PROGRAMA

DE

GEOMETRÍA ELEMENTAL.

1883-84.

CÁCERES: 1884.
Imp. de Nicolás María Jiménez,
Portal Llano, número 19.

PROGRAMA

DE GEOMETRÍA ELEMENTAL.

LECCION 1.ª

Qué es Geometría.—Qué es extensión.—En cuántas partes se divide la Geometría, y de qué se ocupa cada una de ellas.—Qué es cuerpo.—A qué se da el nombre de dimensiones de un cuerpo.—Cuántas son éstas.—Cómo se llaman los límites de los cuerpos.—Cuántas son las dimensiones de las superficies.—Qué es la intersección de dos superficies.—Qué dimensiones tiene esta intersección.—Definiciones de la línea recta, quebrada, curva y mixta.—Límite de las líneas.—Dimensiones de este límite.—Definición de las superficies plana, quebrada, curva y mixta.—Qué son líneas de doble curvatura.

LECCION 2.ª

Qué es distancia entre dos puntos.—Demostrar que si dos rectas tienen dos puntos comunes, coinciden en toda su extensión.—Qué condiciones determinan la posición de una recta.—Cómo se mide una recta limitada.—Cómo se halla la mayor medida común de dos rectas dadas.

LECCION 3.ª

Qué posición puede tener una recta respecto á otra situada en un plano.—Qué es ángulo.—A qué se llaman lados, vértice y bisectriz de un ángulo.—En qué se dividen los ángulos.—De qué depende la magnitud de un ángulo.—Qué son ángulos adyacentes.—Límites del valor de un ángulo.—Demostrar que todos los ángulos rectos son iguales.—Qué son ángulos suplementarios y qué complementarios.—Demostrar que los ángulos adyacentes son suplementarios.—Valor de la suma de los ángulos formados alrededor de un punto, y su demostración.

LECCION 4.ª

Ángulos opuestos por el vértice.—Demostrar que por un punto de una recta, en un plano, se le puede levantar una sola perpendicular: y que por un punto fuera de una recta, en un plano, se le puede bajar una sola perpendicular.

LECCION 5.ª

Demostrar que la perpendicular bajada desde un punto de un lado de un ángulo agudo cae dentro del ángulo: si este es obtuso cae fuera; y si recto coincide dicha perpendicular con el lado.—Demostrar que si desde un punto fuera de una recta se le trazan una perpendicular y varias oblícuas, la perpendicular es más corta que las oblicuas: las oblícuas equidistantes del pie de la perpendicular son iguales: la que más se separa será mayor.—Demostrar que todo punto de la perpendicular levantado á una recta en su punto medio equidista de los extremos: que todo punto que no está en esta perpendicular no equidista de losextremos.

LECCION 6.ª

Qué es distancia de un punto á una recta.—Demostrar que todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del mismo.—Que si dicho punto está fuera de la bisectriz, no equidista de los lados del ángulo.

LECCION 7.ª

Rectas paralelas.—Por un punte fuera de una recta sólo se le puede trazar una paralela.—Si una recta corta á una de dos paralelas, cortará á la otra: demostración.—Dos rectas paralelas ó una tercera, son paralelas: demostración.—Angulos que forma una recta que corta á otras dos, y nombre de estos ángulos.

LECCION 8.ª

Demostrar que los ángulos alternos son iguales; que los correspondientes también lo son, y que los internos del mismo lado de la secante son suplementarios, cuando las rectas son paralelas.—Teoremas recíprocos de los anteriores.—Demostrar que las partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.

LECCION 9.ª

Demostrar que dos ángulos que tienen sus lados paralelos son iguales ó suplementarios; y que dos ángulos cuyos lados son respectivamente perpendiculares también son iguales ó suplementarios.

LECCION 10.

Qué es circunferencia; radios, diámetro, arcos, cuerdas, tangentes y secantes.—Demostrar que una recta no puede cortar á una circunferencia más que en dos puntos.—Condiciones que determinan la posición de una circunferencia.—Demostrar que el diámetro es mayor que una cuerda cualquiera, y que divide á la circunferencia en dos arcos iguales.—Nombre que se da á estos dos arcos iguales.—Nombre que reciben los arcos cortados por los diámetros perpendiculares.

LECCION 11.

Demostrar: 1.º Que el rádio trazado al punto de contacto es perpendicular á la tangente. 2.º Que todo diámetro perpendicular á una cuerda divide á ésta y á sus dos arcos correspondientes en partes iguales. 3.º Que los arcos interceptados por cuerdas paralelas son iguales. — Demostrar que en una circunferencia ó en circunferencias iguales, á arcos iguales corresponden cuerdas iguales, y á mayor arco mayor cuerda.—Que las cuerdas iguales equidistan del centro, y la mayor dista menos.

LECCION 12.

Posiciones que pueden tener dos circunferencias situadas en un plano.—Nombres que se dan á estas circunferencias, según estas posiciones.—Demostrar que si dos circunferencias tionen un punto común, fuera de la línea de los centros, serán secantes.—Que la cuerda común á dos circunferencias secantes es perpendicular á la recta que une sus centros.—Demostrar en qué casos la línea de los centros es mayor, ó igual á la suma de los rádios; y cuándo es igual ó menor que su diferencia.

LECCION 13.

Líneas trigonométricas de un arco.—Interpretación de los signos más y menos aplicados á los arcos. y lineas trigonométricas.—Variaciones que experimentan las líneas trigonométricas con las que sufren los arcos correspondientes.

LECCION 14.

Demostrar que la longitud del seno de un arco es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo.—Que los senos, tangentes y cotangentes de dos arcos iguales y de signo contrario, son iguales, pero de distinto signo; y los cosenos iguales y del mismo signo.—Que los cosenos tangentes y cotangentes de dos arcos suplementarios son iguales y de signo contrario; y los senos iguales y del mismo signo.

LECCION 15.

Qué se entiende por arco correspondiente á un ángulo.—Demostrar que si dos ángulos son iguales, también lo son sus arcos correspondientes.—Que los ángulos son proporcionales á sus arcos correspondientes.—Que la razón entre cualquiera de las líneas trigonométricas del arco correspondiente á un ángulo y el rádio, con que está trazado, es constante.

LECCION 16.

Demostrar que si dos ángulos son iguales, también lo serán sus líneas trigonométricas y recíprocamente.—Hallar la expresión general de todos los arcos que tienen el mismo seno, el mismo coseno, la misma tangente y la misma cotangente.

LECCION 17.

Relación entre las líneas trigonométricas del mismo arco.—Hallar el seno, coseno, tangente y cotangente de un arco en función de cualquiera de estas líneas, siendo el rádio la unidad.

LECCION 18.

Restablecer el rádio en una fórmula trigonométrica.—Dados los senos y cosenos de dos arcos, hallar los senos y cosenos de la suma y diferencia de dichos arcos.—Dadas las tangentes y cotangentes de dos arcos, hallar la tangente y cotangente de la suma y diferencia de los mismos.

LECCION 19.

Dadas las líneas trigonométricas de un arco, hallar las del arco duplo, y las de su mitad.

LECCION 20.

Convertir la suma ó diferencia de dos senos ó dos cosenos en producto.—Transformar en producto la expresión $M \pm N$, siendo M y N cantidades positivas.

LECCION 21.

Nombres que toman los ángulos según su posición con respecto á una circunferencia.—Medida de los ángulos inscriptos.—Medida de los ángulos interiores.—Medida de los exteriores.

LECCION 22.

Polígonos: lados, vértice, diagonal, perímetro y contorno de un polígono.—Polígonos convexos y cóncavos.—Sus diferencias.—Nombre de los polígonos según el número de sus lados ó de sus ángulos.—Polígonos regulares é irregulares.—Ángulo externo de un polígono.

LECCION 23.

Suma de los ángulos internos y de los externos de un polígono.—Triángulos.—Su división con relación á sus lados y á sus ángulos.—Suma de los ángulos de un triángulo.—A qué es igual un ángulo externo de un triángulo.—Demostrar que en todo triángulo un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia de éstos.

LECCION 24.

Demostrar que en todo triángulo el cuadrado de un lado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de éstos multiplicado por el coseno del ángulo opuesto al primero.—Demostrar que los lados de un triángulo son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.

LECCION 25.

Demostrar que la suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia, como la tangente de la semi-suma de los ángulos opuestos es á la tangente de la semi-diferencia de los mismos.

LECCION 26.

Demostrar que en todo triángulo rectángulo un cateto es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al cateto ó por el coseno del ángulo comprendido. También demostrar que es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero.

LECCION 27.

Demostrar que en todo triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales.—Que á mayor lado se opone mayor ángulo.—Que si tienen dos triángulos dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido por los dos del uno es mayor que el formado por los dos del otro, el tercer lado del primero será mayor que el tercer lado del segundo.—Teoremas recíprocos de los tres anteriores.

LECCION 28.

Cuadriláteros.—Nombres que se dan á los cuadriláteros, según la posición y magnitud respectiva de sus lados y ángulos.—Suma de los ángulos de un cuadrilátero.—Bases y altura de un paralelógramo.—Demostrar que la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, es paralela á las bases é igual á la semi-suma de éstas.

LECCION 29.

Demostrar que en todo paralelógramo los lados y ángulos opuestos son respectivamente iguales.— Que si los lados de un cuadrilátero son iguales y paralelos, será paralelógramo.—Que las diagonales de un paralelógramo se cortan recíprocamente en partes iguales.

LECCION 30.

Demostrar que si un cuadrilátero tiene dos lados iguales y paralelos, ó que si los ángulos opuestos son iguales, el cuadrilátero será paralelógramo.—Que las diagonales del rombo son perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos.—Y que las del rectángulo son iguales.

LECCION 31.

Polígonos semejantes; lados y ángulos homólogos.—Demostrar que si por un punto de uno de los lados de un triángulo se traza una paralela al otro lado, el triángulo parcial que resulta es semejante al total.

LECCION 32.

Casos de semejanza de los triángulos.—Su demostración.—Casos de semejanza de los triángulos rectángulos y su demostración.—Demostrar que si dos polígonos se pueden descomponer en el mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, serán semejantes.—Recíproco de este teorema.

LECCION 33.

Casos de semejanza de los polígonos.—Puntos y rectas homólogas de los mismos.—Demostrar que en los polígonos semejantes, los lados homólogos son proporcionales á los perímetros y rectas homólogas.—Que en los triángulos semejantes las bases son proporcionales á las alturas.—Que toda paralela á uno de los lados de un triángulo, divide á los otros dos en partes proporcionales.

LECCION 34.

Demostrar que si se trazan varias paralelas á uno de los lados de un triángulo, las partes, interceptadas por ellas, en los otros dos lados, son respectivamente proporcionales.—Que la bisectriz de un ángulo de un triángulo, divide al lado opuesto en partes proporcionales á los otros dos lados.

LECCION 35.

Demostrar que si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo se traza una perpendicular á la hipotenusa, esta es medio proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa. —Que cada cateto es medio proporcionar entre la hipotenusa y el segmento adyacente.—Que los cuadrados de los catetos son como los segmentos de la hipotenusa, y que el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.

LECCION 36.

Demostrar que si desde un punto de la circunferencia se baja una perpendicular al diámetro, ésta es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.—Que toda cuerda trazada por uno de los extremos del diámetro, es media proporcional entre este y el segmento adyacente.—Que dos cuerdas de una misma circunferencia se cortan en partes recíprocamente proporcionales.—Que si desde un punto fuera de una circunferencia se trazan dos secantes, que terminen en el segundo punto de intercepción, son inversamente proporcionales á sus segmentos externos.—Que si desde un punto fuera de una circuferencia se trazan una tangente y una secante, aquella es media proporcional entre la secante y su segmento externo.

LECCION 37.

Cuando se dice que dos polígonos son iguales?—Demostrar que dos polígonos semejantes serán iguales si un lado del uno es igual á su homólogo del otro.—Casos de igualdad de los polígonos y su demostración.

LECCION 38.

Casos de igualdad de los triángulos y de los parerelógramos: su demostración.

LECCION 39.

Cuando se dice que un polígono está inscripto ó circunscripto á una circunferencia; y cuando ésta está circunscripta ó inscripta en aquel.—Demostrar que todo triángulo puede inscribirse y circunscribirse en una circunferencia: que si una circunferencia se divide en partes iguales y se unen consecutivamente los puntos de división por rectas, el polígono que resulta será regular.—Que si una circunferencia se divide del mismo modo y se trazan por los puntos de división tangentes á la misma, el polígono circunscripto que resulte será también regular.

LECCION 40.

Demostrar que todo polígono regular puede inscribirse y circunscribirse á una circunferencia, y que los polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.—Como puede considerarse un polígono de infinito número de lados infinitamente pequeños.

LECCION 41.

Relación entre el lado del exágono regular inscripto y el radio: entre el lado del cuadrado inscripto ó circunscripto y el radio: entre el lado del triángulo equilátero inscripto y el radio, y entre éste y el lado del decágono regular inscripto.

LECCION 42.

Determinar la razón de la circunferencia al diámetro.—Cómo se acostumbra á representar esta relación.—Demostrar que dos circunferencias son proporcionales á sus radios y á sus diámetros.

LECCION 43.

Qué es área de una superficie.—Area del rectángulo, del paraleligramo y del triángulo; su demostración.

LECCION 44.

Area del trapecio y de los polígonos regulares: su demostración.—Cómo se halla el área de un polígono irregular.

LECCION 45.

Qué es circulo, sector circular, segmento de circulo, corona y trapecio circular.—Areas del circulo, del sector circular, del segmento, de la corona y del trapecio circular.

LECCION 46.

Demostrar que las áreas de dos triángulos, que tienen un ángulo igual, son como los productos de los lados que forman dicho ángulo.—Que las áreas de los paralelógramos y las de los triángulos, son como los productos de sus bases por sus alturas.—Que si son semejantes, son como los cuadrados de sus bases, alturas y rectas homólogas.—Que en esta misma relación están las áreas de los polígonos semejantes, con sus lados y rectas homólogas.

LECCION 47.

Trazar por un punto una perpendicular á una recta dada.—dividir una recta dada en dos partes iguales por medio de una perpendicular á la misma.—Levantar una perpendicular, á una recta, que no se puede prolongar, en su extremo.

LECCION 48.

Por un punto de una recta ó que esté fuera de ella, trazar otra recta que forme con la primera un ángulo dado.—Trazar la bisectriz de un ángulo.—Dado un punto fuera de una recta trazarle por él una paralela.

LECCION 49.

Hacer pasar por tres puntos, dados que no estén en línea recta, una circunferencia.—Por un punto dado, en el plano de uua circunferencia, trazar una tangente á dicha circunferencia.—Describir una circunferencia tangente á una recta dada, en un punto dado, y que pase además por otro punto.

LECCION 50.

Describir sobre una recta dada un arco capaz de un ángulo dado.—Dado un arco, hallar el centro de la circunferencia correspondiente al mismo.—Dada una circunferencia trazar en un punto dado en ella una circunferencia tangente, cuyo radio sea conocido.

LECCION 51.

Dividir una recta dada en cierto número de partes iguales.—Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas.—Hallar una media proporcional á dos rectas dadas.—Cuando se dice que una recta está dividida en media y extrema razón.

LECCION 52.

Dividir una recta en media y extrema razón.—Construir un triángulo dados: 1.°, sus tres lados; 2.°, dos lados y el ángulo comprendido; 3.°, un lado y los ángulos adyacentes al mismo.

LECCION 53.

Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.—Construir un paralelógramo conociendo dos lados y el ángulo comprendido.—Construir un polígono igual á otro dado.

LECCION 54.

Construir un triángulo semejante á otro dado, sobre una recta dada, considerada como lado homólogo de uno de los del triángulo.—Construir un polígono semejante á otro dado, sobre una recta dada, considerada como lado homólogo de uno de los del polígono conocido.—Dado un polígono construir otro semejante á él y cuyos áreas estén en la relación de m: n.

LECCION 55.

Puntos simétricos con relación á otro.—Rectas simétricas con relación á un punto.—Puntos simétricos con relación á una recta.—Rectas simétricas con relación á otra.—Puntos y rectas simétricas con relación á un plano.—Constrir un polígono simétrico de otro dado.

LECCION 56.

Inscribir un cuadrado, un exágono regular, un triángulo equilátero y un decágono regular, en una circunferencia dada.

LECCION 57.

Inscribir un pentágono y un pentadecágano regulares en una circunferencia dada.—Polígonos equivalentes.—Reducir un polígono á otro equivalente que tenga un lado menos.

LECCION 58.

Transformar un triángulo ó un polígono, en cuadrado equivalente.—Construir un cuadrado equivalente á la suma, ó á la diferencia de otros dos dados.

LECCION 59.

Construír un polígono semejante á otros dos dados semejantes y cuya área sea igual á la suma ó diferencia de las de estos.—Hallar un círculo cuya área sea igual á la suma ó diferencia de las de otros dos dados.

LECCION 60.

Por un punto trazar á dos paralelas una secante tal, que la parte comprendida por ellas sea igual á una recta dada.—Hallar sobre una recta dada un punto tal, que las rectas trazadas desde este punto á otros dos dados, situados al mismo lado de la recta, forman con ésta ángulos iguales.—Dadas dos rectas convergentes trazar la bisectriz del ángulo que formarian si se prolongaran.—Hallar el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias que pasan por dos puntos dados.

LECCION 61.

Hallar el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias tangentes á una recta dada, en un punto dado.—Describir una circunferencia tangente á una recta dada, en un punto dado y á la vez tangente á una circunferencia dada.—Describir, con un radio, dado una circunferencia tangente á otras dos dadas.

LECCION 62.

Hallar el lugar geométrico de los vértices de todos los triángulos rectángulos que tienen la misma hipotenusa.—Construir un cuadrado doble de otro dado.—Construir un cuadrado mitad de otro dado.—Hallar un círculo que sea doble ó mitad de otro dado.

LECCION 63.

Demostrar que la longitud de todo arco, menor que un cuadrante es mayor que el seno y menor que la tangente de dicho arco.—Demostrar que el seno de un arco, menor que un cuadrante, es mayor que la diferencia entre el arco y la cuarta parte del cubo del mismo.

LECCION 64.

Determinar el seno del arco de un minuto.—Calcular el coseno del mismo arco.—Construcción de las tablas trigonométricas.

LECCION 65.

Resolver un triángulo cuando se conocen, 1.º: sus tres lados, 2.º: dos lados y el ángulo comprendido.

LECCION 66.

Resolver un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos; ó un lado y dos ángulos.

LECCION 67.

Resolver un triángulo rectángulo dado los dos catetos, ó un cateto y la hipotenusa, ó un cateto y un ángulo agudo ó la hipotenusa y un ángulo agudo.

LECCION 68.

Dado un lado de un polígono regular inscripto hallar el del polígono regular inscripto de doble número de lados.—Dado el lado de un polígono regular inscripto hallar el del regular circunscripto del mismo número de lados.

LECCION 69.

Dados los perímetros de dos polígonos regulares del mismo número de lados, uno inscripto y otro circunscripto, hallar los perímetros de los polígonos inscripto y circunscripto de doble número de lados.—Hallar la razón de la circunsferencia al diámetro.

LECCION 70.

Condiciones que determinan la posición de un plano; y su demostración.—Demostrar que si por dos rectas paralelas se hacen pasar dos planos que se corten, su intersección será paralela á las anteriores.—Demostrar que dos ángulos, que tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales ó suplementarios.

LECCION 71.

Demostrar que si una recta es perpendicular á otros dos que se cruzan por su pié en un plano, será perpendicular á toda recta que pase por su pié en el mismo plano:—Que todos los perpendiculares á una recta en un punto se hallan en un mismo plano.

LECCION 72.

Cuando se dice que una recta es perpendicular á un plano. —Demostrar que por un punto fuera de un plano no puede pasar mas que una recta perpendicular el plano; que por un punto de un plano solo se le puede levantar una perpendicular al mismo.

LECCION 73.

Demostrar que si dos rectas son paralelas, todo plano perpendicular á una de ellas lo será tambien á la otra:—que por un punto del espacio solo se puede trazar un plano perpendicular á una recta:—que por un punto de una recta no se le puede levantar mas que un plano perpendicular.

LECCION 74.

Demostrar que si desde el pié de una perpendicular á un plano se traza otra perpendicular á una recta situada en el plano, y se une el pié de esta perpendicular con un punto cualquiera de la primera, la recta que resulte será perpendicular á la situada en el plano.—Demostrar que si una recta es paralela á otra situada en el plano, será paralela al plano. —Que si desde un punto fuera de un plano se bajan á él una perpendicular y varias oblícuas la primera será la mas corta; las oblícuas que se aparten igualmente del pié de la perpendicular serán iguales, y mayor la que mas se separe de dicho pié.

LECCION 75.

Qué es la proyección de un punto sobre un plano: qué la de una recta sobre un plano.—Demostrar que el ángulo que forma una recta con su proyección en un plano, es el menor que puede formar dicha recta con cualquiera otra situada en el plano y que pase por el pié de la primera.

LECCION 76.

Angulos diedros.—Cuántos son y qué nombres reciben los ángulos formados por un plano que corte á otros dos; si estos son paralelos, qué ángulos son iguales y cuáles suplementarios. —Qué es ángulo rectilíneo correspondiente á un diedro.— Demostrar que si dos ángulos diedros son iguales tambien lo serán sus ángulos rectilíneos: que los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos correspondientes.

LECCION 77.

Demostrar que si una recta es perpendicular á un plano, todo plano, que pase por ella, será perpendicular al primero; que si dos planos son perpendiculares entre sí, toda recta sítuada en uno de ellos y perpendicular á la intersección, será perpendicular al otro.—Que si dos planos son perpendiculares á un tercero, la intersección comun tambien lo será.—Que por una recta oblícua ó paralela á un plano solo se puede trazar otra perpendicular al primero.

LECCION 78.

Demostrar que si una recta es perpendicular á un plano, su proyección sobre otro cualquiera, que corte al primero, es perpendicular á la intersección comun.—Que si desde un punto cualquiera se trazan á las dos caras del diedro dos rectas perpendiculares, el ángulo formado por ellas y el diedro son suplementarios.—Que todo punto del plano bisector de un diedro equidista de las dos caras de este.

LECCION 79.

Demostrar.—Que dos planos perpendiculares á una recta son paralelos.—Que las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero son paralelas.—Que si una recta es perpendicular á uno de dos planos paralelos, lo será al otro.—Que por una recta paralela á un plano, solo puede pasar otro, que sea paralelo al primero.

LECCION 80.

Demostrar.—Que dos planos paralelos tienen la misma posición respecto de un tercero que los corte.—Que dos planos paralelos á un tercero, son paralelos entre sí.—Que el plano que determinan dos rectas que se cortan, paralelas á otras dos que tambien se cortan, es paralelo al determinado por las últimas.—Que si tres planos paralelos cortan á dos rectas, las cortan en partes proporcionales.

LECCION 81.

Cómo se puede considerar engendrada una superficie curva.—A que se dá el nombre de generatriz y de directriz.—Demostrar que todas las tangentes á las diferentes curvas, que se pueden trazar á una superficie curva, en un mismo punto de ella, están situadas en el mismo plano.—Qué son superficies de revolución: eje de una superficie de revolución.—Superficies regladas.

LECCION 82.

Demostrar que en toda superficie de revolución, los diferentes puntos de la generatriz, describen circunferencias, cuyos planos son perpendiculares al eje, y cuyos centros se encuentran en este.—Paralelos; meridianos.—Demostrar que todos los meridianos de una superficie de revolución son iguales.

LECCION 83.

Demostrar que el plano tangente á una superficie de revolución es perpendicular al plano meridiano del punto de contacto.—Superficies desorrollables y alabeadas.—Superficie cónica de revolución: vértice, lado, base del cono de revolución.—Demostrar que la intersección de una superficie cónica de revolución con un plano perpendicular al eje, es una circunferencia.—A que curvas dá origen la intersección de una superficie cónica de revolución por un plano, oblícuo al eje y que corte á todas las generatrices; paralelo al eje; y paralelo á una generatriz.

LECCION 84.

Plano tangente á una superficie cónica de revolución.—Qué rectas determinan este plano.—Que es el desarrollo sobre un plano de una superficie cónica de revolución, cortada por un plano perpendicular al eje.—Cuál es su radio.—A qué es igual su base.—Definición de la superficie cilíndrica de revolución: ejes, base, altura, lado de la superficie cilíndrica de revolución.—Intersección de esta con un plano perpendicular al eje.—Plano tangente á una superficie cilíndrica de revolución.—Qué rectas le determinan.—Desarrollo, sobre un plano, de una superficie cilíndrica de revolución cortada por dos planos perpendiculares al eje.

LECCION 85.

Que es superficie esférica.—Radios, diámetros, eje, polos.—Cuántos puntos, que no estén en el mismo plano, determinan la posición de una superficie esférica.—A qué curva dá origen la intersección de un plano con una superficie esférica, y donde se halle su centro: demostración.—Circunferencias máximas y mínimas.—Demostrar que los planos de las circunferencias menores ó mínimas iguales equidistan del centro: que el de la menor se aparta mas.—Que todas las circunferencias máximas son iguales; que estas se cortan en partes iguales, y que la intersección de sus planos es un diámetro.

LECCION 86.

Demostrar que por dos puntos de una superficie esférica solo puede pasar un arco de circunferencia máxima, no siendo dichos puntos extremos de un diámetro.—Que todos los arcos de circunferencia máximas trazados, desde uno de los polos, á los diferentes puntos de su circunferencia, son iguales y perpendiculares á ella.

LECCION 87.

Plano tangente á la superficie esférica.—Demostrar que es perpendicular al radio del punto de contacto.—Teorema recíproco del anterior.—Demostrar que la intersección de dos superficies esféricas es una circunferencia, cuyo plano es perpendicular á la línea de los centros, estando el centro de esta en dicha línea.—Demostrar que la mas corta distancia entre dos puntos de una superficie esferica es el arco de circunferencia máxima que pasa por ellos.

LECCION 88.

Qué es ángulo esférico.—Qué es polígono esférico.—Nombres de los polígonos esféricos.—Qué es ángulo poliedro; vertices, aristas, caras y ángulos planos del poliedro.—Cómo se designa un ángulo poliedro.—Angulos triedros.—Demostrar que á todo ángulo poliedro le corresponde un polígono esférico, cuyos lados son las medidas de los ángulos planos del poliedro, y cuyos lados tienen la misma medida que los diedros del poliedro.

LECCION 89.

Triángulos esféricos.—Demostrar que en todo triángulo esférico un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.—Que la suma de los lados de un triángulo es menor que una circunferencia máxima.—Triángulos polares.—Demostrar que si desde los tres vértices de un triángulo esférico, considerados como polos, se describen tre arcos de circunferencia máxima, el triángulo esférico que resulte es polar del primero, y al contrario.—Demostrar que la suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis.—Cuántos ángulos rectos puede tener un triángulo esférico, y nombres que recibe segun el número de aquellos.

LECCION 90.

Demostrar que en todo triángulo esférico el coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos, más el producto de los senos de los mismos por el coseno del ángulo comprendido.—Que en todo triángulo esférico á lados iguales se oponen ángulos iguales y reciprocamente.—Que á mayor lado se opone mayor ángulo y al contrario.—Triángulos esféricos iguales; casos de igualdad y su demostración.

LECCION 91.

Descomponer un polígono esférico en tantos triángulos como lados tiene, ó en tantos como lados tiene menos dos.—Límites de la suma de los ángulos de un polígono esférico.—Demostrar que á todo polígono esférico corresponde otro suplementario.—Igualdad de los polígonos esféricos.

LECCION 92.

Demostrar que en todo ángulo triedro un ángulo plano cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.—Que la suma de los ángulos planos de un ángulo poliedro es menor que cuatro rectos.—Que á todo triedro corresponde otro suplementario, y que la suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos rectos y menor que seis.

LECCION 93.

Demostrar que en todo ángulo triedro á caras iguales se oponen diedros iguales; á mayor cara mayor diedro, y recíprocamente.

LECCION 94.

Casos de igualdad de los ángulos triedros y su demostración. —Descomposición de un ángulo poliedro en ángulos triedros. —Angulos poliedros iguales y simétricos.—Demostrar que si se prolongan en sentido inverso todas las aristas de un ángulo poliedro, resultará otro simétrico del propuesto.

LECCION 95.

Demostrar que el area lateral de un cono es igual á la mitad del producto de la circunferencia de su base por el lado.— Area de un tronco de cono de bases paralelas.—Area total de un cono, y de un tronco de cono de bases paralelas.—Area lateral del cilindro, y area total del mismo: Su demostración.

LECCION 96.

Area de la superficie esférica: su demostración.—Area de un huso esférico y de una zona esférica.—Su demostración.— Demostrar que dos triángulos esféricos simétricos son equivalentes.—Areas de un triángulo y de un polígono esféricos.

LECCION 97.

Demostrar que las areas laterales de dos conos, de dos troncos de cono, ó de dos cilindros semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus lados, rádios de sus bases y alturas.

LECCION 98.

Cuerpos poliedros.—Caras, aristas, ángulos diedros y poliedros de un poliedro.—División de los cuerpos poliedros.— Qué son pirámides.—Vértice, base, altura de una pirámide.— Nombre de las pirámides segun sus bases.—Pirámide regular, apotema.—Descomposición de una pirámide en tetraedros.— Prismas.—Nombresbres que reciben segun sus bases.—Prismas rectos y oblícuos.—Sección recta de un prisma oblícuo.—

Prismas regulares.—Descomposición de un prisma en otros triangulares.—Que es paralelepípedo.—Demostrar que las caras opuestas de un paralelepípedo son iguales.—Demostrar que todo poliedro puede descomponerse en tetraedros.

LECCION 99.

Cuando se dice que dos poliodros son semejantes.—Demostrar que si se corta una pirámide por un plano paralelo á la base, la pirámide parcial, que resulta, es semejante á la total. —Casos de semejanza de los tetraedros, de los prismas y de los poliedros.

LECCION 100.

Casos de igualdad de los tetraedros, de las pirámides de los prismas y de los poliedros.—Poliedros regulares, nombre y número de los poliedros regulares.—Demostrar que no puede haber más poliedros regulares que los dichos.

LECCION 101.

Area lateral de una pirámide regular, de un tronco de pirámide regular de bases paralelas, de un prisma y de un poliedro regular ó irregular.—Demostrar que las areas de los poliedros semejantes, son como los cuadrados de sus aristas y rectas homólogas.

LECCION 102.

Qué es volúmen de un cuerpo.—Demostrar que los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos, que tienen bases iguales son proporcionales á sus alturas.—Que si tienen una dimensión igual, sus volúmenes son como los productos de las otras dos dimensiones.

LECCION 103.

Demostrar que los volúmenes de dos paralelepipedos rectángulos son como los productos de sus tres dimensiones.—Que todo prisma oblícuo es equivalente á un prisma recto, cuya altura es igual á la arista lateral del primero y cuya base es la sección recta de este.—Que el volúmen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.

LECCION 104.

Demostrar que el volúmen de un prisma triangular es igual al producto de su base por su altura.—Que dos prismas de la misma altura y bases equivalentes, son equivalentes; y que dos tetraedros serán equivalentes, si tienen igual altura, y sus bases son equivalentes.

LECCION 105.

Demostrar que el volúmen de todo tetraedro es igual á la tercera parte del volúmen de un prisma de la misma base y altura que las del tetraedro.—Demostrar que el vúlumen de un tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura.—Que el de una pirámide es igual á la tercera parte del producto de su base por su altura.

LECCION 106.

Demostrar que el volúmen de una pirámide troncada, de bases paralelas, es igual al tercio de su altura multiplicada por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas.—Demostrar que todo prisma triangular troncado es equivalente á la suma de tres tetraedros, que tienen por base comun la del prisma, y por vértices los de la otra base del prisma.

LECCION 107.

Demostrar que el volúmen de un cono es igual al tercio del producto de su base por su altura; y que el volúmen de un cono troncado, de bases paralelas, es igual al tercio de su altura, multiplicada por la suma de sus bases, y de una media proporcional entre ellas.

LECCION 108.

Demostrar que el volúmen de un cilindro es ¡igual al producto de su base por su altura.—Demostrar que el volúmen de una esfera es igual al producto de su area por el tercio del radio.—Hallar el volúmen de un segmento esférico.

LECCION 109.

Demostrar que los volúmenes de dos conos semejantes, y de dos cilindros semejantes, son proporcionales á los cubos de los radios de sus bases, á los de sus alturas, y á los de sus lados. —Demostrar que los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus radios.

LECCION 110.

Por un punto del espacio trazar una perpendicular á un plano dado.—Dada una esfera hallar su radio.—Describir una circunferencia máxima que pase por dos puntos dados.—Hallar la mas corta distancia entre dos rectas, que no están en el mismo plano.

LECCION 111.

Por un punto del espacio trazar una paralela á un plano dado; ó un plano paralelo á una recta dada; ó un plano paralelo á otro dado.—Por un punto del espacio trazar un plano perpendicular á otro dado.—Trazar un plano perpendicular á otro, que pase por una recta dada.—Por una recta dada trazar un plano tangente á una esfera.