursus crurum* CF, SK *per Sectionem Conicam* AQS *per Polum alterutrum* S *transeuntem, & duo reliqua crura* CO, SH *concursu suo* P *describent Lineam tertii Ordinis.*

IN plano Sectionis Conicæ ducatur recta quævis ED, & investigandum sit quoties recta hæc Lineæ descriptæ potest occurrere. Supponamus crurum CO, SH concursum P duci per rectam eam indefinitam ED, & per *Prop.* 1. *Partis* 1. concursus crurum CF, SK describet Sectionem conicam transeuntem per polos C, S quæ occurrere potest sectioni datæ AQS in tribus punctis M, N, T

M, N, T præter punctum S, at non in pluribus: Proinde in descriptione hujus *Prop.* quoties Q concursus crurum CF, SK sectionem AQS percurrens pervenerit ad puncta tria M, N, T, erit punctum P concursus crurum CO, SH in recta ED, & in nullo alio casu eam rectam tanget. Nam cum Q concursus crurum CF, SK accedit ad punctum S recta SK sectionem conicam tangit in S, & si tunc concurrant CO, SH in puncto G, id punctum nequit esse in recta ED nisi punctorum M, N, T aliquod coincidat cum S & duæ sectiones CMS, AQS se mutuo contingant in S. Unde manifestum est curvam delineatam motu puncti P ter posse occurrere rectæ ED sed non sæpius; cumque idem de alia quavis recta in plano curvæ ducta demonstrari possit, liquet Lineam describi Ordinis tertii.

Hæc Propositio aliter demonstratur ex *Prop.* 11. *Partis* 1. ostendimus in ea Propositione si angulus SN*q* (*Fig.* 2.) angulari puncto N percurrat rectam datam BN, interea moveatur angulus FC*q* circa polum C, concursus crurum C*q* & N*q* ducatur per rectam datam B*q* & denique simul coincidant CF & SN cum CS, punctum Q descripturum sectionem conicam transeuntem per S non vero per punctum C. Sit hæc sectio conica AQS, & descriptio hujus *Prop.* ad eam reduci poterit *Corol.* 3. *Prop.* 10. *Partis* 1. ubi curva describitur concursu cruris CO cum SR angulum datum RSN constituente cum SN. Proinde curva erit Linea Ordinis tertii, & descriptio hujus Propositionis ad descriptionem *Prop.* 10. *Partis* 1. reduci poterit, si ex *Prop.* 11. omnes sectiones conicæ construi poterint, & punctum S in sectionis puncto quovis existere.

Corol. I. Curva habet punctum duplex in S, & transit semel per C; ut satis manifestum est ex *Corol.* 1. *Prop.* 10. *Partis* 1. si AQS sit sectio conica earum quæ describi possunt methodo *Prop.* 11. Sed idem hinc facile constat universaliter quod curva transeat per S (*Fig.* 1.) cum CO coincidit cum CS, & (si ICS = FCO) CF cum CI vel CU, & SK cum SI vel SU; proinde curva transit per S in duabus Positionibus rectæ SH cujus concursu cum CO curvæ puncta determinantur, adeoque erit S punctum curvæ duplex, & SH in duabus iis Positionibus duos arcus curvæ concurrentes in S continget.

Corol. II. Hinc si recta CI angulum ICS constituens æqualem dato FCO bis occurrat sectioni conicæ, curva habebit *Nodum* vel *Crucem* in S. Quod si IC sectionem contingat, curva habebit *Cuspidem* in S; si denique recta IC tota sit extra sectionem conicam, curva habebit *Punctum* conjugatum in S: In primo casu duo curvæ arcus transeunt per C, in secundo punctum P semel ad punctum S accedendo & ab eodem puncto dein regrediendo duos describit arcus qui cuspidem acutissimum formant in S; in tertio vero casu recta CO nunquam coincidit cum CS.

Corol. III.

Corol. III. Curva abit in infinitum (*Fig.* 1.) quoties crura CO, SH evadunt parallela, sive quoties angulus CQS evadit supplementum angulorum QCO & QSH ad quatuor rectos; proinde si super CS describatur arcus circuli, cui angulus æqualis dicto supplemento inscribi poterit, is in tribus punctis præter polum S occurret Sectioni conicæ AQS; cumque punctum Q concursus crurum CF, SK ad hæc tria puncta pervenerit curva abibit in infinitum, sint ea puncta m, n, t & ad rectas Cm, Cn, Ct constituantur anguli XCm, YCn, ZCt æquales dato FCO, & rectæ CX, CY, CZ erunt parallelæ tribus curvæ Assymptotis & plagas monstrant crurum infinitorum.

Corol. IV. Ducatur tangens sectionis conicæ ad punctum m (*Fig.* 1.) & in tangentem ex polis C,S demittantur perpendiculares P & p, sumatur dein CV ad CS, ut $P \times Sm^2$ ad $P \times Sm^2 - p \times Cm^2$, & si ad V constituatur recta parallela rectæ CX, ea erit Assymptotos curvæ, & simili ratione aliæ duæ Assymptoti determinari possunt. Quod si circulus cui inscriptus est angulus æqualis supplemento datarum QCO, QSH ad quatuor rectos sectionem conicam AQS contingat in m coibunt puncta duo m, n vel m, t & duæ Assymptoti parallelæ rectis CX, CY vel CX, CZ coeuntes simul abibunt in infinitum, & crura duo curvæ erunt Parabolica. Quippe si recta sectionem conicam contingens etiam contingat circulum, erit ex natura circuli $P : p :: Cm^2 : Sm^2$, adeoque cum $CV : CS :: P \times Sm^2 : P \times Sm^2 - p \times Cm^2$ erit CV infinita.

Corol. V. Ex præcedentibus *Corollariis* curvæ species non difficulter indagari potest; quippe ducta recta CI secundum *Corollarium* 2. facile constabit an curva sit *Nodata*, *Cuspidata* an *Punctata* in S; & ducto circulo secundum *Corollarium* 3. ex ejus intersectionibus cum sectione conica AQS innotescet numerus & positio crurum curvæ infinitorum. Si circulus in tribus punctis præter polum S sectioni conicæ occurrat, curva constabit ex tribus Hyperbolis ad tres Assymptotos; si circulus sectioni occurrat in punctis duobus S, T, & in alio puncto sectionem contingat, curva duo habebit crura Parabolica & totidem Hyperbolica; si circulus sectioni occurrat in uno tantum puncto præter S, curva unicam habebit Assymptoton eritque Hyperbola defectiva; si circulus sectionem contingat tantum nec eum omnino secet curva erit Parabolica. Si sectio conica AQS sit Parabola vel Hyperbola, & S sit terminus cruris alicujus infiniti, & loco anguli KSH substituatur recta quæ semper movetur parallela alicui sectionis conicæ Assymptoto, curva habebit punctum duplex ad distantiam infinitam, eritque Hyperbolismus Hyperbolæ, Hyperbolismus Parabolæ, Parabola Cartesiana vel Parabola Cubica.

Corol. VI. Si (*Fig.* 3.) crura CO, SH simul coincidant cum CS, curva hac Propositione descripta erit Sectio Conica; sit D punctum ubi recta ED occurrit datæ CS, & sit B punctum ad quod cum accedit Q coincidunt

incidunt ſimul CO, SH cum CS, & ſi punctum P cujus motu curva deſcribitur ducatur per rectam ED, cum P pervenerit ad D concurſus crurum CF, SK erit in B; proinde ſectio conica deſcripta concurſu crurum CF, SK occurret ſectioni AQS in punctis B & S & præterea in aliis duobus M, N, cumque in deſcriptione hujus Propoſitionis pervenerit Q ad B, punctum P non erit in recta ED, niſi M vel N coincidat cum B; proinde curva deſcripta occurret rectæ ED tunc tantum cum Q pervenerit ad M vel N, adeoque bis tantum ſecabit rectam ED ſeu aliam quamvis in plano curvæ ductam, & proinde Linea deſcripta erit ſecundi Ordinis ſeu ſectio conica. In hoc caſu punctum S evadit ſimplex, & Linea non tranſit per punctum C.

Corol. VII. Sit ſectio conica AQS circulus; cumque in duobus tantum punctis circuli ſibi mutuo occurrere poſſint, manifeſtum eſt ex *Corollario* 5. Hyperbolam deſcribi defectivam quæ unicam habet Aſſymptoton. Quod quidem prius demonſtravimus in *Corollariis* 3 & 4, *Lemmatis* 2, *Partis* 1, ubi anguli FCO, KSH ſibi mutuo ſupplementa ſunt ad duos rectos.

Corol. VIII. Si AQS *(Fig.* 1.*)* ſit Parabola Apollonia, S ejus vertex punctum vero C ſit ubicunque in ejus axe, anguli KSH, FCO recti, Lineæ erunt eæ ipſæ quas *Exemplo* 22. *Schol. Prop.* 9. *Partis* 1. deſcribere docuimus ſpecierum 68, 69 vel 70. Si S ſit in vertice Hyperbolæ, æquilateræ *(Fig.* 4.*)* punctum C ſit in axe figuræ, ſit CS $=b$, PM $=y$, SM $=x$, & latus tranſverſum dicatur a erit $y^2x - \overline{b-a} \times y^2 = x^3 - bx^2$, quæ nullo labore ad formam *Neutonianam* reduci poteſt; atque curva erit ſpeciei 11, 12 vel 13. Si S ſit in concurſu *(Fig.* 5.*)* Hyperbolæ æquilateræ cum Aſſymptoto ſua ad diſtantiam infinitam, ſitque C ubicunque in eadem Aſſymptoto angulus FCO rectus, & recta SH moveatur ſemper parallela Aſſymptoto CS occurrens cruri CF in Q puncto Hyperbolæ, Linea deſcripta concurſu rectæ SH cum CO erit Parabola Carteſiana cujus æquatio ad Aſſymptoton CS (ſi diſtantia puncti C a centro Hyperbolæ dicatur b, & ordinata Hyperbolæ ad punctum C Aſſymptoto perpendicularis dicatur a) $byx - abx = y^3$. Si cæteris manentibus ſit S in concurſu Hyperbolæ cum altera Aſſymptoto in quo non eſt C curvæ æquatio erit $aby = -x^3 + bx^2$, adeoque curva deſcripta erit Parabola Cubica omnium fere Linearum tertii Ordinis maxime celebris. Harum inveſtigatio cuivis qui calculum tentaverit erit facillima; plura vero hujuſmodi exempla proferre ſupervacaneum duco.

Corol. IX. Hujus Propoſitionis ope Linea tertii Ordinis duci poteſt per ſeptem data puncta quorum unum eſt punctum duplex. Dentur *(Fig.* 6.*)* ſeptem puncta S, C, M, N, T, R, L, Lineæ deſcribendæ quarum S duplex eſt. Jungantur punctum S & alia duo quævis puncta ut C, M, & trianguli MCS rotetur tum angulus MSC circa polum S, tum

2

tum angulorum reliquorum alteruter MCS circa verticem suum C; applicetur concursus crurum CM, SM successive punctis datis N, T, R, L, & interea concurrant crura reliqua CS & SC in punctis quatuor B, D, E, F. Per puncta illa quatuor & quintum S ducatur sectio conica per *Prop.* 4. *Partis* 1. & anguli MSC, MCS ita rotentur ut crurum SC, CS concursus percurrat sectionem illam conicam & concursus reliquorum crurum describet Curvam per data puncta S, C, M, N, T, R, L transeuntem quæ punctum duplex habebit in Polo S per *Corol.* 1. hujus Propositionis. Lineas vero tertii Ordinis quæ punctum habent duplex ex sex simplicibus & puncto duplice determinari hinc patet; quod si duæ Lineæ tertii Ordinis per eadem sex puncta transirent, & in eodem septimo punctum duplex haberent, concursus Linearum duarum tertii Ordinis essent decem, cum plures novem esse nequeant.

Prop. II.

Cæteris manentibus ut in Prop. 1. *si sectio Conica quam percurrit punctum* Q *concursus crurum* CF, SK (Fig. 7.) *transeat per neutrum Polorum* S, C, *punctum* P *concursus crurum* CO *&* SH *describet Lineam quarti Ordinis.*

IN plano sectionis conicæ ducatur ut in demonstratione *Prop.* præcedentis recta quævis ED, & investigandum sit quoties recta hæc Lineæ descriptæ occurrere possit. Supponamus ut in Propositione præcedente crurum CO, SH concursum P duci per rectam ED, & per *Prop.* 1. *Partis* 1. concursus crurum CF, SK interea describet sectionem coni transeuntem per polos C, S, quæ occurrere potest datæ sectioni AQB in punctis quatuor M, N, T, R; cum ex Hypothesi Poli C, S non sint in sectione. Proinde in descriptione hujus Propositionis cum Q pervenerit ad puncta M, N, T, R erit P concursus crurum CO & SH, cujus motu curva describitur, in recta ED, & in nullo alio casu rectam ED contingere potest; unde manifestum est curvam motu puncti P delineatam quater posse occurrere rectæ ED & non sæpius; cumque

 idem

idem de alia quavis recta in plano ducta demonstrari possit, patet Lineam describi quarti Ordinis.

Hæc Propositio eadem ratione ex *Corollario* ultimo *Prop.* 15. demonstrari posset qua Propositionem præcedentem ex *Prop.* 11. Partis primæ demonstravimus.

Corol. I. Curva hujus Propositionis tria habet puncta duplicia. Imprimis punctum C erit duplex; quippe si angulus ISC sit æqualis dato KSH, & recta SI producta occurrat sectioni conicæ in punctis I, U, cum Q pervenerit ad puncta I, U curva transibit per C & recta CO tangens erit ad duos curvæ arcus in C concurrentes; nam in utroque casu coincidet SH cum SC, adeoque concursus crurum CO, SH erit in ipso puncto C. Similiter ostendi potest punctum S esse duplex. Adhæc si producatur recta CS donec sectioni occurrat in punctis duobus A, G & punctum Q accedat ad A, & dein ad G, erit concursus crurum CO, SH in eodem puncto B (vid. *Corol.* 8. *Prop.* 2. *Partis* 1.) in utroque casu, adeoque id punctum B erit duplex. Puncta igitur C, S, B sunt omnia duplicia.

Corol. II. Sit angulus SCZ = FCO, & curva erit *Nodata*, *Cuspidata* aut *Punctata* in punctis C, S, B prout rectæ SI, CZ, CS productæ sectionem AQB secant, contingant aut totæ extra eam locantur. Hæ igitur curvæ in species decem insigniores distingui possunt absque ullo respectu habito ad crurum vel diametrorum numerum aut positionem; aliæ enim tres habent nodos, aliæ tres cuspides aliæ tria puncta conjugata; aliæ habent duos Nodos & unicam Cuspidem, aliæ duos Nodos & unicum Punctum conjugatum, aliæ duas Cuspides & Nodum unicum, aliæ duo Puncta conjugata & Nodum unicum; aliæ habent Nodum, Cuspidem & Punctum conjugatum, aliæ duas Cuspides & unicum Punctum conjugatum, & aliæ denique unicam Cuspidem & duo Puncta conjugata. Nodi vero nonnunquam formam crucis induunt & alia plurima harum curvarum oriuntur discrimina quibus enumerandis non licet immorari.

Corol. III. Curva abit in infinitum quoties crura CO, SH evadunt parallela, & angulus CQS æqualis supplemento datorum angulorum FCO, KSH ad quatuor rectos. Super CS describatur circulus *(Fig.* 8.*)* habens angulum dicto supplemento æqualem ei inscriptum occurrens sectioni Conicæ in quatuor punctis M, N, T, R; & ubi accedit Q ad ea puncta crura CO, SH evadunt parallela, & curva abit in infinitum. Proinde Assymptoti harum curvarum possunt esse quatuor, duæ vel nullæ, cum circulus is sectioni occurrere possit in punctis quatuor, duobus vel nullis. Si circulus sectionem contingat, crura erunt Parabolica; & universaliter curvæ hac Propositione descriptæ vel octo vel quatuor vel nulla habebunt crura Hyperbolica, vel quatuor habebunt Parabolica vel duo, vel quatuor Hyperbolica & simul duo Parabolica. Atque ex hoc & præcedenti

Corollario

Corollario Lineæ hac Propositione descriptæ in 60 species generales dividi possunt.

Corol. IV. Si crura CO, SH simul coincidant cum CS Linea descripta erit tertii Ordinis, & puncta C, S erunt simplicia; sit Δ punctum ad quod cum Q pervenerit coincindunt CO, SH cum CS, (*Fig.* 8.) & Δ erit in concursu sectionis Coni descriptæ concursu rectarum CF, SK dum P ducitur per rectam ED; nam ubi P accedit ad D, rectæ CF, SK, concurrunt in Δ; sed in descriptione Propositionis hujus cum Q pervenerit ad Δ, punctum P non erit in recta ED, nisi duo concursus sectionum Conicarum sint in Δ; unde manifestum est punctum P ter tantum existere posse in recta quavis ED, adeoque Lineam describi tertii Ordinis. In hoc casu curva unicum habet punctum duplex in B.

PROP. III.

Cæteris manentibus ut in Propositionibus præcedentibus ducatur concursus crurum CF, SK *per Lineam quamcunque* AB (Fig. 9.) *Ordinis (n) & crurum reliquorum* CO, SH *concursus describet Lineam Ordinis 2n.*

IN plano curvæ ducatur recta quævis ED & investigandum sit in quot punctis hæc recta Lineæ Propositione descriptæ occurrat. Ducatur punctum P concursus crurum CO, SH per rectam indefinitam ED, & concursus crurum CF, SK interea describet Lineam Ordinis secundi per *Prop.* 1. *Partis* 1. Proinde in descriptione hujus Propositionis punctum P tum tantum erit in recta ED cum punctum Q concursus crurum CF, SK sit in ea sectione Coni, sed punctum Q ducitur per Lineam ordinis *n.* ex hyp. quæ occurrere potest sectioni Conicæ in punctis $2n$ ex natura Linearum; & ubi Q puncta hæc $2n$ tangit punctum P reperitur in recta ED; unde manifestum est Lineam motu puncti P descriptam rectæ ED occurrere in punctis $2n$ adeoque eam Lineam esse ordinis $2n$.

Corol. I. Curvæ arcus (*n*) concurrunt in puncto C & totidem in puncto S; quippe si angulus CSI sit æqualis dato HSK recta SI poterit occurrere Lineæ datæ AB in punctis *n*; sed cum Q ad quodvis horum punctorum pervenerit in descriptione Propositionis coincidet SH cum SC, adeoque curva transibit per C; proinde arcus curvæ (*n*) concurrunt

runt in Polo C, & eadem ratione ostendi potest totidem arcus concurrere in Polo S. Sed aliud etiam est tertium punctum curvæ Δ ubi concurrunt crura CO, SH cum CQ, SQ simul coincidunt cum CS ubi arcus curvæ (n) concurrunt; quoniam recta CS in punctis n occurrere potest Lineæ AB. Cujus vero generis puncta sint C, S, Δ innotescet methodo simili ei quam explicuimus *Corol.* 2. *Prop.* præcedentis.

Corol. II. Lineæ methodo hujus Propositionis descriptæ eæ sunt quæ plura habent puncta in quibus arcus n concurrunt quam aliæ quævis ejusdem ordinis. Quippe Linea ordinis $2n$ nequit quatuor habere nodos arcuum curvæ (n) in eodem puncto concurrentium; cum in ea Hypothesi sectio Coni per ea quatuor puncta multiplicia & quintum simplex ducta curvæ occurreret in punctis $4n+1$, quod est impossibile; sectio etenim Conica Lineam ordinis $2n$ secare potest in punctis tantum $4n$.

Corol. III. Assymptoti harum curvarum generaliter determinantur eadem methodo qua eas in casibus particularibus *Prop.* 1 & 2 prius investigavimus, ducendo scil. circulum super CS, cui inscribitur supplementum angulorum FCO, KSH ad quatuor rectos, & hujus circuli occursus cum Linea data AB notando; nam cum punctum Q ad dictos occursus pervenerit curva abibit in infinitum.

Corol. IV. Hæc omnia obtinent ex Hypothesi quod puncta C, S non sint in curva AB. Sed si alterum punctorum C, S sit in curva data AB, Linea motu puncti P descripta erit ordinis $2n-1$. Quod si curva AB punctum habeat in quo arcus curvæ concurrunt quorum numerus est r, & Polus C sit in eo puncto, Linea descripta motu puncti P erit ordinis $2n-r$. Hæc ex Propositionis hujus demonstratione facile intelligi possunt.

Prop. I, & II. Post enumerationem Linearum tertii Ordinis protulit *Neutonus*, atque eas universaliores reddi posse ibidem innuit; quod *Prop.* hac 3 conati sumus efficere. In his unicam Lineam curvam & duos tantum angulos ad Lineas superiores ducendas adhibuimus; sequentibus vero omnes *Partis* 1. Propositiones universales reddere conabimur, quemadmodum hanc Propositionem 1. *Partis* 1. quam fieri potest generalem reddidimus.

SECTIO

SECTIO II.

Ubi Curvæ investigantur quæ ex aliis quibuscunque angulorum datorum motu describi possunt.

PROP. IV.

Cæteris manentibus ut in Prop. 5. Partis 1. *loco rectæ* BQ (Fig. 10.) *substituatur Linea quævis* BQG *ordinis n, & si concursus crurum* CF, SN *ducatur per eam curvam concursus crurum* CO, NL *describet Lineam ordinis 3n, si Linea* BQG *non transeat per Polos* C, S.

IN plano curvæ BQG ducatur recta quævis ED, & investigare oportet quoties Linea descripta motu puncti P occurrere poterit huic rectæ. Ut id innotescat supponamus concursum crurum CO,NL duci per rectam eam indefinitam ED & concursus crurum CF, SN interea describet Lineam tertii Ordinis per *Prop.* 10. *Partis* 1. quæ occurrere potest Lineæ BQG in punctis 3*n*. Unde ubi punctum P existit in recta ED in descriptione hujus Propositionis erit punctum Q concursus crurum CF, SN simul in Linea dicta tertii Ordinis & in Linea BQG, & vicissim quoties punctum Q accedit ad concursum quemvis Lineæ dictæ tertii Ordinis & Lineæ BQG erit punctum P in recta ED, ii vero concursus sunt 3*n*, adeoque Linea motu puncti P descripta secare potest rectam ED in punctis 3*n* & nunquam in pluribus, cumque idem de recta quavis alia demonstrari possit, manifestum est Lineam describi concursu crurum CO, NL ordinis 3*n*.

Corol. I. Curvæ arcus $2n$ in polo C concurrunt; quippe si super CS describatur circuli arcus cui inscribitur angulus datus SNL occurrens rectæ AN in punctis M & m, & jungantur SM, Sm singulæ occurrentes curvæ BQG in punctis n, manifestum est quoties punctum Q pervenerit ad occursus hos rectarum SM, Sm cum curva BQG crus NL transiturum per C, adeoque curvam per idem punctum transituram; sunt igitur puncta $2n$ curvæ BQG ad quæ cum punctum Q pervenerit curva transibit per C, & proinde arcus curvæ $(2n)$ in eo puncto concurrunt. Curva vero per polum S transire nequit cum recta NL, in qua semper versatur P punctum curvæ, per S nunquam possit transire.

Corol. II. Si circulus super CS descriptus cui inscribitur angulus SNL rectam AN contingat curva habebit cuspides in puncto C quarum numerus erit n, si AN tota ponatur extra circulum erit C punctum curvæ conjugatum. Punctum C erit partim *Nodata* partim *Cuspidata* si recta SM occurrat Lineæ BQG sed Sm eam contingat.

Corol. III. Super CS describatur arcus circuli cui inscribi possit angulus æqualis supplemento angulorum SNL, FCO ad duos aut quatuor rectos occurrens Lineæ BQG in punctis $2n$; & cum punctum Q ad occursum eorum quemvis pervenerit curva abibit in infinitum, & crus CO erit parallelum Assymptoto curvæ, atque hinc Plaga Assymptotωn quarum numerus est $2n$ determinari potest. Sed cum punctum N abit in infinitum seu SN evadit parallela rectæ AN curva abit in infinitum; cumque recta SN occurrere possit Lineæ BQG in punctis n; hinc plagæ aliarum Assymptotωn quarum numerus est (n) determinari possunt; atque hæ cum prioribus Assymptotos constituunt $3n$ & plures Lineas ordinis $3n$ nequit habere.

Corol. IV. Si Polus C sit in BQG curva hac Propositione descripta erit Linea ordinis $3n - 1$; si Polus S sit in Linea BQG describetur Linea ordinis $3n - 2$; & si utrumque contingat describetur Linea ordinis $\overline{3 \times n - 1}$.

Corol. V. Si in quadrilatero CQNP trium punctorum P, N, Q alterum ducatur per rectam indefinitam, alterum per Lineam ordinis n, tertium describet Lineam ordinis $3n$: Quippe si punctum illud tertium cujus motu curva describitur supponatur duci per rectam quamcunque punctum quod duci supposuimus per Lineam ordinis (n) describet Lineam Ordinis tertii per *Prop.* 5, 10 & 13. *Partis* 1. quæ occurret Lineæ ordinis (n) in punctis $3n$; atque dum in iis occursibus $3n$ versatur, punctum cujus motu curva describitur erit in locis $3n$ ejusdem rectæ. Unde generaliter constat si illorum trium punctorum aliud percurrat rectam, aliud Lineam ordinis (n) tertium descripturum Lineam ordinis $3n$.

Corol. VI.

2

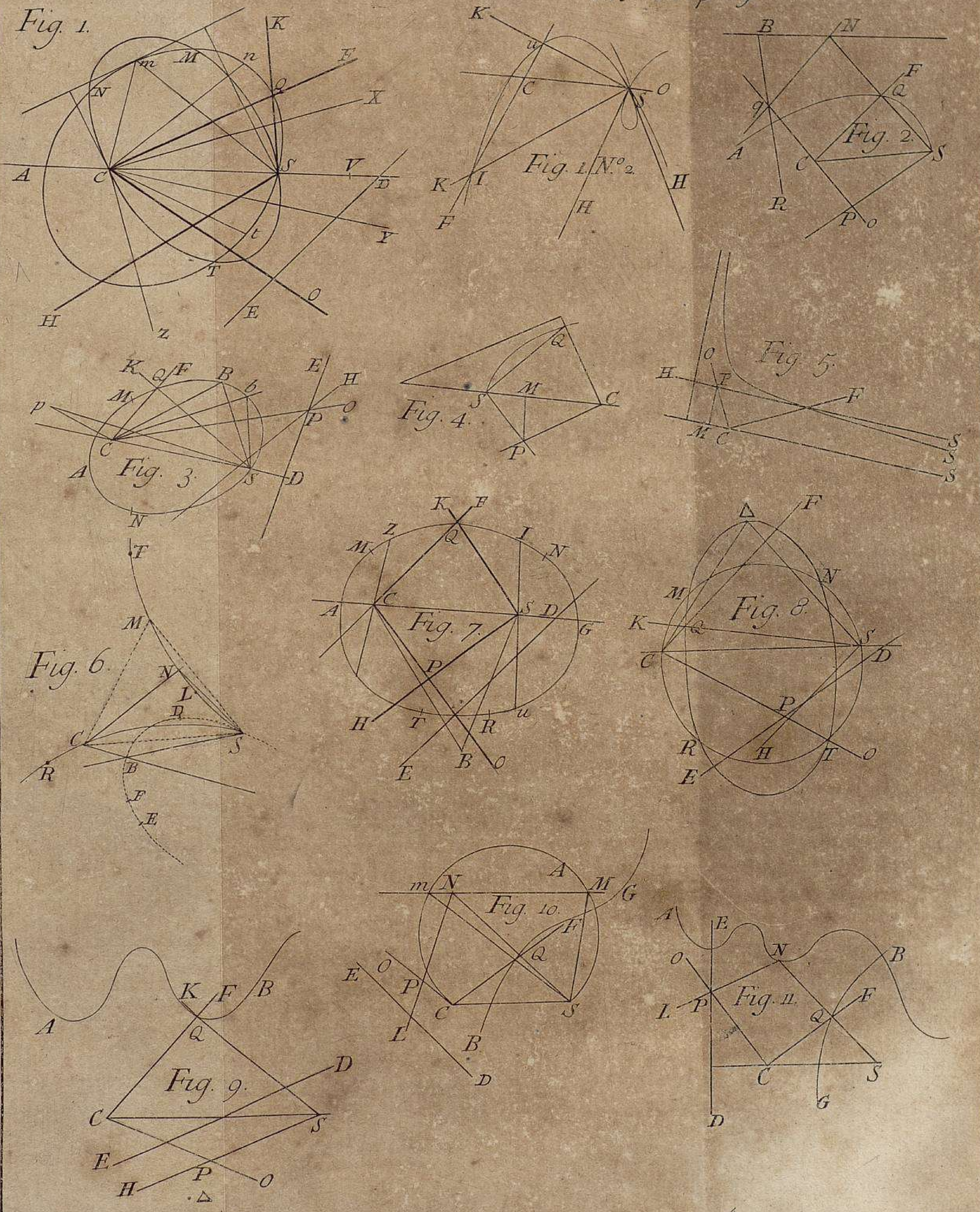


Fig. 1.
Fig. 1. No. 2.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

Corol. VI. Si BQG sit sectio Conica, Lineæ hac *Prop.* descriptæ erunt sexti Ordinis si sectio non transeat per Polos C, S; sed si Polus C sit in sectione Linea descripta erit Ordinis quinti, si Polus S sit in sectione, Linea erit Ordinis quarti, & si uterque sit in sectione Linea erit Ordinis tertii & descriptio coincidet cum iis *Prop.* 5 & 13. *Partis* 1.

Prop. V.

Ducatur concursus crurum CF, SN *ut in* Prop. *præcedenti* (Fig. 11.) *per Lineam Ordinis (n) & si punctum angulare* N *simul ducatur per Lineam Ordinis m, concursus crurum* CO, NL *describet Lineam Ordinis 3nm.*

SIT BQG Linea ordinis *n*, BNA Linea ordinis *m*, & in plano curvarum ducatur recta infinita quævis ED, investigare oportet quoties Linea descipta motu puncti P huic rectæ occurrat. Ducatur punctum P concursus crurum CO, NL per rectam ED, & interea percurrat punctum N Lineam BNA ordinis *m*, atque per *Corol.* 5. *Prop.* præcedentis punctum Q describet Lineam ordinis 3*m*, quæ occurret Lineæ BQG ordinis *n* in punctis 3*mn* : Sed in descriptione hujus Propositionis quoties punctum Q (quod percurrit Lineam BQG) accedit ad concursum quemvis curvarum illarum, punctum P est in recta ED. Sunt igitur puncta 3*nm* in curva BQG, ad quæ ubi accedit Q, punctum P tangit rectam ED; ptoinde Linea motu puncti P descripta secabit rectam ED in punctis 3*nm*; cumque idem de alia quavis recta in plano ducta demonstrari possit, manifestum est Lineam motu puncti P descriptam esse ordinis 3*nm*.

Corol. I. Curvæ tot arcus concurrunt in C quot sunt unitates in numero 2*nm*. Quippe si super CS describatur arcus circuli cui inscribitur angulus SNL, is occurret Lineæ BNA in punctis 2*m*; & si ad hos occursus ducantur rectæ ex Polo S, eæ occurrent Lineæ BQG in punctis 2*mn*; sed in descriptione hujus Propositionis cum punctum Q (quod percurrit Lineam BQG) ad occursuum illorum aliquem pervenerit, recta NL transibit per C, adeoque coincidet P cum C; & proinde curvæ arcus (2*mn*) concurrunt in eodem puncto C, & punctum illud erit semper multiplex si *m* vel *n* superent unitatem.

Corol. II. Describatur super CS arcus circuli cui inscribitur angulus æqualis supplemento datorum FCO, SNL ad quatuor rectos occurrens Lineæ BQG in punctis $2n$, cumque punctum Q ad aliquem occursuum illorum pervenerit evanescet angulus CPN, adeoque CO, NL erunt parallelæ, & curva abibit in infinitum. Alia formantur curvæ crura cum N abit in infinitum, & SN evadit parallela cruri infinito Lineæ BNA ordinis m. Curvarum hac Propositione descriptarum Assymptoti sunt (n) quarum singulæ tot alias habebunt sibi parallelas quot unitates sunt in numero m, si circulus cui inscribitur supplementum angulorum FCO, SNL ad quatuor rectos Lineæ BQG occurrat in punctis $2n$, & singulæ rectæ ex S eductæ ad occursus illos secent Lineam BNA in punctis m.

Corol. III. Eadem ratione qua Propositionem demonstravimus ostendi potest universaliter si in quadrilatero CPNQ trium punctorum P, Q, N alterum ducatur per Lineam ordinis (n) alterum per Lineam ordinis (m) tertium descripturum Lineam ordinis $3nm$.

Prop. VI.

Cæteris manentibus ut in Prop. 14. Partis 1. (Fig. 12.) *loco rectarum* AN, BQ, DR *substituantur Lineæ quævis ordinum m, r, n & Linea motu puncti* P, *concursus crurum* CN & SR, *descripta erit ordinis $4mnr$.*

SUpponamus imprimis puncta N & Q rectas infinitas AN, BQ percurrere, sed punctum R duci per Lineam ordinis n; & in hoc casu punctum P describet Lineam ordinis $4n$. Quippe si punctum P per rectam quamvis ED ducatur punctum R describet Lineam ordinis quarti per *Prop.* 19. *Partis* 1. quæ occurret Lineæ ordinis n in punctis $4n$; cumque R pervenerit ad occursus illos $4n$ erit P in recta ED, adeoque punctum P describet Lineam ordinis $4n$. Eadem ratione ostendi potest universaliter si in quadrilatero PNQR duo quævis puncta ducantur per rectas positione datas & tertium percurrat Lineam ordinis n quartum descripturum Lineam ordinis $4n$.

Supponamus secundo puncta duo R, N duci per Lineas ordinum n, m, & punctum Q per rectam BQ; & in hoc casu punctum P describet

Lineam ordinis $4nm$: Quippe si punctum P ducatur per rectam ED, & punctum N per Lineam ordinis m, punctum R describet per modo demonstrata Lineam ordinis $4m$ quæ occurret Lineæ DR in punctis $4nm$; cumque R ad occursus illos $4nm$ pervenerit erit P in recta ED, adeoque Linea motu puncti P descripta erit ordinis $4nm$; & in genere si punctorum P, Q, N, R duo quævis ducatur per Lineas ordinum m, n, tertium vero percurrat rectam, quartum describet Lineam ordinis $4nm$.

Supponamus denique ut in Propositione puncta tria N, Q, R duci per Lineas ordinum m, r, n; & punctum P describet Lineam ordinis $4nmr$. Quippe si N & Q ducantur per Lineas ordinum m, r, & P percurrat rectam ED, punctum R describet Lineam ordinis $4mr$ quæ occurret Lineæ DR ordinis (n) in punctis $4mnr$; sed ubi R pervenerit ad occursum quemvis illarum Linearum in descriptione hujus Propositionis, erit punctum P in recta ED: Proinde Linea motu puncti P descripta occurrit rectæ ED in punctis $4nmr$; cumque idem de alia quavis recta demonstrari possit manifestum est Lineam motu puncti P descriptam fore ordinis $4nmr$.

Corol. I. Curvæ tot arcus concurrunt in C quot sunt unitates in numero $2nmr$; & totidem concurrunt in altero Polo S; coincidat enim SR cum SC (*Fig.* 13.) & tot possunt esse variæ positiones rectæ RQ quot sunt unitates in numero (n) quoniam in tot punctis recta SC occurrere potest Lineæ ordinis n. Sed pro singulis positionibus puncti R positiones puncti Q possunt esse tot quot sunt unitates in numero (r) & pro singulis positionibus puncti Q tot possunt esse positiones puncti N quot sunt unitates in numero $2m$, siquidem concursus circuli super CSQ descripti, cui inscribitur angulus CNQ, cum Linea AN denotant puncta N; proinde ubi coincidit SR cum SC positiones rectæ CN possunt esse $2nrm$, sed Linea Propositione hac descripta transit per C ubi coincidit SR cum SC; adeoque arcus $2nrm$ curvæ concurrunt in Polo C; eadem ratione demonstratur Lineæ puncta $2nmr$ coire in altero Polo S. Cum vero Linea descripta sit ordinis $4nmr$, patet rectam CS in nullo alio puncto præter Polos C, S occurrere Lineæ in Propositione descriptæ.

Corol. II. Si $n = m = r = 2$ sive curvæ omnes AN, BQ, DR sint sectiones conicæ Linea descripta erit Ordinis 32: si AN, BQ, DR sint omnes Lineæ tertii Ordinis Linea descripta motu puncti P erit ordinis 108.

Prop. VII.

Sint cætera omnia ut in Prop. 21. Partis 1. *sed pro rectis* BQ, AN, DR, GL, *&c. substituantur Lineæ curvæ ordinum m, r, s, t, &c. sitque n numerus curvarum omnium, & Linea descripta motu puncti* P, *concursus crurum* CO, LT (Fig. 14.) *erit ordinis* $\overline{mrst}\times n+1$.

SUpponamus imprimis puncta omnia Q, N, R, L recta suas percurrere ut in *Prop.* 21. præter ipsum Q, & si punctum Q ducatur per Lineam ordinis *m* punctum P describet Lineam ordinis $mn+m$. Quippe si punctum P ducatur per rectam quamvis ED & puncta L, R, N rectas suas percurrant, punctum Q describet Lineam ordinis $n+1$ per *Prop.* 21. *Partis* 1. quæ occurret Lineæ BQ ordinis *m* in punctis $mn+m$. Cumque punctum Q dum percurrit Lineam BQ ad occursus illos $mn+m$ pervenerit erit punctum P in recta ED, adeoque Linea motu puncti P descripta erit ordinis $mn+m$. Simili ratione ex *Prop.* 22. ostendi potest universaliter si omnia puncta P, Q, N, R, L, &c. ducantur per rectas positione datas præter duo quævis & horum alterum ducatur per Lineam ordinis *(m)* alterum descripturum Lineam ordinis $mn+m$.

Supponamus secundo puncta duo N, Q describere Lineas ordinum *r*, *m*, & punctum P describet Lineam ordinis $mrn+mr$. Quippe si P ducatur per rectam ED, punctum N per Lineam ordinis *(r)* reliqua vero præter Q per rectas positione datas, punctum Q describet per modo demonstrata Lineam ordinis $rn+r$ quæ occurret Lineæ ordinis *m* in punctis $mrn+mr$; cumque punctum Q ad occursus illos pervenerit erit punctum P in recta ED, adeoque Linea motu puncti P descripta erit ordinis $mrn+mr$. Et simili ratione universaliter demonstratur si omnia puncta P, Q, N, R, L, &c. præter tria quævis ducantur per rectas positione datas & trium reliquorum duo quævis ducantur per Lineas ordinum *m*, *r*, tertium descripturum Lineam ordinis $mrn+mr$.

Supponamus tertio tria puncta Q, N, R duci per Lineas ordinum *m*, *r*, *s*, & punctum P describet Lineam ordinis $mrsn+mrs$. Quippe si P ducatur per rectam ED & puncta R, N per curvas ordinum *s*, *r*, punctum

punctum Q per modo demonstrata describet Lineam ordinis $srn+sr$, quæ occurret Lineæ BQ ordinis (m) in punctis $mrsn+mrs$, ad quæ cum accedit Q punctum P tangit rectam ED. Proinde puncta sunt $mrsn+mrs$ in curva BQ in quibus sit punctum Q & simul erit punctum P in recta ED; unde Linea motu puncti P descripta erit ordinis $mrsn+mrs$.

Similiter demonstrari potest Lineam motu puncti P descriptam fore ordinis $mrstn+mrst$ seu $mrst\times\overline{n+1}$ si puncta omnia Q, N, R, L, &c. ducantur per Lineas ordinum m, r, s, t, &c. Et quotcunque assumantur curvæ earum omnium indices ductæ imprimis in se mutuo & dein in numerum curvarum unitate auctum ostendunt ordinem Lineæ descriptæ motu puncti P concursus crurum CO, LT.

Corol. I. Curvæ tot arcus concurrunt in Polo C quot unitates sunt in producto $mrstn$.

Corol. II. Sit (u) numerus binarius ad potestatem (n) elevatus & si omnes curvæ datæ sint sectiones conicæ Linea descripta erit ordinis $nu+u$. Unde septem sectionum conicarum ope Lineæ describi possunt ordinis 1024, atque decem sectionum ope Lineæ describi possunt ordinis supra 11000. Quæ quidem descriptio in se satis est complexa simplicissima vero est si ordo Lineæ ejusque implicatissima forma considerentur.

Prop. VIII.

Sint reliqua omnia ut in Prop. 24. Partis 1. *sed loco rectarum* AQ, BN, ER, FT *sumantur Lineæ curvæ ordinum l, k, t, i & loco rectarum* DM, GL, HK *sumantur Lineæ ordinum p, u, z, denotent n, m numeros curvarum & Linea descripta concursu rectarum* CN, SM *erit ordinis $lkitpuz\times\overline{n+m+2}$.*

HÆC Propositio eadem ratione ex *Prop.* 24. *Partis* 1. deduci potest qua Propositionem præcedentem ex 21 *Partis* 1. demonstravimus. Et simili quoque ratione ostendi potest si in *Prop.* 26. *Partis* 1. loco rectarum substituantur curvæ eorundem ordinum Lineam descriptam fore ordinis $lkitpuz\times\overline{ms+nr+s+r}$.

Proposi-

Propositionibus his ordinem investigavimus altissimum Linearum quæ proposita ratione describi possunt; ea vero Theoremata non sunt ita intelligenda quasi adeo ardui generis curva in omni casu describeretur; cum singula methodos suppeditent particulares Lineas aliquas describendi omnis ordinis inferioris quam in Propositione exprimitur.

SCHOLIUM.

Si curvæ ordinis infiniti quæ *Mechanicæ* dici solent in his descriptionibus substituantur curvæ resultantes erunt etiam ordinis infiniti; atque hinc complexiores curvæ etiam hujus ordinis ex simplicioribus describi posse videntur, & Linea methodo *Prop.* 3. hujus *Partis* ex alia quavis mechanica BQG deducta rectæ videtur occurrere posse in punctis quorum numerus erit ad numerum occursuum rectæ cum BQG ut 2 ad 1; atque licet omnes hujus ordinis rectæ occurrere possint in punctis numero infinitis, aliquarum tamen intersectiones cum rectis possunt esse infinite plures intersectionibus aliarum: eæ vero quarum intersectiones sunt plures ex aliis simplicioribus per *Prop.* præcedentes deduci possunt. Sit in descriptione *Prop.* 3. (*Fig.* 15.) BQC Logistica anguli FCO, KSH recti & curvæ motu puncti P descriptæ (si poli C, S sint in Assymptoto sitque $CS = b$, $CM = x$, $PM = y$, & subtangens Logisticæ æqualis a) æquatio erit $\overline{aby - 2axy - bxy + x^2y} \times x = \overline{b - x} \times axy$. Quæ proinde construi potest ex areis Hyperbolæ conicæ & Hyperbolismi Hyperbolæ Lineæ tertii Ordinis speciei 59.

SECTIO III.

De seriebus curvarum infinitis quæ ex una data tangentium ope deduci possunt.

Descriptio curvarum quam præcedentibus Sectionibus demonstravimus est generalissima & si methodi universalitas simul respicietur simplicissima haberi potest; aliæ apud Geometras passim reperiuntur curvarum descriptiones quæ simpliciores nonnunquam exhibent methodos Lineas easdem curvas describendi licet minus universales; eæ vero vagæ plerumque sunt nec ad unum Linearum genus describendum aut ad aliquas omnium generum delineandas sufficiunt, sed absque ullo ordine hic unam aliquam particularem Lineam illic aliam arripiunt, & nonnunquam faciliorem exhibent descriptionem Linearum altioris ordinis quam aliarum ordinis inferioris. Hæ

descrip-

descriptiones licet minus regulares nequaquam tamen sunt in Geometria inutiles nec quidem injucundæ, cum ea quæ ad intellectum oblectandum conducant maxime neque varia sint nimium nec quidem nimium generalia aut simplicia esse possint. Hujusmodi Linearum descriptiones variæ à variis excogitatæ sunt, quarum aliquæ ad Propositiones universales prius demonstratas reduci possunt; & quisque methodum quæ sibi arridet aut insigniora theoremata suppeditat excolere studet. Cum vero Geometria quæ curvas ad datum centrum relatas contemplatur in Philosophia naturali ad motus corporum & vires evolvendas facilius applicari possit, sicuti in præcedentibus curvarum characteres ex æquatione designante relationem ordinatim applicatæ ad abscissam axis alicujus deduximus, hac sectione considerabimus curvas tanquam ad punctum quodvis datum relatas ex quo ad omnia circumferentiæ puncta radii undique educuntur & simul perpendicula in illorum punctorum tangentes demittuntur, & rationem radii ad perpendiculum tanquam curvæ characterem usurpabimus. Detur curva BLl & punctum S in ejus plano; ex puncto S (*Fig.* 16.) concipiemus rectas normales semper cadere in omnes tangentes LP, & ex data curva dabitur ratio radii SL ad perpendiculum SP in terminis finitis, sive curva sit geometrica sive mechanica primi generis, in quibus nimirum ratio momenti ordinatæ ad momentum abscissæ exprimi potest quantitatibus finitis. Quippe designant x, y abscissam & ordinatam curvæ cujusvis, m & n finitas quasvis quantitates, & si $\dot{x} : \dot{y} :: m : n$, erit SL : SP :: SL $\times \sqrt{m^2+n^2} : my - nx$, adeoque ratio perpendiculi SL ad SP exprimi poterit quantitatibus finitis, cumque sit $SP = \frac{my - nx}{\sqrt{m^2+n^2}}$ facile erit ex curvæ æquatione ad axem quemvis data rationem radii SL ad SP invenire, & vice versa ex ea ratione data curvæ æquatio deduci potest, sed difficilius quidem. Qua vero ratione in hoc curvas considerandi modo complexiores ex simplicioribus paucissimarum rectarum ope construi poterint ex Propositionibus sequentibus patebit; in quibus demonstrabimus simplices descriptiones Linearum aliquarum quæ methodis prius demonstratis non nisi difficili rectarum & angulorum apparatu delineari possunt.

PROP.

PROP. IX.

Detur punctum S *in plano datæ curvæ* BL*l* *invenire Lineam curvam ductam per concursus tangentium curvæ datæ cum perpendicularibus ex* S *in tangentes demissis.*

CUrvam datam in punctis L & *l* quamproximis contingant rectæ LP & *lp*; in quas ex dato puncto S demittantur normales SP & S*p* Tangentibus occurrentes in punctis P & *p*; ducantur SL, S*l*, P*p* sint *lo*, *pn* perpendiculares in SL, SP, eritque L*ol* triangulum elementare curvæ BL*l* & P*np* triangulum elementare curvæ quæsitæ. Triangula vero SLP & L*ol* similia sunt ob rectos SPL, L*ol* & angulum SL*l* utrisque communem; similia etiam sunt triangula S*np* & P*n*L ob verticales S*np*, P*n*L & rectos SPL, S*p*L; proinde erit P*n* : *pn* : : L*n* : S*n*, adeoque ob angulos S*n*L, P*np* æquales, erunt triangula S*n*L, P*np* similia per *Elem.* & si SR sit perpendicularis in P*p* productam ob triangula æquiangula P*np*, SPR similia erunt triangula P*np*, L*ol*, SPR & S*n*L; adeoque cum eadem sit ratio P*n* ad *pn* quæ L*o* ad *lo* & eadem sit ratio SP ad SR quæ SL ad SP manifestum est ex data ratione SL ad SP in curva BL*l* dari rationem SP ad SR in curva quæsita quæ per puncta P ducitur.

Corol. I. Similiter ex curva quam P perpetuo tangit alia nova perpendiculares in ejus tangentes demittendo construi potest, & ex hac tertia; unde series curvarum infinita ex una quavis deduci potest in unica positione puncti S, & triangula quorum latera sunt semper radii curvarum, perpendicula in tangentes & partes tangentium radiis & perpendiculis interceptæ erunt sibi mutuo semper similia. Proinde data æquatione radiali (seu ratione radii ad perpendiculum) unius in serie dabuntur similes æquationes omnium.

Corol. II. Sicut autem in *Prop.* ex curva BL*l* construximus curvam EP*p* ex EP*p* contraria ratione construi posset curva BLC; erigendo nim. perpendiculares in radios SP & S*p* sibi mutuo occurrentes in L; vel facilius, si detur angulus SP*p* tangentis cum radio, ducendo SL ita ut angulus PSL sit illius anguli SP*p* complementum ad rectum, & ad P normalem radio SP erigendo rectæ SL occurrentem in L; curva enim per omnia

omnia hujusmodi puncta I, ducta erit BLl, ex qua simili ratione alia construi potest perpendicula ad L & l radiis SL & Sl erigendo, & eorum occursus notando. Unde ex quavis curva series utrinque infinita curvarum construi potest puncto S manente immoto; quod si locus puncti S mutetur simul mutabitur integra series. Unde in quavis curva infinitæ sunt positiones puncti S ex quibus singulis infinitæ curvarum series deduci possunt.

Corol. III. Quoniam angulus SPp = SLl, postquam tangens ducitur uni curvæ facile est ducere tangentes omnibus curvis seriei; quippe si constituatur ad punctum curvæ P super radium SP angulus æqualis ipsi SLP, ejus anguli alterum crus erit curvæ tangens in puncto P. Unde postquam curva quam P perpetuo tangit descripta est, facile absque ulteriori tangentium ope reliquæ in serie construi poterunt. Sic curva quam R concursus perpendiculorum ex S in tangentes curvæ EPp demissorum cum tangentibus iisdem perpetuo tangit, facile determinatur ducendo SR angulum RSP constituentem æqualem PSL, & ex P in SR demittendo perpendiculum PR; id enim perpendiculum occurret rectæ SR in puncto curvæ quæsitæ.

Corol. IV. Si curva BLl transeat per S curva puncto P descripta etiam transibit per S, & omnes seriei infinitæ explicatæ per S quoque transibunt; quippe cum coincidit L cum S evanescunt SL & SP, adeoque P coincidit cum S & L.

Corol. V. Ubi curva BLl evadit radio normalis curvæ omnes seriei in eodem puncto radio fiunt normales, & se mutuo contingunt. Quippe ubi BLl evadit normalis in radium coincidit Ll cum lo, adeoque ob similia triangula Lol, Ppn, SLP coincidet Pp cum pn & SP cum SL; quare coincidunt L, Pp, lo, pn & fiunt omnes radio perpendiculares in eodem puncto. Si igitur una aliqua curvarum totius seriei habeat aspidem, omnes in eodem puncto aspidem habebunt & in eodem se mutuo tangent; quare si una quævis curva & transeat per S, & apsidem habeat omnes ex ea deductæ modo *Corol.* 1. transibunt per S & apsidem habebunt; nec in ullis aliis punctis præter S aut apsidem sibi mutuo occurrere poterint.

Corol. VI. Si curva BLl maximam habeat finitam distantiam à puncto S, centro S atque ea distantia tanquam radio ducatur circulus, & omnes curvæ quæ ex BL methodo *Corol.* 1. deduci possunt licet infinitæ sint numero circulo tamen hoc includentur; unaquæque vero extra proxime priorem jacebit, iisque finitum intercedet intervallum: isthuc contingit in omnibus curvis in se redeuntibus & quarum finita est longitudo.

Corol. VII. Hinc patet si una curvarum in se redeat omnes curvas seriei in se necessario redire; unde si prima sit ovalis erunt omnes ovales & Lineæ ordinis paris. Si una abeat in infinitum crure Parabolico omnes simili crure abibunt in infinitum cum tangens cruris Parabolici ad punctum maxime longinquum infinite distet: Unde curvæ hac methodo deductæ ex una quavis data sunt sibi mutuo similes. Si curva BL abeat in infinitum crure Hyperbolico, curva BP erit adhuc ovalis, & ordinis paris, cum tangens cruris Hyperbolici ad punctum maxime distans sit ejus Assymptotos. Unde manifestum est in curvarum harum serie unam tantum deprehendi posse curvam cujus crura possunt esse Hyperbolica, sed reliquæ vel erunt ovales, vel lineæ quarum crura sunt Parabolica.

Corol. VIII. Postquam ducta est curva quam P tangit in una positione puncti S reliquæ quæ ex eadem curva construuntur in alia quavis positione puncti S sic describi possunt; sit S in F & ex S exeat SPN angulus rectus cujus punctum P ducatur per curvam jam descriptam & si SN sit perpendicularis in PN punctum N describet curvam quæsitam.

Prop. X. Problema.

Sit curva BL *Circulus invenire curvam* BP.

SIT C circuli centrum *(Fig. 16.)* BCS diameter circuli quæ transit per datum punctum S; & curva BP describi potest concursu Linearum SP, LP si angulus datus CLP revolvatur circa punctum C & æquali motu recta SP circa polum S, ita ut SP semper parallela sit cruri CL; quæque hac facili ratione geometrice construi potest.

Centro S radio CS describatur circulus HMC; ex S ad circulum educantur radii infiniti ut SM, S*m*, & ex punctis M, *m* demittantur normales MQ, *mq* in HC, sit SF = CL, & sumatur semper in radio SM Linea SP = FQ eritque P punctum in curva quæsita, & similiter infinita curvæ puncta possunt determinari; ducatur enim LE parallela rectæ CS, eruntque triangula LEP, SQM similia ob æquales angulos LEP, MSQ & rectos SQM, LPE; sed æqualia quoque sunt ob æquales rectas LE, CS & SM, adeoque SQ = EP & FQ = SF — SQ = CL (= SE) — EP = SP, & proinde si sumatur in SM Linea SP æqualis rectæ FQ erit P in curva quæsita. Sit PR perpendicularis in SH, sitque PR = y, SR = x & ob triangula similia SPR, SMQ erit SM : SP :: SQ (= SF — FQ) : SR. Unde si SM = a, SF = CL = b erit $a : \sqrt{y^2 + x^2} :: b - \sqrt{y^2 + x^2} : x$, ergo $ax + x^2 + y^2 = b\sqrt{y^2 + x^2}$, unde $x^4 + 2ax^3 + \overline{2y^2 + a^2 - b^2} \times x^2 + 2ay^2x = b^2y^2 - y^4$; quæ æquatio est ad Lineam quarti Ordinis.

Corol. I.

Corol. I. Curva habet punctum duplex in S; sit enim Kk ordinata circuli CMH ad abscissæ punctum F, & ubi M est vel in K vel k coincidit P cum S, adeoque rectæ SK, Sk contingunt arcus duos curvæ concurrentes in S; idem ex prima constructione hinc constat quod LP tangens circuli BL bis transeat per punctum S, & ex æquatione investigata deduci quoque potest. Si S sit intra circulum BLA curva habebit *Punctum* conjugatum in S, si S sit in circulo curva erit *Cuspidata* in S, & si S sit extra circulum curva erit *Nodata* in S.

Corol. II. Sit A punctum ubi circulus BL occurrit rectæ CS, & curva erit perpendicularis rectæ CS in duobus punctis A, B. Quippe circulus BL perpendiculariter occurrit rectæ CS in punctis A, B, adeoque per *Corol.* 5. Propositionis præcedentis curva BP erit perpendicularis rectæ CS in iisdem punctis. Curva BL non in infinitum excurrit sed in se redit ut ex *Corol.* 7. ejusdem Propositionis est manifestum.

Corol. III. Rectæ omnes per S transeuntes & ad curvam utrinque terminatæ sunt sibi mutuo & rectæ AB æquales; producatur SP donec occurrat curvæ in alio puncto G & circulo in m, sitque mT perpendicularis in SH & sumatur $Cf = HF$; erit $SG = FT$ & $FQ = SP$, sed ob triangula similia & æqualia SQM, STm erit $ST = SQ$ & $fT = FQ$, adeoque erit $PG = SG + SP = FT + fT = Ff = 2SF = AB$.

Corol. IV. Ob similia & æqualia triangula SLE, SMQ erit $LP = MQ$; cumque $Pn = Qq$ erit trianglum $LPn = \frac{1}{2} MmqQ$, *i. e.* momentum areæ BZPLB est ad momentum areæ circularis CMQ ut 1 ad 2 adeoque cum simul incipiant fluere erit area integra $BZPLB = \frac{1}{2}CMQ$ & tota area quæ interjacet semicirculo ALB & curvæ BZPSA æqualis erit quadranti circuli radio CS descripti, & proinde tota area terminata recta BA & curva ASPB erit sesquupla semicirculi.

Corol. V. Curva rectificari potest in solo casu quo S & A coincidunt (*Fig.* 17.) & ovalis quæ jacebat inter S & A evanescit & mutatur in cuspidem. Ducantur BL, Bl, cumque parallelæ sint CL, SP erit angulus $PSp = LCl = 2SLl$ & $lo : pn :: \frac{1}{2}SL : SP$; sed $Pp : pn :: SL : SP$ (per *Prop.* 9.) adeoque $Pp = 2lo$, i. e. momentum curvæ BP est ad momentum rectæ BL ut 2 ad 1 cumque simul evanescant BP & BL in B erit semper $BP = 2BL$, adeoque arcus BP erit semper æqualis duplo chordæ arcus circuli correspondentis.

Corol. VI. Curva hac Propositione descripta Epicyclois est (*Fig.* 18.) generata motu circuli (cujus radius est $\frac{1}{2}$CA) revolventis super alium immotum sibi æqualem centro O puncto medio inter C & S descriptum. Sit enim $OH = \frac{1}{2}CA$ & describatur circulus HFM, super quem volvatur alius circulus HDK ei æqualis, & in hujus plano sumatur punctum R ad distantiam à centro æqualem $\frac{1}{2}$CS & punctum R describet Lineam de qua hac Propositione agimus, si in principio descriptionis coincidat N cum H & R cum A. Quippe perveniat circulus revolvens ad positionem in *Fig.* delineatam & contingat Basim in F, sitque

O 2

que CF parallela rectæ CL & punctum describens R erit in concursu P tangentis LP cum perpendiculo SP, nam $Pe = OS = ER$ & angulus $PeF = HOF$; quippe ob tres rectas parallelas SP, OT, CL & æquales OS, OC erit $TP = TL$, adeoque cum rectus sit angulus PTe erit triangulum $eTP = eTL$ & $eP = eL =$ (ob æquales & parallelas Oe, CL) $OC = CS = ER$, & angulus $PeF = FeL =$ (ob parallelas OC, eL) eOS, adeoque arcus $HF = nF$; proinde cum circulus HDN accedit ad positionem nFL coincidit EN cum en & R cum P; curva igitur Propositione hac descripta Epicyclois est generata motu puncti in plano circuli circa circulum æqualem revolventis dati: & si in descriptione Propositionis maneat circulus BLA manebunt circuli iidem HFM & NDK sed erit ER semper æqualis $\frac{1}{2}$CS.

Corol. VII. Curvæ huic recta æqualis duci non potest; Quippe demonstravit M. *Nicole* Epicycloidem hujusmodi æqualem esse Longitudini Ellipseos cujus axis major est $CS + CA$, & axis minor est SA in actis Academiæ *Parisiensis* anni 1707. Ellipsis vero hæc cum axe sua convenit cum S & A coincidunt, quo in casu axis minor $SA = o$ & longitudo curvæ æqualis evadit 2BA quemadmodum *Corol.* 5. demonstravimus.

Corol. VIII. Aliæ vero sunt harum curvarum proprietates non aspernendæ; diametro CS describatur circulus CGS (*Fig.* 19.) & ad curvam BP educatur Linea quævis SM occurrens circulo in G & curvæ in P, Linea PG hinc circulo illinc curva terminata erit semper æqualis datæ Lineæ CA. Quippe si ex M in CS demittatur perpendicularis MQ similia erunt triangula SMQ, SCG, adeoque erit SM ad SC ut SQ ad SG, sed $SM = SC$ adeoque $SQ = SG$. Sed in demonstratione Propositionis ostendimus $SP = FQ = SF + SQ = SF + SG$, unde PG erit æqualis rectæ SF seu CA. Si igitur ex puncto in circumferentia circuli alicujus SGC posito ad ipsum circulum educantur radii infiniti ut SM & in iis hinc & illinc sumantur rectæ GP, Gp æquales datæ Lineæ CA, curvæ hoc pacto delineatæ eæ erunt quas tot variis modis Propositione hac & *Corollariis* præcedentibus construere docuimus. Ex hac curvæ proprietate patet eam esse conchoidem basis circularis quam descripsit D. *de la Hire* in actis Academiæ *Parisiensis* anni 1708, quam etiam tractarunt *Robervallius* & D. *Paschal* eorum tamen nemo quantum novi eam Epicycloidem esse observavit.

Corol. IX. Hujus curvæ arcus aliqui facillime describi possunt ducendo terminum alterum rectæ datæ Gp (quæ semper transit per punctum S) per circulum CGS nam terminus alter p describet arcum curvæ hujus de qua agimus; Circulus SGC bisecat omnes Lineas in S concurrentes & ad curvam utrinque terminatas.

Corol. X. Propositio hæc universaliter reddi potest ostendendo (*Fig.*20.) si angulus datus CNL angulari suo puncto N percurrat circulum, sintque C, S puncta ubicunque in plano circuli posita, & sit SP semper perpendicularis in NL, Lineam quam P perpetuo tangit esse quarti Ordinis. Ducatur circuli ANB diameter AB per punctum C & DS ei parallela per punctum S sit $AB = a$, $AC = e$, $AE = d$, $SE = b$, $PM = y$, $SM = x$, $NU = z$, $CU = u$, eritque $x : y :: u : z :: z + b - y : d + x - u$; adeoque erit $u = \frac{x^2 + dx + y^2 + by}{x^2 + y^2} \times x$, & proinde $x = \frac{x^2 + dx + y^2 - by}{x^2 + y^2} \times y$. Sed ex natura circuli est $u^2 + z^2 = ac + au - 2cu - c^2$, unde $\overline{x^2 + dx + y^2 - by}^2 = \overline{ac - c^2} \times \overline{x^2 + y^2} + \overline{a - 2c} \times \overline{x^3 + dx^2 + y^2 x - byx}$, quæ est æquatio ad Lineam quarti Ordinis. Curvæ quas hoc & præcedentibus *Corollariis* tractavimus eæ sunt quæ ex circulo eadem ratione describuntur qua Hyperbolam defectivam ex Recta *Lemmate* 2. *Partis* 1. deduximus; atque hæ simplicissimæ videntur esse Lineæ quarti Ordinis (si *Conchoidem* excipias) quemadmodum Hyperbolæ defectivæ pro simplicissimis haberi poterint Lineis tertii Ordinis.

Prop. XI. Problema.

Sit BL *Sectio quævis conica, invenire curvam* BP.

Casus I. SIT BL Parabola (*Fig.*21.) & Linea BP erit Hyperbola defectiva tertii Ordinis cujus punctum duplex est in S & Assymptotos unica perpendicularis est axi Parabolæ; curva erit *speciei* 34, secundum enumerationem *Neutonianam*, si S non sit in axe & sit extra Parabolam, erit *speciei* 35 si sit in ipsa curva Parabolæ, & *speciei* 36, si S sit intra Parabolam. Sed si punctum S sit in axe curva habebit diametrum & si S sit extra Parabolam curva erit *speciei* 40, si S sit in vertice Parabolæ curva erit *Cissois Dioclea*, si S sit inter verticem & focum curva erit conchoidalis quæ *Punctum* habet conjugatum ad convexitatem suam eritque *speciei* 42; si denique focus sit inter verticem figuræ & punctum S conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad concavitatem suam eritque *speciei* 43. Hæc omnia hinc facile patent quod si ex foco F parabolæ

rabolæ BL demittantur perpendiculares in tangentes LP, earum concursus cum tangentibus sint semper in recta BN quæ Parabolam tangit in vertice B; unde cum SP sit perpendicularis in tangentem LP parallelæ erunt SP & FN, atque anguli FNP, SPN recti, adeoque per *Lemma* 2. *Partis* 1. Linea puncto P descripta erit Hyperbola defectiva tertii Ordinis habens punctum duplex in S. Per ibidem demonstrata Hyperbola habebit diametrum si S sit in axe parabolæ, seu in recta FA ad BN normali; & ex eodem *Lemmate* & natura Parabolæ constat Lineam habere *Nodum* in S quoties S existit extra parabolam, *Cuspidem* quando est in ipsa Parabola, & *Punctum* conjugatum cum S versatur intra Parabolam.

Casus II. Sit BLl Ellipsis, F & f foci, C centrum, & S punctum in plano datum ex quo perpendiculares SP ducantur in Ellipsis tangentes. Si ex foco F in tangentem LP cadant normales ut FN erit N punctum in circulo super axem Ellipseos tanquam diametrum descripto; nam $CN = CA$ cum angulus $FLN = NLH$, & proinde $FN = NH$, atque sit $FC = fC$, & proinde $CN : fH \; (= Aa) :: FC : Ff :: 1 : 2$. Unde investigatio curvæ descriptæ per puncta P reducitur ad *Corollarium* 10. *Prop.* præcedentis ubi angulus datus FNP angulari puncto N duci supponitur per circuli circumferentiam & SP cadit normalis in NP; unde manifestum est Lineam describi quarti Ordinis cujus æquatio in dicto *Lemmate* investigatur.

Quod si Ellipsis evadat circulus coincidet focus F cum centro C, & curva descripta per puncta P erit Epicyclois quam *Prop.* præcedente fuse tractavimus.

Casus III. Sit BLl Hyperbola & simili plane ratiocinio ostendi potest, si C sit centrum, F & f foci Hyperbolæ sitque recta FN perpendicularis in Tangentem EN, rectam CN esse æqualem dimidio axis transversi Hyperbolæ, adeoque punctum N circulum tangere; unde manifestum est curvam in qua reperitur punctum P eam quoque esse quæ describitur *Corol.* 10. *Prop.* præcedentis & proinde esse quarti Ordinis. Unde universaliter si curva BLl sit sectio conica seu secundi Ordinis curva BP erit quarti Ordinis, nisi quod in speciali casu quo BL est Parabola curva BP sit Ordinis tertii.

Corol. Hinc si methodo *Corol.* 2. *Prop.* 3. ex circulo describatur curva, & S sit ubicunque in circuli plano, curva ea erit sectio conica.

Lemma I.

Ex dato puncto S (Fig. 24.) *ad curvam* APB *duc radios quotcunque ut* SP *& sumatur semper* $S\Pi = 2SP$ *punctum* Π *perpetuo tanget Lineam ejusdem speciei & Ordinis ac est* APB; *idem dicendum est si* $S\Pi$ *sit ad* SP *in data ratione.*

Corol.

2

Corol. Hinc ſi SR (*Fig. Prop.* 9.) cadat ſemper in LP ita ut detur angulus SRL, erit R punctum curvæ ejuſdem ſpeciei ac eſt BP.

PROP. XII.

Revolvatur Linea curva BL *ſuper ſeipſam ut baſim & punctum* S *in ejus plano datum deſcribet Lineam ejuſdem generis ac eſt ea quam* Prop. 9. *determinavimus concurſu tangentium curvæ cum perpendiculis ex* S *in tangentes demiſſis.*

QUippe ſibi *bl*L ſit una quævis poſitio curvæ revolventis & S locus puncti S in eo caſu; cum eadem Linea L*lp* utramque curvam contingat ſi ab initio deſcriptionis punctum *b* applicabatur puncto B manifeſtum eſt angulum SLP = *s*LP & *s*L = SL adeoque & SP = *s*P & 2SP = S*s*; ſed per *Lemma* 2. eadem eſt ſpecies curvæ deſctiptæ motu ipſius P atque puncti cujus diſtantia a S eſt ſemper dupla diſtantiæ SP; unde conſtat curvam ejuſdem generis deſcribi motu puncti S & puncti P adeoque Epicycloidem deſcriptam motu curvæ BL ſuper ſeipſam eſſe curvam ejuſdem generis ac eſt ea *Prop.* 9. ex eadem BL conſtructa.

Corol. 1. Coincidunt igitur curvæ noſtra methodo deſcriptæ cum Epicycloidibus D. *Nicole* deſcriptis motu curvæ revolventis ſupra baſim ſibi æqualem; & hinc quoque facile conſtat hujuſmodi Epicycloidem fore Lineam Geometricam quoties curva cujus revolutione deſcribitur Geometrica eſt; cum curva BP ſit neceſſario Geometrica ſi curva BL cujus tangentium ope deſcribitur Geometrica ſit.

Corol. II. Hinc Epicycloides deſcriptæ motu ſectionis cujuſvis conicæ ſuper ſeipſam facile determinantur. Si Parabola moveatur ſuper aliam ſibi æqualem focus deſcribet Lineam rectam axi parabolæ immotæ perpendiculariter inſiſtentem ad diſtantiam à vertice æqualem diſtantiæ verticis à foco; Parabolæ vero vertex deſcribet *Diocleam Ciſſoidem*, & aliud quodvis punctum deſcribet aliquam Hyperbolarum defectivarum *Neutoni* punctum duplex habentem in ſimili puncto Parabolæ immotæ.

Corol. III. Si Ellipſis ſimili ratione ſupra Ellipſin æqualem revolvatur focus deſcribet circulum centrum habentem in altero foco cujus radius æqualis erit axi Ellipſeos. Aliud vero quodvis datum Ellipſeos plani punctum Lineam deſcribet quarti Ordinis qualem *Corol.* 10. *Prop.* 10. definivimus.

definivimus. Idem quoque de Hyperbola super æqualem Hyperbolam revolvente dicendum; Focus enim alter describet circulum habentem centrum in foco oppositæ sectionis cujus radius erit axis transversus Hyperbolæ: Aliud vero quodvis Hyperbolæ punctum describet Lineam quarti Ordinis *Corol.* eodem *Prop.* 10. definitam.

Lemma II.

Dentur positione recta infinita SD *& puncta* S, A, *centro vero* S *describantur circuli* ABE, DLT *& sumatur arcus* DL *æqualis dato* AB *& in infinitis circulis eodem centro descriptis similiter sumantur arcus dl à recta* SD *æquales dato* AB *& curva per puncta omnia* L, *l ducta erit Spiralis Hyperbolica seu reciproca cujus radii erunt semper reciproce ut anguli quos constituunt cum recta data* SD.

Cum punctum D accedit ad A coincidat punctum L cum B, jungatur SB & universaliter radius quivis SL erit ad SB ut angulus BSA ad LSD; Arcus enim circulorum eodem centro descriptorum sunt in ratione composita angulorum quos subtendunt & radiorum quibus describuntur, & proinde cum ex Hypothesi arcus AB, DL sint æquales, radii SB, SL erunt reciproce ut anguli BSA, LSD.

Corol. I. Cum sit $do : DL :: So : SL$ erit $DL - do\ (= lo) : Lo :: DL : SL$, sed $SP : LP :: lo : Lo$, unde $SP : LP :: AB : SL$.

Corol. II. Hinc $SL \times lo = AB \times Lo$ adeoque areola $2SLl$ erit æqualis rectangulo datæ quantitatis AB in Dd, & proinde area radiis SB, SL & curva BL terminata erit ad rectangulum arcus dati AB in differentiam radiorum AD ut 1 ad 2.

Prop. XIII. Problema.

Ex Spirali Archimedis (Fig. 23.) *Circulo & Recta construere omnes curvas in quibus trianguli* SLP *latera quævis duo sunt semper ad se mutuo in ratione alicujus potestatis radii ad datam quantitatem.*

Hujus Propositionis sunt tres casus vel enim in curva construenda oportet esse $SP : LP :: SL^m : SB^m$, vel $LP : SL :: SL^m : SB^m$ vel $SP : SL :: SL^m : SB^m$.

Casus I. Construenda sit imprimis curva cujus perpendiculum SP est ad tangentem LP in ratione potestatis ipsius radii SL ad datam quamvis quantitatem

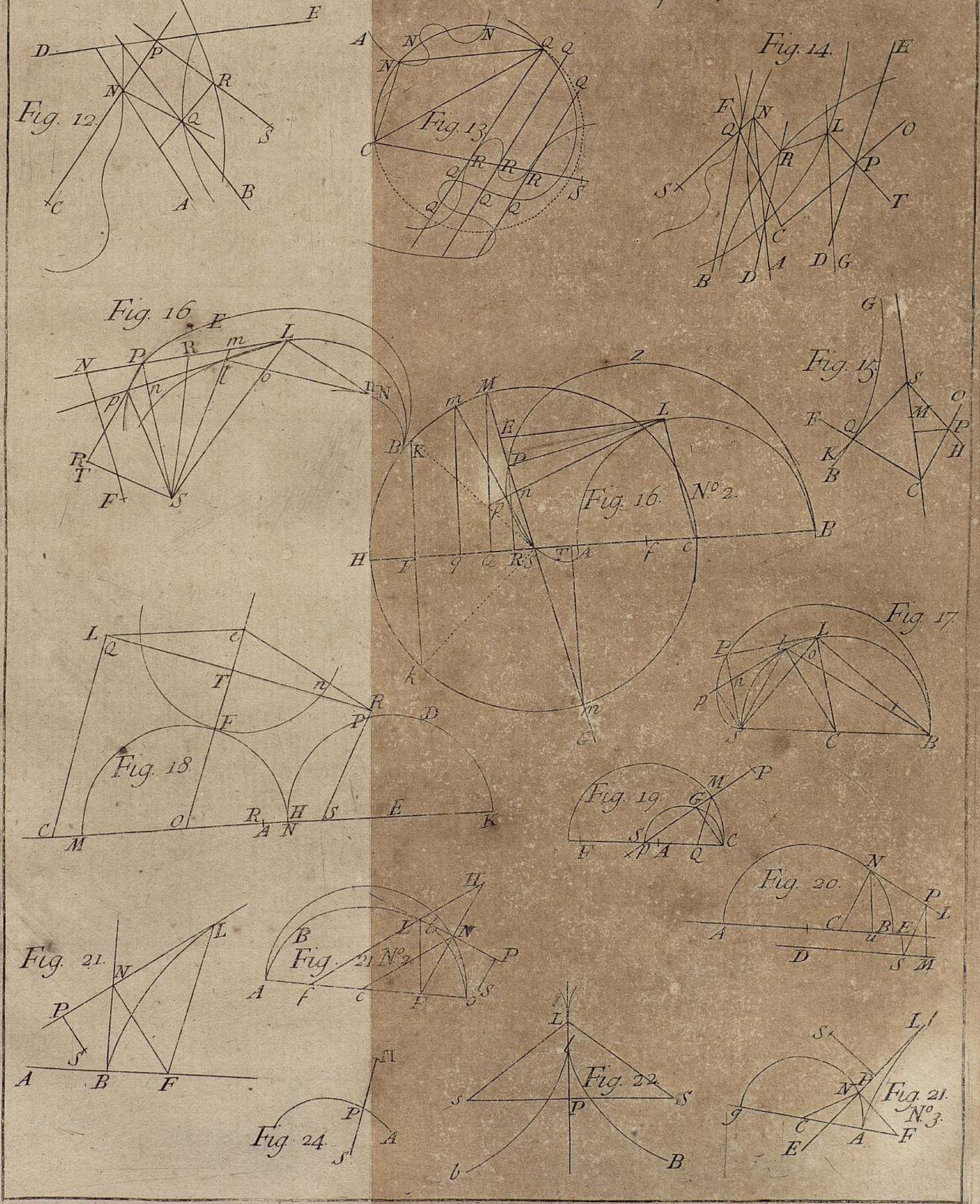


Fig. 12.
Fig. 13
Fig. 14.
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 16. N°. 2.
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21.
Fig. 21 N°. 2
Fig. 21. N°. 3.
Fig. 22
Fig. 24

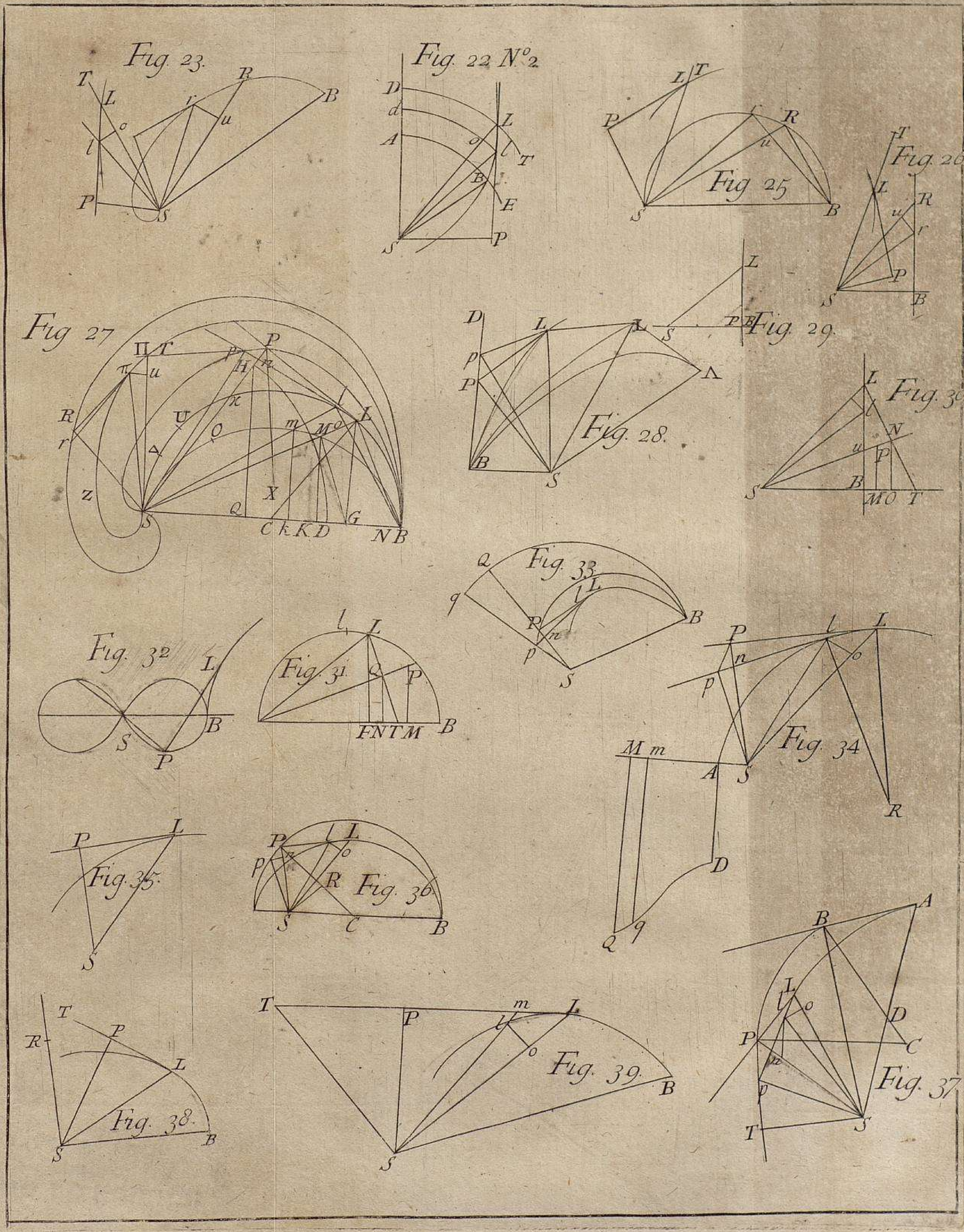


Fig. 23.
Fig. 22 N.° 2.
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 33.
Fig. 32
Fig. 31.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.

quantitatem & Problema per spiralem *Archimedis* construi poterit. Sit curva BRrS spiralis Archimedis eritque Ru : ru :: SB : SR. Sumatur angulus BST ad BSR ut est 1 ad m, & in recta ST sumatur SL ad SB ut $SR^{\frac{1}{m}}$ ad $SB^{\frac{1}{m}}$ & L erit punctum in curva quaesita in qua erit SP : LP :: SL^m : SB^m. Quippe si L, l & R, r sint puncta quamproxima, & lo, ru sint perpendicula, ex l, r in radios SL, SR demissa, erit Lo : Ru :: $\frac{1}{m} SR^{\frac{1-m}{m}} : SB^{\frac{1-m}{m}}$. Cumque BSR : BSL :: m : 1 erit RSr : LSl :: m : 1 adeoque erit lo : ru :: SL : $m \times$ SR :: $SR^{\frac{1}{m}} : m \times SR \times SB^{\frac{1-m}{m}} :: \frac{1}{m} \times SR^{\frac{1-m}{m}} : SB^{\frac{1-m}{m}}$ :: Lo : Ru. Unde Lo : Ru :: lo : ru adeoque triangula Rur, Lol, SLP similia erunt & SP : LP :: ru : Ru :: (ex natura Spiralis *Archimedeae*) SR : SB :: SL^m : SB^m; proinde punctum L erit in curva quaesita cujus tangens erit ad perpendiculum ut data quantitas ad potestatem (m) radii.

Casus II. Oporteat secundo construere curvas quarum tangentes LP sunt ad radios SL in ratione potestatis alicujus (m) radii SL ad datam quantitatem. Sit in *Prop.* 9. BL Spiralis Hyperbolica *Lemmatis* praecedentis quae per casum 1. ex Spirali *Archimedis* construitur sumendo BST = BSR & SL ad SB ut SB ad SR, eritque SL : LP :: SP : TP sed per *Corol.* 1. *Lemmatis* praecedentis est SL : LP :: AB : SP, & proinde erit SP : TP (:: Pp : Pn) :: AB : SP. Unde in curva BP tangentes TP sunt ad radios SP in ratione ipsorum radiorum ad quantitatem datam AB; & in hac curva si radii sumantur in progressione Geometrica erunt longitudines curvarum in progressione Arithmetica, adeoque una est curvarum quas D. *Varignon* Logarithmicas appellat; ex hac curva omnes quarum radii sunt ad tangentes ut data quantitas ad potestatem aliquam radii (sive quarum tangentes LP sunt semper in ratione alicujus potestatis radii) construi possunt, eadem ratione qua construximus in casu 1. curvas quarum SP : LP :: SL^m : SB^m ex Spirali *Archimedis*.

Casus III. In circulo *(Fig. 25.)* SRB ob rectum angulum SRB similia erunt triangula SBR, Rur, adeoque erit Rr : ru :: SB : SR; unde per constructionem *Casus* 1. omnes curvae quarum SL : SP :: SB^m : SL^m sive quarum perpendicula SP sunt semper in ratione potestatis alicujus radii ex circulo deduci possunt, sumendo scil. angulum BST ad BSR ut 1 ad m & SL ad SB ut $SR^{\frac{1}{m}}$ ad $SB^{\frac{1}{m}}$. Quod si loco circuli SRB sumatur *(Fig. 26.)* recta BR (cum triangula Rur, SBR similia sint & Rr : ru :: SR : SB) eadem constructione describi poterint curvae omnes quarum SP : SL :: SB^m : SL^m.

Corol. I. Omnes curvæ quarum LP eſt ad SP vel ad SL in ratione poteſtatis alicujus radii ad datam quantitatem ſunt mechanicæ; cum ſpirales quarum ope conſtruuntur Mechanicæ ſint.

Corol. II. Curvæ omnes caſu 2. deſcriptæ ſi m non ſit æqualis unitati rectificari poſſunt.

Corol. III. Curvæ omnes quarum SP eſt ad SL in ratione poteſtatis alicujus radii ad datam quantitatem ſunt Geometricæ, cum circulus & recta quarum ope deſcribuntur Geometricæ ſint. Eæ quoque omnes habent apſidem ſeu punctum ubi radio fiunt normales; quippe cum $SL = SB$ evadit $SL^m = SB^m$, $SB = SP$ & $Ll = lo$ adeoque curva radio in eo puncto evadit perpendicularis; eæ quoque curvæ hoc habent ſpeciale quod ſingulæ quæ ex una aliqua conſtruuntur methodo *Prop.* 9. ſint ejuſdem generis, *i.e.* ſi in curva BL ſit $SL : SP :: SB^m : SL^m$ erit quoque in curva BP radius SP ad perpendiculum ST in ratione alicujus poteſtatis ipſius SP ad datam quantitatem; unde ex una data infinitæ ejuſdem generis conſtrui poſſunt, ut ex *Prop.* ſequenti luculentius patebit.

Prop. XIV. Problema.

Sit curva BL*l talis ut* SL *ſemper ſit ad perpendiculum* SP *in ratione quantitatis datæ ad poteſtatem aliquam (n) radii* SL (Fig. Prop. 9.) *invenire curvam* BP.

CUM ſit $SP = \frac{SL^{n+1}}{SB^n}$ erit $Ll : lo :: SL : SP :: SB^n : SL^n$, ſed $Pp : pn :: SL : SP :: SB^n : SL^n ::$ (cum $SL = SB^{\frac{n}{n+1}} SP^{\frac{n}{n+1}}$) $SB^n : SB^{\frac{nn}{n+1}} SP^{\frac{n}{n+1}} :: SB^{\frac{n}{n+1}} :: SP^{\frac{n}{n+1}}$. Unde ſi ST ſit perpendicularis in lineam tangentem curvam BP ad punctum P erit $SP : ST :: SB^{\frac{n}{n+1}} : SP^{\frac{n}{n+1}}$, adeoq; $ST = \dfrac{SP^{\frac{2n+1}{n+1}}}{SB^{\frac{n}{n+1}}}$.

Curva vero BP ſic facile ex BL abſque tangentium ope conſtruitur, ſumatur angulus BSP ad BSL in ratione $n+1$ ad 1 & in SP crus alterum iſtius anguli demittatur normalis ex puncto L; occurſus perpendicularis cum dicto crure anguli BSP erit in curva BP: Methodo hujus inverſa & contraria ex data BP conſtrui poſſet BL.

Quippe angulus $PSp : SLl :: \frac{pn}{SP} : \frac{lo}{SL} ::$ (cum $pn : lo :: Pn : Lo$) $\frac{Pn}{SP} : \frac{Lo}{SP}$, ſed $SP = \frac{SL^{n+1}}{a^n}$, adeoque Pn monumentum radii SP erit ad momentum Lo ut $\overline{n+1} \times SL^n$ ad SB^n adeoq; $\frac{Pn}{SP} : \frac{Lo}{SL} :: \frac{\overline{n+1}\, Lo}{SL} : \frac{Lo}{SL} :: n+1 : 1$. Proinde $PSp : LSl :: n+1 : 1$, adeoque $BSP : BSL :: n+1 : 1$. Quippe cum anguli BSP, BSL ſimul evaneſcat coincidentibus una omnibus punctis B, P, & L (quoniam B eſt apſis curvæ) erunt anguli in ratione $n+1$ ad 1 cum momenta ſint in ea ratione data.

Similiter atque conſtruximus ex BL curvam BP, ex BP conſtrui poteſt alia BT cujus radius erit ad perpendiculum in tangentem ut poteſtas $\frac{n}{2n+1}$ rectæ datæ SB ad eandem poteſtatem radii, & ſi ſeries curvarum infinita hac ratione ex BL conſtruatur, ipſa vero curva BL ſit prima in ſerie & m exprimat ordinem curvæ cujuſcunque à BL, erit radius in ea curva ad perpendiculum ut $\frac{n}{mn+1}$ poteſtas rectæ datæ SB ad eandem poteſtatem radii curvæ.

Sed ſi ex curva BL ſecundum *Corol.* 2. *Prop.* 9. curva BN conſtruatur methodo priori inverſa, & ex BN alia eadem ratione deſcribatur prodibit ſimilis ſeries curvarum infinita; & ſi m curvæ cujuſvis ordinem exprimat in ſerie, ſive ejus diſtantiam à BL erit in ea radius ad perpendiculum ut poteſtas $\frac{n}{1-mn}$ datæ rectæ SB ad eandem poteſtatem radii.

Prop. XV.

Sint BP, BL, BN *proximæ in eadem ſerie curvarum ex aliqua* Caſus 3. Prop. 13. *deſcriptarum, dico Longitudinem curvæ cujuſvis* BP *eſſe ad ſummam Longitudinis* BN *penultimæ in ſerie ejuſque tangentis* LN *ut* $n+1$ *ad* 1.

QUippe per *Prop.* 9. angulus $SPp = SLl$ eſtque $LSl : : PSp : : 1 : \overline{n+1}$ per *Prop.* præcedentem. Unde erit $Ll : Pp : : SL : \overline{n+1} \times SP$ ſed $Ll : lo : : SL : SP$ & $Ll : \overline{n+1} \times lo : : 1SL : \overline{n+1} \times SP$, unde $Ll : Pp : : Ll : \overline{n+1} \times lo$, & proinde $Pp = \overline{n+1} \times lo$. Sed $lo = ln - on =$ (cum $on = Ln$ ob angulos Lon & nLo rectos & æquales) $ln - Ln = ln - LN + Nn$; ſed $ln - LN$ eſt ut momentum rectæ LN, & Nn eſt ut momentum curvæ BN, unde lo eſt æqualis ſummæ momentorum curvæ BN, & tangentis LN; ſed $Pp = \overline{n+1}\, lo$, adeoque momentum curvæ BP eſt ad eandem ſummam ut $n+1$ ad 1. Cum vero BP, BN & LN omnes una evaneſcant in apſide B ubi coincidunt puncta N, L P & B manifeſtum eſt quantitates fore in eadem ratione ſeu $BP : BN + LN : : n+1 : 1$; & $BP = \overline{n+1} \times \overline{BN+LN}$.

Corol. I. Similiter oſtendi poteſt $BT = \frac{2n+1}{n+1} \times \overline{BL+LP}$ & univerſaliter ſi dentur longitudines duarum curvarum proximarum in ſerie ex his dabuntur longitudines omnium; quippe menſura cujuſvis curvæ pendet ſemper a menſura penultimæ in ſerie; ita ut ſi BN rectificari poſſit etiam rectificari poſſit BP; atque unum curvarum par omnibus menſurandis ſufficiat.

Corol. II. Unde ſi unius curvæ BN rectificatio ſit poſſibilis, erit dimidia pars ſeriei rectis commenſurabilis; at ſi curvæ BL rectificatio ſit impoſſibilis, dimidia ſeriei pars erit rectis incommenſurabilis; ita ut ſi 0, 1, 2, 3, 4, &c. denotent numeros curvarum incipiendo à BN, eæ curvæ quarum numeri correſpondentes ſunt pares perfectæ rectificationis ſint capaces, quarum vero numeri ſunt impares rectificationem omnem reſpuant. Quod ſi neque BN neque BL ſint rectis commenſurabiles, nulla curva in ſerie integra rectis commenſurari poterit. Quod de de BN & BL diximus, intellige de duabus quibusvis curvis in serie sibi mutuo proximis.

Corol. III. Sit S longitudo curvæ cujusvis, Σ longitudo curvæ hanc proxime præter unam antecedentis, licet neque S nec Σ nec $S - \Sigma$ exhiberi possint in Lineis rectis, differentia tamen ipsius S & $\overline{n+1} \times \Sigma$, quantitas nimirum $S - \overline{n+1}\,\Sigma$, est semper in data ratione ad tangentem curvæ Σ.

Corol. IV. Arcus curvarum seriei rectis incommensurabilis sunt etiam sibi mutuo incommensurabiles; quippe cum eorum differentia $S - \overline{n+1}\,\Sigma$ sit æqualis rectæ; si S & Σ sibi mutuo commensurarentur, tunc differentiæ etiam suæ $S - \overline{n+1}\,\Sigma$, adeoque datæ rectæ commensurabiles essent.

Corol. V. Si curva transeat per S, tum recta LN evanescente in S coincidentibus punctis L, P, N & S, longitudo curvæ $S = \overline{n+1} \times \Sigma$; unde curva quævis erit ad penultimam ut $\overline{n+1}$ ad 1; ita ut totales curvarum longitudines ad primam seu simplicissimam assignabilem habeant rationem.

Prop. XVI.

Curvas simpliciores enumerare quarum perpendicula SP *sunt semper in ratione potestatis alicujus radiorum* SL.

Curvarum quarum SL : SP :: $SB^n : SL^n$ insigniores sunt 1°. Circulus puncto S existente in ejus circumferentia *(Fig. 27.)* Quippe ob angulum S*l*B in semicirculo rectum, erit *l*B perpendicularis in SL & similia triangula S*l*B & L*ol*, adeoque SL : SP :: SB : SL & $n = 1$.

II. Parabola existente S in foco *(Fig. 28.)* quippe ex *Lemmate* 14. *Lib.* 1. *Princip.* perpendiculum ex foco S demissum in tangentem LP medium est proportionale inter SB & SL, adeoque SL : SP :: $\sqrt{SL}$ $\sqrt{SB}$, unde $n = -\frac{1}{2}$.

III. Huc pertinet recta Linea si S extra rectam ponatur, nam SB=SP unde SL : SP :: SL : SB & $n = -1$.

IV. Huc pertinet Epicyclois quæ describitur revolutione circuli super basim sibi æqualem puncto describente existente in circumferentia circuli, si datum punctum S supponatur esse ubi punctum describens tangit basim,

sim, ut ex *Corol.* 5. *Prop.* 10. facile constat cum triangula (*Fig.* 17.) SPT, Ppn, SLP, SBL similia sint, sitque SB : SL :: SL : SP.

V. Harum quoque alia est Hyperbola æquilatera si S sumatur in figuræ centro; quippe sit BL recta positione data, S punctum extra rectam, sitque SB perpendiculum ex S in rectam demissum; ex puncto dato S exeant semper radii SL, sl, & bisecet SN angulum BSL, & in recta SN sumatur SP media proportionalis inter radium SL & datam rectam SB; eritque P in Hyperbola æquilatera cujus centrum S & vertex B.

In SN ex L cadat LN normalis; & similia erunt triangula SLN, SNT, SNO, SuB, SPM, & quoniam SB : SP :: SP : SL, erit $SB^2 : SB :: SP^2 : SL$; sed SO : SN :: SN : SL & SO : SL :: $SO^2 : SN^2 :: SM^2 : SP^2$, unde $SB^2 : SB :: SM^2 : SO$ seu $SO = \frac{SM^2}{SB}$. Sed SO $= SB + \frac{BT}{2}$ (cum BO : BT :: LN : LT) $= \frac{SB + SL}{2} =$ (quoniam $SL = \frac{SP^2}{SB}$) $\frac{SB^2 + SP^2}{2SB}$ & proinde $\frac{SM^2}{SB} = \frac{SB^2 + SP^2}{2SB} = \frac{SB^2 + SM^2 + PM^2}{2SB}$, atque adeo $SM^2 = SB^2 + PM^2$. Sit igitur $SB = a$, $PM = y$, $SM = x$, eritque $x^2 = a^2 + y^2$; unde patet curvam esse Hyperbolam æquilateram cujus centrum est S & vertex B.

Ex hac constructione patet in Hyperbola esse perpendiculum in tangentem ex centro demissum ad radium ut SB^2 ad SP^2. Cum *Corol.* 5. *Prop.* 4. demonstratum sit ex recta BL construi posse omnes quarum perpendicula sunt ad radios ut SB^m ad SP^m sumendo BSN : BSL :: $1 : m$ & $SP = a^{\frac{m-1}{m}} SL^{\frac{1}{m}}$; & in constructione hac BSN : BSL :: 1 : 2, $SP = a^{\frac{1}{2}} SL^{\frac{1}{2}}$ adeoque $m = 2$.

Atque hæ insigniores sunt curvæ quarum perpendicula sunt in ratione potestatis radiorum; reliquæ complexiores sunt & ex his deduci possunt. Ex harum singulis infinitæ curvarum series construi possunt, quarum insigniores aliquæ specialiorem considerationem merentur; initium vero fiat à circulo.

PROP.

Prop. XVII.

Sit curva BL *circulus*, S *punctum in ejus circumferentia datum, invenire curvam* BP *&* *seriem universam quæ ex* BL *secundum* Prop. 9. *construi potest.*

I. Ex Articulo 1. *Prop.* præcedentis constat in circulo esse SL : SP :: SB : SL & $n = 1$. Sed per *Prop.* 14. SP : ST :: $SB^{\overline{n+1}}$: $SP^{\overline{n+1}}$ :: $SB^{\frac{1}{1+1}}$: $SP^{\frac{1}{1+1}}$ :: $SB^{\frac{1}{2}}$: $SP^{\frac{1}{2}}$, unde si r & p denotent universaliter radium lineæ curvæ & perpendiculum in tangentem ex puncto S demissum, sitque SB $= a$, erit in curva BP $r : p : a^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}}$. Hæc vero curva Epicyclois est descripta motu circuli super basim æqualem ubi punctum describens ponitur in circumferentia circuli ut dupliciter constat tum ex *Prop.* 10. *Corol.* 5. tum ex *Prop.* 12. Curva ex qua circulus formatur, ut BP ex circulo, est ipsum punctum B; nam si in lineas omnes tangentes punctum B (*i.e.* ex eo puncto exeuntes) normales demittantur ex S concursus omnium tangentium & perpendicularium erunt in circulo ut ex *Elementis* constat, coincidunt igitur B & N & proinde BP $= \overline{n+1} \times \overline{BN + LN}$ $= 2LN = 2BL$, unde arcus Epicycloidis BP erit æqualis duplo chordæ correspondentis in circulo BL, adeoque integra curva BPS erit dupla diametri SB.

II. Eadem ratione qua construximus Epicycloidem ex circulo describatur SπB ex Epicycloide SPB, constituendo nim. angulum SPπ = SLP, & ex S in lineam Pπ Epicycloidis tangentem demittendo perpendicularem Sπ; ex *Prop.* 14. si curva BL sit ejusmodi ut $r : p :: a^n : r^n$ manifestum est in curva Sπ secunda à circulo fore $r : p : a^{\frac{n}{2n+1}} : r^{\frac{n}{2n+1}}$ :: (cum $n = 1$) $a^{\frac{1}{3}} : r^{\frac{1}{3}}$. Unde S$\pi$: SR :: $SB^{\frac{1}{3}}$: $S\pi^{\frac{1}{3}}$, adeoque SR

$$= \frac{S\pi^{\frac{4}{3}}}{SB^{\frac{1}{3}}}.$$

Ex

Ex L in SB cadat LG normalis & ex G demittatur GM perpendicularis in SL; & si sumatur angulus $B S \Pi = 3 BSL$ & $S\Pi = SM$ erit Π in eadem curva quam construximus ex Epicycloide.

Sit m index æquationis curvæ BP, & ex *Prop.* 6. constabit $B\Pi = \overline{m+1} \times \overline{BL + LP} =$ (cum $m = \frac{1}{2}$) $\frac{3}{2} \overline{BL + LP} = \frac{3}{2} \overline{BL + LG}$; unde $B\Pi$ est sesquupla summæ arcus correspondentis ejusque sinus recti, seu sesquupla ordinatæ Cycloidis (cujus circulus genetrix est BLS & vertex B) ad punctum G. Quod si centro S radio $SD = \frac{3}{2} CS$ describatur circulus occurrens rectæ SP in H, & HQ demittatur perpendicularis in SB, erit $B\Pi = DH + HQ$; nam ob æquales angulos BSP, BCL similia sunt segmenta BCLB & DSHD, adeoque $DH : BL :: DS : CS :: 3 : 2$, & $CL : SD :: LG : HQ$, adeoque $HQ = \frac{3}{2} LG$, unde $BL = \frac{3}{2} \overline{BL + LG} = DH + HQ$. Hinc 1. Longitudo arcus $B\Pi$ est summa arcus circuli DH ejusque sinus recti HQ, & proinde curvæ $B\Pi S$ arcus non possunt rectis commensurari, sed earum mensuræ Rectificationem circuli postulant; 2. Neque arcubus possunt circuli commensurari, nam si $B\Pi$ commensurabiles essent arcubus circuli BLS possent etiam rectis commensurari, cum $B\Pi = \frac{3}{2} BL + \frac{3}{2} LG$. 3. Licet arcus $B\Pi$ & arcus circuli DH rectis sint incommensurabiles, eorum tamen differentia est æqualis assignabili rectæ HQ. 4. Quando coincidunt L, P, Π & S evanescit LG & $B\Pi = \frac{3}{2} \overline{BL + LG} = \frac{3}{2} BLS$, adeoque tota curva BLS sesquupla erit semicirculi BLS, & proinde licet arcus quivis curvæ $B\Pi S$ sint circuli arcubus incommensurabiles, est tamen integra curva ad circulum in ratione 3 ad 2. 5. Nulla pars curvæ assignabilis est commensurabilis totæ nec curva in data ratione secari potest; nam si $B\Pi S$ in assignabili quavis ratione secari posset constaret quadratura circuli. Quippe si $B\Pi = \frac{B\Pi S}{m}$ & $BL = \frac{BLS}{n}$, esset $\frac{B\Pi S}{m} = \frac{3}{2} \overline{BL + LG} = \frac{3}{2n} BLS + \frac{3}{2} LG$, sed $\frac{B\Pi S}{m} = \frac{3}{2m} BLS$, adeoque esset $\frac{3}{2m} BLS = \frac{3}{2n} BLS + \frac{3}{2} LG$, & $\frac{3 \times \overline{n-m}}{2mn} BLS = \frac{3}{2} LG$, adeoque $BLS = \frac{mn\, LG}{n-m}$, & proinde semicirculus BLS esset ad rectam LG in data ratione mn ad $n-m$.

Habemus

Habemus igitur curvam Geometricam cujus bisectione aut trisectione prodiret recta circulo æqualis. Sic si *e. g.* sit Π punctum curvæ BΠS medium ita ut $B\Pi = S\Pi$, & arcus circuli correspondens sit BL, cujus duplo æqualis sit arcus $B\kappa$, erit arcus circuli $S\kappa = 2LG$. Si Π sit punctum curvæ BΠS tale ut $B\Pi = \frac{B\Pi S}{3}$, erit arcus circuli $S\Delta = \frac{3}{2}LG$; & generatim si $B\Pi = \frac{B\Pi S}{m}$ & $BU = mBL$ erit arcus circuli $SU = mLG$.

III. Ex curva BΠS dein construi supponatur BR ad modum *Prop.* 1. eritq; $r : p :: a^{\overline{\frac{n}{3n+1}}} : r^{\overline{\frac{n}{3n+1}}} :: a^{\frac{1}{4}} : r^{\frac{1}{4}}$, ut ex æquatione generali prius *Prop.* 14. demonstrata liquet. Cum vero index æquationis curvæ BΠS sit $\frac{1}{3}$ patet ex *Prop.* 6. $BR = \frac{4}{3}\overline{BP + P\Pi} = \frac{4}{3}\overline{2BL + P\Pi}$. Unde manifestum est curvam hanc rectificari posse & esse ad $2BL + GM$ ut 4 ad 3. Unde tota curvæ longitudo $BRS = \frac{8}{3}SB$.

Ex M in SB cadat normalis MK, & si angulus $BSR = 4BSL$, $SR = SK$ erit R in curva descripta ut satis est manifestum; cum triangula BSL, LSP, PSΠ, ΠSR, sint respective æqualia triangulis BSL, LSG, GSM, MSK. Proinde si super SB describatur curva quarti Ordinis per puncta M transiens cujus æquatio erit $ax^3 = \overline{y^2 + x^2}^2$ sive $y^2 + x^2 = \sqrt{ax^3}$ ubi $y = KM$, $SM = x$ & $SB = a$; erit area curva BΠ & rectis SΠ, SB intercepta $BS\Pi B = 3SMBS$, cum angulus $BS\Pi = 3BSM$ & $\Pi S\pi = 3MSm$ ac $S\Pi = SM$; adeoque tota area $B\Pi zSB = 3BMoS$. Area vero inclusa curvis duabus BΠ & BR ac recta ΠR erit æqualis dimidio areæ BMK, nam $\Pi R = MK$, & $\Pi Rr = \frac{MKkm}{2}$. Ergo BSRB $= \frac{BMK}{2} + 3BSMB + SKM = 4SKM + \frac{7}{2}BMK$, adeoque area tota inclusa curva integra BRS & diametro SB erit æqualis $\frac{7}{2}$ BMOS. Sed ex D. *Neutoni* quadratura curvarum *Formula* 4. *Casus* 7. area BMS investigari potest, atque inde areæ BΠS, BRS innotescent.

IV. Eadem ratione series curvarum infinita continuari potest; & si *n* exprimat distantiam curvæ cujusvis seriei à circulo erit in ea curva $r : p :: a^{\frac{1}{n}} : r^{\frac{1}{n}}$ sive $p = r^{\frac{n+1}{n}} a^{-\frac{1}{n}}$ de qua serie observare licet 1. indicem radii esse numerum fractum cujus Numerator est unitas Denominator numerus qui exprimit curvæ ordinem in serie. 2. Omnes curvas transire per S & B, & in B diametro evadere perpendiculares, ubi omnes se mutuo contingunt. 3. Omnes quarum indicum denominatores sunt numeri pares esse perfectæ rectificationis capaces sint S, Σ, C, Q, &c. series curvarum inversa quarum indicum denominatores sunt numeri pares, sitque in curva S, $r : p :: a^{\frac{1}{n}} : r^{\frac{1}{n}}$ adeoque in curva proxime antecedente $r : p :: a^{\frac{1}{n-1}} : r^{\frac{1}{n-1}}$ & per *Prop.* 15. *Corol.* 5. erit $S = \frac{n}{n-1}\Sigma$ & $\Sigma = \frac{n-2}{n-3}C$ & $C = \frac{n-4}{n-5}Q$. Unde $S = \frac{n}{n-1}\Sigma = \frac{n}{n-1} \times \frac{n-2}{n-3}C = \frac{n}{n-1} \times \frac{n-2}{n-3} \times \frac{n-4}{n-5}Q$. Proinde universaliter erit S ad diametrum SB ut $\frac{n}{n-1} \times \frac{n-2}{n-3} \times \frac{n-4}{n-5}$ &c. : 1 continuando seriem donec denominatorum $n-1$, $n-3$, $n-5$, &c. aliquis evanescat. Sic si quæratur longitudo curvæ cujus indicis denominator est 6 erit $S = \frac{6}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{1} \times SB = \frac{16}{5}SB = 3SB + \frac{1}{5}SB$. Hinc igitur prodit series infinita curvarum Geometricarum perfectæ rectificationis capacium.

4. Ubi n est numerus impar curvæ sunt perfectæ rectificationis incapaces; sed earum arcus quicunque sunt sibi mutuo ipsis totis & rectis quibusvis incommensurabiles. Nihilominus totales curvarum longitudines circulo SLB & sibi mutuo commensurantur, & similiter ac in præcedente articulo demonstratur longitudinem curvæ cujus indicis denominator est n esse ad semicirculum ut $\frac{n}{n-1} \times \frac{n-2}{n-3} \times \frac{n-4}{n-5}$ &c. ad unitatem; sic *e. g.* si $n = 5$ erit curvæ longitudo ad semicircumferentiam SLB ut 11 ad 5.

5. Curva quævis est Epicyclois descripta motu eam proxime præcedentis in serie super basem æqualem ut ex *Prop.* 12. constat; hinc curva BnS quam specialius tractavimus est Epicyclois generata motu vulgaris Epicycloidis supra seipsam.

Perlustratis curvis quæ ex circulo deduci possunt methodo *Corol.* 1. *Prop.* 9. pergimus ad curvas considerandas quæ ex recta Linea deduci possunt. Ex recta vero BD methodo directa *Corol.* 1. *Prop.* 9. nihil nisi punctum B deduci potest ex quo circulus & curvæ jam consideratæ construuntur; methodo vero inversa *Corol.* 2. ejusdem *Prop.* alia prodit series quam nunc aggredimur.

Prop. XVIII.

Sit BP *Linea recta & quærantur curvæ* BL, BN, *&c. quæ ex ea methodo* Corol. 2. Prop. 9. *conſtruuntur.*

SIT recta data BP & ex dato puncto S ad eam educantur radii SP, Sp, ſit SB $= a$, SP $= r$ erit $r : p :: r : a$ ut oſtendimus in *Articulo* 3. *Prop.* 16. proinde $n = -1$, ſed ex *Prop.* 14. manifeſtum eſt in Linea BL eſſe $r : p :: a^{\frac{n}{1-n}} : r^{\frac{n}{1-n}} :: a^{\frac{-1}{+1+1}} : r^{\frac{-1}{1+1}} :: r^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}$. Unde ex *Articulo* 2. *Prop.* 6. patet BL Parabolam eſſe cujus focus eſt in S.

2. Ex Parabola conſtruatur eadem ratione curva BL; quæ per demonſtrata *Prop.* 5. facilius ducitur conſtituendo angulum LSL $=$ LSP $=$ PSB & ducendo LL perpendicularem radio SL ad punctum Parabolæ L occurrentem rectæ SL in L, quod punctum erit curvæ in hac ſerie tertiæ, in qua $r : p :: a^{\frac{n}{1-2n}} : r^{\frac{n}{1-2n}} :: r^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{3}}$. Oſtendimus vero *Prop.* 6. Longitudinem Lineæ cujuſvis BP eſſe ad ſummam vel differentiam longitudinis penultimæ in ſerie & ejuſdem tangentis ut index radii in æquatione curvæ intermediæ unitate auctus ad unitatem; proinde erit BP BL — LL :: $\frac{-1}{2} + 1 : 1 :: 1 : 2$. adeoque B$L$ $=$ 2BP $+$ LL, unde curva BL poteſt rectificari; cum vero Parabola abeat in infinitum manifeſtum eſt omnes in ſerie hac curvarum in infinitum abituras, earumque longitudines totales non poſſe aſſignari. Curva BL habet punctum duplex in axe ubi SL coincidit cum SD ſeu ubi angulus PSB eſt 60 graduum & duo habet crura infinita Parabolica.

III. Quod ſi ex curva BL alia conſtruatur BΛ erit ejus æquatio $r : p :: a^{\frac{1}{4}} : r^{\frac{1}{4}}$ & longitudo BΛ $= \frac{3}{2}$ BL $+$ LL. Unde hæc curva non poteſt rectis commenſurari; ſed exprimi poteſt in rectis & arcubus Parabolicis.

IV. Similiter pergendo prodibit ſeries infinita curvarum in quibus radius erit ad perpendiculum ut $\frac{1}{n}$ poteſtas radii ad datam quantitatem ſi n denotet ordinem curvæ in ſerie, quæ ſi conferatur cum ea *Prop.* præcedentis

I

dentis patebit eandem esse continuatam per indices negativos. In hac serie primæ sunt recta atque Parabola; & proinde similiter ac in priori erit dimidia pars hujus seriei rectis commensurabilis & dimidia à rectificatione Parabolæ seu Quadratura Hyperbolæ pendebit; omnes scil. quarum indices denominatorem habent numerum imparem rectis commensurari possunt; quæ vero denominatorem habent numerum parem rectis & sibi mutuo sunt incommensurabiles.

Prop. XIX.

Sit BL *Hyperbola æquilatera sitque ejus centrum in* S *requiruntur curvæ omnes quæ ex ea construi possunt eadem methodo.*

I. DEmonstravimus in *Articulo* 5. *Prop.* 7. (*Fig.* 32.) æquationem radialem Hyperbolæ ad centrum fore (si a sit semiaxis transversus) $r : p :: r^2 : a^2$: adeoque $n = -2$. Unde æquatio curvæ BP erit $r : p :: a^{\frac{n}{n+1}} : a^{\frac{n}{n+1}} :: a^{\frac{-2}{-1}} : r^{\frac{-2}{-1}} :: a^2 : r^2$. Quæ curva eadem plane ratione ex circulo describi potest qua dicto *Articulo Prop.* 16. Hyperbolam ex data recta construximus.

Sit SLB circulus & S punctum in circumferentia datum ex quo ad circulum ducatur radius SL; bisecetur angulus BSL recta SN atque sumatur in SN recta SP media proportionalis inter SB & SL; eritque P punctum curvæ in qua erit $r : p :: a^2 : r^2$ quæque ex Hyperbola construitur per *Prop.* 9. Hæc curva est quarti Ordinis cumque ab ea pendeat seriei hujus dimidia pars erit operæ pretium ejus æquationem ad axem SB indagare; sit LQT normalis ex L in SN demissa, occurrens diametro SB in T; sint quoque LF, QN, & PM perpendiculares in SB. His positis erit SL : SP :: SP : SB, & proinde SQ : SM :: SP : SB, sed SQ : SP :: SN : SM. Et proinde SN : SM :: SM : SB, sed $\mathrm{SN} = \mathrm{SF} + \frac{\mathrm{ST} - \mathrm{SF}}{2}$ & SF : SL :: SL : SB, unde prodibit $\mathrm{SP}^4 + \mathrm{SB}^2 \times \mathrm{SP}^2 = 2\mathrm{SB}^2 \times \mathrm{SM}^2$ sed $\mathrm{SP}^2 = \mathrm{SM}^2 + \mathrm{PM}^2$ adeoque si $\mathrm{PM} = y$ $\mathrm{SM} = x$ erit $\overline{x^2 + y^2}^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = 2a^2x^2$, adeoque $\overline{x^2 + y^2}^2 = a^2x^2 - a^2y^2$, patet igitur curvam esse quarti Ordinis, & punctum duplex habere in S.

2. Ex hac curva alia deſcribi poteſt in qua erit $r : p :: a^{\frac{2}{3}} : r^{\frac{2}{3}}$ & æquationes curvarum quæ methodo directa ex Hyperbola deduci poſſunt ſeriem conſtituunt, ubi indices ſemper habent numerum binarium numeratorem & numeros impares 1, 3, 5, 7, &c. denominatores. Omnes curvæ quarum indicum denominatores ſunt in ſerie — 1, 3, 7, 11, &c. exhiberi poſſunt in rectis & arcubus Hyperbolicis; quæ vero denominatores habent 1, 5, 9, 13, &c. exhiberi poſſunt in arcubus curvæ modo explicatæ & in rectis, ut ex *Prop.* 15. ſatis eſt manifeſtum.

3. Ex Hyperbola methodo inverſa ea nim. *Corol.* 2. *Prop.* 9. deducitur ſimilis ſeries curvarum ubi indices æquationum erunt in eodem ordine ac in priori ſed negativæ. Harum omnes quarum indicum denominatores ſunt in ſerie 1, 5, 7, &c. exhiberi poſſunt in arcubus Hyperbolicis & rectis; reliquarum menſura pendet à curva prius explicata.

Schol. Series prioribus propoſitionibus inveſtigatæ includunt omnes æquationes quarum indices poſſunt habere numeratorem unitatem, & eæ hac *Prop.* demonſtratæ omnes includunt quæ poſſunt habere numeratorem numerum binarium, quæ ad priores reduci non poſſunt. Proinde jam exhibuimus omnes curvas ſimpliciores quarum æquationes ad generalem $r : p :: a^n : r^n$ reduci poſſunt. At ſi aliæ quærantur curvæ quæ alias exhibere poſſint ſimiles ſeries, innumeræ ex *Caſu* 3. *Prop.* 13. peti poſſunt.

E.g. Si quæratur ſeries curvarum quarum indices numeratorem habere debeant numerum ternarium. Sit BL vel recta vel circulus, ſitque angulus $BSN = \frac{BSL}{3}$ & in SN ſumatur SP *(Fig.* 25, 26.*)* primum duorum mediorum proportionalium inter SB & SL; eritque P in curva cujus æquatio ad S erit $r : p :: r^3 : a^3$ ſi BL ſit recta; ſed $r : p :: a^3 : r^3$ ſi BL ſit circulus, & S in circumferentia; ex his duabus curvis quatuor ſeries deduci poſſunt in quibus indicum denominatores ſequentur ordinem numerorum Arithmeticæ proportionalium quorum differentia erit numerus ternarius. Omnium vero harum curvarum arcus exhiberi poſſunt in rectis & arcubus curvarum duarum ope rectæ & circuli deſcriptarum: Atque his conſtruximus curvas omnes quarum indicum numeratores poſſunt eſſe æquales numero ternario denominatores vero numeri quicunque integri.

Prop. XX.

Circa centrum S (Fig. 33.) *describatur radio quovis* SB *circulus* BQA *occurrens rectæ* SP *productæ in* Q, *ad omnia puncta* Q *erigantur perpendicula ad planum figuræ æqualia ipsi* SP, & *superficies Cylindrica hac ratione constructa æqualis erit rectangulo radii in summam curvæ* BL *ejusqae tangentis* LP.

Quippe cum $pn = lp - ln = lp - LP + \dot{LP} - ln = \dot{LP} + Ll$ cumque (si radius $SB = a$ $BQ = c$ & $Qq = \dot{c}$) sit $pn : \dot{c} :: SP : a$ erit $pn = \frac{SP \times \dot{c}}{a} = L\dot{P} + Ll$; sed $SP \times \dot{c}$ est momentum spatii cylindrici constructi erigendo SP perpendicularem plano figuræ ad Q; est quoque $L\dot{P}$ momentum rectæ LP & Ll momentum curvæ; unde cum simul evanescant spatium cylindricum recta LP & curva BL in B, sintque curvæ BL & rectæ LP momenta ducta in a æqualia momento spatii cylindrici, erit spatium cylindricum æquale rectangulo radii in summam vel differentiam curvæ BL ejusque tangentis LP.

Corol. I. Hinc si curva BL possit rectificari spatium illud cylindricum quadrari poterit; unde plures deduci possunt constructiones spatiorum cylindricorum similium iis quas exhibet D. *de la Hire* in actis Academiæ *Parisiensis* Anni 1708; atque his analogæ Spatiorum cylindricorum quadraturæ plures olim ab eximio elapsi ævi Geometra D. *Jacobo Gregorio Abredonensi* pulcherrime demonstratæ sunt.

Corol. II. Si SPB sit circulus erit spatium cylindricum secundum Propositionem super semicirculum radio SB descriptum æquale duplo quadrati rectæ SB; & spatii portio quævis super BQ constructa æqualis erit rectangulo diametri SB in chordam arcus BP.

Prop.

Prop. XXI.

Sit ut in Prop. 14. *perpendiculum* SP *semper ut potestas aliqua* $(n+1)$ *radii, eritque Radius curvaturæ Lineæ* BL *in puncto* L (Fig. 34.) *ut potestas* $1-n$ *ejusdem radii* SL.

SInt RL, Rl duo radii curvaturæ arcus Ll concurrentes in R, cumque SP, RL & Sp, Rl sint perpendiculares in easdem rectas LP, lp adeoque sibi mutuo parallelæ, erunt triangula LRl, pSn similia & RL : Ll : : SP : pn : : SL : Pp. Sed Ll : Pp : : Lo : Pn, adeoque RL : SL : : Lo : Pn. Cum vero $SP = \frac{SL^{n+1}}{a^n}$ erit Lo : Pn : : $a^n : \overline{n+1} \times SL^n$ unde erit RL : SL : : $a^n : \overline{n+1} \times SL^n$ & proinde $RL = \frac{a^n SL^{1-n}}{n+1}$ adeoque in curvis omnibus quas tractavimus *Prop.* 14, 15, 16, 17 & 18 & 19 radii Oscillatorii erunt semper ut potestas $1-n$ radiorum SL.

Corol. I. Hinc si curva sit Epicyclois *(vid. Fig. Prop.* 17.) quæ ex circulo methodo *Prop.* 17. deducitur erit radius curvaturæ æqualis $\frac{2}{3}\sqrt{a \times SP}$ sive $\frac{2}{3}$SL. Unde curva cujus evolutione describitur facile construi potest erigendo perpendicula tangenti Pπ ad puncta quævis P, & sumendo in perpendiculo $PX = \frac{2}{3}$ SL; erit enim X in ea curva: Atque hinc ostendi posset Lineam quam tanget X fore Epicycloidem similem ad diametrum triplo minorem contrarie sitam; sed hæc ab aliis demonstrata sunt.

Corol. II. Quæcunque sit curva BL si SA sit radius qui perpendicularis est curvæ, & in ea semper sumatur SM = SP, ad punctum M sit MQ perpendicularis semper æqualis radio curvaturæ in puncto L, sitque AD æqualis radio curvaturæ in puncto A erit area ADQM æqualis $\frac{1}{2}\overline{SL^2 - SA^2}$ si SL major sit SA vel $\frac{1}{2}\overline{SA^2 - SL^2}$ si SA major sit quam SL: Nam si MQ, mq sint ordinatæ quam proximæ erit MmqQ æquale SL × Lo quoniam RL : SL : : Lo : Pn, Pn =

Mm &c.

Mm & RL = MQ. Si curva transeat per S & sit SE radius curvaturæ in puncto S erit area DSMQ = $\frac{1}{2}$SL²; atque hinc infinitæ curvarum areæ perfectæ rectificationis capaces deduci possunt.

Sectio IV.

De Viribus quibus Corpora curvas describunt circa data centra.

Prop. XXII.

Describat corpus in medio non resistente curvam BL Prop. 14. *in qua* SP *est ut potestas (n+1) radii* SL *& vis centripeta qua corpus urgetur versus punctum* S *erit semper reciproce ut potestas* 2n+3 *distantiæ.*

PRoducatur in *Fig. Prop.* 14. S*l* donec occurrat tangenti LP in *m* & triangula SP*p*, L*lm* erunt similia ob angulos L*lm* (= S*lp*) SP*p* & angulos PS*p*, *l*L*m* æquales, adeoque erit SP : P*p* : : L*l* : *lm*, unde $lm = \frac{Pp \times Ll}{SP}$. Sed per Theorema *Neutoni* vis centripeta est semper reciproce ut solidum $\frac{SL^2 \times lo^2}{lm}$ adeoque reciproce ut $SL^2 \times \frac{SP \times lo^2}{Ll \times Pp} =$ (quoniam L*l* : *lo* : : SL : SP) $SL \times SP^2 \times \frac{lo}{Pp}$. Sed demonstravimus *Prop.* 15. esse $Pp = \overline{n+1} \times lo$, & proinde vis centripeta erit reciproce ut $\frac{SL \times SP^2}{n+1}$ sive (cum ex Hypothesi sit $SP = \frac{SL^{n+1}}{a^n}$) ut SL^{2n+3}. In omnibus igitur curvis quarum perpendiculum SP est ut radii potestas aliqua *(n+1)* vis centripeta qua corpus urgetur ad S erit reciproce ut potestas 2*n*+3 distantiæ.

Corol. I.

Corol. I. Velocitas corporis eſt ſemper reciproce ut poteſtas $(n+1)$ diſtantiæ; nam velocitas eſt ut arcus dato tempore deſcriptus, tempus vero ut area SLl ſive rectangulum SP $\times$ Ll, adeoque velocitas erit reciproce ut perpendiculum SP & proinde ut poteſtas $n+1$ diſtantiæ, cum $SP = \frac{SL^{n+1}}{a^n}$. Velocitas corporis circulum deſcribentis ad diſtantiam SL eſt ſemper in ſubduplicata ratione rectanguli vis centripetæ in diſtantiam per *Prop.* 4. *Lib.* 1. *Princip.* adeoque erit æqualis $\frac{a^n \times \sqrt{n+1}}{SL^{n+1}}$ ſed velocitas corporis curvam BL deſcribentis ad eandem diſtantiam SL eſt $\frac{a^n}{SL^{n+1}}$; & proinde velocitas corporis curvam BL deſcribentis eſt ad velocitatem corporis circulum ad eandem diſtantiam deſcribentis ut 1 ad $\sqrt{n+1}$ adeoque in data ratione: Atque ea eſt quam corpus cadendo ex infinita diſtantia eadem vi centripeta ad altitudinem SL acquireret.

Corol. II. Hinc ſi (*Fig.* 27.) BL ſit circulus & centrum virium ſit in circumferentia, erit $SP = \frac{SL^2}{SB}$ adeoque $n = 1$ & vis centripeta reciproce ut Quadrato-cubus diſtantiæ, cum $2n+3 = 5$; velocitas erit reciproce ut quadratum diſtantiæ, eritque ad velocitatem corporis circulum ad eandem diſtantiam deſcribentis ut 1 ad $\sqrt{2}$.

Corol. III. Sit BL Epicyclois quam fuſe tractavimus *Prop.* 10. cujus punctum deſcribens eſt in circuli circumferentia; & ſi centrum virium ſit ubi punctum deſcribens tangit baſim erit SP (conferatur *Articulus* 1. *Prop.* 17.) $= \frac{SL^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ adeoque $n = \frac{1}{2}$ & $2n+3 = 4$; proinde vis centripeta corporis Epicycloidem dictam deſcribentis erit reciproce ut Quadrato-quadratum diſtantiæ, velocitas in ſeſquiplicata ratione diſtantiæ & ubique ad velocitatem corporis circulum ad eandem diſtantiam deſcribentis ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$. Si BL alia aliqua ſit curvarum ſeriei infinitæ *Prop.* 17. ex circulo deductæ erit vis centripeta inter rationem reciprocam triplicatam & quadruplicatam & ſemper major triplicata.

Corol. IV. Sit BL recta (*Fig.* 31.) & $n = -1$ & vis centripeta $\frac{a^{2n} \times \overline{n+1}}{SL^{2n+1}} = \frac{a^{2n} \times 1 - 1}{SL^{2n+3}} = 0$. Sit BL Parabola & $SP = a^{\frac{1}{2}} \times SL^{\frac{1}{2}}$, unde $n = -\frac{1}{2}$ & $2n+3 = 2$, adeoque vis centripeta erit reciproce aut quadratum diſtantiæ, velocitas in ſubduplicata ratione diſtantiæ & ad velocitatem corporis circulum ad eandem diſtantiam deſcribentis ut $\sqrt{2}$ ad 1. Si BL ſit alia aliqua curvarum ex recta *Prop.* 18. conftructarum vis centripeta erit femper inter rationem duplicatam & triplicatam & femper minor triplicata cui continuo appropinquat.

Corol. V. Sit BL Spiralis quæ femper radiis occurrit in eodem angulo eritque $SP = \frac{a \times SL}{b}$, (*Fig.* 35.) $n = 0$, & $2n + 3 = 3$; proinde corporis Spiralem hanc defcribentis vis centripeta eft reciproce ut Cubus diftantiæ. Et univerfaliter fi detur aliqua poteftas radii (m) quæratur vero curva aliqua in qua vis centripeta ei poteftati erit proportionalis, fit $n = \frac{m-3}{2}$ & fi curva conftruatur ex *Cafu* 3. *Prop.* 14. in qua $SP : SL :: SL^n : a^n$ vis centripeta in ea curva erit reciproce ut poteftas (m) diftantiæ.

Corol. VI. Hinc quoque fi corpus defcribat Hyperbolam æquilateram vis centrifuga qua urgetur à centro erit ut diftantia; nam in hoc cafu per *Prop.* 16. *Articulum* 5. $SL : SP :: SL^2 : SB^2$ adeoque $n = -2$, & $2n + 3 = -1$, & proinde vis centripeta erit ut diftantia, qui cafus eft particularis *Prop.* 10. *Lib.* 1. *Princip.*

Schol. Cum vis centripeta fit femper reciproce ut folidum $SL \times SP^2 \times \frac{Lo}{Pp}$, hinc in alia quavis curva lex vis centripetæ determinari poteft inveftigando curvam BP quæ *Prop.* 9. ex BL conftruitur. Sit *e.g.* BL fectio conica & (*Fig.* 36.) BP erit per *Prop.* 11. circulus eodem centro diametro ipfo axi tranfverfo defcriptus. Sit femiaxis tranfverfus $CB = a$, femiaxis conjugatus $= b$ eritque $CS = \sqrt{a^2 \pm b^2}$; fit $SL = r$, $SP = x$, fit SR ex puncto S in radium CP perpendicularis, & fimilia erunt triangula SRP, SPL ob rectos angulos SPL, SRP & æquales SPR, PSL; proinde erit $PR = \frac{x^2}{r}$ & $CR = a \frac{\pm x^2}{r}$, $SR^2 = x^2 - \frac{x^4}{r^2}$, fed $CS^2 = SR^2 + CR^2$ adeoque $a^2 \pm b^2 = \frac{a^2 r \mp 2ax^2 + x^2 r}{r}$, unde $x = b\sqrt{\frac{r}{2a - r}}$ fi BL fit Ellipfis & $x = b\sqrt{\frac{r}{2a + r}}$ fi BL fit Hyperbola; fed vis centripeta eft reciproce ut folidum $SP^2 \times SL \times \frac{lo}{Pp} =$ (cum area $SLl = \frac{1}{2} SL \times lo = \frac{1}{2} SP \times Ll$) $SP^3 \times \frac{Ll}{Pp} =$ (cum $Ll : Lo :: Pp : pn$) $SP^3 \times \frac{Lo}{Pn}$, fed $Lo : Pn :: \overline{2a \pm r}^{\frac{3}{2}} \times r^{\frac{1}{2}} : ab$; adeoque vis centripeta erit reciproce ut $\frac{b^3 r^{\frac{3}{2}}}{\overline{2a \mp r}^{\frac{3}{2}}} \times \frac{\overline{2a \mp r}^{\frac{3}{2}} \times r^{\frac{1}{2}}}{ab} = \frac{b^2 r^2}{a}$ & proinde ob $\frac{b^2}{a}$ datam erit vis centripeta

reciproce

reciproce ut quadratum distantiæ SL. Si BL sit Parabola circulus abit in tangentem ad verticem & vis centripeta erit reciproce ut quadratum distantiæ per *Corol.* 4. velocitas corporis sectionem conicam describentis est ut $\sqrt{\frac{2a \mp r}{r}}$ sive in subduplicata ratione summæ vel differentiæ quantitatis quæ est reciproce ut distantia & datæ quantitatis.

Quod si detur vis centripetæ lex & quæratur curva quam corpus velocitate quavis projectum in medio non resistente describet, ea per *Prop.* 39. *Lib.* 1. *Princip.* indagari potest. Sed si vis centripeta sit ut potestas aliqua (m) distantiæ curva innotescet (*Fig.* 37.) absque illius Propositionis ope. Sit vis centripeta reciproce ut solidum $a^{3-m}\,\mathrm{SL}^m$, sitque $\mathrm{SL}=r$, $\mathrm{SP}=x$: Projiciatur corpus à puncto A secundum directionem AB, & sit SB perpendicularis in AB, dicatur $\frac{1}{2\mathrm{SB}^2} \pm \frac{1}{\overline{m-1} \times \mathrm{SA}^2} = \frac{1}{c^2}$. His positis vis centripeta est in puncto L reciproce ut solidum $\mathrm{SP}^3 \times \frac{\mathrm{L}o}{\mathrm{P}n} = \frac{x^3 \dot{r}}{\dot{x}}$, adeoque $a^{3-m}\,r^m = \frac{x^3 \dot{r}}{\dot{x}}$ & $\frac{\dot{x}}{x^3} = \frac{\dot{r}}{a^{3-m}\,r^m}$; quærantur harum Fluentes eritque $\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{c^2} \pm \frac{a^{m-3}}{\overline{m-1} \times r^{m-1}}$, unde $x = c\sqrt{\frac{\overline{m-1} \times r^{m-1}}{\mp a^{m-3}\,c^2 + \overline{m-1} \times r^{m-1}}}$. Unde si vis centripeta sit reciproce ut quadratum distantiæ adeoque $m=2$ erit SP $(=x) = c\sqrt{\frac{ar}{ar \mp c^2}}$. & si ST sit perpendicularis in tangentem curvæ BP erit $\mathrm{ST} = \frac{x^2}{r} = \frac{ac^2}{\mp c^2 + ar}$. Sed per *Prop.* 21. hujus *Partis* est momentum rectæ ST ad momentum rectæ SP ut SP ad PC radium curvaturæ Lineæ BP, *i. e.* $a\sqrt{ar} : c\sqrt{\mp c^2 + ar} :: c\sqrt{\frac{ar}{\mp c^2 + ar}} : \mathrm{PC} = \frac{c^2}{a}$. Proinde radius curvaturæ BP est invariabilis, & Linea BP est circulus, adeoque per *Corol.* *Prop.* 11. Linea BL erit sectio Conica. Ducatur BD constituens angulum $\mathrm{DBS} = \mathrm{ASB}$ & in recta BD capiatur $\mathrm{BC} = \frac{c^2}{a}$ eritque C centrum sectionis conicæ S focus & $\frac{2c^2}{a}$ latus transversum. Similis valor generalis perpendiculi SP investigari potest ex *Prop.* 39. *Lib.* 1. *Princip.* Si enim sit B altitudo loci à quo corpus cadens velocitatem acquireret æqualem ei qua corpus curvam

vam describit in puncto L, erit ea velocitas per *Prop.* dictam & quadraturam Hyperbolæ altioris generis ut $\sqrt{\frac{a^{m-1} \mp r^{m-1}}{a^{m-1} r^{m-1}}}$; sed velocitas in L est semper reciproce ut perpendiculum SP, adeoque erit SP ut $\sqrt{\frac{r^{m-1} \; a^{m-1}}{a^{m-1} \mp r^{m-1}}}$. Si corpus projiciatur secundum quamvis directionem velocitate quam acquireret cadendo ab infinita distantia ad altitudinem suam describet curvam aliquam earum quas *Prop.* 15. consideravimus; nam perpendiculum SP erit ut $r^{\frac{m-1}{2}}$ adeoque ut potestas aliqua radii.

Infinitæ aliæ excogitari possunt methodi particulares, quibus Lineæ aliquæ curvæ complexiores ex simplicioribus construi poterunt præter eam quam hac *Prop.* & præcedenti sectione fuse tractavimus; siquidem vero omnibus immorari non liceat, sufficiat nos eam adhibuisse tanquam reliquarum exemplum quæ insigniora suppeditat theoremata & simul ad motus corporum curvilineos eruendos commodissima est. In rerum natura omnium corporum vires quibus in lineis curvis circumferuntur versus unum idemque centrum diriguntur; atque ea ipsa Phænomena quæ per curvarum ordinatim applicatas ad datas axes explicari solent, si accurate examinentur, patebit ea ad unum centrum etiam referri debere. In natura nulla existit axis ordinata aut abscissa, sed corpus ad distantiam aliquam certa directione motus curvam describens & centrum virium aliquod accurate vel quamproxime immotum. Ex velocitate (quæ semper est reciproce ut perpendiculum in directionem motus corporis) & ipsa motus directione, cujus mensura ex eodem perpendiculo est petenda, pendet natura curvæ data vi descripta, sive lex vis centripetæ in data curva. Proinde methodus hæc curvas considerandi quam præcedentibus Propositionibus aliquot explicavimus ad Geometriam Philosophiæ facilius applicandam commodissima est; cumque simul Lineæ curvæ aliquæ ordinum altiorum, quæ alia ratione non facile describi possunt, ejus ope pulchre construantur, ulteriori hac illustratione digna videbatur cum non satis luculenter explicata sit in *Actis Philosophicis* N° 359. Fatendum tamen rationem radii ad perpendiculum quam pro Lineæ curvæ æquatione usurpavimus, non adeo plene curvam determinare in omni casu ac ejusdem æquationem ad axem positione datam; nam postquam hæc ratio indagata est ulteriori opus est calculo (nisi in casibus specialibus quorum aliquos supra tractavimus) ad curvæ indolem penitus dignoscendam.

Ex *Prop.* 15. qua infinitas curvarum series curvis duabus ejusdem seriei atque rectis mensurari posse demonstravimus, quadraturæ plures facili ratiocinio colligi possunt. Si enim curvæ cujusvis ordinata sit

$\frac{n}{a^{nm+1}}$

$$\frac{\overline{a^{nm+1}}^{\,n}}{\sqrt{\overline{a^{nm+1}}^{\,n} - \overline{r^{nm+1}}^{\,n}}}$$ vel $$\frac{\overline{r^{nm+1}}^{\,n}}{\sqrt{\overline{r^{nm+1}}^{\,n} - \overline{a^{nm+1}}^{\,n}}}$$ ſitque r abſciſſa, area hujus curvæ facile reduci poterit ad aream curvæ cujus ordinata $\frac{a^n}{\sqrt{a^n - r^n}}$ ſeu $\frac{r^n}{\sqrt{r^n - a^n}}$. Porro ſi BL ſit curva ejuſmodi (*Fig.* 38.) ut $LP = \frac{r^2 \sqrt{a^{2n} + r^n a^n}}{ar^n}$ ubi $SL = r$ & ex ea conſtruantur curvæ infinitæ ſumendo BST : BSL : : m : 1 & lineam SR in recta ST ad SB ut SL^m ad SB^m, ſitque $m = sn + 1$, & s ſemper numerus integer, eæ curvæ erunt omnes perfectæ rectificationis capaces. Sed hæc non ſunt hujus loci & curvarum quadraturæ Geometris adeo evaſerunt familiares ut his pluribus explicando operam perderem. Hujuſmodi etenim Problemata quæ non ita pridem ſummorum Geometrarum ingenia vehementer exercuerant facilia fere cujuſque oblectamenta reddita ſunt: Et ſane tanta ac tam ſubita hæc rei Geometricæ incrementa futuris ſæculis ſtupenda videbuntur niſi quodque ſuum reperiat *Neutonum.*

PROP. XXIII.

Deſcribat corpus curvam BL *in medio reſiſtente vi centripeta quavis data, exprimatur ratio vis centripetæ ad vim qua corpus curvam deſcriberet in vacuo quantitate z, eritque Reſiſtentia ut momentum hujus quantitatis ductum in arcum* L*l* (Fig. 39.) *ſi area* BSL *uniformiter fluat.*

SIT L*l* arcus tempore quovis t deſcriptus u velocitas corpors in puncto L, V vis centripeta qua corpus curvam in medio deſcribit, v vis centripeta qua eandem curvam in vacuo deſcriberet; ſit diſtantia $SL = r$, $SP = p$, arcus lo centro S radio Sl deſciptus $= x$, $Lo = y$, Reſiſtentia $= R$, Denſitas $= D$.

His positis si SP sit perpendicularis in tangentem LP & si exponatur vis centripeta per rectam SL erit vis qua velocitas corporis acceleratur ex Gravitate oriunda ut LP, & proinde exponi poterit per $\frac{V\dot{r}}{\dot{y}}$; huic addatur resistentia vel ex ea subducatur prout corpus ascendit vel descendit in curva BL, & summa vel differentia erit vis qua velocitas corporis retardatur in ascensu vel acceleratur in descensu corporis: Proinde ut $\frac{V\dot{r}}{\dot{y}} \pm R = \frac{-\dot{u}}{\dot{t}} = \frac{-u\dot{u}}{\dot{y}}$ cum vis qua velocitas corporis acceleratur sit semper ut velocitatis Fluxio directe & tempus quo fluit reciproce. Sed v est reciproce ut solidum $\frac{SL^2 \times lo^2}{lm} = \frac{p^2 y^2}{lm}$ & $V = \frac{lm}{t^2}$ unde $z = \frac{V}{v} = \frac{p^2 \dot{y}^2}{t^2}$ & $u^2 = \frac{\dot{y}^2}{t^2} = \frac{z}{p^2}$ adeoque $-u\dot{u} = \frac{-\dot{z}}{2p^2} + \frac{z\dot{p}}{p^3} =$ (cum $\frac{\dot{p}}{p^3} = v\dot{r}$ per *Prop.* 21.) $\frac{-\dot{z}}{2p^2} + zv\dot{r} =$ (cum $p^2 = \frac{r^2\dot{x}^2}{y^2}$ & $vz = V$) $\frac{-\ddot{z}y^2}{2r^2\dot{x}^2} + V\dot{r}$, unde $\frac{V\dot{r}}{\dot{y}} \pm R = \frac{-\ddot{z}y}{2r^2\dot{x}^2} + \frac{V\dot{r}}{\dot{y}}$ adeoque $R = \frac{\mp\ddot{z}y}{2r^2\dot{x}^2}$. Proinde si area BLS uniformiter fluit areola $LSl = \frac{1}{2}r\dot{x}$ dabitur & proinde resistentia erit ut $\ddot{z}y$, *i.e.* ut momentum quantitatis z $(= \frac{V}{v})$ ductum in momentum curvæ.

Corol. I. Velocitas $u = \frac{y \times \sqrt{z}}{r\dot{x}}$, unde si detur potentia velocitatis quæ cum densitate composita rationem Resistentiæ constituit dabitur medii densitas; sit Resistentia ut densitas & velocitatis quadratum eritque $D = \frac{\dot{z}}{2z \times \dot{y}}$.

Corol. II. Ex data densitate medii, ejusque gravitate acceleratrice ratio vis comprimentis ad densitatem facile investigari potest; quippe incrementum vis comprimentis oritur ex Gravitate incrementi Fluidi superincumbentis adeoque erit ut incrementi illius Gravitas acceleratrix, moles & densitas conjunctim; unde si vis comprimens dicatur F erit

F = D

$F = DV\dot{r}$; proinde si medium eadem vi acceleratrice supponatur urgeri qua corpus curvam describens dabitur ratio vis comprimentis ad densitatem. Hic obiter notari liceat si medii cujusvis densitas sit compressioni proportionalis fore $\frac{\dot{D}}{D} = V\dot{r}$ & proinde si ordinatæ cujusvis curvæ sint ut vires centripetæ ad distantias curvæ abscissis æquales, erunt illius curvæ areæ densitatum Logarithmi; adeo ut si vis centripeta sit uniformis & $V = 1$ erit $\frac{\dot{D}}{D} = \dot{r}$, atque ipsæ distantiæ erunt densitatum Logarithmi ut olim demonstravit Cl. *Halleyus* eximius Geometriæ Professor *Savilianus*. Quod si curvæ cujusvis ordinatæ sint ut densitates, erunt vires centripetæ reciproce ut subtangentes ejusdem curvæ cum $\frac{D\dot{r}}{\dot{D}} = \frac{1}{V}$.

Atque hujus *Corollarii* ope *Prop.* 21 & 22. *Lib.* 2. *Princip.* cum hujus *Scholio* facile demonstrari possunt.

Prop. XXIV.

Describat corpus curvam aliquam Prop. 14. *quarum perpendicula* SP *sunt in ratione potestatis* $(n+1)$ *radiorum, vi centripeta quæ sit reciproce ut potestas* (m) *distantiæ, eritque medii densitas (si angulus* LST *sit rectus) reciproce ut tangens* LT, *Resistentia ad gravitatem ut* $\overline{2n-m+3} \times LP$ *ad* $\overline{2n+2} \times SL$ *& velocitas ad velocitatem corporis ad eandem distantiam circulum describentis in vacuo ut* 1 *ad* $\sqrt{n+1}$.

Manifestum est ex *Prop.* 22. esse $v = \frac{\overline{n+1} \times a^{2n}}{r^{2n+3}}$ adeoque erit $V : v :: r^{2n-m+3} : \overline{n+1} \times a^{2n-m+3}$ unde $z = \frac{V}{v} = \frac{r^{2n-m+3}}{\overline{n+1} \times a^{2n-m+3}}$, & R =

& $R = \frac{\ddagger Ll \times \dot{z}}{2r^2 \dot{x}^2} =$ (cum $Ll = \dot{y}$) $\ddagger \frac{\overline{2n - m + 3} \times r^{2n-m}\, \dot{r}\, \dot{y}}{\overline{2n + 2} \times a^{2n-m+3}\, \dot{x}^2}$, sed $Ll\ (= \dot{y}) : lo\ (= \dot{x}) :: SL\ (= r) : SP = \frac{r^{n+1}}{a^n}$, atque $Lo\ (= \dot{r}) : lo$ $(= \dot{x}) :: LP : SP = \frac{r^{n+1}}{a^n}$, unde $R = \ddagger \frac{\overline{2n - m + 3} \times r^{-m} \times LP}{\overline{2n + 2} \times a^{-m+3} \times SL}$, sed $V = \frac{r^{-m}}{a^{-m+3}}$, & proinde $R : V :: \ddagger\, \overline{2n - m + 3} \times LP : \overline{2n+2} \times SL$.

Velocitas est æqualis $\frac{\dot{y}\sqrt{\dot{z}}}{r\dot{x}} = \frac{a^{\frac{m-3}{2}}}{\sqrt{n+1} \times r^{\frac{m-1}{2}}}$. Sed velocitas corporis circulum describentis in vacuo ad distantiam SL vi centripeta $\frac{a^{m-3}}{r^m}$ est $\frac{a^{\frac{m-3}{2}}}{r^{\frac{m-1}{2}}}$, per *Prop.*4. *Lib.*1. *Princ.* Proinde velocitas est ad velocitatem corporis circulum ad eandem distantiam in vacuo describentis ut 1 ad $\sqrt{n+1}$.

Densitas est directe ut resistentia & reciproce ut velocitatis quadratum adeoque erit $D = \frac{\ddagger\, \overline{2n - m + 3} \times LP}{\overline{2n + 2} \times SL^2}$ sed $LT : SL :: SL :$ LP, adeoque $D = \ddagger \frac{\overline{2n - m + 3}}{\overline{2n + 2} \times LT}$; proinde densitas est reciproce ut tangens LT.

Corol. I. Si BL sit curva quæ describi posset vi centripeta distantiæ cuivis potentiæ proportionali, erit universaliter densitas medii reciproce ut tangens LT; quippe licet SP non sit ut potestas aliqua radii SL si $v = \frac{a^{s-3}}{r^s}$, sive vis centripeta corporis curvam in vacuo describentis sit reciproce ut potentia quævis s distantiæ, erit $z = \frac{V}{v} = \frac{r^{s-m}}{a^{s-m}}$ & $R =$ $\frac{\ddagger\, \overline{s - m} \times r^{s-m-3}\, \dot{r}\, \dot{y}}{a^{s-m}\, \dot{x}^2}$, & velocitas $u = \frac{\dot{y}^2}{r^2 \dot{x}^2} \times \frac{r^{s-m}}{a^{s-m}}$, unde $D = \frac{R}{u^2}$

=

$=\frac{\mp\dot{r}\times\overline{s-m}}{\dot{y}r}$, sed Lo $(=\dot{r})$: Ll $(=\dot{y})$: SL $(=r)$: LT $=\frac{r\dot{y}}{\dot{r}}$, adeoque $D=\frac{\pm\overline{s-m}}{LT}$, *i.e.* Densitas erit in omnibus iis curvis reciproce ut tangens LT. Atque hinc Densitas medii in quo corpus sectionem quamvis conicam describit vi quavis centripeta versus centrum vel focum tendente innotescit.

Corol. II. In curvis *Prop.* 14. quarum $SP=\frac{r^{n+1}}{a^n}$ est SL : LP :: a^n : $\sqrt{a^{2n}-r^{2n}}$ unde $R=\frac{\mp\overline{2n+3-m}\times\sqrt{a^{2n}-r^{2n}}}{\overline{2n+2}\;a^{n+3-m}\,r^m}$ sive ut $\frac{\sqrt{a^{2n}-r^{2n}}}{r^m}$ & Densitas erit ut $\frac{\sqrt{a^{2n}-r^{2n}}}{r}$ & velocitas reciproce ut $\frac{m-1}{2}$ potestas distantiæ.

Corol. III. Cum sit R : V :: $\overline{2n+3-m}\times LP$: $\overline{2n+2}\times SL$ ut corpus in harum curvarum aliqua moveatur oportet quantitatem $\overline{2n+2}\times R$ minorem esse $\overline{2n+3-m}\times V$; si enim æquales sint erit LP $=$ SL & Lo $=$ Ll adeoque corpus recta descendet ad centrum.

Corol. IV. Si Resistentia sit in ratione Densitatis & Velocitatis seu $R=Du$ erit Densitas ut $\frac{\sqrt{a^{2n}-r^{2n}}}{r^{\frac{m+1}{2}}}$.

Corol. V. Sit circulus *Exemplum* 1 (*Fig.* 40.) sitque centrum virium in circumferentia, atque erit $n=1$ cum sit SL : SP :: SB $(=a)$: SL $(=r)$. Densitas, quæ est reciproce ut LT sive $\frac{SL^2}{LP}$, erit ut $\frac{LB}{SL}$ cum sit LP : SL :: BL : SB. Proinde Densitas erit semper directe ut distantia corporis a Puncto B Centro virium opposito, & reciproce ut distantia ab ipso centro S. Velocitas erit ad velocitatem corporis circulum ad eandem distantiam in vacuo describentis ut 1 ad $\sqrt{2}$. Resistentia $R=\frac{\mp\overline{5-m}\times a^{m-4}\times LB}{4\;SL^m}$ sive ut $\frac{LB}{SL^m}$; eritque ad Gravitatem ut $\mp\overline{5-m}\times BL$ ad 4BS; & densitas si $R=Du$ erit ut $\frac{LB}{SL^{\frac{m+1}{2}}}$. Hinc

1°. Si vis centripeta sit reciproce ut quadratum distantiæ, erit resistentia ad ad Gravitatem ut 3BL ad 4SB sive ut 3Lo ad 4Ll, adeoque erit 4R semper minor 3V; sed si 4R $=$ 3V erit Lo $=$ Ll & corpus directe descendet versus centrum velocitate cujus dupla ea erit quam corpus acquireret casu à distantia infinita; ut ex *Theor.* 10. *Lib.* 1. *Princip.* facile colligitur; adeoque tempus quo corpus cadit à B ad S in medio erit ad tempus quo corpus post casum infinitum in vacuo eandem altitudinem describeret ut 1 ad $\surd 2$. 2. Resistentia & Densitas in puncto B evanescunt; nam Densitas est semper ut $\frac{LB}{SL}$. Proinde corpus unicum tantum circulum in dato medio describere potest, dato enim medio dabitur punctum B in quo ejus Densitas est nulla adeoque circulus BSL.

Corol. VI. Sit BL Spiralis Logarithmica (*Fig.* 41.) quæ in eodem angulo Radiis semper occurrit eritque SL ad SP in data ratione Radii curvaturæ LC ad Radium SL; adeoque si LC : SL :: a : b erit SP $= \frac{SL \times b}{a}$ & $n = o$; proinde Densitas medii, quæ est reciproce ut tangens LT $= \frac{SL^2}{LP} =$ (cum SL : LP :: LC : CS :: a : $\sqrt{a^2 - b^2}$) $\frac{SL \times a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, erit semper reciproce ut distantia SL à centro virium; quæcunque sit virium Centripetarum Lex, si modo sit reciproce ut potentia aliqua distantiæ. Resistentia erit semper in data ratione ad vim Centripetam, nam R $= \frac{\mp \overline{3 - m}}{2a^{3-m}\, SL^m} \times \frac{CS}{LC}$ sed V $= \frac{a^{m-3}}{r^m}$, adeoque R : V :: $\mp \overline{3 - m} \times$ CS : 2CL, & proinde in data ratione; cum ex natura Spiralis detur angulus CLS & ratio CS ad CL. Velocitas est ad velocitatem corporis ad eandem distantiam circulum in vacuo describentis ut 1 ad $\sqrt{n + 1}$, *i.e.* ut 1 ad 1; proinde velocitas corporis ea ipsa est qua circulum in vacuo ad eandem altitudinem describeret & ad eam quam casu infinito acquireret ad eam altitudinem ut 1 ad $\surd 2$. Hinc 1 si Resistentia sit in ratione Densitatis & Velocitatis, & vis centripeta directe ut distantia, erit Fluidum Homogeneum. Quippe in hoc casu est $m = -1$, R $= \frac{2SL}{a^4} \times \frac{CS}{LC}$ & $u = \frac{SL}{a^2}$, adeoque D $= \frac{R}{u} = \frac{2CS}{a^2 \times LC}$, proinde erit invariata ob datam rationem CS ad LC. Unde si corporum motui resistatur in ratione velocitatis & corpus quodvis in oceano nostro projiciatur velocitate æquali ei qua circulum in vacuo ad eandem distantiam describeret; Corpus Spiralem hanc æquiangulum percurret cujus centrum erit in centro terræ si modo Resistentia medii ab initio motus

tus sit major duplo Gravitatis corporis. 2. Sit vis centripeta reciproce ut distantia & quæcunque sit curva si $SP = \frac{SL^{n+1}}{a^n}$ erit Resistentia ad Gravitatem LP ad SL; proinde Resistentia semper debet esse minor vi Gravitatis. Velocitas est semper uniformis; quippe $U = \frac{a^{\frac{m-3}{2}}}{\sqrt{n+1} \times r^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} \times a}$. Densitas est ut Resistentia adeoque reciproce ut distantia sive $R = DU$ sive $R = DU^2$; hæc universaliter obtinent in omni casu quo V est reciproce ut distantia & v reciproce ut potentia quævis distantiæ. 3. Sit vis centripeta reciproce ut quadratum distantiæ, & resistentia erit ad vim centripetam ut CS ad 2CL quemadmodum olim demonstravit D. *Neutonus*, *Prop.* 11. *Lib.* 2. *Princip.* Si $R = Du$ erit Densitas in reciproca sesquiplicata ratione distantiæ; si vero $R = Du^2$ erit Densitas, ut prius universaliter ostendimus, reciproce ut distantia; vis qua Fluidum comprimitur sive pondus Fluidi incumbentis erit ut Densitatis quadratum cum $F = DV\dot{r} = \frac{\dot{r}}{r^3}$, adeoque F reciproce ut r^2. Ut corpus curvam describat necesse est vim resistentiæ minorem esse dimidio vis centripetæ; si enim $2R = V$ erit $CS = CL$, adeoque Spiralis coincidet cum SL, & corpus recta descendet ad centrum velocitate quæ erit ad velocitatem casu infinito ad eandem altitudinem in vacuo acquisitam ut 1 ad $\sqrt{2}$, & tempora descensus erunt in eadem ratione reciproca: Specifica hujus Fluidi Gravitas est reciproce ut Cubus distantiæ.

Corol. VII. Sit BL Epicyclois descripta motu puncti in circumferentia circuli circa alium æqualem revolventis positi; sitque S ubi punctum describens tangit basim, eritque $n = \frac{1}{2}$, adeoque resistentia $= \frac{\overline{4-m} \times LP \times a^{m-3}}{3 \times SL^{m+1}}$, & proinde ut $\sqrt{SB - SL} \times SL^{-m}$. Velocitas est ad velocitatem corporis circulum in vacuo ad eandem distantiam describentis ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$. Densitas si $R = Du^2$ erit ut $\frac{\sqrt{SB - SL}}{SL}$ & si $R = DU$ erit D ut $\sqrt{\frac{SB - SL}{SL^{m+1}}}$. Resistentia est ad Gravitatem semper ut $\mp \overline{4-m}$ LP ad 3SL, sive ut $\mp \overline{4-m} \times$ BN ad 3SB, & proinde 3R semper minor erit $\mp \overline{4-m} \times V$; si enim æquales sint corpus recta descendet ad centrum velocitate quæ semper erit ad velocitatem corporis circulum in in vacuo deſcribentis ad eandem diſtantiam ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$. Reſiſtentia & Denſitas medii evaneſcunt in B.

Corol. VIII. Sit BL Parabola, & Reſiſtentia erit ad vim centripetam ut $\mp\overline{2-m}\times\sqrt{SB-SL}$ ad $\sqrt{SL}$; velocitas erit ſemper ad velocitatem corporis circulum ad eandem diſtantiam in vacuo deſcribentis ut $\sqrt{2}$ ad 1. Denſitas ſi $R=Du^2$ erit ut $\sqrt{\dfrac{SL-SB}{SL^{\frac{3}{2}}}}$ & ſi $R=Du$ erit D ut $\sqrt{\dfrac{SL-SB}{SL^{m+2}}}$. Proinde Denſitas & Reſiſtentia in vertice Parabolæ evaneſcunt.

Corol. IX. Si corpus deſcendat erit ſemper vis centripeta ad reſiſtentiam ut $\overline{2n+1}\times SL$ ad $\overline{2n+3-m}\times LP$, unde ſi $2n+3$ non ſit major m erit reſiſtentia imaginaria. Si corpus aſcendat erit R : V :: $\overline{m-3-2n}\times LP$ ad $\overline{2n+2}\times SL$, adeoque ſi $2n+3$ ſit major m erit reſiſtentia in hoc caſu imaginaria.

Corol. X. Si $m=2n+3$, *i. e.* ſi vis centripeta ſit reciproce ut potentia $2n+3$ diſtantiæ erit reſiſtentia nulla.

Schol. Æquali fere facilitate reſiſtentia inveſtigatur in aliis curvis ex *Prop.* 23. ſit BL (*Fig.* 22. *n.* 2.) Spiralis Hyperbolica in qua LP : SP :: SL : SB, per *Corol.* 1. *Lemmatis* 2. adeoque $SP=\dfrac{ar}{\sqrt{a^2+r^2}}$ & $\dfrac{1}{v}=\dfrac{Lo\times SP^3}{Pn}=\dfrac{\overline{a^2+r^2}^{\frac{3}{2}}}{a^1}\times SP^3=r^3$. In hac curva erit $\dfrac{V}{v}=z=\dfrac{a^{m-3}}{r^{m-3}}$ & proinde $R=\dfrac{\mp\overline{3-m}\times a^{m-3}}{2r^{m-1}}\times\dfrac{\sqrt{r^2+a^2}}{a}$, adeoque ut $r^{1-m}\times\sqrt{r^2+a^2}$; velocitas eſt ut $r^{\frac{1-m}{2}}\times\sqrt{a^2+r^2}$, & Denſitas ſi $R=Du$, eſt reciproce ut $\dfrac{m-1}{2}$ poteſtas diſtantiæ, ſed ſi $R=Du^2$ erit Denſitas reciproce ut $\sqrt{a^2+r^2}$. Hinc ſi vis centripeta ſit ut diſtantia erit Denſitas (ſi $R=Du$) ut diſtantia, ſi vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia erit Fluidum homogeneum; ſit vis centripeta reciproce ut Quadratocubus diſtantiæ, eritque $\dfrac{m-1}{2}=2$, adeoque Denſitas erit reciproce ut quadratum diſtantiæ ſi corpus aſcendat in Spirali. Theorema generale *Prop.* 23. qua Reſiſtentia & Denſitas medii ex data curva & vi centripeta facile

5 inveſtigari

investigari possunt ante aliquot annos inveni priusquam Tractatus Cl. *Bernouilli* inclyti Matheseos Professoris *Basiliensis* in Commentariis Academiæ *Parisiensis* de eadem materia evulgati ad manus pervenerant; nec quidem difficile fuerat hæc ex ipsis *Princip. Neutoni, Lib.* 2. *Prop.* 10 & 11. eruere. Cum vero Cel. Viri qui materiam hanc soli tractarunt motus corporum in Spirali tantum logarithmica consideraverint; idem in aliis aliquibus curvis simplicissimi hujus Theorematis ope indagare videbatur operæ prætium.

PROP. XXIV. PROBLEMA.

Describat corpus curvam quamvis datam AMB (*Fig.* 44.) *vi centripeta uniformi tendente ad centrum maxime longinquum invenire velocitatem corporis, Resistentiam ac Densitatem medii.*

SIT AE axis curvæ Horizonti parallela, & vis centripeta agat secundum directionem ordinatarum PM, *pm*. Fluat area APM uniformiter, sitque PM $= r$, AP $= x$, P$p =$ mQ $= \dot{r}$, M$m = \dot{y}$ eritque mR $= \ddot{r}$, & vis centripeta v qua corpus curvam describeret in vacuo erit ut $\frac{\ddot{r}}{\dot{x}^2}$, adeoque $z = \frac{V}{v} = \frac{\dot{x}^2}{\ddot{r}}$, cum V $= 1$; adeoque Resistentia quæ est ut $\ddot{z}y$ erit æqualis $\frac{\mp \dot{y}\dddot{r}}{2\ddot{r}^2}$. Velocitas corporis est ut $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\ddot{r}}}$; & proinde si $R = Du^2$ erit $D = \frac{\dddot{r}}{2\ddot{r}\dot{y}}$. Resistentia vero erit ad vim centripetam ut $\dot{y} \times \dddot{r}$ ad $\ddot{r}^2$.

Corol. I. Hinc si AMB sit circulus Centro C Diametro AB descriptus. Sitque CP $= x$, PM $= r$; erit $r^2 = a^2 - x^2$ unde $\ddot{r} = \frac{\dot{\overline{a^2 - x^2}}}{\overline{a^2 - x^2}^{\frac{3}{2}}}$,

$\dddot{r} =$

$\ddot{r} = + \frac{3a^2 x\dot{x}^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}}$ & $\dot{y} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, & proinde $R = \frac{3x}{2a}$ & Resisteutia ad Gravitatem ut 3CP ad 2CB; velocitas est ut $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\ddot{r}}}$ adeoque in subduplicata ratione ipsius r; Densitas si $R = Du^2$ est ut $\frac{3ax}{2ay}$ adeoque (ob triangula similia MPC, MCT) ut tangens MT; corpus in hoc circulo descendere potest à D ad A sed ex A ad D hac vi centripeta ascendere nequit.

Corol. II. Describat corpus Parabolam vel Hyperbolam (*Fig.* 44.) cujuscunque dignitatis, sitque $x = r^m$, & si ordinatæ r parallelæ sint directioni vis centripetæ erit Densitas reciproce in subduplicata ratione ipsius r, si $R = Du$; sed si $R = Du^2$ erit Densitas reciproce ut tangens terminata puncto contactus M & axi vel Assymptoto parallela Horizonti.

Corol. III. Sit AMB Logistica (*Fig.* 47.) sitque Assymptotos perpendicularis Horizonti & $\frac{\dot{r}}{a} = \frac{\dot{x}}{x}$ ex natura curvæ, adeoque $\ddot{r} = \frac{2a\dot{x}^3}{x^3}$, $\ddot{r} = \frac{a\dot{x}^2}{x^2}$ & $\dot{y} = \frac{\dot{x}}{x}\sqrt{a^2 + x^2}$. Proinde $R = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$ adeoque resistentia est ut tangens MT. Velocitas est ut $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\ddot{r}}}$ adeoque ut tangens MT; & proinde Densitas erit constans & fluidum homogeneum si $R = Du$; sed si $R = Du^2$ erit Densitas reciproce ut tangens MT: Corpus igitur in Fluido homogeneo projectum velocitate, cujus pars verticalis est æqualis terminali corporis cadentis, describet curvam Logarithmicam si resistentia sit in ratione velocitatis quemadmodum olim asseruit Cel. *Hugenius* ad finem Tractatus de Causa Gravitatis.

Corol. IV. Describat corpus curvam cujus constructionem ex Hyperbola deduxit D. *Neutonus*, *Prop.* 4. *Lib.* 2. *Princip.* Sit $R = r$ (*v. Fig.* apud *Neutonum*) $CR = x$, $CD = a$, $DG = b$, ordinatæ Hyperbolæ $TR = z$, $DE = c$, cumque $Rr\ (= r) = \frac{GELT}{N}$ erit $\dot{r} = \frac{ab - cx}{Nx}\dot{x}$, $\ddot{r} = \frac{-ab\dot{x}^2}{Nx^2}$ $\dddot{r} = \frac{+2ab\dot{x}^3}{Nx^3}$, & proinde $R = \frac{N^2 x\dot{y}}{ab\ \dot{x}} = \frac{N^2}{ab} \times rL$. Proinde

Resistentia

ſiſtentia eſt ut tangens curvæ; velocitas eſt ut $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\ddot{r}}} = \sqrt{\frac{N}{ab}} \times \frac{x\dot{y}}{\dot{x}}$ adeoque in eadem ratione: Unde ſi $R = Du$ erit Denſitas invariata & fluidum homogeneum; & proinde curva ea eſt quam projectile in medio ſimilari deſcribere poſſet vi centripeta uniformi tendente ad centrum infinite diſtans ſi motui corporis reſiſteretur in ratione velocitatis.

Ex hac *Prop.* demonſtrari poſſunt omnia quæ ſerierum ope deduxit D. *Neutonus Prop.* 10. ejuſdem Libri. Ex *Prop.* 23. inveniri poteſt Regula generalis qua Reſiſtentia & Denſitas medii inveſtigari poſſunt cum corpus curvam deſcribit vi quavis centripeta non uniformi tendente ad centrum maxime longinquum; ſed his non diutius immorabimur.

Hac Sectione duo Problemata inſigniora Philoſophiæ Mathematicæ tractavimus eo præſertim conſilio ut appareat uſus Linearum curvarum in Philoſophia Naturali; neque hæc à propoſito noſtro aliena habuimus quod his explicentur methodi Lineas curvas deſcribendi elegantiſſimæ utpote quæ ab ipſa natura uſurpantur, nec arte quavis videntur poſſe imitari; Quodque hinc ſimpliciores derivari poſſint Ideæ deſcriptionis curvarum aliquarum admodum complexarum quam ex alio quovis fonte.

SECTIO V.

De Deſcriptione Linearum Geometricarum per data Puncta.

LEMMA III.

Linea Ordinis (n) occurrere poteſt Lineæ ſecundi Ordinis in punctis duntaxat (2n) & Lineæ tertii Ordinis in Punctis tantum 3n.

SIT $y^n + \overline{ax + b} \times y^{n-1} + \overline{cx^2 + dx + e} \times y^{n-2}$, &c. $+ \overline{kx^{n-1} + lx^{n-2}}$ &c. $\times y + mx^n + px^{n-1}$, &c. $= 0$. Æquatio generalis ad Lineam Ordinis (n) ubi x, y deſignant Lineæ abſciſſam & ordinatam a, b, d, c, &c. datas denotant quantitates. Sit $y^2 + \overline{Ax + B} \times y + Cx^2 + Dx + E = 0$ æquatio generalis ad Lineam ſecundi Ordinis. In prima æquatione pro y^2 ſubſtituatur valor ejus quæ ex ſecunda conſequitur; pro

pro y^n, y^{n-1}, y^{n-2} similiter substituantur in æquatione ad Lineam Ordinis (n) valores earum quæ ex secunda deduci possunt & hujusmodi operatione prodibit æquatio in qua erit y unius dimensionis; unde valor eruetur ipsius y hujus formæ $y = \frac{Kx^n + Lx^{n-1}, \&c.}{Hx^{n-1} + Gx^{n-2}, \&c.}$ Loco y in æquatione ad Lineam secundi Ordinis substituatur hic valor & in æquatione resultante abscissa x erit dimensionis $2n$. Sed ubi Linea Ordinis (n) & Linea Ordinis secundi sibi mutuo occurrunt earum abscissæ & ordinatæ ad eandem axem fiunt æquales; & proinde æquatio hæc ostendit valores abscissæ varios esse $2n$, quibus Lineæ dictæ sibi mutuo occurrere possunt; sed non posse esse plures. Unde harum curvarum occursus possunt esse $2n$ & nunquam plures.

Sit $y^3 + \overline{Ax + B} \times y^2 + \overline{Cx^2 + Dx + E} \times y + fx^3 + gx^2 + hx + i = 0$. Æquatio generalis ad Lineam tertii Ordinis: Et in æquatione ad Lineam Ordinis (n) scribe pro y^n, y^{n-1}, y^{n-2}, y^2, &c. Valores quæ ex hac consequuntur & exterminabuntur omnes dimensiones ordinatæ y præter y^2 & y; in hujus coefficiente erit x dimensionis $n-1$, in coefficiente illius dimensionis $n-2$. Sint m, p, r quantitates quæ componuntur ex dimensionibus $n-2$, $n-1$, n abscissæ & omnibus inferioribus. Sintque i, h, k coefficientes terminarum y^2, y, y^0 in æquatione proposita ad Lineam tertii Ordinis; eritque 1. $y^3 + iy^2 + hy - k = 0$. 2. $my^2 + py - r = 0$. Ducatur prima in m & secunda in y eorumque differentia dabit $y = \frac{pkm - r^2 - hmr}{\overline{mi - p} \times r - m^2 k}$. In æquatione secunda pro y scribe hunc ejus valorem & dein æquationem reducendo prodibit $mi^2 r^2 - ipr^2 - 2krm^2 i + k^2 m^3 - p^3 k \times \overline{mi - p} + prh \times \overline{mi - p} - pkm^2 h + pkrm - r \times \overline{hm + r}^2 = 0$. Sed in valoribus quantitatum m, p, r, k, h, e abscissa x erat dimensionum $n-2$, $n-1$, n, 3, 2, 1 respective; adeoque si substituantur earum valores, æquatio prodibit dimensionis $3n$ abscissæ x sed non plurium. Proinde concursus Lineæ Ordinis (n) & Lineæ tertii Ordinis possunt esse $3n$ & nunquam plures.

Corol. I. Hinc Linearum Ordinum m & n occursus videntur esse mn. Si altera sit Linea Parabolici generis manifestum est earum occursus fore mn; sit enim $y = x^m$ & $y^n = x^{mn}$ unde exterminando y ex altera æquatione evadet x dimensionum mn. Cumque occursus plures nunquam esse possint Linearum Ordinis (n) atque Ordinis vel secundi vel tertii regula universaliter ad altiores ordines extendi posse videtur. Omnes altiorum curvarum casus quos adhuc tentavimus idem probant; universalem vero hujus rei demonstrationem adhuc frustra quæsivimus propterea quod difficile sit divisores in arduis æquationibus invenire.

Corol. II.

Corol. II. Linea Ordinis (n) occurrere poteſt aliæ ejuſdem Ordinis in punctis n^2. Proinde duæ Lineæ Ordinis (n) per eadem puncta n^2 tranſire nonnunquam poſſunt; adeoque puncta data quorum numerus eſt $\frac{1}{2}\overline{n^2+3m}$ non ſufficiunt ad Lineam Ordinis (n) ita determinandam ut unica ſit curva quæ per ea data puncta duci poſſit: Cum vero coefficientes in æquatione generali ad Lineam Ordinis (n) ſint $\frac{1}{2}\overline{n^2+3n}$, patet ſi plura dentur puncta, Lineam Ordinis (n) per ea forſan duci non poſſe & Problema reddi poſſe impoſſibile. Sic novem puncta non adeo plene determinant Lineam Ordinis tertii ac quinque Lineam Ordinis ſecundi, decem tamen ad Lineam tertii Ordinis determinandam nimia ſunt.

Corol. III. Hinc ſi punctorum quæ ad Lineam Ordinis (n) determinandam proponuntur ſint $nr+1$ in Linea Ordinis inferioris (r) Problema vel erit impoſſibile vel conficitur ope Lineæ illius Ordinis (r) & alterius Lineæ Ordinis $(n-r)$ per puncta n^2-r-1 deſcriptæ. Si enim Linea Ordinis (n) per data puncta duci poſſet concurſus ejus Lineæ & alterius Ordinis (r) poſſent eſſe $nr+1$; qui plures nr eſſe nequeunt.

Corol. IV. Linea Ordinis (n) nequit habere puncta duplicia plura $\frac{1}{2}\times\overline{n^2-3n+2}$. Quippe Linea Ordinis $(n-2)$ duci poteſt per puncta $\frac{1}{2}\overline{n^2-3n+2}+n-2$; unde ſi Lineæ Ordinis (n) puncta $\frac{1}{2}\overline{n^2-3n+2}+1$ duplicia eſſent; Linea Ordinis (n) occurreret Lineæ Ordinis $(n-2)$ per ea duplicia & alia ſimplicia $n-3$ deſcriptæ in punctis n^2-2n+1; earum vero occurſus nequeunt eſſe plures n^2-2n. Linearum igitur Ordinum 3, 4, 5, &c. puncta duplicia non poſſunt eſſe plura 1, 3, 6, &c.

Corol. V. Si in tribus Lineæ Ordinis (n) punctis concurrant arcus $(\frac{1}{2}n)$ & in quarto arcus $(\frac{1}{2}n-1)$ reliqua omnia puncta Lineæ erunt ſimplicia.

Prop. XXV. Problema.

Lineam Ordinis (n) ducere per data puncta $2n+1$, in quorum aliquo oportet arcus curvæ $(n-1)$ concurrere.

Imprimis data puncta Lineam ita determinare ut unica ſit curva quæ Problemati ſatisfacere poteſt hinc patet; quod ſi duæ Lineæ Ordinis (n) per eadem puncta $2n+1$ tranſirent, & in eodem puncto nodum arcuum curvæ $n-1$ ſe mutuo decuſſantium haberent, concurſus harum Linearum forent n^2+1; qui plures n^2 eſſe nequeunt. Linea quarti Ordinis ducitur per novem puncta, quorum unicum eſt triplex, eadem ratione ope Lineæ tertii Ordinis, Nodum ibidem habentis, qua Linea ea tertii Ordinis ducitur

ducitur per septem puncta ope sectionis conicæ secundum *Corol.* 9. *Prop.* 1. hujus Partis. Sint C, S, B *(Fig.* 47.) tria datorum punctorum sitque S punctum triplex; jungantur CB, CS, BS & circa Polos C, S rotentur anguli BCS, BSC. Crurum CB, SB concursus applicetur successive reliquis sex punctis per quæ Linea est ducenda; & interea notentur sex puncta in quibus crura CS, SC se mutuo decussant; per hæc sex puncta atque Polum S ducatur Linea tertii Ordinis punctum duplex habens in S; & si per eam ducatur concursus crurum CS, SC concursus crurum CB, SB describet Lineam quarti Ordinis punctum triplex habentem in Polo S transeuntem per reliqua octo data puncta. Similiter ope Lineæ quarti Ordinis punctum triplex habentis, ducenda est Linea quinti Ordinis, puncto quadruplice donata, per undecim puncta; & universaliter Linea hujusmodi Ordinis *(n)* ducenda est ope alterius Ordinis *(n—1)* punctum multiplex habentis arcuum *(n—2)* concurrentium in eodem Polo; hæc vero describenda est ope alterius Ordinis *(n—2)* & sic deinceps donec ad sectiones Coni perveniatur quæ rectarum ope describi possunt.

PROP. XXVI. PROBLEMA.

Ducere Lineam Ordinis (2n) per puncta quot sufficiunt ad determinandam Lineam Ordinis (n) & tria alia quæ singula nodi sunt arcuum curvæ (n) se mutuo decussantium.

SInt C, S, B *(Fig.* 47.) tria puncta multiplicia data; jungantur CS, CB, SB & circa Polos C, S rotentur anguli BCS, BSC; crurum CB, SB concursus applicetur successive punctis datis quæ sufficiunt ad determinandam Lineam Ordinis *(n)* & notentur puncta in quibus reliqua interea crura se mutuo decussant; per hæc puncta dein ducatur Linea Ordinis *(n)* & si concursus crurum CS, SC per eam ducatur, concursus crurum CB, SB describet Lineam Ordinis 2*n* per data puncta transeuntem, per *Prop.* 3. hujus Partis. Plures nonnunquam erunt Lineæ quæ huic Problemati satisfacere poterint.

PROP.

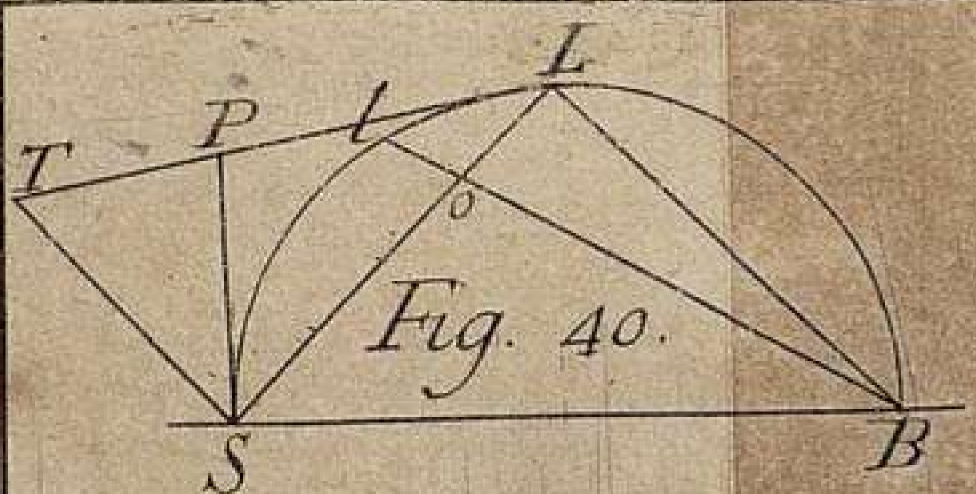


Fig. 40.

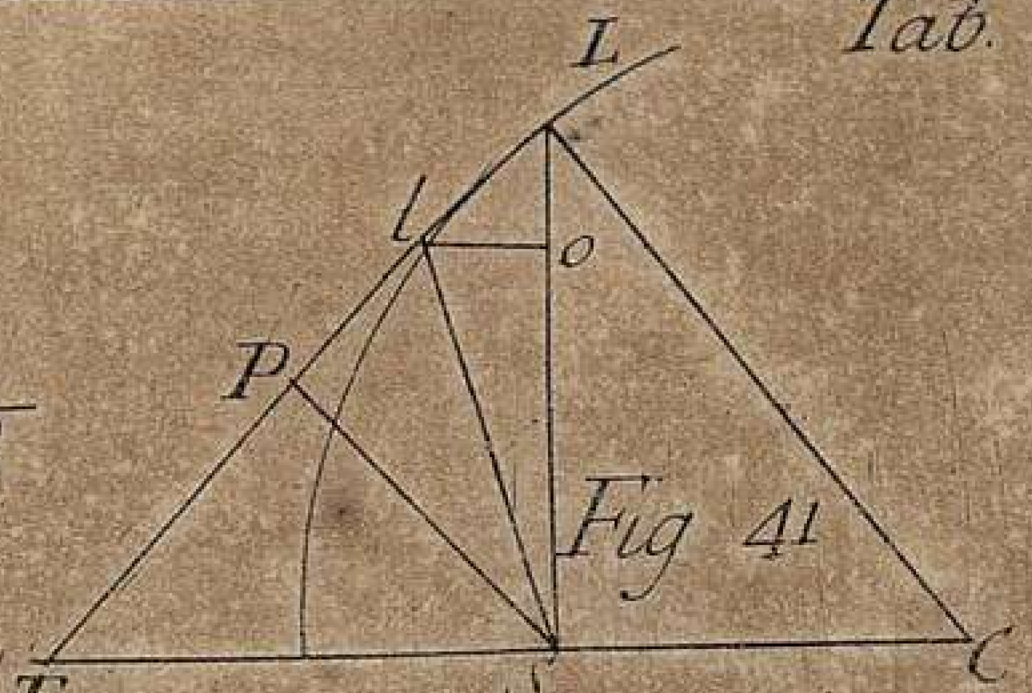


Fig 41.

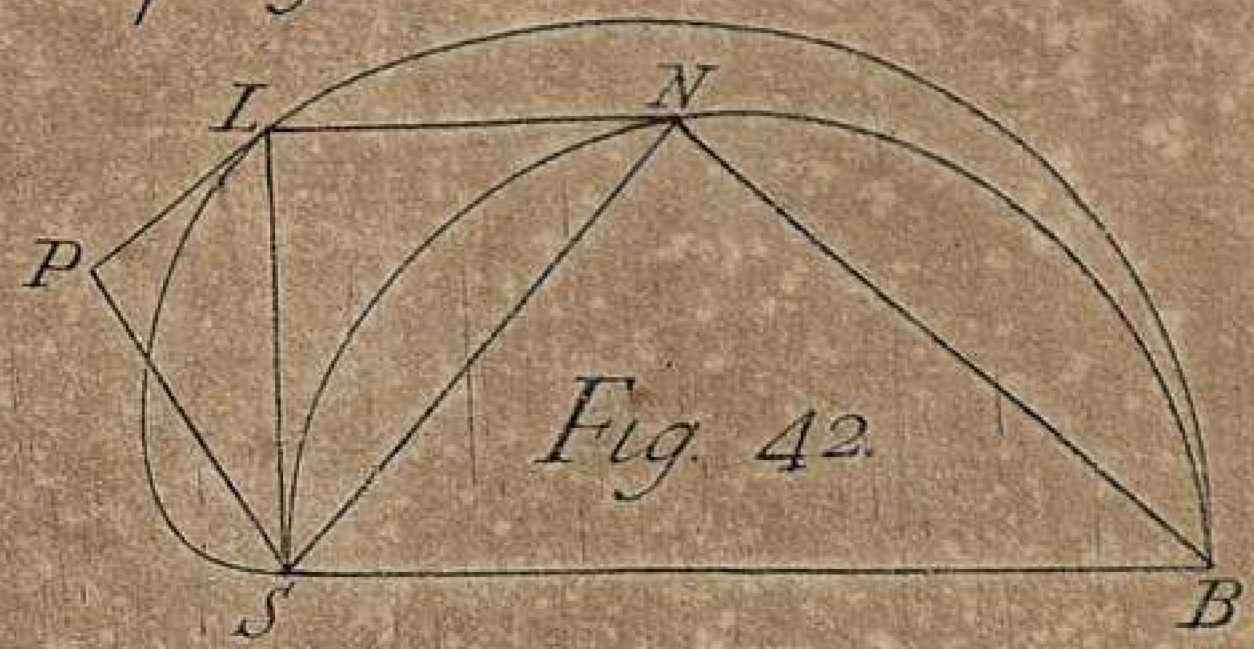


Fig. 42.

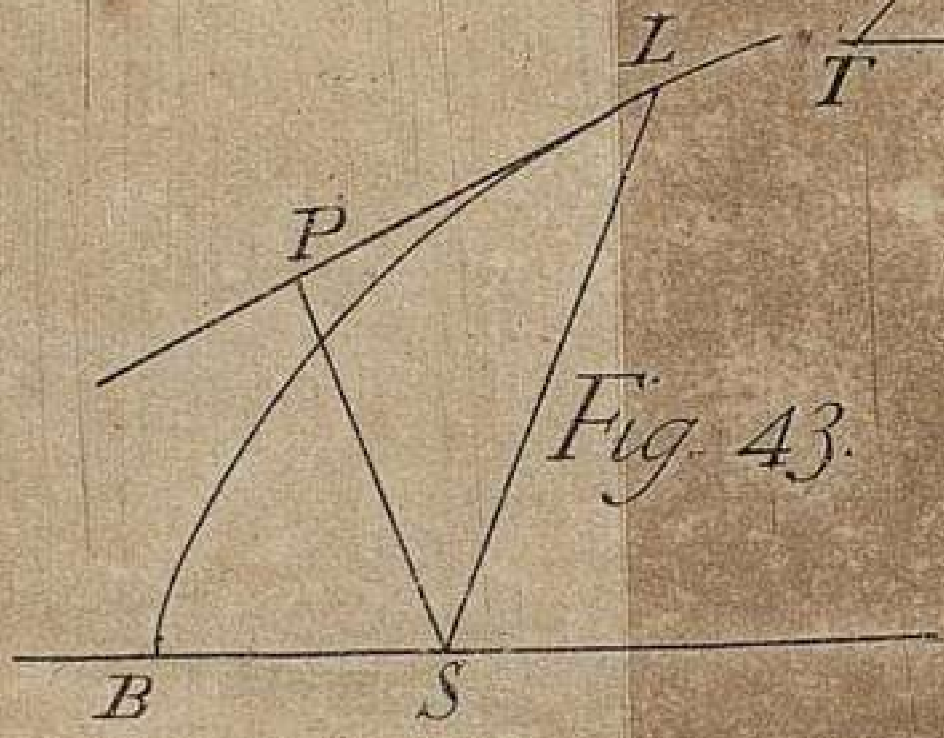


Fig. 43.

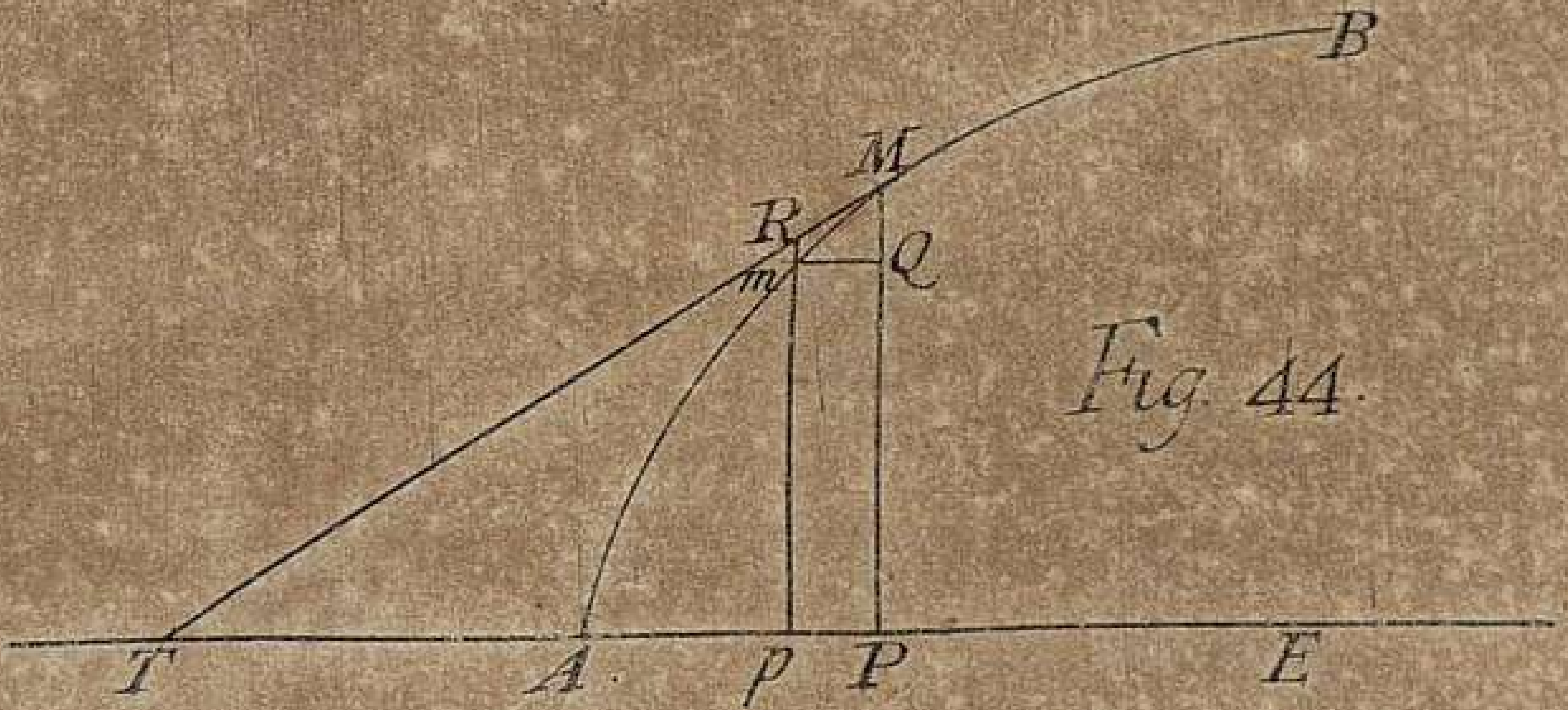


Fig. 44.

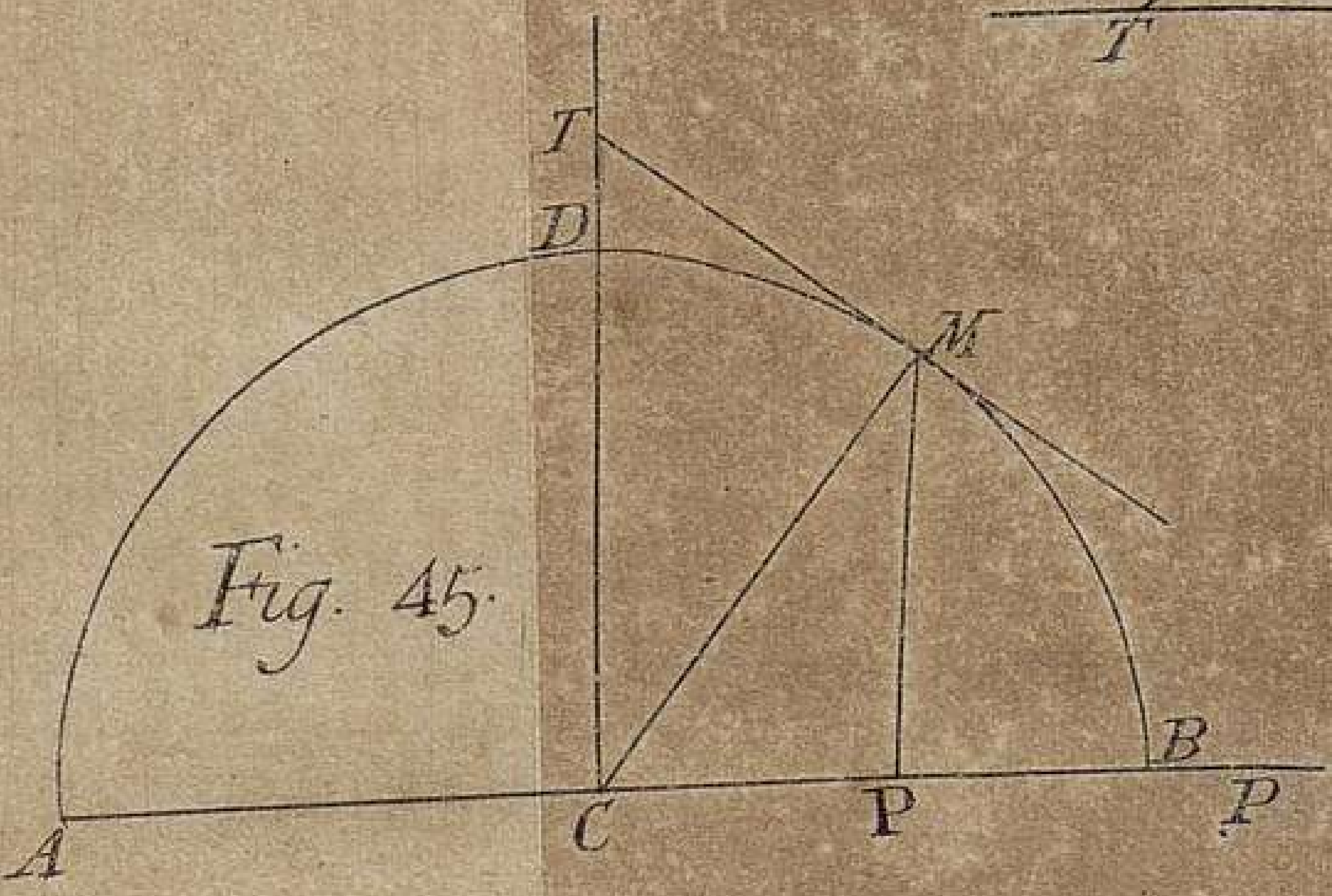


Fig. 45.

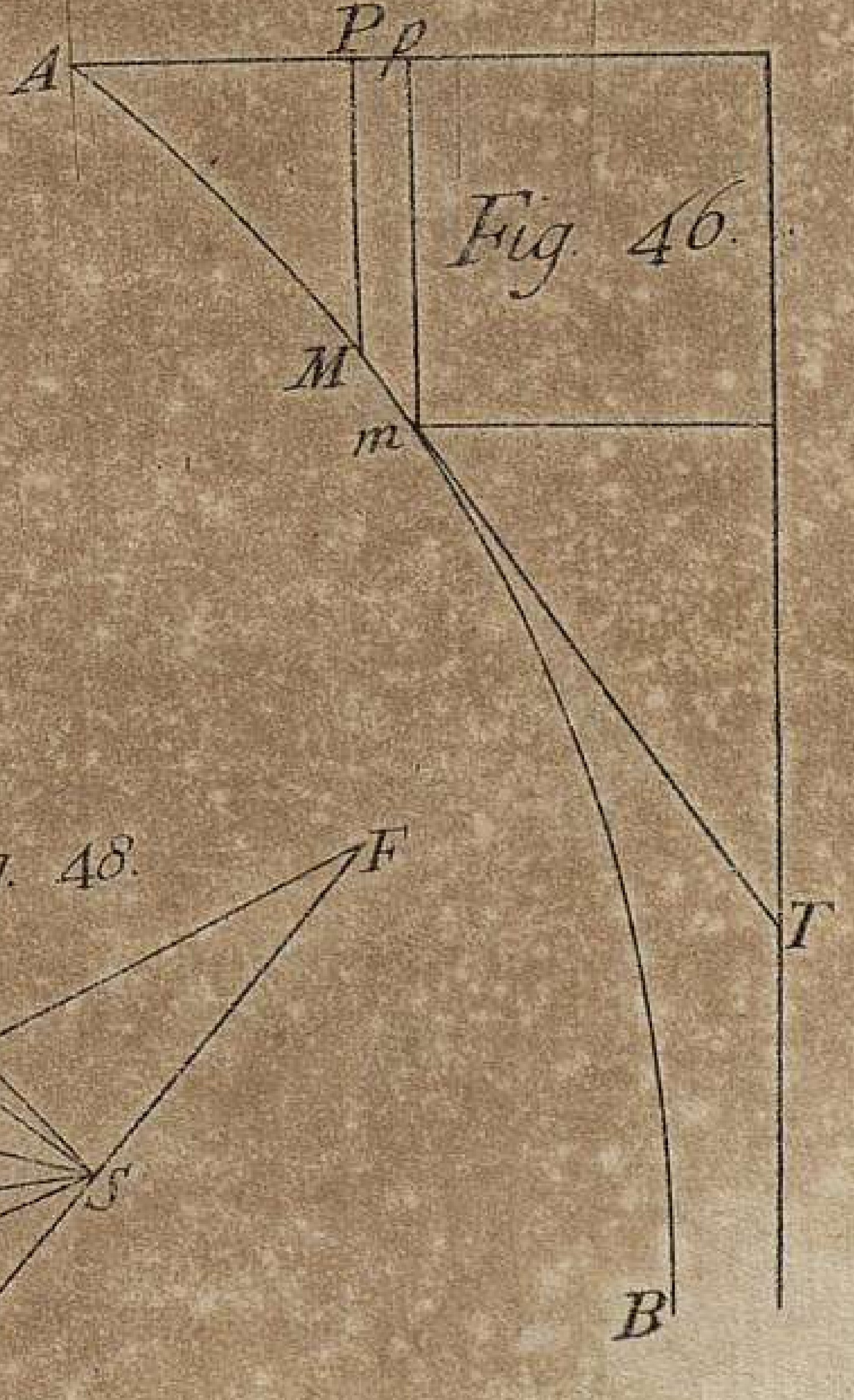


Fig. 46.

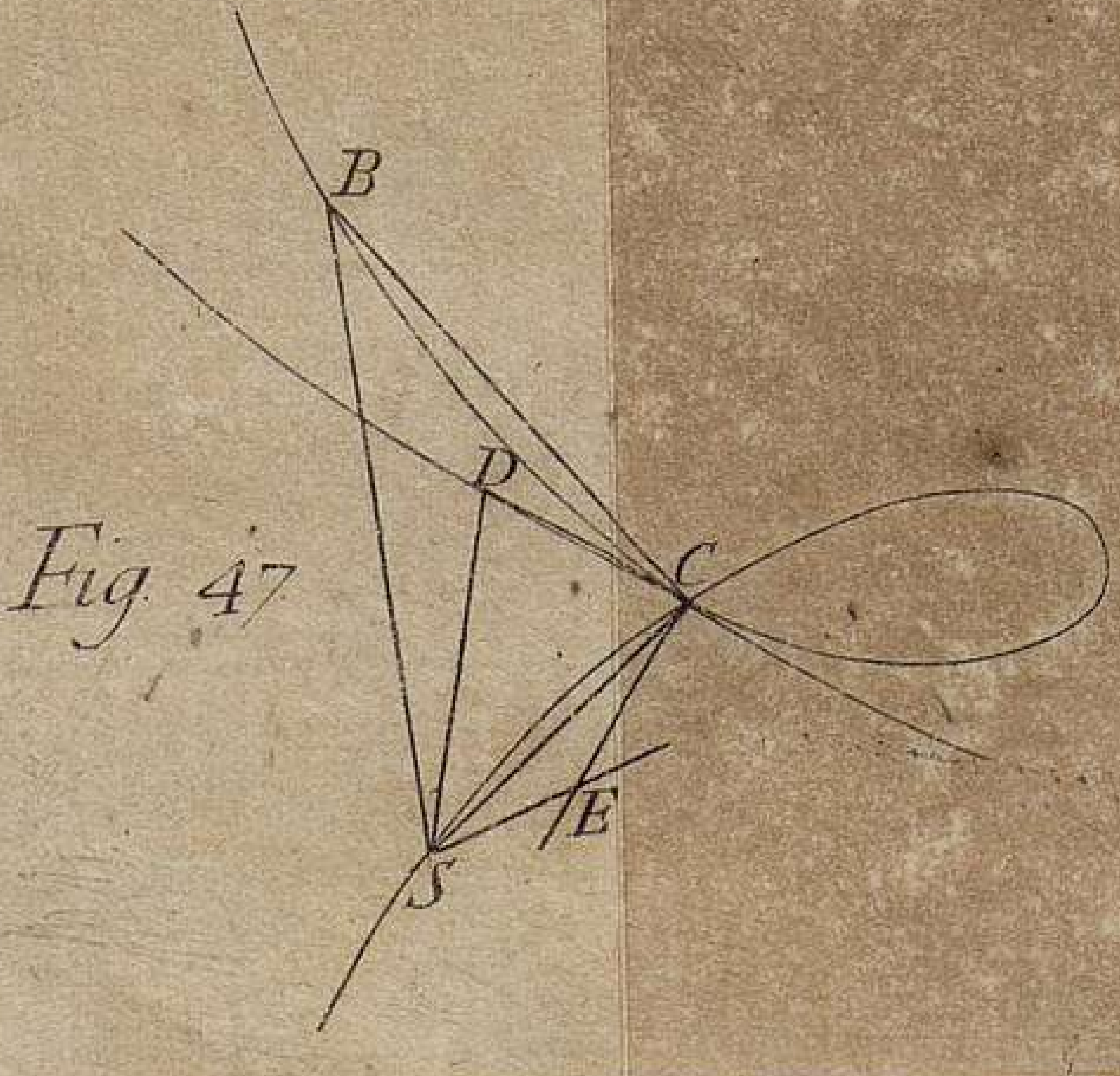


Fig. 47.

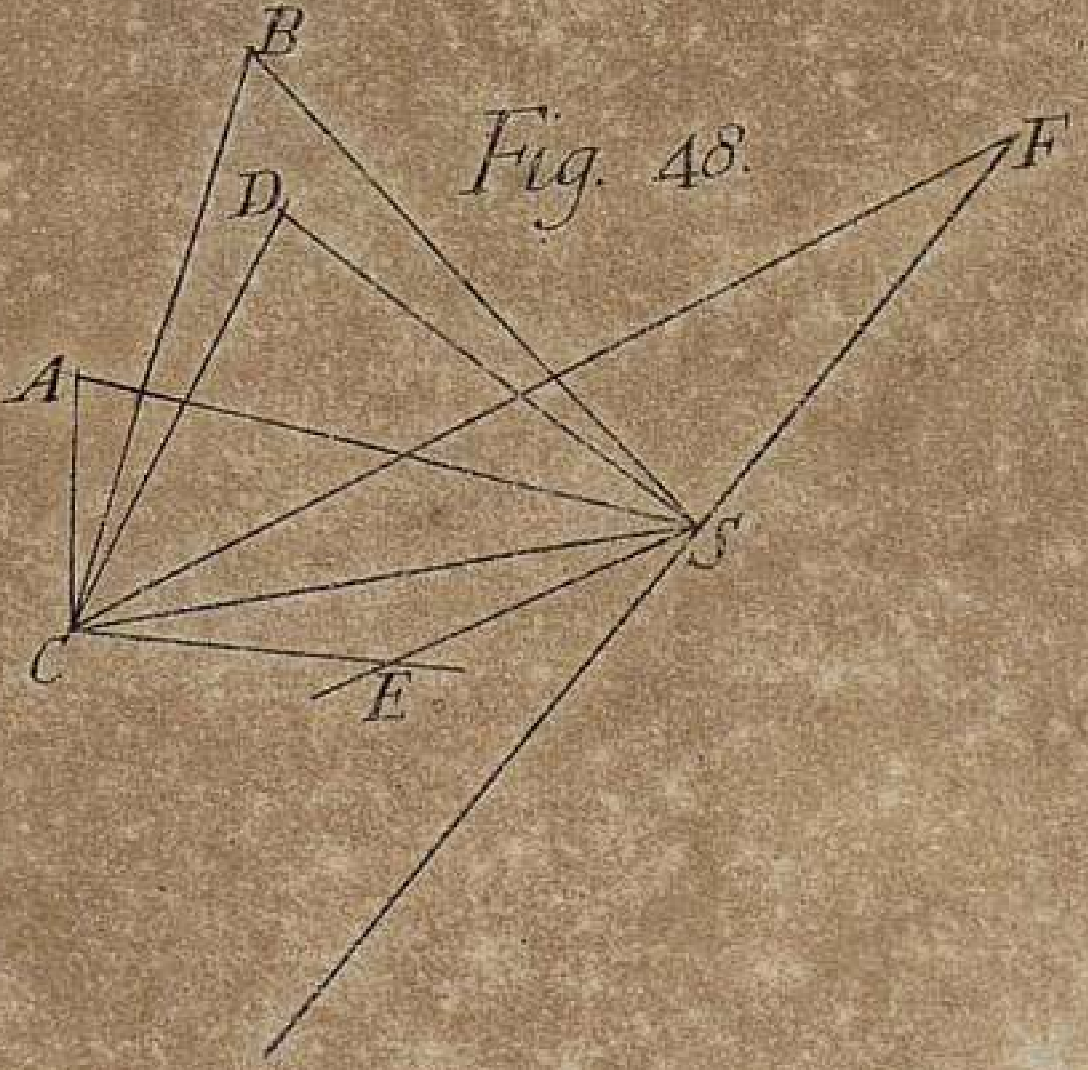


Fig. 48.

Prop. XXVII. Problema.

Ducere Lineam Ordinis $(2n)$ per puncta data $2n+4$, quorum tria sunt nodi arcuum curvæ (n) in iisdem punctis concurrentium, & quartum similis nodus arcuum $(n-1)$.

Sint ut prius C, S, B (*Fig.* 48.) puncta in quibus arcus concurrere debent quorum numerus (n) sit A punctum ubi concurrunt arcus $(n-1)$ jungantur CS, CB, SB; & circa Polos C, S rotentur anguli BCS, BSC; applicetur concursus crurum CB, SB puncto A & concurrant crura CS, SC in D; applicetur dein concursus crurum CB, SB reliquis punctis datis $(2n)$ atque interea concurrant CS, SC in totidem punctis; per quæ & punctum D ex *Prop.* 26. ducatur Linea Ordinis (n) habens arcus $(n-1)$ concurrentes in D; & si concursus crurum CS, SC semper ducatur per hanc Lineam, concursus crurum CB, SB describet Lineam quæsitam. Una duntaxat duci potest curva quæ huic Problemati satisfaciet, omniaque ejus puncta reliqua præter quatuor C, S, B, A simplicia esse necesse est per *Corol.* 5. *Lemmatis* 3.

Universaliter ducenda sit Linea Ordinis $(2n)$ per puncta C, S, B, A, &c. quot ad Lineam determinandam sufficiunt; in C concurrere oporteat arcus (t) in S arcus (g) in B arcus $(t+g-n)$ in A arcus (r) in E arcus (m) &c. Jungantur CS, SB, CB, & circa Polos C, S rotentur anguli BCS, BSC, ac concursus crurum CB, SB applicetur punctis A, E dein reliquis datis dum interea concurrunt crura CS, SC in D, F & totidem aliis. Per quæ puncta & C, S, D, F ducatur Linea Ordinis (n) cujus puncta $(n-t)$ sint in C, $(n-g)$ in S, puncta (r) in D & (m) in F, si modo isthuc fieri possit; & si concursus crurum CS, SC ducatur per hanc curvam concursus crurum CB, SB describet Lineam quæsitam.

Ex *Propositionibus Partis* 1. Hujusmodi quoque descriptiones deduci possunt, cum vero curvarum constructiones per puncta quævis proposita, quas adhuc assequi potuimus, non sint satis generales, his ulterius prosequendis non immorabimur.

FINIS.

CORRIGENDA.

PAG. 1. lin. ult. pro QCA lege QCG. Pag. 4. lin. 21. lege *ex* S *in* AE. Pag. 5. lin. 28. pro QSK lege QSH. Pag. 8. lin. 14. pro LR lege HR. Lin. 15. pro EHR lege AHR. Pag. 22. lin. 2, 3 & 4. pro mk lege mk^2. Lin. 4. pro $i^2k - 2hk^2$ lege $i^2 - 2hk$ & post x^2 scribe &c. P. 23. Lin. 13. pro *Casus* 1. lege *Casus* 2. Lin. 22. lege *perpendiculares in* CS. Pag. 24. Lin. penult. pro $2c \pm a$ lege $2c \times \overline{c \pm a}$. Pag. 27. Lin. 23. pro FB lege FD. Pag. 29. Lin. 23. pro QK lege SK. Pag. 30. Lin. 21. pro PHC lege QHC. Pag. 31. Lin. 6. pro CR lege CK. Pag. 36. Lin. 5. post DQ lege *Concursus*. Pag. 38. Lin. 3. pro C & R lege C & Z. Pag. 48. Lin. 26. pro SNI, lege CNL. Pag. 55. Lin. 6. pro CT lege KT. Lin. 8. pro h lege n. Pag. 63. Lin. 18. pro PTC lege PTB. Pag. 66. Lin. 20. pro QCP lege KCP. Pag. 69. Lin. 14. pro K lege R. Pag. 71. Lin. 6. pro 68 lege 72. Lin. 11. pro CQ lege BQ. Pag. 77. Lin. 9. lege *anguli* NS*n*, S*nr*, *nrt*, &c. & *anguli* MC*m*, C*ml*. Pag. 80. Lin. 29. lege *(Fig. 1. n. 2.)* Pag. 83. Lin. 27. pro AQB lege AQG. Pag. 91. Lin. 25. pro CSQ lege CQ. Pag. 96. Lin. 30. pro BLC lege BL*l*. Pag. 98. Lin. 12. pro SN lege FN. Pag. 99. Lin. 21. pro SLE lege PLE. Pag. 101. Lin. 6. pro $AC = e$, $AE = d$, lege $AC = c$, $CE = d$. Lin. 8. pro $+by$ lege $-by$. Lin. 9. pro $x =$ lege $z =$. Pag. 108. Lin. 14. lege *summæ vel differentiæ*. Pag. 115. Lin. 3. scribe *Fig.* 28. Pag. 116. Lin. 12. pro *Prop.* 5. lege *Prop.* 16. Pag. 121. Lin. 28. pro 31 lege 29. Pag. 122. Lin. 17. pro L*o* lege *lo*.

GEOMETRIA
ORGANICA